

Skript SC: Analoge Schaltungstechnik

Kapitel 1: Grundlagen

Vorwort zum 1. Kapitel

Das Kapitel Grundlagen war anfangs das kleinste, mittlerweile gehört es zu den größten dieses Skriptums. Mit der Erfahrung, welche Grundlagen man noch einmal ansprechen sollte, ist dieses Kapitel stetig gewachsen. Diejenigen, welche Themen als redundante Information empfinden, sind gut vorbereitet und mögen die entsprechenden Seiten überspringen.

Regensburg im März 2023, Martin Schubert

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

- 1.1 LZI-Systeme und 4 Grundaxiome der Signalverarbeitung
 - 1.1.1 Zeitinvarianz
 - 1.1.2 Linearität
 - 1.1.3 Kausalität
 - 1.1.4 Stabilität
- 1.2 Zusammenhang von Impuls- und Sprung-Antwort bei LZI-Systemen
- 1.3 Darstellung elektrischer Größen
 - 1.3.1 Mathematische Voraussetzung: komplexe Zahlen
 - 1.3.2 Darstellung elektrischer Größen als komplexe Zahlen
 - 1.3.3 Effektivwerte
 - 1.3.3.1 Ermittlung des Effektivwertes
 - 1.3.3.2 Effektivwerte einiger häufig verwendeter Signalformen
 - 1.3.3.2 Übungen zur Effektivwert-Berechnung
 - 1.3.3 Definition von Bel, Dezibel und Neper
- 1.4 Bode-Diagramme
 - 1.4.1 Mathematische Grundlagen
 - 1.4.2 Pole und Nullstellen in Übertragungsfunktionen
 - 1.4.2.1 Pole im Orts- und Bode-Diagramm
 - 1.4.2.2 Nullstellen im Orts- und Bode-Diagramm
 - 1.4.2.3 Faktorisieren von Übertragungsfunktionen in Pole und Nullstellen
 - 1.4.2.4 Konjugiert-komplexes Nullstellen-Paar auf der $j\omega$ -Achse
 - 1.4.2.4 Konjugiert-komplexes Polpaar auf der $j\omega$ -Achse
 - 1.4.2.6 Inversion der Übertragungsfunktion
 - 1.4.2.6 Äquivalentes Eingangsrauschen als Qualitätskriterium
- 1.5 Großsignal- und Kleinsignal-Rechnungen
 - 1.5.1 Umrechnung von Großsignal- auf Kleinsignal-darstellung
 - 1.5.2 Die Grundsaltungen von Bipolar- und Feldeffekt-Transistoren
 - 1.5.3 Kleinsignal-Modelle für Emitter- und Source-Schaltung
 - 1.5.4 Kleinsignal-Impedanzen für den FET gegen Masse
 - 1.5.5 Kleinsignal-Impedanzen für den BJT gegen Masse
- 1.6 Schaltkreisanalyse: Techniken und Werkzeuge
 - 1.6.1 Kategorisierung der Analysemethoden
 - 1.6.2 Grundlagen einer textuellen Spice - Schaltungsbeschreibung
 - 1.6.3 Spice - Analysen
 - 1.6.3.1 .OP: Arbeitspunkt- (engl. operating point) Berechnung
 - 1.6.3.2 .DC: Statische Großsignal-Analyse
 - 1.6.3.3 .TRAN: Dynamische Großsignal-, Zeitbereichs- (engl. Time Domain) Analyse
- 1.7 Elektrische Symbole und Zeichen
 - 1.7.1 Quellen
 - 1.7.1.1 .Normierte Symbole für Quellen
 - 1.7.1.2 Andere übliche Symbole für Quellen
 - 1.7.2 Halbleiter-Bauelemente
 - 1.7.2.1 .Transistorsymbole, mit denen wir arbeiten
 - 1.7.2.2 Varianten: ähnliche Transistorsymbole
 - 1.7.2.3 Symbole mit mehreren Transistoren
- 1.8 Spannung, Strom und Ladung
 - 1.8.1 Kirchhoff'sche Maschenregel (Lit.: KVL: Kirchhoff's Voltage Law)
 - 1.8.2 Kirchhoff'sche Knotenregel (Lit.: KCL: Kirchhoff's Current Law)
 - 1.8.3 Ströme und Ladungen eines Bauelementes
 - 1.8.4 Ströme und Ladungen einer Schaltung
 - 1.8.5 Spannungs- und Stromteiler
 - 1.8.5.1 .Formeln zur Berechnung von Spannungs- und Stromteilern
 - 1.8.5.2 Anwendung von Spannungsteiler zur Impedanzmessung
 - 1.8.5.3 Parallelschaltung von Widerstand und Leitwert
 - 1.8.6 Energie-Quellen und -Senken
 - 1.8.6.1 Identifikation von Energie-Quellen und -Senken
 - 1.8.6.2 Umwandlung von linearen Netzwerken nach Norton und Thévenin
 - 1.8.6.3 Spannungsquelle mit Spannungsteiler realisieren
- 1.9 Lineare Überlagerung (Superposition) in linearen Netzwerken
 - 1.9.1 Anwendung auf beliebige lineare Netzwerke
 - 1.9.2 R2R-Leiter: Multipler Spannungsteiler und D/A-Wandler
- 1.10 Verstärkung – Leistung – Bandbreite
 - 1.10.1 Grundprinzip der Spannungsverstärkung
 - 1.10.2 Indirekte Messung von Strom und Leistungsverstärkung
 - 1.10.3 Verstärkungs-Bandbreite-Produkt
- 1.11 Miller-Effekt Herleitung
 - 1.11.1 Miller-Effekt Herleitung
- 1.12 Referenzen

1 Grundlagen

1.1 LZI-Systeme und 4 Grundaxiome der Signalverarbeitung

Da wir Schaltungen in erster Linie für die Signalverarbeitung entwerfen, ist es hilfreich, deren wichtigsten Grundregeln zu kennen. (Blau geschriebener Text war Prüfungsmusterlösung).

1.1.1 Zeitinvarianz

Ein System ist zeitinvariant, wenn dessen Impulsantwort $h(t)$ gleich jeder zeitlich verschobenen Impulsantwort $h(t-\tau)$ ist.

Bild 1.1.1(a):
Schwingkreis mit
Kapazitätsdiode

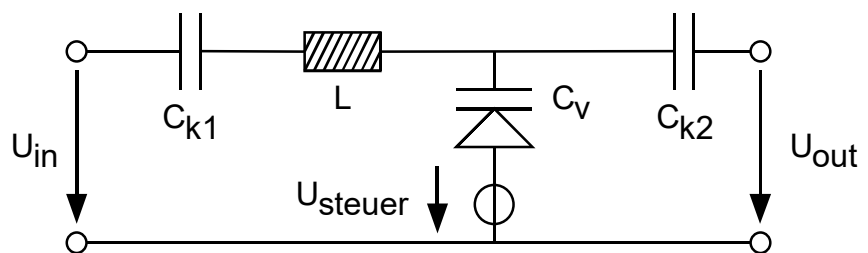


Bild 1.1.1(a) zeigt einen Schwingkreis mit einer Kapazitätsdiode C_v , deren Kapazität sich mit der Spannung U_{steuer} ändert. Das System in Bild 1.1.1(a) ist nicht zeitinvariant, wenn sich die Steuerspannung $U_{steuer}(t)$ zeitlich ändert und man sich nicht darauf verlassen kann, dass $h(t-\tau)=h(t-\tau)$ ist.

Bild 1.1.1(b):
Radarstation
mit Sende- /
Empfangs-
antenne

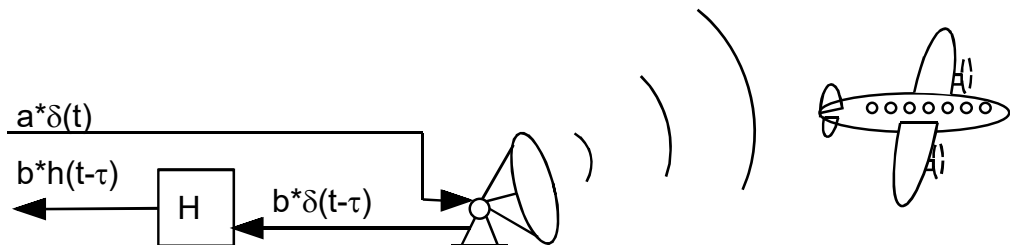


Bild 1.1.1(b) zeigt eine Radarstation, deren Antenne einen Impuls $\delta(t)$ aussendet und dessen Reflexion $r(t)$ anschließend empfängt. Nach dem Empfangsverstärker soll das gleiche Objekt unabhängig von seiner Entfernung zur Antenne gleich große Impulsantworten $h(t-\tau)$ liefern. Dürfen wir den Empfangsverstärker als zeitinvariantes System betrachten?

Nein! Denn mit zunehmender Entfernung des Objekts kommt die Impulsantwort des Radarsignals sowohl später als auch schwächer. Der Empfangsverstärker muss seine Verstärkung während des Wartens auf die Impulsantwort vergrößern und ist daher nicht zeitinvariant, sondern zeitvariant.

1.1.2 Linearität

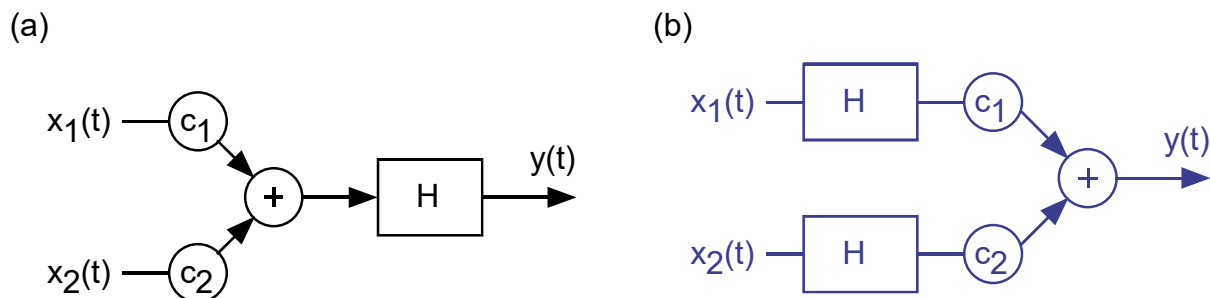


Bild 1.1.2-1: (a) lineare Überlagerung zweier Signale, (b) äquivalentes System.

Bild 1.1.2-1(b) zeigt ein System, welches die rechte Seite der Gleichung des Linearitätsprinzips grafisch veranschaulicht: $y [c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)] = c_1 \cdot y [x_1(t)] + c_2 \cdot y [x_2(t)]$.

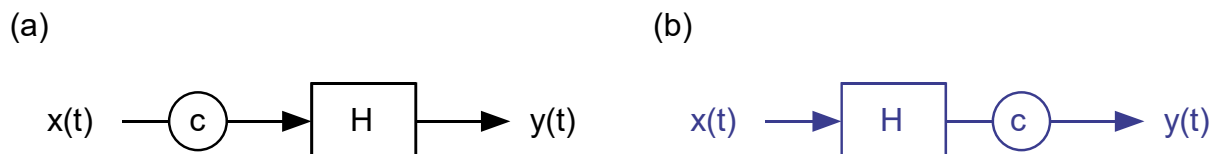


Bild 1.1.2-2: (a) Anregung eines Systems mit $c \cdot x(t)$, (b) äquivalentes System.

Linearität beinhaltet Proportionalität: Bild 1.1.2-2(b) zeigt ein System, welches die Gleichung des Proportionalitätsprinzips grafisch veranschaulicht: $y [c \cdot x(t)] = c \cdot y [x(t)]$. Die Skalierung eines Signals mit einem Konstanten Faktor darf über ein System verschoben werden.

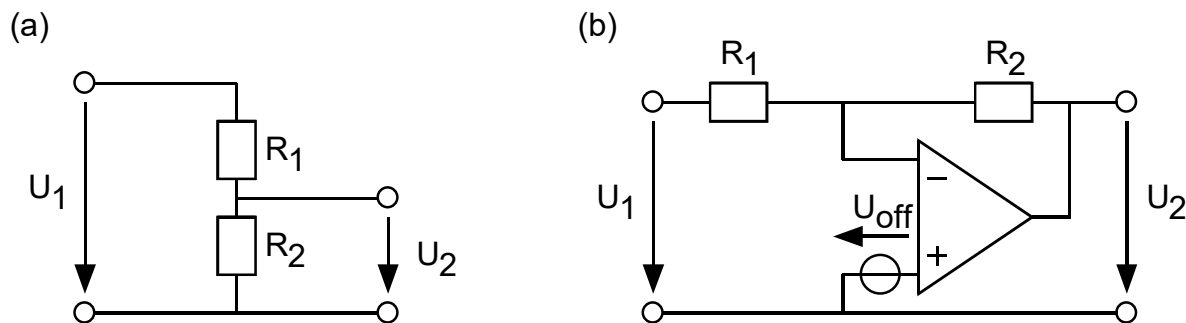


Bild 1.1.2-3: (a) Resistiver Spannungsteiler, (b) invertierender Verstärker mit Offset.

Proportionalität beinhaltet Offset-Freiheit: Aus $x(t)=0$ folgt $y(t)=0$.

System in Bild 1.1.2-3(a) ist linear, weil $U_2 = \text{konstant} \cdot U_1$

System in Bild 1.1.2-3(b) ist nichtlinear, weil $U_2 \neq 0$ wenn $U_1 = 0$.

Anmerkung zur Linearität:

Oben definierte Linearität gilt für die Signalverarbeitung. Für einen Mathematiker ist ein Offset keine Störung der Linearität.

Anmerkung zu LZI-Systemen bzw. englisch "LTI Systems":

- In der deutschsprachigen Literatur findet man häufig den Ausdruck LZI-System, welcher für „lineares und zeitinvariantes System“ steht. In der angelsächsischen Schreibweise findet man das Akronym LTI für „linear and time-invariant“.
- LZI-Systeme werden zeitkontinuierlich typischerweise als Übertragungsfunktion $H(s)$ mit der Laplace-Variablen $s = j\omega$ modelliert, und zeitdiskret als Übertragungsfunktion $H(z)$ mit $z=e^{sT}$, wobei T das Taktintervall ist. (Siehe z.B. *Matlab* [1] → LTI Systems.)
- Praktische Definition: Regt man ein LZI-System mit einer reinen Sinuswelle an, dann reagiert es im eingeschwungenen Zustand mit einer reinen Sinuswelle gleicher Frequenz.

1.1.3 Kausalität

Kausalität ist definiert als $y(t) = f[x(\tau)]$ mit $\tau \leq t$. Das bedeutet:

Ein kausales System kann nur auf die Gegenwart und die Vergangenheit reagieren, nicht aber auf die Zukunft, es kann also keine "hellseherischen" Fähigkeiten besitzen.

Beispiele für nicht kausale Systeme, die wir in der Signalverarbeitung oft gerne hätten:

idealer Tiefpass, idealer Bandpass, idealer Hochpass.

1.1.4 Stabilität

Bei der Stabilität redet man von der sogenannten BIBO-Stabilität: Es gibt ein konstantes K , so dass für $|x(t)| \leq M$ garantiert werden kann $|y[x(t)]| \leq K \cdot M$. Das Akronym "BIBO" steht für

Bounded Input Bounded Output

Ist ein idealer Integrator BIBO-stabil?

Nein, für $f \rightarrow 0$ (z.B. konstantes Eingangssignal) kann seine Ausgangsgröße beliebig groß werden, auch wenn das Eingangssignal bestimmte Grenzwerte nicht überschreitet.

1.2 Zusammenhang v. Impuls- u. Sprungantwort b. LZI-Systemen

Da die Sprungfunktion das Integral des *Dirac*-Impulses ist, ist die Sprungantwort eines LZI-Systems das Integral der Impulsantwort. Wie in Bild 1.2 veranschaulicht, müssen dazu nur die Operationen Integration und *Dirac*-Stoß vertauscht werden. Das ist in der Messtechnik sehr hilfreich, weil ein Einheitssprung einfach anzunähern und ein *Dirac*-Puls kaum möglich ist. Zudem sind Sprungantworten für das menschliche Auge oft besser vergleichbar, als Impulsantworten. Eine Differentiation der Sprungantwort liefert leicht die Impulsantwort.

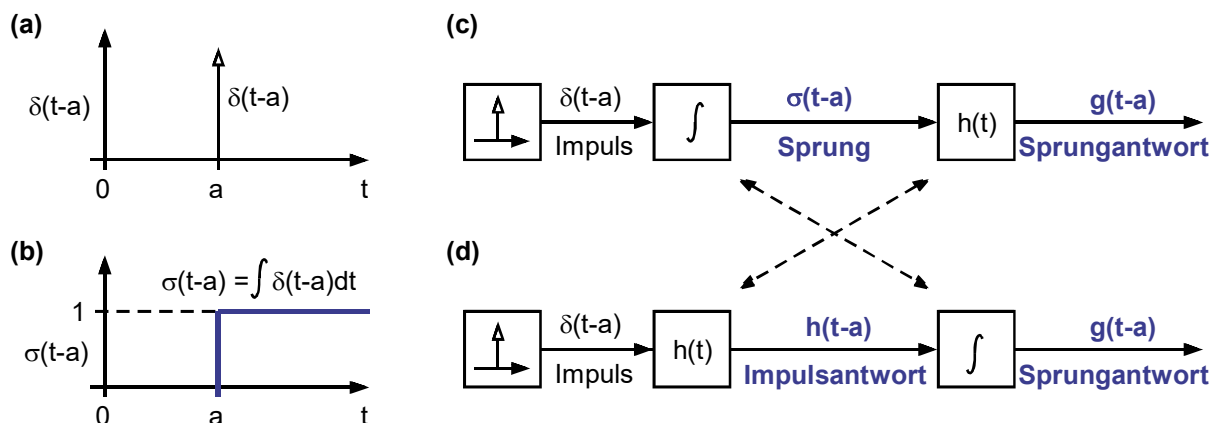


Bild 1.2: Vertauschung von Dirac-Puls und Integration zeigt: Für ein LZI-System ist die leichter messbare Sprungantwort das Integral der Impulsantwort.

Anmerkung: Die Übertragungsfunktion $H(s)$ eines LZI-Systems ist die *Laplace*-Transformierte der Impulsantwort $h(t)$.

1.3 Darstellung elektrischer Größen

1.3.1 Mathematische Voraussetzung: komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen bestehen im kartesischen Koordinatensystem aus einem Realteil und einem Imaginärteil: $z = x + jy$. Dabei ist x der Realteil und der mit einem j multiplizierte Anteil (hier y) der Imaginärteil. Es ist $i = j = \sqrt{-1}$. In der Mathematik wird meistens der Buchstabe i verwendet. Dieser symbolisiert in der Elektrotechnik den Strom, daher wird hier auf das j ausgewichen. In *Matlab* [www.MathWorks.com] sind ohne anderweitige Definition die Buchstaben i und j als komplexe Zahl $i = \sqrt{-1}$ vorbelegt.

Eine komplexe Zahl z lässt sich auch in **Polarkoordinaten** als Betrag und Phase darstellen:

$$z = A \cdot e^{j\varphi} = A \cdot \exp(j\varphi),$$

wobei die $\exp()$ -Schreibweise im *ASCII*-Code von Programmiersprachen verwendet wird, mit der *Euler-Zahl* e , Amplitude $A = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und Phasenwinkel $\varphi = \arctan(y/x)$. Weil die Arcus-Tangens-Funktion $\arctan()$ nur Ergebnisse im Winkelbereich $\pm 90^\circ$ liefert, wird in der Funktion $\arctan2$ das Zeichen $'$ durch ein $,$ ersetzt, so dass man 2 Argumente hat und die Funktion $\varphi = \arctan2(y, x)$ Ergebnisse im vollen Kreis, also im Wertebereich von $\pm 180^\circ$ liefert. Häufig findet man statt $\arctan()$ und $\arctan2(;)$ auch kürzer $\text{atan}()$ und $\text{atan2}(;)$.

Es ist $|z|^2 = z \cdot z'$, wobei $z' = x - jy = |z|e^{-j\varphi}$ der konjugiert-komplexe Wert von z ist. Dabei ist z' die Schreibweise in Programmiersprachen wie *Matlab*. Mathematiker verwenden meistens die Schreibweise $\bar{z} = z'$, wobei \bar{z} mit *ASCII*-Zeichen nicht darstellbar ist. Es ist zu beachten, dass u.a. auch *Matlab* mit dem $'$ -Operator bei Vektoren und Matrizen zusätzlich eine Spiegelung um die Hauptdiagonale vornimmt, so dass aus Spalten Zeilen werden und umgekehrt: Wenn

$$Z = [x_1 + j \cdot y_1, \quad x_2 + j \cdot y_2, \quad \dots \quad x_n + j \cdot y_n], \quad \text{dann ist} \quad Z' = \begin{bmatrix} x_1 - j \cdot y_1; \\ x_2 - j \cdot y_2; \\ \dots \\ x_n - j \cdot y_n; \end{bmatrix}.$$

Der Betrag des komplexen Vektors wird damit sehr einfach darstellbar als $|Z|^2 = Z \cdot Z'$. Auch hier wurde die *Matlab*-Schreibweise gewählt, bei eckige Klammern eine zusammengesetzte Datenstruktur und ein Semikolon einen Zeilenumbruch bedeuten, auch wenn in der gleichen Zeile weitergeschrieben wird.

Die **Rückumwandlung in kartesische Koordinaten** mit Realteil $\text{Re}\{z\}$ und Imaginärteil $\text{Im}\{z\}$ ist jeweils auf zwei Weisen möglich

$$\text{Re}\{z\} = x = \frac{1}{2} (z + z') = |z| \cdot \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \text{Im}\{z\} = y = -j \cdot \frac{1}{2} (z - z') = |z| \cdot \sin(\varphi).$$

Betragsbildung, Multiplikation und Division komplexer Zahlen. Bei komplexen Zahlen ist $z^2 = |z| \cdot e^{j2\varphi}$ keineswegs gleich $|z^2| = |z|^2$, weil

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \exp(j(\varphi_1 + \varphi_2)) = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2).$$

$$z_1 / z_2 = |z_1| / |z_2| \cdot \exp(j(\varphi_1 - \varphi_2)) = z_1 \cdot z_2' / (z_2 \cdot z_2') = (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + j \cdot (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)) / |z_2|^2.$$

1.3.2 Darstellung elektrischer Größen als komplexe Zahlen

Laut *Ohm'schem* Gesetz gilt für den reellen Widerstand $R = U / I$. Dieses Gesetz funktioniert in dieser Einfachheit nicht für sogenannte Blindwiderstände wie Induktivität L und Kapazität C . Hier sind bei sinusförmiger Anregung Strom und Spannung um 90° phasenverschoben. Bei einer Induktivität läuft der Strom der sinusförmigen Spannung um 90° nach, bei einer Kapazität läuft er ihr um 90° voraus. Daher geben wir diesen Bauelementen mit der *Laplace*-Variablem $s=j\omega$ die komplexen Widerstände $X_L = j\omega L = sL$ und $X_C = 1/(j\omega C) = 1/(sC)$. Dadurch kann das *Ohm'sche* Gesetz wieder angewendet werden:

Die sinusförmige Spannung $U(s) = \hat{U} \cdot e^{j\omega t} = \hat{U} \cdot e^{st}$ liege an einer Induktivität und Kapazität an. Dann fließen durch diese die Ströme

$$I_L(s) = \frac{U(s)}{X_L} = \frac{U(j\omega)}{j\omega L} = \frac{U(s)}{sL} \quad \text{und} \quad I_C(s) = \frac{U(s)}{X_C} = U(j\omega) \cdot j\omega C = U(s) \cdot sC$$

Würden wir hier nur die Realteile $U(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t)$ und $I(t) = \hat{I} \cdot \cos(\omega t \pm 90^\circ)$ dividieren, dann ergäben sich nach dem *Ohm'schen* Gesetz für Induktivität und Kapazität Widerstandswerte, welche über der Zeit periodisch zwischen $\pm\infty$ schwanken würden, wie aus der Gleichung $\hat{U} \cdot \cos(\omega t) / (\hat{I} \cdot \sin(\omega t))$ leicht zu ersehen ist.

Mit den komplexen Größen sind die Widerstände, die man in ihrer komplexer Form als Impedanzen bezeichnet, nach dem *Ohm'schen* Gesetz wieder zeitunabhängige Größen, die nur noch von der Frequenz abhängen. Sinusförmiger Anregung mit Frequenz ω liefert

$$\text{Blindwiderstand der Induktivität: } X_L = \frac{U(s)}{I_L(s)} = sL = j\omega L$$

$$\text{Blindwiderstand der Kapazität: } X_C = \frac{U(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{sC} = \frac{1}{j\omega C}$$

Die Berechnung der Leistung geschieht durch Multiplikation von Strom und Spannung:

$$P(s) = U(s) \cdot I(s) = \text{Re}\{P\} + j \cdot \text{Im}\{P\}$$

An eine ideale Kapazität oder ideale Induktivität wird ausschließlich "Blindleistung" abgegeben, daran zu erkennen, dass die Leistung $P(s)$ rein imaginär ist, Strom und Spannung um 90° phasenverschoben sind und die Bauelemente sich nicht erwärmen. Die Begriffe "Wirkleistung" und "Blindleistung" sind ein wenig irreführend. Bei der Wirkleistung wird elektrische Energie in andere Energieformen umgesetzt, zum Beispiel in Bewegung (Motor) oder Erwärmung (Widerstand) und ist dann elektrisch nicht mehr verfügbar. Bei der sogenannten "Blindleistung" bleibt die Energieform elektrisch, denn diese Bauelemente sind Speicher für elektrische Energie, welche im elektrischen System verfügbar bleibt.

Beispiel: Die Energie zum Laden einer Kapazität C auf die Spannung U beträgt $E_C = \frac{1}{2} C \cdot U^2$. Diese "Blindenergie" kann durch Entladen der Kapazität sofort zurückgewonnen werden. Das gleiche gilt für die magnetischen Energie $E_L = \frac{1}{2} L \cdot I^2$ in einer Spule L mit Stromdurchfluss I .

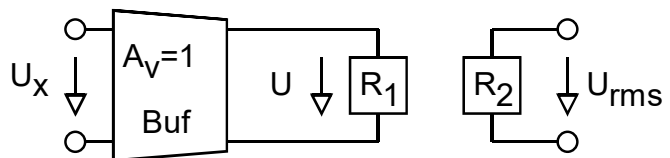
1.3.3 Effektivwerte

1.3.3.1 Ermittlung des Effektivwertes

Wir unterscheiden im Wesentlichen zwischen Amplituden (Spannung, Strom, digitale Zahl, Gasdruck,...) und Leistung. Die Leistung ist immer proportional zum Quadrat der Amplitude.

Gegeben sei eine Spannung $U(t)$. Ihr Effektivwert (englisch: *rms* (=root, mean square) value) $U_{eff} = U_{rms}$ ist eine Gleichspannung, die an einen Widerstand die gleiche mittlere Leistung abgibt wie U . Sehr gute Messgeräte für hohe Frequenzen erwärmen in der Tat einen Vergleichswiderstand gemäß Fig. 1.2.3.1: Der Effektivwert U_{rms} von U wird ermittelt, indem U_{rms} so eingestellt wird, dass R_1 und R_2 auf die gleiche Temperatur geregelt werden. Der Pufferverstärker Buf mit der Verstärkung 1 verhindert in Fig. 1.2.3.1, dass die gemessene Spannung U_x durch die Messung belastet wird. Die Aussage lässt sich auf andere Amplitudengrößen übertragen.

Fig. 1.3.3.1: die effektive oder rms-Spannung U_{rms} von $U(t)$ ist die Gleichspannung, die den Widerstand R_2 genauso erwärmt, wie die beliebige Spannung $U(t)$. den Widerstand $R_1=R_2$.



Die zugehörige Mathematik zeigt Tabelle 1.2.3.1. Sie zeigt in der oberen Zeile die Berechnung eines Mittelwertes und in der unteren Zeile die Berechnung einer mittleren Leistung.

Hinweis: Die häufig verwendete Schreibweise \bar{x}^2 ist keine mittlere Signalleistung, sondern das Quadrat eines Mittelwertes. Beispiel: $x(t)=A \cdot \sin(\omega t)$ hat den Mittelwert $\bar{x} = 0$ und somit $\bar{x}^2 = 0$, während sich die mittlere Leistung zu $\overline{x^2} = A^2 / 2$ ergibt.

Aufgabe: Sehen Sie sich die Effektivwertformel in der rechten Spalte von Tabelle 1.2.3.1 an: Woher kommt das englischsprachige Kürzel *rms* = root mean square?

Tabelle 1.2.3.1: Mittlerer Signalwert und mittlere Signalleistung

	Mittlere oder DC-Amplitude \bar{x}	Mittlere Signalleistung $\overline{x^2}$	Effectiv- bzw. <i>rms</i> Amplitude $x_{eff} = x_{rms}$
Zeit-kontinuierlich:	$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot dt$	$\overline{x^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) \cdot dt$	$x_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) \cdot dt}$
Zeit-diskret:	$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	$\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$	$x_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$

1.3.3.2 Effektivwerte einiger häufig verwendeter Signalformen

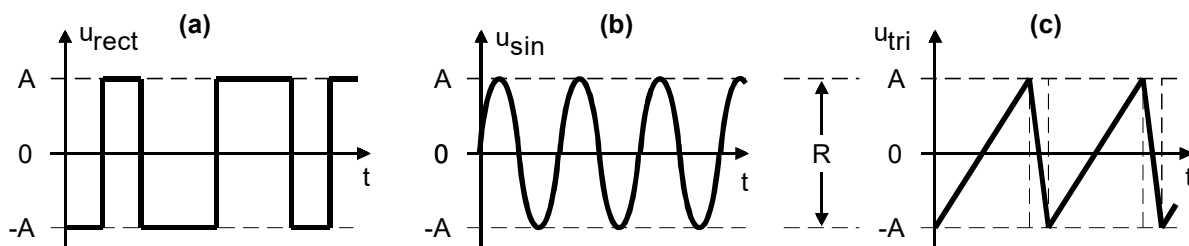


Fig. 1.3.3.2:
 Häufig verwendete Signalformen:
 (a) Rechteck, (b) Sinus, (c) Dreieck., und
 (d) Vergleich der Flächen unter den Kurven

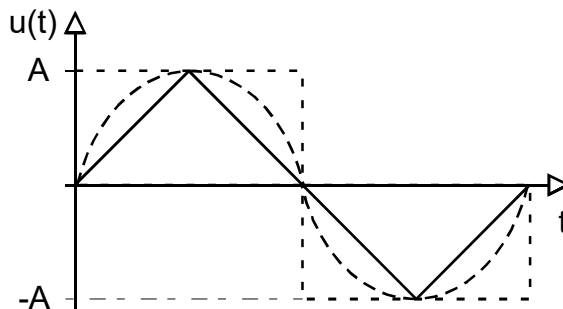


Fig. 1.3.3.2 zeigt (a) ein rechteckförmiges Signal mit Mittelwert 0, (b) ein sinusförmiges und (c) ein dreieckförmiges Signal. Alle oszillieren zwischen A und $-A$. Die Signalleitung einer solchen Spannung an 1Ω und die Effektivspannungen sind

Rechteckförmig: $\overline{u_{rect}^2} = \frac{A^2}{1} = \frac{R^2}{4} \leftrightarrow u_{rect,rms} = \frac{A}{\sqrt{1}} = \frac{R}{2}$,

Sinusförmig: $\overline{u_{sin}^2} = \frac{A^2}{2} = \frac{R^2}{8} \leftrightarrow u_{sin,rms} = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{8}}$,

Dreieckförmig: $\overline{u_{tri}^2} = \frac{A^2}{3} = \frac{R^2}{12} \leftrightarrow u_{tri,rms} = \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{12}}$.

1.3.3.3 Übungen zur Effektivwert-Berechnung

Übung 1: Gegeben ist eine Rechteckschwinung mit Amplitude $\pm A$. Berechnen Sie die

Signalleistung: $u_{rect}^2(t) = \dots$

Mittlere Signalleistung: $u_{rect,ms}^2 = \dots$

Effektive Amplitude: $u_{rect,rms} = \dots$

Übung 2: Given is a sinusoidal waveform: (Hint: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$)
 $u_{sin}(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

Signalleistung: $u_{sin}^2(t) = \dots\dots\dots$

Mittlere Signalleistung: $u_{sin,rms}^2 = \dots\dots\dots$

Effektive Amplitude: $u_{sin,rms} = \dots\dots\dots$

Übung 3: Given is a triangular waveform:
 $u_{tri}(t) = (A/T) \cdot t$ for $0 \leq t - n \cdot T \leq T$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Mittlere Signalleistung: $u_{tri}^2(t - nT) = \dots\dots\dots$

Mittlere Signalleistung: $u_{tri,rms}^2 = \dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Effektive Amplitude: $u_{tri,rms} = \dots\dots\dots$

Welcher Unterschied ergibt sich für Leistung und effektiver Amplitude eines Dreieckssignals $u_{tri}(t)$ wenn beliebige Dreiecke positiv oder negativ sind?

$\dots\dots\dots$

Übung 4: Addiere einen u_{offset} ($f=0\text{Hz}$) zu einem DC-freie oszillierenden Signal u_{osc} ($f>0\text{Hz}$):

$\dots\dots\dots$

Lösungen:

Übung 1: Given is a rectangular waveform:
 $u_{rect}(t) = A$ while $0 \leq t - n \cdot T \leq T_H$ and $u_{rect}(t) = -A$ while $T_H \leq t - n \cdot T \leq T_H + T_L$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 Signalleistung: $u_{rect}^2(t) = A^2$
 Mittlere Signalleistung: $u_{rect,rms}^2 = A^2$
 Effektive Amplitude: $u_{rect,rms} = A$

Übung 2: Given is a sinusoidal waveform:
 $u_{sin}(t) = A \cdot \sin(\omega t)$
 Signalleistung: $u_{sin}^2(t) = A^2 \cdot \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2} A^2 \cdot (1 - \cos(2\omega t))$
 Mittlere Signalleistung: $u_{sin,rms}^2 = \frac{1}{2} A^2$ as average over $\cos(x) = 0$.
 Effektive Amplitude: $u_{sin,rms} = A / \sqrt{2}$

Übung 3: Given is a triangular waveform:
 $u_{tri}(t) = (A/T) \cdot t$ for $0 \leq t - n \cdot T \leq T$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 Signalleistung: $u_{tri}^2(t - nT) = (A/T)^2 \cdot t^2$
 Mittlere Signalleistung: $u_{tri,rms}^2 = (1/T) \int_0^T (A/T)^2 \cdot t^3 / 3 \Big|_0^T = (A/T)^2 \cdot T^3 / 3T = A^2 / 3$
 Effektive Amplitude: $u_{tri,rms} = A / \sqrt{3}$

Welcher Unterschied ergibt sich für Leistung und effektiver Amplitude eines Dreieckssignals $u_{tri}(t)$ wenn beliebige Dreiecke positiv oder negativ sind? **Kein Unterschied**

Übung 4: $\overline{u_{total}^2} = \overline{u_{offset}^2} + \overline{u_{osc}^2} \rightarrow u_{total,rms} = \sqrt{u_{offset}^2 + u_{osc,rms}^2}$

1.3.4 Definition von Bel, Dezibel (dB) und Neper

Das nach *Alexander Graham Bell* benannte Bel ist der Logarithmus zur Basis 10 aus einem Quotienten zweier Leistungen. Gegeben seien die Signalleistung P_s und die Rauschleistung P_n . Ihr Quotient oder Signal-Rausch-Abstand (engl.: *Signal to Noise Ratio, SNR*) ist definiert als

$$SNR_{Bel} = \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_n} \right) \text{ B.} \quad (1)$$

Das Bel erwies sich als zu grobes Maß, so dass man in zehntel Bel bzw. dezi-Bel (dB) rechnet:

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_n} \right) \text{ dB.} \quad (2)$$

Bezieht man diese Leistung auf einen Widerstand R , dann kann man den SNR auch als Funktion der Spannungen an oder der Ströme durch diesen Widerstand berechnen. Elektrische Leistung ist proportional zum Quadrat von Strom und Spannung:

$$P = UI = U^2 / R = I^2 R. \quad (3)$$

Gl. (3) eingesetzt in Gl. (2) liefert wegen $\log(x^n) = n \cdot \log(x)$

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{U_s^2 / R}{U_n^2 / R} \right) \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\left(\frac{U_s}{U_n} \right)^2 \right) \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{U_s}{U_n} \right) \text{ dB}$$

oder

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_s^2 R}{I_n^2 R} \right) \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\left(\frac{I_s}{I_n} \right)^2 \right) \text{ dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{I_s}{I_n} \right) \text{ dB}$$

Rechnet also man mit Strömen oder Spannungen, muss als Faktor die 20 anstatt der 10 vor den Logarithmus gesetzt werden.

Das Ergebnis einer Rechnung soll nicht davon abhängen, ob man mit Leistungen, Strömen oder Spannungen rechnet:

Beispiel: $P_s=100\text{mW}$, $P_n=10\mu\text{W}$. Bezogen auf einen Widerstand von 40Ω bedeutet dies $U_s=2\text{V}$, $U_n=20\text{mV}$ oder $I_s=50\text{mA}$, $I_n=500\mu\text{A}$. Man erhält den Signal-Rausch-Abstand als

$$\text{Verhältnis von Leistungen: } SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{100\text{mW}}{0,01\text{mW}} \right) \text{ dB} = 10 \log_{10}(10000) \text{ dB} = 10 \cdot 4 \cdot \text{dB} = 40\text{dB}$$

$$\text{Verhältnis von Spannungen: } SNR_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{2\text{V}}{20\text{mV}} \right) \text{ dB} = 20 \log_{10}(100) \text{ dB} = 20 \cdot 2 \cdot \text{dB} = 40\text{dB}$$

$$\text{Verhältnis von Strömen: } SNR_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{50\text{mA}}{500\mu\text{A}} \right) \text{ dB} = 20 \log_{10}(100) \text{ dB} = 20 \cdot 2 \cdot \text{dB} = 40\text{dB}$$

Eindeutigkeit von dB-Angaben

Sinn der Definition von Bel und dB war eine gute Handhabbarkeit und Eindeutigkeit. Ersteres ist gelungen, letztes ist weniger klar.

Einige Experten legen Wert darauf, dass dB-Angaben sich auf Leistungen beziehen und daher auf den richtigen Widerstand bezogen werden müssen. Das macht aber niemand, und es ist in der digitalen Signalverarbeitung auch kaum durchzuhalten. Auf welche Widerstände sollte man digitale Nummern beziehen? Daher wird in der Signalverarbeitung oft der Bezug auf den Widerstand ganz weggelassen: Signale sind Amplituden und als deren Leistungen rechnet man mit den Quadraten der Amplituden.

Varianten:

Weitere Verwendung von dB-Angaben: dBm, dBW, dBc: Maß dB mit Bezugsgöße mW, W und Trägersignal (carrier).

In der Akustik beziehen sich dB-Angaben auf die geringste Lautstärke, die ein typisches, gesundes, menschliches Gehör bei 1KHz wahrnehmen kann.

Neper: SI-Einheiten-konformes logarithmisches Maß

Das zu Ehren des Schotten *John Napier* (lateinisch *Neper*) benannte *Neper* oder *Np* hat sich als logarithmisches Maß nicht durchsetzen können, obwohl es dem internationalen SI-Einheiten-System entspricht und als natürlicher Logarithmus definiert ist. Für den Signal-Rausch-Abstand in *Np* ergibt sich

$$SNR_{Np} = \ln\left(\frac{P_S}{P_N}\right) Np. \quad \text{Mit} \quad \ln\left(\frac{P_S}{P_N}\right) Np = 10 \log_{10}\left(\frac{P_S}{P_N}\right) dB \quad \text{ergibt sich daraus}$$

$$1Np = \frac{20dB}{\ln 10} dB \cong 8,686dB \quad \Leftrightarrow \quad 1dB = \frac{\ln 10}{20} Np \cong 0,1151Np.$$

1.4 Bode-Diagramme

1.4.1 Mathematische Grundlagen

Die energiespeichernden Bauelemente führen zu differentiellen Ausdrücken:

$$\text{Strom durch eine Kapazität } C: \quad I_C = C \cdot \frac{dU_C}{dt} \rightarrow \text{Laplace: } I_C(s) = C \cdot s \cdot U(s) \quad (1.3.1)$$

$$\text{Spannung an einer Induktivität } L: \quad U_L = L \cdot \frac{dI_L}{dt} \rightarrow \text{Laplace: } U_L(s) = L \cdot s \cdot I_L(s) \quad (1.3.2)$$

Ein Netzwerk mit R energiespeichernden Bauelemente hat eine maximale Ordnung von R , das heißt R Pole und/oder R Nullstellen. Die Ordnung des Systems kann sich dadurch verringern, dass beispielsweise mehrere parallele Kapazitäten zu einer Gesamtkapazität addiert werden. Ein Netzwerk mit Kapazitäten und Induktivitäten liefert letztendlich eine Differentialgleichung der Art

$$b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + b_R \frac{d^R y(t)}{dt^R} = a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + a_R \frac{d^R x(t)}{dt^R} \quad (1.3.3)$$

Mit $y(t) = \hat{Y} \cdot e^{s \cdot t}$ und $x(t) = \hat{X} \cdot e^{s \cdot t}$ erhält man wegen $y'(t) = s \cdot y(t)$ und $x'(t) = s \cdot x(t)$

$$\left[b_0 + b_1 s + \dots + b_R s^R \right] \cdot y(t) = \left[a_0 + a_1 s + \dots + a_R s^R \right] \cdot x(t). \quad (1.3.4)$$

$X(s)$ und $Y(s)$ seien die Laplace-Transformierten der Zeitfunktionen $x(t)$ und $y(t)$, und auch hier entspreche eine Differentiation im Zeitbereich einer Multiplikation mit s im Frequenzbereich. Denn kann man im *Laplace*-Bereich folgende Transferfunktion schreiben als

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + \dots + a_R s^R}{b_0 + b_1 s + \dots + b_R s^R} \quad (1.3.5)$$

Das Bode-Diagramm als Verhalten über der Frequenzachse bekommt man, indem man $s = j\omega = j2\pi f$ setzt.

Im ersten Moment mag es übertrieben erscheinen, für den Ausdruck $j\omega$ die neue Variable s zu erschaffen. Allerdings haben die wichtigen Nullstellen Pole der Übertragungsfunktion $H(s)$ fast immer einen Realteil.

Lösung des homogenen Systems

Ist die Anregung $x(t) = 0$ (z.B. ein frei schwingendes Pendel), dann nennt man das System homogen:

$$b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + b_R \frac{d^R y(t)}{dt^R} = 0$$

Mit $y(t) = \hat{Y} \cdot e^{s \cdot t}$ erhält man $[b_0 + b_1 s + \dots + b_R s^R] \cdot y(t) = 0$.

Wenn in diesem System $y(t) \neq 0$, dann muss $[b_0 + b_1 s + \dots + b_R s^R] = 0$ sein. Die Werte von s , die diese Bedingung erfüllen, nennt man **Pole** $s_{p\#}$ des Systems mit $\# = 1 \dots R$. In der Übertragungsfunktion sind das die Nullstellen des Nenners. Das System ohne Anregung schwingt dann mit $s_{p\#} = \sigma_{p\#} + j\omega_{p\#}$

$$y(t) = \sum_{\# = 1}^R \hat{Y}_{\#} \cdot e^{s_{p\#} \cdot t} = \sum_{k=1}^R \hat{Y}_{\#} \cdot e^{\sigma_{p\#} \cdot t} \cdot e^{j\omega_{p\#} \cdot t}$$

Da wegen $|e^{j\omega t}| = 1$ diese Lösungen mit der Zeit nur dann abklingen, wenn alle $\sigma_k < 0$, müssen alle Pole in der linken Halbebene liegen, damit ein System stabil ist. Ferner lehrt die Mathematik, dass bei reellen Koeffizienten b_k komplexe Pole nur als konjugiert-komplexe Poolpaare $s_{p\#} = \sigma_{p\#} \pm j\omega_{p\#}$ auftreten können. Damit lassen sich die zugehörigen Zeitfunktionen in der Form $\hat{Y}_{\#} \cdot e^{\sigma_{p\#} \cdot t} \cos(\omega_{p\#} \cdot t)$ zusammenfassen, welche auch nur für $\sigma_{p\#} < 0$ mit der Zeit abklingen.

Lösung des inhomogenen (angeregten) Systems

Bis jetzt haben wir berechnet, wie man das homogene, also nicht angeregte, System berechnet. Die Frage ist, was wir mit dem angeregten System machen. Dazu erinnern wir uns an folgendes Axiom:

Ein System ist linear, wenn es im eingeschwungenen Zustand auf eine rein sinusförmige Anregung eine reine Sinuswelle gleicher Frequenz antwortet. Das bedeutet: Wenn wir als Anregung $x(t) = \hat{X} \cdot e^{j\omega t}$ verwenden, dann reagiert das System nach einer Einschwingzeit mit $y(t) = \hat{Y} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$. Diese Tatsache wird durch die Übertragungsfunktion $H(s)$ beschrieben, wobei das Amplitudenverhältnis $|H(s)| = \hat{Y} / \hat{X}$ die Verstärkung des Systems beschreibt und der Phasenwinkel $\varphi = \arctan 2(\text{Im}\{H(s)\}, \text{Re}\{H(s)\})$ die Phasenverschiebung zwischen sinusförmiger Anregung $x(t)$ und sinusförmigem Ausgangssignal $y(t)$.

Die Übergänge von einer Frequenz ω zu einer anderen nennt man **Transienten**. Das Wort leitet sich von den lateinischen Begriffen *trans* = *hinüber* und *ire* = *gehen* ab. Um diese zu berechnen verwendet man in Spice [2-5] den sogenannte Transienten- oder Zeitbereichs-Simulation, also eine Simulation über der Zeitachse. Dagegen beschreibt das Bode-Diagramm (auch AC-Simulation genannt) eingeschwungene Situationen über der Frequenzachse.

1.4.2 Pole und Nullstellen in Übertragungsfunktionen

1.4.2.1 Pole im Orts- und Bode-Diagramm

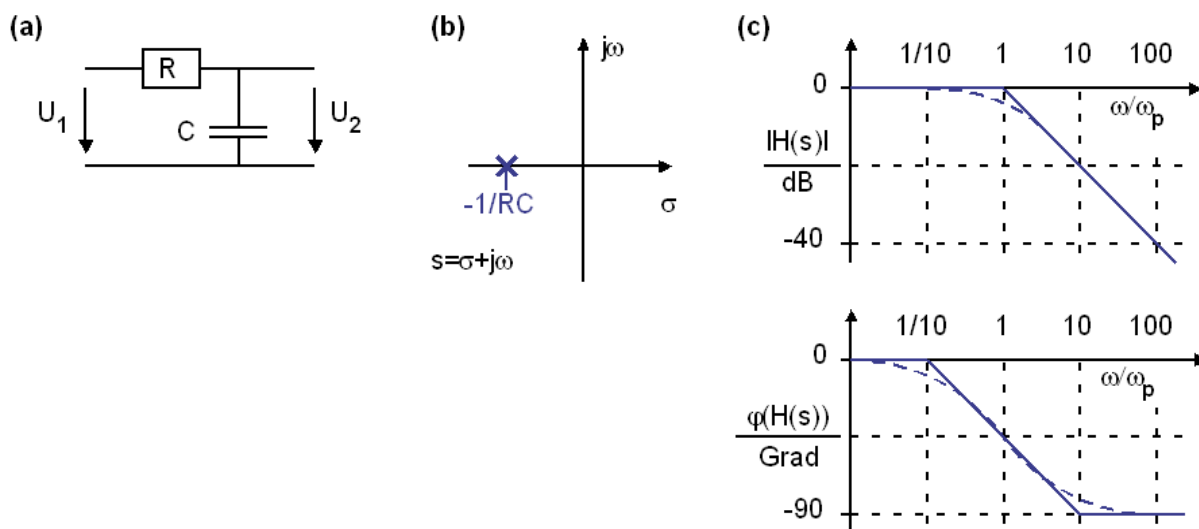


Bild 1.4.2.1: (a) Schaltung mit Pol, (b) Lage des Pols in der komplexen s -Ebene, (c) Bode-Diagramm mit Betrag und Phase der Übertragungsfunktion. Gestrichelt: exakt, durchgezogen: Asymptoten-Näherung.

$$H(s) = \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 - s/(-1/RC)} = \frac{1}{1 - s/s_p} \Rightarrow s_p = -1/RC.$$

Bild 1.3.2.1 zeigt ein System mit einem Pol, gelegen in $s_p = 1/RC$ in der komplexen s -Ebene. Ein System ist stabil, wenn alle seine Pole in der negativen Halbebene liegen. Alle Reaktionen am Ausgang klingen ab, wenn der Eingang Null ist.

Pol (in linker s -Halbebene) → „alles unten“: Nullstelle im Nenner (unter dem Bruchstrich), Knick nach unten im Amplitudendiagramm, Stufe um -90° nach unten im Phasendiagramm. Ein Pol in der linken s -Halbebene bewirkt im Amplitudengang einen Knick nach „unten“, und zwar in der Polfrequenz $\omega_p = |s_p|$, wenn man in Richtung $f \rightarrow \infty$ schaut. Die Asymptoten von $|H(s)|$ haben einen Schnittpunkt im Pol. Bei Leistungen beträgt der Knick im Pol -10dB/dec , bei Spannungen und Strömen -20dB/dec . Im Pol beobachten wir eine Phasendrehung von genau -45° , die Phasendrehung beginnt bei ca. $\omega_p/10$ und endet mit -90° bei ca. $10 \omega_p$.

Amplitudenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_p=1$: **3 dB**

Phasenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_p=1$: **0°**

Phasenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_p=0,1$: **$\arctan(0,1) = 5,71^\circ$**

Phasenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_p=10$: **$\arctan(10) - 90^\circ = -5,71^\circ$**

Frage: Was bewirkt eine Polstelle in der rechten Laplace-Halbebene (Realteil <0)?

Lösung: Polstelle in positiver Halbebene: Instabilität da aufklingende Schwingung. Das System verhält sich ohne Anregung gemäß $\exp(s_p \cdot t)$, also aufklingend, wenn $s_p > 0$, abklingend wenn $s_p < 0$.

1.4.2.2 Nullstellen im Orts- und Bode-Diagramm

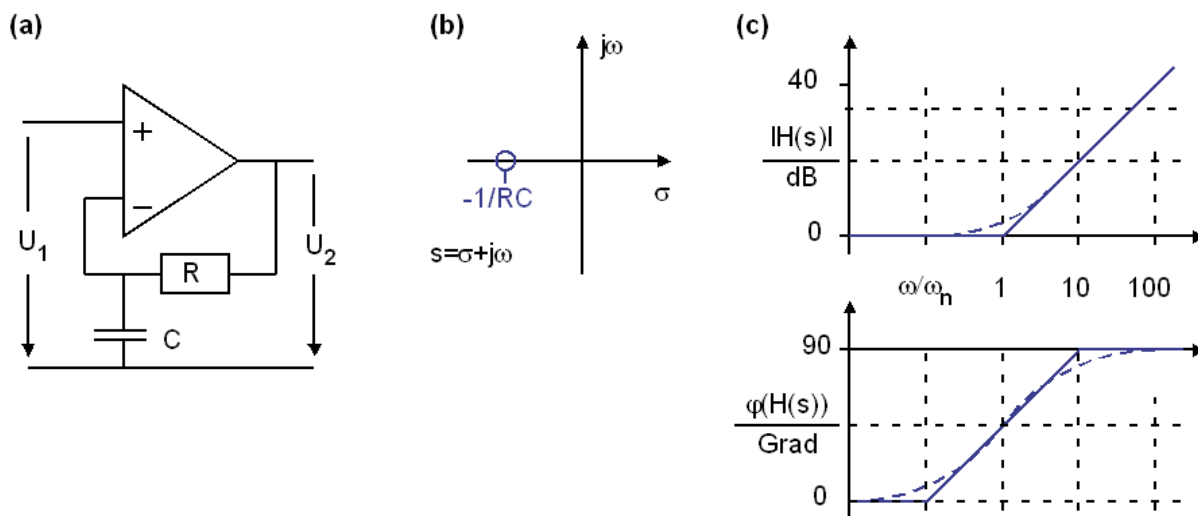


Bild 1.4.2.2: Das Verhalten des Tiefpasses wird im Rückkopplungsnetzwerk eines Operationsverstärkers invertiert: **(a)** Schaltung mit Nullstelle, **(b)** Lage der Nullstelle in der komplexen s -Ebene, **(c)** Bode-Diagramm mit Betrag und Phase der Übertragungsfunktion. Gestrichelt: exakt, durchgezogen: Asymptoten-Näherung.

$$H(s) = \left[\frac{1}{1 + sRC} \right]^{-1} = 1 + sRC = 1 - s / (-1/RC) = 1 - s / s_n \Rightarrow s_n = -1/RC.$$

Bild 1.3.2.1.2 zeigt ein System mit einer Nullstelle, gelegen in $s_n = 1/RC$ in der komplexen s -Ebene, da die OP-Schaltung das Verhalten des Rückkopplungsnetzwerkes invertiert.

Nullstelle (in linker s -Halbebene) → „alles oben“: Nullstelle im Zähler (über Bruchstrich), Knick nach oben im Amplitudendiagramm, Stufe um $+90^\circ$ nach oben im Phasendiagramm. Eine Nullstelle in der linken s -Halbebene bewirkt im Amplitudengang einen Knick nach „oben“, und zwar in der Nullstellenfrequenz $\omega_p = |s_p|$, wenn man in Richtung $f \rightarrow \infty$ schaut. Die Asymptoten von $|H(s)|$ haben einen Schnittpunkt in der Nullstelle. Bei Leistungen beträgt der Knick $+10\text{dB/dec}$, bei Spannungen und Strömen $+20\text{dB/dec}$. In der Nullstelle beobachten wir eine Phasendrehung von $+45^\circ$, sie beginnt bei ca. $\omega_n/10$ und endet mit $+90^\circ$ bei ca. $10 \omega_n$.

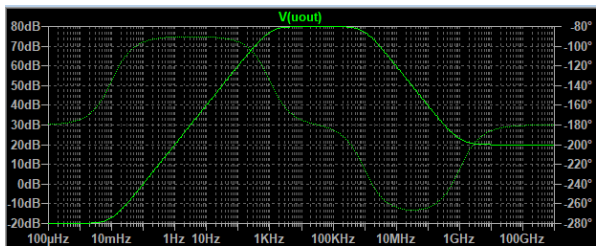
- Amplitudenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_n=1$: **-3 dB**
- Phasenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_n=1$: **0°**
- Phasenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_n=0,1$: **$\arctan(0,1) = -5,71^\circ$**
- Phasenfehler der Asymptotennäherung in $\omega/\omega_n=10$: **$\arctan(10) + 90^\circ = +5,71^\circ$**

Frage: Was bewirkt eine Nullstelle in der rechten *Laplace*-Halbebene (Realteil <0) ?

Lösung: Nullstellen in der rechten s -Halbebene verhalten sich im Amplitudendiagramm wie Nullstellen in der negativen Halbebene, drehen aber die Phase umgekehrt, also nach unten. Während Nullstellen in der linken s -Halbebene in der Regelungstechnik zum Gewinn von Phasenreserve dienen, kosten sie in der rechten Halbebene Phasenreserve → vergrößerte Instabilität.

Übung 1: Wo liegen die Pol- und Nullstellen-Frequenzen in den Bode-Diagrammen unten?

(a) Bandpass



(b) Bandsperre, auch Bandstopp genannt

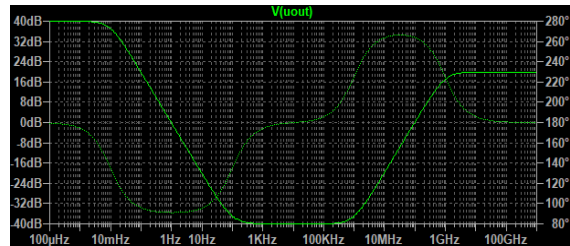


Bild 1.4.2.3: LTspice-Simulation: AC-Simulation mit LTspice:
Durchgezogene Linie ist Betrag, gestrichelte Line Phase.

Übung 2:

- (a) Was ist die DC-Verstärkung des TL081 in Referenz [6], Seite 10, Fig. 8?
- (b) Bei welchen Frequenzen liegen im Bode-Diagramm des TL08x [6] die beiden Pole?

[6] https://www.ti.com/lit/ds/symlink/tl084.pdf?ts=1601321791157&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F

Lösung zu 1: (a) Nullstellen: 10mHz, 1GHz, Pole: 1kHz, 1MHz, (b) Nullstellen: 100Hz, 1MHz, Pole: 10mHz, 1GHz

Lösung zu 2: (a) 106dB = 200 000, (b) bei ca. 15Hz und ca. 7MHz, der 2. Pol nur an der -135° Phasendrehung zu erkennen

1.4.2.4 Konjugiert-komplexes Nullstellen-Paar auf der $j\omega$ -Achse

Konjugiert-komplexe Nullstellenpaare auf der $j\omega$ -Achse markieren ein sogenanntes Notch-Filter, (engl. notch = Kerbe), welches eine bestimmte Frequenz mit einer schmalen Kerbe im Bode-Diagramm unterdrückt. Solche Filter werden beispielsweise zur Unterdrückung von Rückkopplungen (Pfeifton) angewendet.

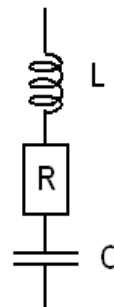


Fig. 1.4.2.4: Serien-Schwingkreis. Unter Berücksichtigung von Parasiten ist dies das ESB jedes Kapazität!

Beispiel: Ein RLC-Serienschwingkreis hat die Impedanz

$$Z_{ser}(s) = \frac{1}{sC} + R + sL = \frac{1 + RC \cdot s + LC \cdot s^2}{sC} = \frac{L}{s} \left(\frac{1}{LC} + \frac{R}{L}s + s^2 \right) \tag{1.4.2.4.1}$$

$$\text{mit den Polen } s_{n1,2} = \frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j\omega_0. \tag{1.4.2.4.2}$$

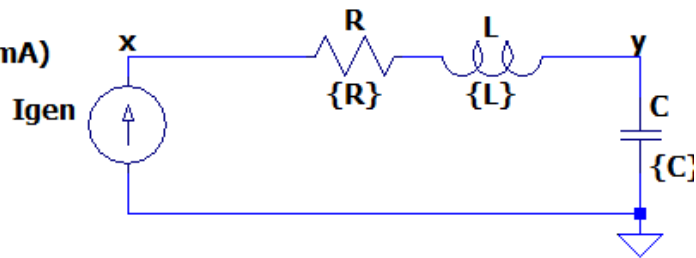
Mit $s = j\omega$ erhält man $Z_{ser}(s = j\omega) = \frac{(1 - \omega^2 / \omega_0^2) + j\omega RC}{j\omega C}$. In der Resonanzfrequenz

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ beträgt die Übertragungsfunktion $Z_{ser}(\omega_0) = R$, so dass für sehr $R \rightarrow 0$ die gesamte Impedanz gegen $Z_{ser}(\omega_0) = \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0$ geht und die Nullstellen gemäß Gl. (1.4.2.4.2) bei $\pm j\omega_0$ auf der $j\omega$ -Achse liegen.

(a) *LTspice* schematics entry

```
PWL(0 0mA 1ms 0mA 1.001ms 100mA)
AC 1A 0;

.tran 15ms ;ac dec 100 1 10MEG
.param R=1m L=43uH C=640uF
.step param R list 1u 100m 10
```



(b) Bode-Diagram (Spice: AC-Simulation

(c) Transient-Simulation

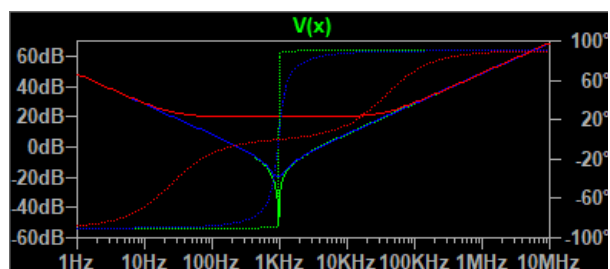
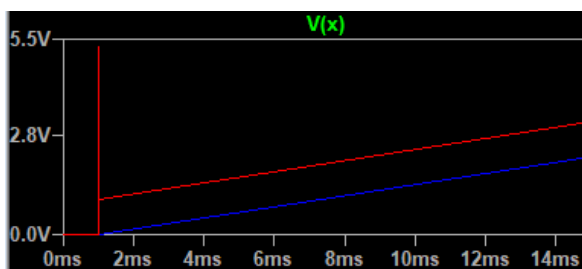


Bild 1.4.2.4: *LTspice* - Simulation einer RLC-Bandsperre / Notch-Filter. Beachte: Schnelle Phasendrehungen um 180° bei komplexen Pool- oder Nullstellen-Paaren!

Bild 1.4.2.4s (a) zeigt eine RLC-Bandsperre, die für komplexe Nullstellen zum Notch-Filter wird. In Bildteil (b) wird sie mit einem Stromsprung bei 1ms angeregt. Bildteil (c) zeigt das zugehörige Bode-Diagramm.

$L=43\mu\text{H}$ und $C=640\mu\text{F}$ sind auf eine Resonanzfrequenz von 1KHz ausgelegt.

Bei der grünen Kurve $V(x)$ beträgt der Widerstand $R=1\mu\Omega$. In Bildteil (b) befindet sich die grüne Kurve unter der blauen, welche mit der Spitze die hohe Impedanz der Spule im Stromsprung bei $t=1\text{ms}$ anzeigen und anschließend ansteigend den Ladevorgang der Kapazität. Im Bode-Diagramm des Bildteils (c) zeigt sich: Die Nullstellen befinden sich nahezu auf der $j\omega$ -Achse, was bei $R=0$ exakt der Fall wäre. Erkennbar ist dies am negativen Peaking, das für $R \rightarrow 0$ (bei 1KHz) $\rightarrow -\infty$ dB strebt, diese Frequenz also vollständig unterdrückt.

Bei der blauen Kurve beträgt der Widerstand $R=100\text{m}\Omega$. Die Nullstellen befinden sich in der linken Halbebene, sind aber noch komplex, weil ein leichtes negatives Peaking der blauen Kurve in Bildteil (c) zu beobachten ist. In Bildteil (b) spielt der Widerstand noch keine Rolle.

Bei der roten Kurve sind die Nullstellen in 2 reelle Nullstellen zerlegt. Das Zeitverhalten in Bildteil (b) zeigt ab $t=1\text{ms}$ eine zusätzliche Spannung von $100\text{m} \cdot 10\Omega = 1\text{V}$, die über $R=1\Omega$ abfällt. Im Bode-Diagramm in Bildteil (c) sind die Nullstellen (z.B. an den Phasendrehungen) klar unterscheidbar.

Allen Kurven gemeinsam ist der Wechsel der Asymptoten von -20dB/dec auf $+20\text{dB/dec}$ in 1KHz. Aber in dieser Frequenz unterscheiden sie sich.

1.4.2.5 Konjugiert-komplexes Polpaar auf der $j\omega$ -Achse

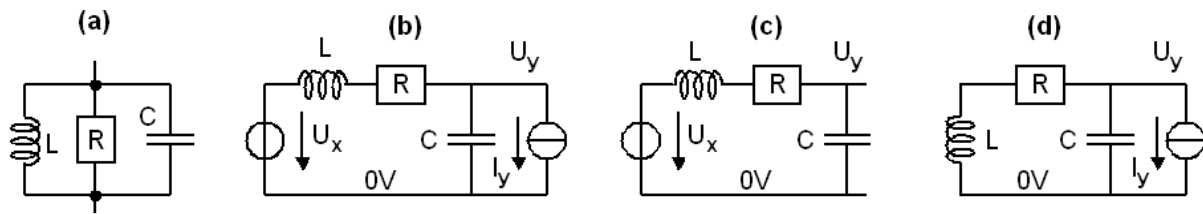


Bild 1.4.2.5: (a) RLC-Parallelschwingkreis, (b) RLC-Tiefpass mit Eingangsspannung U_x und Laststrom I_y , (c) Spezialfall $I_y = 0$ in Bildteil (b) und (d) Spezialfall $U_x = 0$ in Bildteil (b).

Konjugiert-komplexe Polpaare auf der $j\omega$ -Achse markieren einen Oszillator.

Beispiel: Ein RLC-Parallelschwingkreis hat die Impedanz

$$Z_{par}(s) = \frac{1}{sC} \parallel R \parallel sL = \frac{L \cdot s}{1 + (L/R) \cdot s + LC \cdot s^2} \quad (1.4.2.5.1)$$

$$\text{mit den Polen } s_{p1,2} = \frac{1}{2RC} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j\omega_0. \quad (1.4.2.5.2)$$

Mit $s = j\omega$ erhält man $Z_{ser}(s = j\omega) = \frac{j\omega L}{(1 - \omega^2 / \omega_0^2) + j\omega L / R}$. In der Resonanzfrequenz

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ beträgt die Übertragungsfunktion $Z_{par}(\omega_0) = R$, so dass für sehr $R \rightarrow \infty$ die gesamte Impedanz gegen $Z_{par}(\omega_0) = \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$ geht und die Pole gemäß Gl. (1.4.2.4.4) bei $\pm j\omega_0$ auf der $j\omega$ -Achse liegen. Nach Abschalten der Anregung ($x=0$) könnte daher ein angeregter, verlustfreier Schwingkreis unendlich lange weiterschwingen.

Die Übertragungsfunktion des RLC-Tiefpasses in Bildteil (b) ergibt sich aus (c) und (d) zu

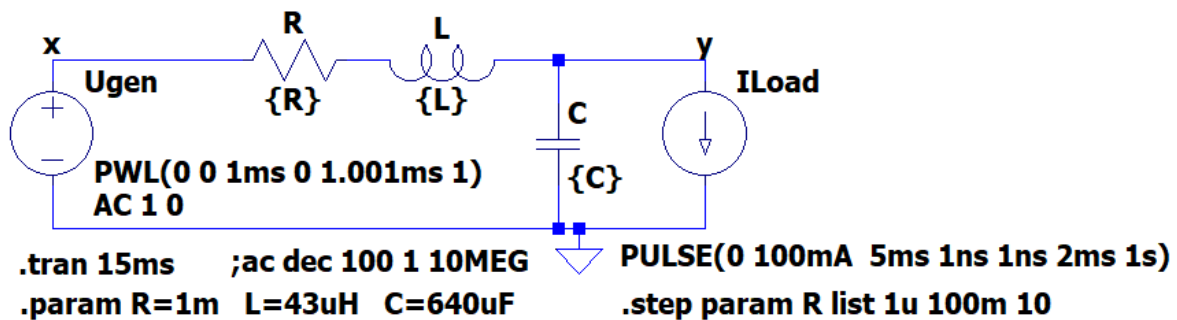
$$PTF(s) = \left. \frac{U_y}{U_x} \right|_{I_y=0} = \frac{1/sC}{(1/sC) + (R + sL)} = \frac{1}{1 + RC \cdot s + LC \cdot s^2} \quad (1.4.2.5.3)$$

$$-QTF(s) = \left. \frac{U_y}{-I_y} \right|_{U_x=0} = (1/sC) \parallel (R + sL) = \frac{R + sL}{1 + RC \cdot s + LC \cdot s^2} \quad (1.4.2.5.4)$$

$$\text{mit den Polen } s_{p1,2} = \frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \xrightarrow{R \rightarrow 0} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j\omega_0. \quad (1.4.2.5.5)$$

In der Resonanzfrequenz strebt die Ausgangsspannung $U_y \xrightarrow{R \rightarrow 0} \infty$.

(a) LTSpice schematics entry



(b) Bode-Diagram (Spice: AC-Simulation

(c) Transient-Simulation

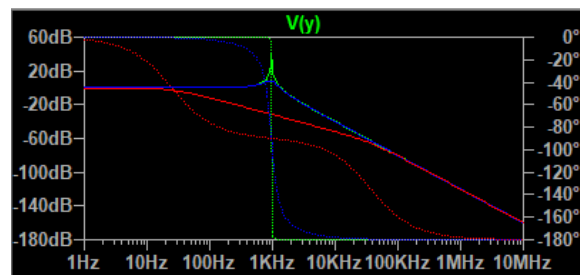
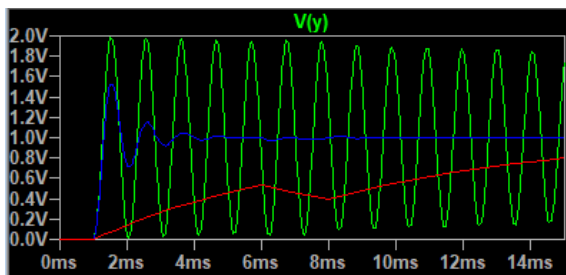


Bild 1.4.2.5: LTSpice Simulation eines RLC-Tiefpasses

Bild 1.4.2.5s (a) zeigt einen RLC-Tiefpass. In Bildteil (b) wird er mit einem Spannungssprung bei 1ms angeregt und mit einem Lastrom-Puls von 100mA zwischen 6 und 8ms. Bildteil (c) zeigt das zugehörige Bode-Diagramm.

$L=43\mu\text{H}$ und $C=640\mu\text{F}$ sind auf eine Resonanzfrequenz von 1KHz ausgelegt.

Bei der grünen Kurve beträgt der Widerstand $R=1\mu\Omega$ und die Pole befinden sich nahezu auf der $j\omega$ -Achse, was bei $R=0$ exakt der Fall wäre. Für $R\rightarrow 0$ oszilliert die grüne Kurve über der Zeitachse ungedämpft und das Peaking (Resonanzerhöhung bei 1KHz) im Bildteil (c) geht $\rightarrow\infty$.

Bei der blauen Kurve beträgt der Widerstand $R=100\text{m}\Omega$. Die Pole befinden sich in der linken Halbebene, sind aber noch komplex, weil ein Überschwingen der blauen Kurve in Bildteil (b) und ein leichtes Peaking in Bildteil (c) zu beobachten sind.

Bei der roten Kurve sind die Pole in 2 reelle Pole zerlegt. Das Zeitverhalten in Bildteil (b) ist aperiodisch, im Bode-Diagramm in Bildteil (c) sind die Pole (z.B. an den Phasendrehungen) klar unterscheidbar.

Allen Kurven gemeinsam ist die DC-Verstärkung von 1 (0dB) und ein Abfall der Kurven in Bildteil (c) oberhalb beider Pole um -40dB/dec . Der dämpfende Widerstand macht sich um den Schnittpunkt der waagrechten Asymptote und der -40dB/dec -Asymptote bemerkbar.

1.4.2.6 Inversion der Übertragungsfunktion

Sei $Y(s) = H(s) X(s)$. Gesucht ist die Umkehrfunktion $G(s)$, so dass $X(s) = G(s) Y(s)$:

$$G(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{1}{K} \frac{(s - s_{p1}) \cdot (s - s_{p2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{pN})}{(s - s_{n1}) \cdot (s - s_{n2}) \cdot \dots \cdot (s - s_{nM})}$$

Die inverse Übertragungsfunktion $G(s) = H^{-1}(s)$ erhält man im Bode-Diagramm durch Spiegelung von $H(s)$ an der 0dB-Achse.

Folgerungen:

- Wo $H(s)$ eine Nullstelle hat, da hat $G(s)$ einen Pol
- Wo $H(s)$ einen Pol hat, da hat $G(s)$ eine Nullstelle
- Beschreibt $H(s)$ einen Tiefpass, dann beschreibt $G(s)$ einen Hochpass
- Beschreibt $H(s)$ einen Hochpass, dann beschreibt $G(s)$ einen Tiefpass
- Beschreibt $H(s)$ einen Bandpass, dann beschreibt $G(s)$ eine Bandsperre
- Beschreibt $H(s)$ eine Bandsperre, dann beschreibt $G(s)$ einen Bandpass

Rückgekoppelte Systeme (z.B. Operationsverstärker) verhalten sich bei hinreichend hoher Schleifenverstärkung gemäß ihrer sogenannten Signaltransferfunktion $STF(s) \cong 1/B(s)$, wobei $B(s)$ die Übertragungsfunktion des Rückkopplungsnetzwerks ist, $F(s)$ die Übertragungsfunktion des Vorwärtsnetzwerks und $FB(s) = F(s) \cdot B(s)$ die Schleifenverstärkung. [Notation im Bild: $A^* = STF$, $k = B$.] Folgerung: Ist das Rückkopplungsnetzwerk ein Hochpass, dann verhält sich das Gesamtsystem als Tiefpass und umgekehrt.

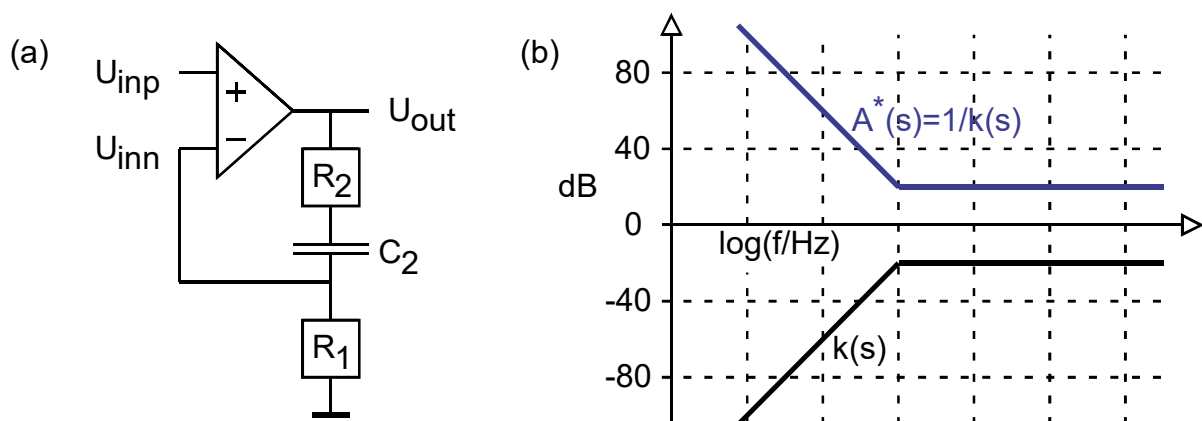


Bild 1.4.2.6: (a) Operationsverstärker mit Rückkopplungsnetzwerk, (b) Übertragungsfunktion des Rückkopplungsnetzwerks $B(s)$ und der Gesamtschaltung: $STF(s) \cong 1/B(s)$.: Die Übertragungsfunktion von B wird invertiert. [Notation im Bild: $A^* = STF$, $k = B$.]

1.4.2.7 Äquivalentes Eingangsrauschen als Qualitätskriterium

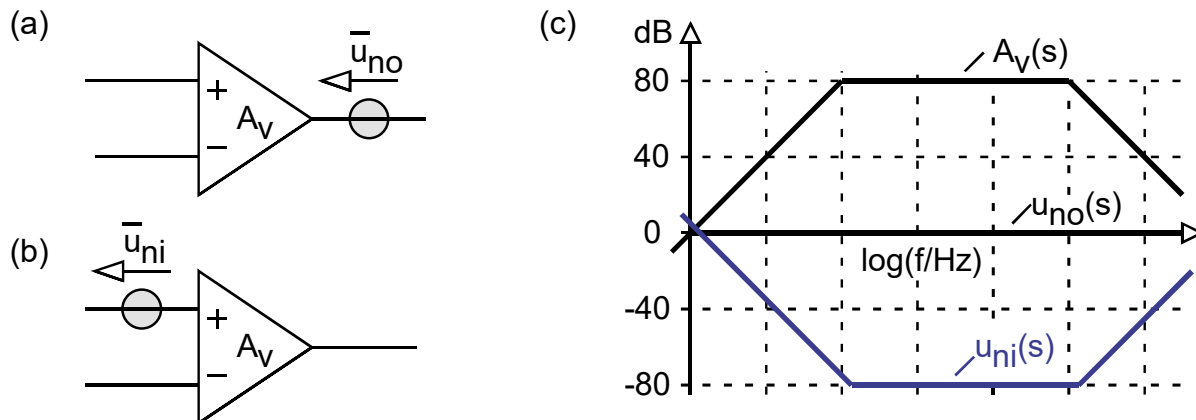


Bild 1.4.2.7: (a) Schaltung mit Rauschquelle von 0dB im Ausgang, (b) Schaltung mit äquivalentem Eingangsrauschen, (c) Übertragungsfunktionen $A_V(s)$, $\bar{u}_{no}(s)$, $\bar{u}_{ni}(s)$.

Das am Ausgang eines Verstärkers gemessenes Rauschen sagt wenig über seine Qualität aus, solange man seine Verstärkung nicht kennt. Ein Qualitätskriterium ist dagegen das äquivalente Eingangsrauschen.

Dieses Berechnet man, indem gemäß Bildteil (a) das rauschende Modul als rauschfreies Modul mit nachgeschalteter Ausgangsrauschquelle dargestellt wird. Alle gemessenen Fehler werden dieser Ausgangsrauschquelle zugeordnet. Dann wird diese Ausgangsrauschquelle in eine äquivalente Eingangsrauschquelle umgerechnet, indem man die Ausgangsrauschquelle durch die Verstärkung des Moduls teilt. Bild 1.4.2.6(c) zeigt $A_V(s)$ des Moduls und die Ausgangsrauschspannung $\bar{u}_{no}(f)$. Die äquivalente Eingangsrauschspannung $\bar{u}_{ni}(f)$ erhält man aus

$$\bar{u}_{ni}(f) = A_V^{-1}(f) \cdot \bar{u}_{no}(f).$$

Diese ist ein Maß für die Qualität des Verstärkers.

1.5 Großsignal- und Kleinsignal-Rechnungen

1.5.1 Umrechnung von Großsignal- auf Kleinsignal-Darstellung

1.5.2 Die Grundschaltungen von Bipolar- und Feldeffekt-Transistoren

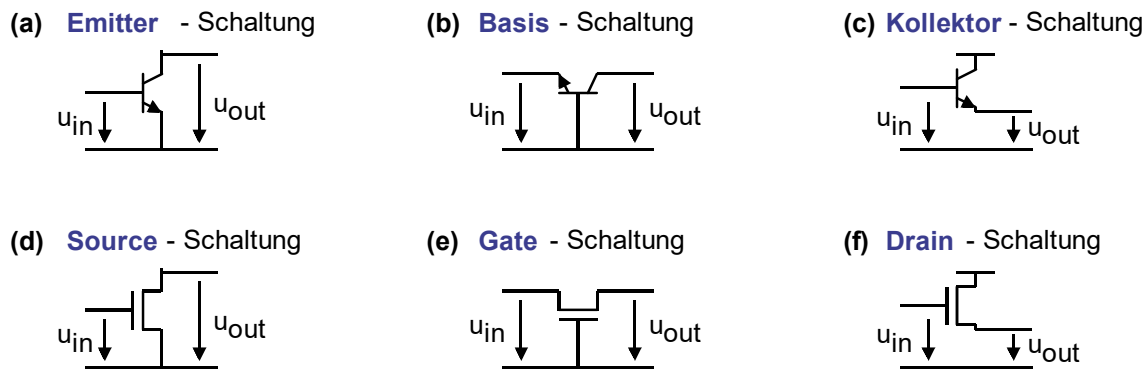


Bild 2.1.3: Die drei Grundschaltungen für bipolare und Feldeffekt- Transistoren.

Jeder in einer Schaltung verwendete Transistor lässt sich in eine von drei Grundschaltungsarten einordnen: Emitter-, Basis oder Drain-Schaltung für bipolare Transistoren und Source-, Gate- oder Drain-Schaltung für Feldeffekt-Transistoren. Die Schaltung wird nach der Elektrode benannt, die den steuernden Eingangskreis und dem gesteuerten Ausgangskreis gemeinsam ist.

Die Kollektor-Schaltung wird oft auch Emitter-Folger genannt.

Die Drain-Schaltung wird oft auch Source-Folger genannt.

1.5.3 Kleinsignal-Modelle für Emitter- und Source-Schaltung

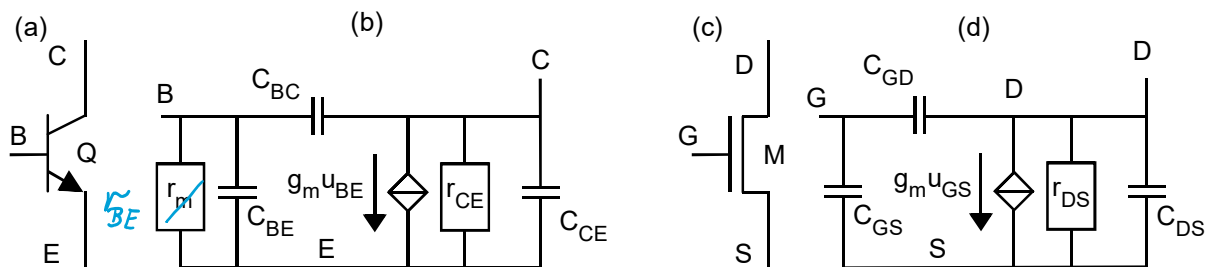


Bild 2.1.4: (a) BJT mit (b) dyn. Kleinsignal-ESB, (c) NMOSFET mit (d) dyn. Kleinsig.-ESB.

Die statischen Kleinsignal-Zugriffsimpedanzen von FETs und Bipolartransistoren lassen sich gemäß dem Bild auf der folgenden Seite zusammenfassen.

Das Bild auf der übernächsten Seite stellt die Analysearten vor: Großsignal und Kleinsignal, jeweils dynamisch und statisch.

- In den statischen Modellen wird Frequenz $f=0$ angenommen, so dass Kapazitäten zu Unterbrechungen und Induktivitäten zu Kurzschlüssen werden.
- Kleinsignal-Ersatzschaltbilder (ESBs) sind um den Arbeitspunkt (engl.: operating point) linearisiert. Dann gilt lineare Superposition, bei der Groß- und Kleinsignalsignal-Größen getrennt betrachtet und addiert werden können. Das Kleinsignal-ESB zeigt nur letztere.

1.5.4 Kleinsignal-Impedanzen für den FET gegen Masse

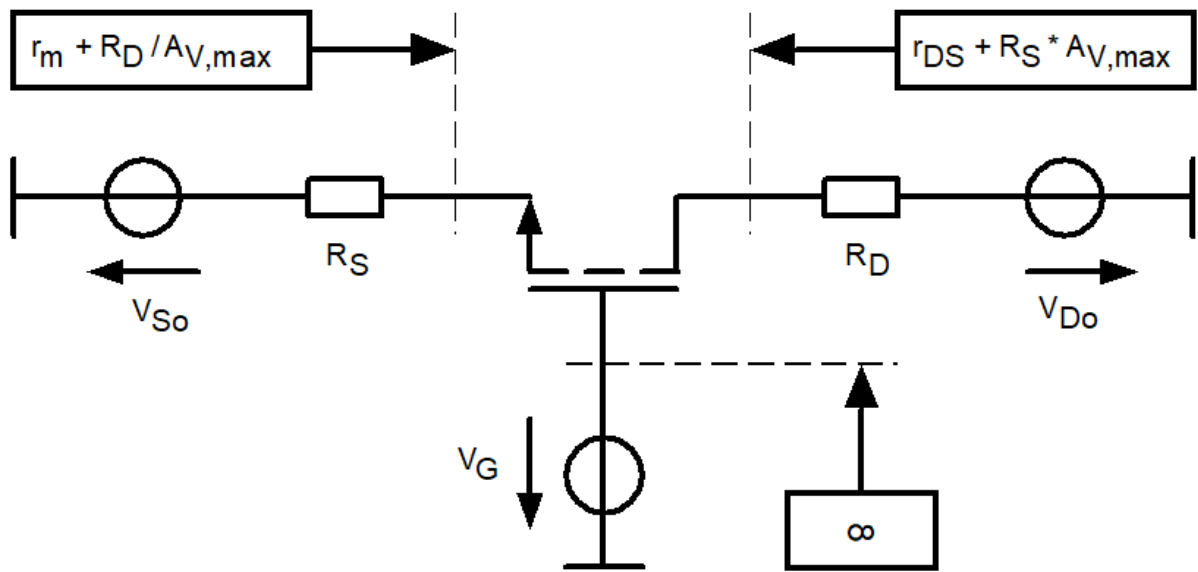
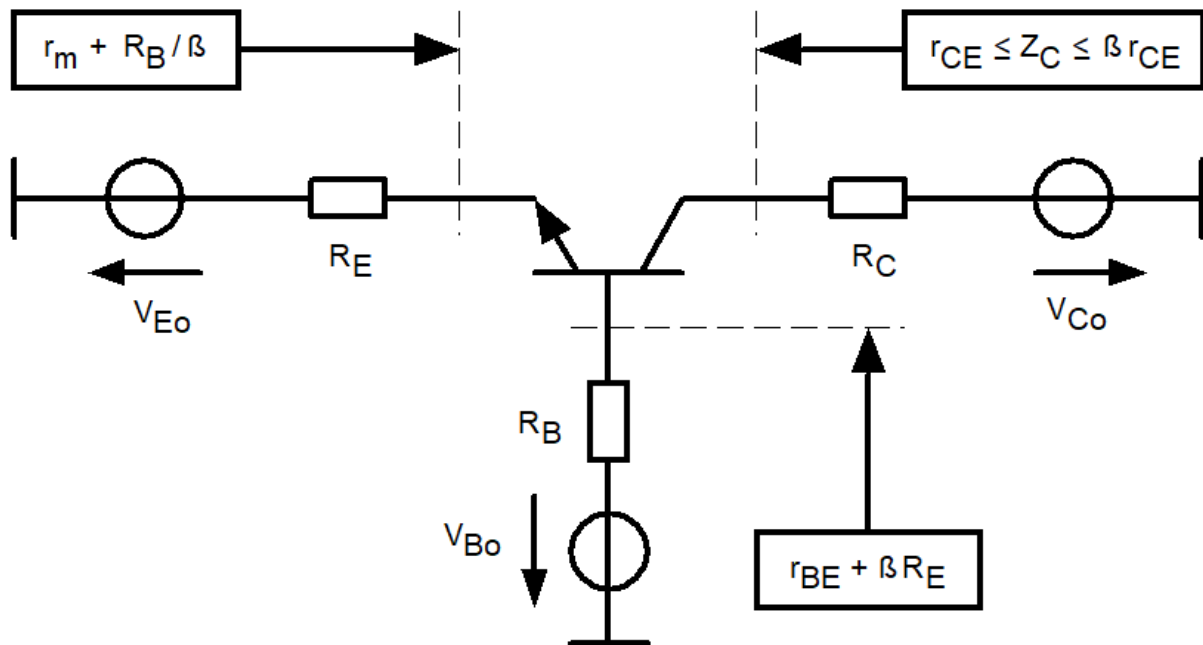


Bild 1.5.4: Kleinsignalimpedanzen FET, es ist $r_m = 1/g_m$ und $r_{DS} = 1/g_{DS}$

1.5.5 Kleinsignal-Impedanzen für den BJT gegen Masse



$$Z_C = r_{CE} * \frac{r_m + R_E}{r_m + R_E / \beta} \rightarrow \begin{matrix} R_E \ll r_m & \rightarrow & Z_C = r_{CE} \\ r_m < R_E < \beta r_m & \rightarrow & Z_C \cong R_E * A_{V,max} \\ R_E \gg \beta r_m & \rightarrow & Z_C = \beta r_{CE} \end{matrix}$$

Bild 1.5.5: Kleinsignalimpedanzen BJT, es ist $r_m = 1/g_m$ und $r_{DS} = 1/g_{DS}$

1.6 Schaltkreisanalyse: Techniken und Werkzeuge

1.6.1 Kategorisierung der Analysemethoden

Betrachtungen werden unternommen

(i) als Groß- und Klein-Signaldarstellung, und
 (ii) über folgenden Abszissen (x-Achsen):

- konstante Spannungen (Arbeitspunkt (engl. Operating Point), .OP-, .DC-Analysen)
- Zeit (Zeitbereichs-Analyse, Transient, .TRAN)
- Frequenz (Frequenzbereichs-Analyse, .AC), unterschieden zwischen $f=0$, endlich, ∞ .

Begriffe wie Groß- und Kleinsignal-Größen lassen sich am besten mit Hilfe praktischer Beispiele erläutern. Um diese mit ASCII-Text beschreiben zu können verwenden wir unten die (sehr veraltete aber herstellerunabhängige) Eingabesprache des analogen Schaltkreissimulators *Spice*. (Sie ist grau: kein Prüfungstoff!)

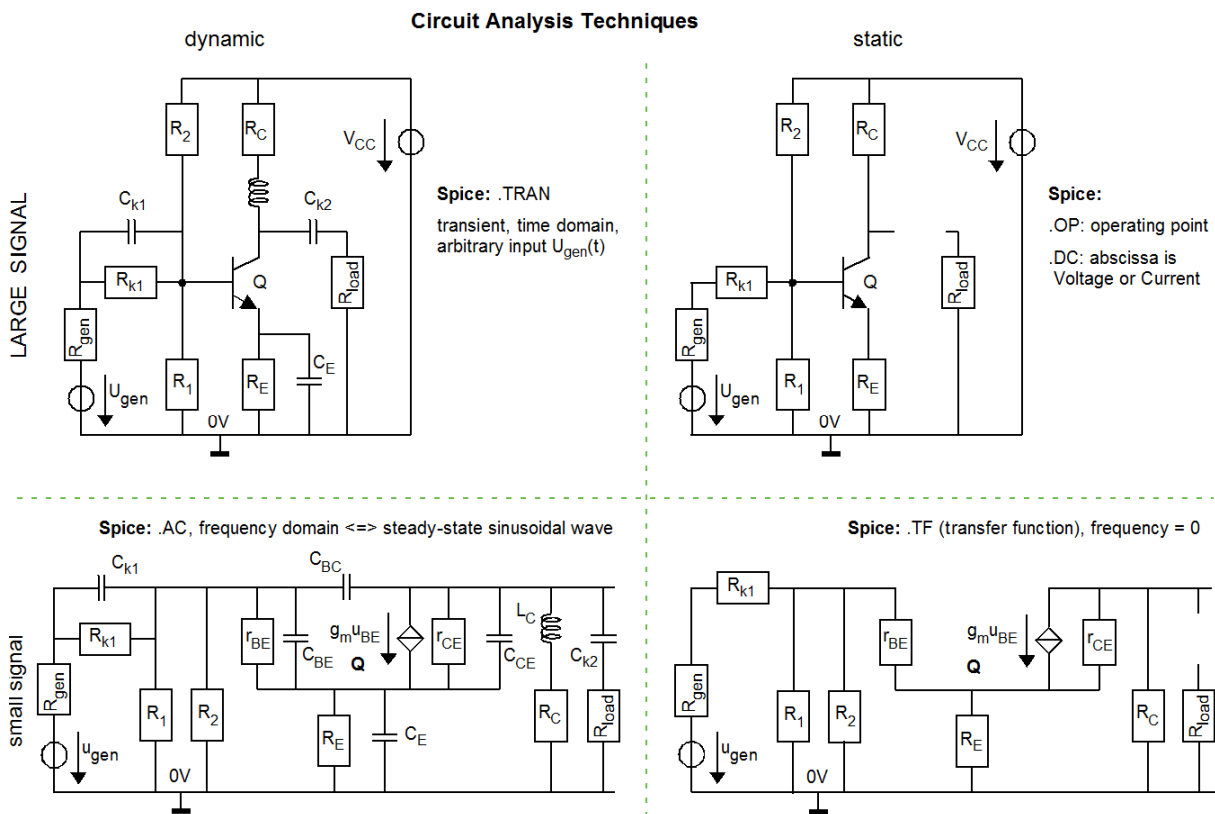


Bild 1.6.1: Einteilung der Schaltkreisanalysetechniken: linke / rechte Spalte: dynamisch / statisch, obere / untere Zeile: Großsignal / Kleinsignal

- Für $f=0$ werden Kapazitäten als Unterbrechungen und Induktivitäten als Kurzschlüsse behandelt.
- Für $f \rightarrow \infty$ werden Kapazitäten als Kurzschlüsse und Induktivitäten als Unterbrechungen behandelt. (Wichtig, weil Impuls- und Sprungantwort $f \rightarrow \infty$ enthalten!)

Übertragungsfunktionen:

Bei realen Systemen ist die Ordnung des Nenners immer höher als die des Zählers, da jedes System letztendlich ein Tiefpass ist. Bei sehr hohen Frequenzen macht sich die Masse der Elektronen als Trägheit bemerkbar. (Es gibt also in der realen Welt keinen echten Hochpass!)

$$\text{Sei } H(s) = \frac{a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + \dots + a_M \cdot s^M}{b_0 + b_1 \cdot s + b_2 \cdot s^2 + \dots + b_N \cdot s^N}$$

$$\text{Dann ist } H(0) = \frac{a_0}{b_0}$$

$$\text{Ferner } H(s) \xrightarrow{f \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty & \text{für } M > N \\ a_N / b_N & \text{für } M = N \\ 0 & \text{für } M < N \end{cases}$$

Matlab's Option "*LTI Systems*" verweigert die Simulation z.B. der Sprung- oder Impulsantwort von $H(s)$ für $M > N$ mit der Fehlermeldung, dass die Übertragungsfunktion nicht kausal sei.

1.6.2 Grundlagen einer textuellen *Spice* - Schaltungsbeschreibung

Wichtig an diesem Kapitel ist nicht das Erlernen des Schaltkreissimulators *Spice*, und/oder der textuellen Eingabe, sondern das Verständnis der Kategorisierungen, die *Spice* vornimmt in Klein- und Großsignal-Modelle, statisches und dynamisches Verhalten, weil uns diese Situationen in der Schaltungstechnik häufig begegnen. (Die Eingabe erfolgt heutzutage selten als Text (*Spice Input Deck*), sondern meistens als "Schematics Entry", das bedeutet mit Schaltungssymbolen. Aber das *Spice Input Deck* ist herstellerunabhängig.

Das Schaltkreis-Analyseprogramm *Spice* [2-5] (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) zur Simulation analoger Schaltungen wurde von der University of California, Berkeley (UCB) entwickelt und 1973 erstmals öffentlich vorgestellt. Dabei wurde die zu simulierende Schaltung mit einer ASCII-Textdatei (*Spice Input Deck*) beschrieben, deren Syntax aller Kritik zum Trotz bis heute ein De-facto-Standard ist. Diese weltweite „Normung“ ohne formale Norm ist nach wie vor für nahezu alle *Spice* - artigen Programme Schnittstelle zwischen Schaltkreiseingabe-Editoren (Schematics Entry) und dem Simulationskern. Dieser ist als C-Programm bei der UCB vom Internet ladbar. Hier werden nur die für dieses Skript benötigten Anweisungen und Funktionen erläutert.

Listing 1.6.2: Beispiel für eine textuelle Spice - Eingabedatei (Spice Input Deck)

```

Die erste Zeile in einem Spice Input Deck ist IMMER Kommentar
* Eine Zeile mit einem * in der ersten Spalte ist eine Kommentarzeile
* Text, der einem Semikolon ';' folgt, ist Kommentar
* Spice unterscheidet nicht zwischen Groß- und Klein-Buchstaben
*
* Schaltungsknoten werden mit Nummern oder Strings beschriftet.
* Der Schaltungsknoten 0 ist prinzipiell Masse, 0V
*
* Eine Zeile beschreibt ein Bauelement oder eine Steueranweisung
* Ein Bauelement wird durch seinen Anfangsbuchstaben festgelegt, z.B. Vin
* Eine Steueranweisung beginnt mit einem Punkt, beispielsweise .OP
*
* Beschreibung der Testumgebung
Vin 1 0 DC 3V AC 1V 0 SIN(1V 2V 1KHz); transient: Vin=1V+2V·sin(2π·1KHz·t)
* Vxxx: unabh. Spannungsquelle, String "DC" ist default und optional
* Knoten sind mit Nummern nummeriert, Knoten 0 liegt immer auf 0V

* Testschaltung: RLC-Tiefpass
R 1 2 10K ; von 10Kilo-Ohm,
L 2 3 22nH; Induktivität zwischen Knoten 2 und 3 von 22nH
C 3 0 10uF; Kapazität zwischen den Knoten 3 und 0 von 10 Mikrofarad
* Um welches Bauelementenamens es sich handelt entscheidet in Initiale
* Dimensionen wie V, A, H, F dürfen weggelassen werden
* Skalierungsfaktoren sind u.a.: m, u, n, p, K, MEG, G

* Analysen: Steueranweisungen beginnen mit einem Punkt
.OP
.DC Vin 0 5 0.25; bedeutet: Vin = 0 .. 5V, Schrittweite ¼V
.AC DEC 20 1Hz 10KHz; f-Achse gem. LOG10, 20 Punkte/Dekade von 1Hz-10KHz
.TRAN 10ns 5ms; transiente Simulation mit Δt≤10ns, von 0-5ms.

```

Übung: Zeichnen Sie die Schaltung, die mit Listing 1 definiert wird.

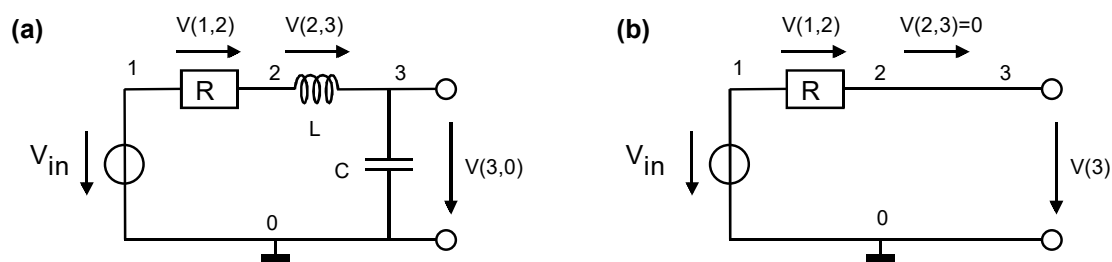


Bild 1.6.2: (a) Schaltung gemäß Listing 1.4.1, (b) reduziert für Analysen .OP und .DC

1.6.3 Spice Analysen

Bild 1.4.3 zeigt einen npn-Bipolartransistor mit einer Strom- und einer Spannungsquelle. Knoten 0 ist immer Masse, die Knoten $n1$ und $n2$ wurden mit Labeln statt mit Nummern bezeichnet. Die Analysen

- .OP und .DC berechnen Großsignallösungen mit Kapazitäten als Unterbrechungen
- .TRAN berechnet Großsignalmodelle gemäß Bildteil (a) über der Zeitachse,
- .AC berechnet Kleinsignale gemäß Bildteil (b) über der Frequenzachse (Bode-Diagramm).

Listing 1.6.3: Beispiel für eine Spice-Eingabedatei mit 1 Bipolartransistor und 2 Quellen.

```

Test eines Bipolartransistors
* Testumgebung
IB 0 n1 DC 1uA AC 1mA SIN(10uA 1uA 1KHz);
VCE n2 0 DC 5V AC 1V;

* DUT (Device Under Test): Bipolartransistor
Q n2 n1 0 BCY200; = Transistorname C B E Modellname
.MODEL BCY200 NPN(BF=200 CJC=20pF CJE=20pF IS=1E-16)
* nicht genannte Modellparameter werden auf Default-Werte gesetzt

* Analysen
.DC VCE 0 5V 0.1V IB 0 50uA 10uA; geschachtelte Schleife
.AC DEC 20 1Hz 10KHz; f-Achse gem. LOG10, 20 Punkte/Dekade von 1Hz-10KHz
.TRAN 10ns 5ms; Transiente Simulation,  $\Delta t \leq 10\text{ns}$ , von 0-5ms.

```

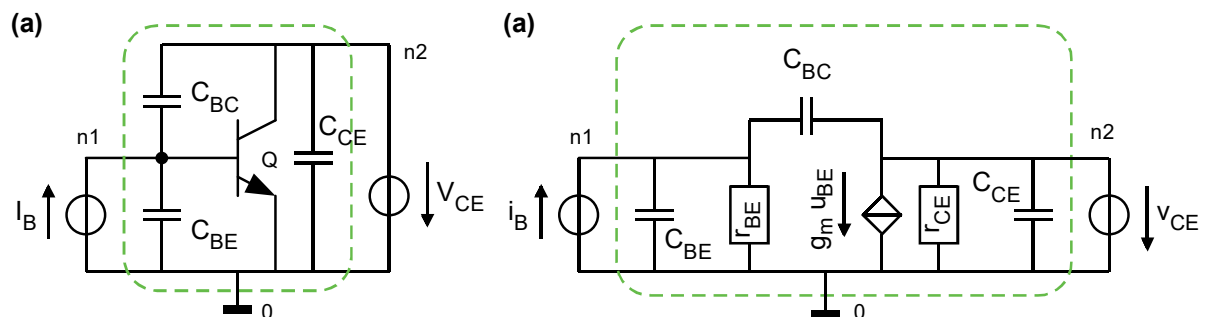


Bild 1.6.3: (a) Schaltung gemäß Listing 1.4.3 für .TRAN - Analyse, (b) für .AC-Analyse

1.6.3.1 .OP: Arbeitspunkt- (engl. operating point) Berechnung

Die .OP-Anweisung berechnet die Großsignal-Spannungen und Ströme **zum Zeitpunkt t=0**.

Im Arbeitspunkt werden nur die DC-Spannungen zum Zeitpunkt 0 betrachtet und alle Knotenspannungen und Zweigströme mit Großsignalmodellen berechnet. Eine Graphik kann nicht angefertigt werden, da sie nur einen Punkt enthalten würde.

Bei der OP-Analyse sind Kapazitäten Unterbrechungen und Induktivitäten Kurzschlüsse.

Großsignal-Berechnung bedeutet, dass für nichtlineare Bauelemente auch nichtlineare Gleichungssysteme gelöst werden müssen.

Beispiel für eine Großsignalrechnung:

Für die Masche in Bild 1.4.3.1 gilt $U_R + U_D - V_q = 0 \rightarrow U_R = V_q - U_D$. Mit

$$I_R = U_R/R \text{ und } I_D = I_S \cdot \left(e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}} - 1 \right) \text{ ergibt sich aus } I_D = I_R \text{ die}$$

nichtlineare Gleichung

$$I_S \cdot \left(e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}} - 1 \right) = \frac{V_q - U_D}{R}, \text{ die nach in } U_D \text{ gelöst werden muss.}$$

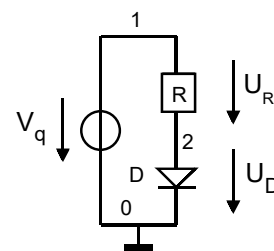


Bild 1.4.3.1: Masche mit Diode als nicht-linearem Bauelement.

1.6.3.2 .DC: Statische Großsignal-Analyse

Die DC-Analyse berechnet das Großsignalverhalten **über der Abszisse Strom o. Spannung**.

Eine DC-Analyse ist eine Reihe von OP-Analysen, bei denen 1 oder 2 DC-Spannungen schrittweise verändert werden. Dies eignet sich beispielsweise für die Berechnung des Kennlinienfeldes eines Transistors gemäß Bild 1.4.3(a). **Bei der .OP und .DC-Analyse sind Kapazitäten Unterbrechungen und Induktivitäten Kurzschlüsse.**

Die Steueranweisung

```
.DC VCE 0 5V 0.1V;
```

löst eine DC-Simulation aus, bei der VCE von 0V bis 5V in Schritten von 0.1V durchlaufen wird.

Die Steueranweisung

```
.DC VCE 0 5V 0.1V IB 0 50uA 10uA; geschachtelte Schleife
```

fügt eine äußere Schleife hinzu, bei welcher der Strom I_B von 0-50 μ A in Schritten von 10 μ A verändert wird.

Steueranweisung sind so aufgebaut, dass die wichtigsten Parameter zuerst genannt werden, so dass man möglichst viele weglassen kann. Für diese werden dann Default-Werte eingesetzt.

1.6.3.3 .TRAN: Dynamische Großsignal-, Zeitbereichs- (engl. Time Domain) Analyse

Die Transienten-Analyse berechnet das Großsignalverhalten der **über der Zeitachse**.

Das Wort *transient* kommt vom lateinischen *trans-ire* = (hin)über-gehen. (Deutsch und englisch steht „Transit...“ für „Durchgangs..., Übergangs...“) Transienten sind typischerweise Einschwingvorgänge, z.B. das Einschwingverhalten einer Schaltung nach dem Umschalten einer anregenden Frequenz. Im eingeschwingenen Zustand nutzt man die → AC-Analyse.

Voraussetzung als Startpunkt einer Transientenanalyse ist die Ermittlung des Arbeitspunktes. Er wird automatisch berechnet, auch wenn man keine OP-Anweisung gesetzt hat.

Die Spice-Anweisung

```
IB 0 n1 DC 1uA AC 1V SIN(10uA 1uA 1KHz);
```

Sagt aus, dass die Stromquelle (weil Initiale I) bei der Arbeitspunktberechnung den DC-Wert $10\mu\text{A}$ verwendet in der .AC-Analyse als Quelle 1V und bei der Transientenanalyse einen sinusförmigen Strom mit Offset $10\mu\text{A}$, Amplitude $1\mu\text{A}$ und 1KHz Frequenz.

1.6.3.4 .AC: Kleinsignal-, Frequenzbereichs- (engl. Frequency Domain) Analyse

Die AC-Analyse berechnet das Kleinsignalverhalten der Schaltung **über der Frequenzachse**. Sie ist auch als **Bode-Diagramm** bekannt.

Als erstes wird mit den DC-Größen der Spannungsquellen mit den nichtlinearen Modellen ein Arbeitspunkt berechnet. Dann wird die Schaltung im Arbeitspunkt linearisiert, indem man im OP die Kleinsignalparameter ermittelt, zum Beispiel $r_{CE} = dU_{CE}/dI_C$. Anschließend werden die Bauelemente wie in Bild 1.4.3(b) durch entsprechende Kleinsignalmodelle ersetzt. Arbeitspunkt-Spannungen und –Ströme werden auf Null gesetzt.

In einer linearen Schaltung verursacht eine sinusförmige Anregung nach Abklingen der Transienten sinusförmige Spannungen und Ströme gleicher Frequenz. Das Verhältnis von Eingangsspannung zu Ausgangsspannung(en) kann als Amplitudenverhältnis (Amplitudengang) und Phasenverschiebung (Phasengang) angegeben werden.

Die Spice-Anweisung

```
Vxxx ... AC Amplitude phi
```

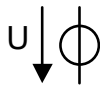
Bezieht sich auf die Formel $U_{out}(j\omega) = H(j\omega) U_{in}(j\omega)$, wobei $U_{in}(j\omega) = \text{Amplitude} \cdot e^{j(\omega t + \text{phi})}$ ist. Der Anfangswinkel phi wird typischerweise weggelassen, sein Defaultwert ist 0 . Die Frequenzpunkte der Abszisse werden in der .AC - Steueranweisung festgelegt.

Als Amplitude gibt man bei Spannungen typischerweise 1V ein, weil dann alle anderen Spannungswerte gleich der Verstärkung sind. Ob der Ausgangswert die real erreichbare Maximalspannung überschreitet ist dabei irrelevant. Das Model ist linearisiert und berechnet problemlos 200KV Ausgangsspannung bei einer Betriebsspannung von 3V .

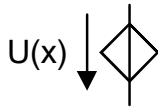
1.7 Elektrische Symbole und Zeichen

1.7.1 Quellen

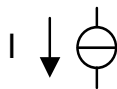
1.7.1.1 Normierte Symbole für Quellen



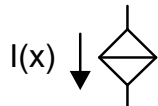
unabhängige Spannungsquelle



gesteuerte Spannungsquelle



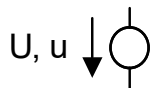
unabhängige Stromquelle



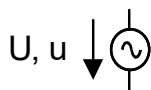
gesteuerte Stromquelle

Man beachte die in den oben aufgeführten Symbolen enthaltene Symbolik für Kleinsignale: Kurzschluss oder Unterbrechung.

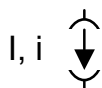
1.7.1.2 Andere übliche Symbole für Quellen



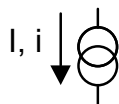
Spannungsquelle



Wechselspannungsquelle



Stromquelle



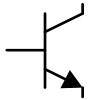
Stromquelle, die Ringe können als Symbol für den Transformator gesehen werden

1.7.2 Halbleiter-Bauelemente

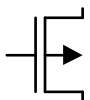
1.7.2.1 Transistorsymbole mit denen wir arbeiten



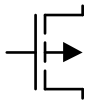
pnp Bipolar-Transistor



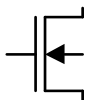
nnp Bipolar-Transistor



p-Kanal MOSFET, selbstleitend (engl.: depletion type), $V_T > 0$



p-Kanal MOSFET, selbstsperrend (engl.: enhancement type), $V_T < 0$



n-Kanal MOSFET, selbstleitend (engl.: depletion type), $V_T < 0$



n-Kanal MOSFET, selbstsperrend (engl.: enhancement type), $V_T > 0$

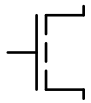


n-Kanal Sperrschicht FET, auch J(unction) FET genannt,
oder MESFET (MES steht für „metal - semiconductor“, z.B. Alu - GaAs)

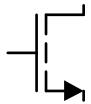


p-Kanal Sperrschicht FET bzw. J FET (selten)

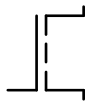
1.7.2.2 Varianten: ähnliche Transistorsymbole



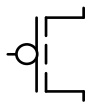
n-Kanal MOSFET, Bulk auf V_{SS}



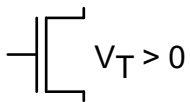
n-Kanal MOSFET, Bulk auf V_{SS} , Source mit Pfeil gekennzeichnet



n-Kanal MOSFET, Bulk auf V_{SS} , Source gekennzeichnet (rechts unten)



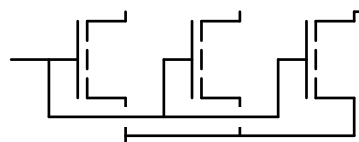
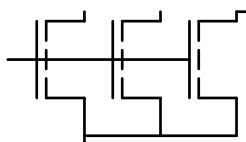
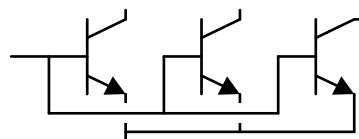
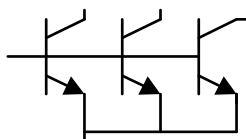
p-Kanal MOSFET, Bulk auf V_{DD}



n-Kanal MOSFET, Bulk auf V_{SS}

1.7.2.3 Symbole mit mehreren Transistoren

Oft sieht man zusammengesetzte Symbole, die eigentlich einen Kurzschluss zur Folge hätten. Diese Schreibweisen vereinfachen und veranschaulichen die graphische Darstellung.



Oft sieht man zusammengesetzte Symbole, die eigentlich einen Kurzschluss zur Folge hätten. Diese Schreibweisen vereinfachen und veranschaulichen die graphische Darstellung.

Die wichtigsten Leistungsschalter

Symbol	Innenschaltung	Kommentar
		Darlington-Transistor, npn-Typ. Häufig als Leistungstreiber. $\beta = \beta_1 \beta_2$, $U_{BE} \approx 1,4V$. Oft mit Widerstand R, wodurch (a) bei $I_R \geq I_{B2}$ der Arbeitspunkt von Q_1 stabilisiert und (b) Q_2 schneller ausgeschaltet wird.
		Darlington-Transistor, pnp-Typ. Sehr selten, da pnp-Transistoren schlechtere Leistungstreiber sind, als npn-Transistoren. $U_{BE} \approx -1,4V$.
		Pseudo- oder Komplementär-Darlington-Transistor, npn-Typ. Häufig als Leistungstreiber. Effektiv, weil ein npn-Transistor den Hauptteil der Leistung treibt. $\beta = \beta_1 \beta_2$, $U_{BE} \approx -0,7V$.
		Pseudo-Darlington-Transistor, pnp-Typ. Selten, da pnp als Leistungstreiber wenig hilfreich. $U_{BE} \approx 0,7V$. Wird zum IGBT, wenn man Q_1 durch M ersetzt.
		IGBT: Insulated Gate Bipolar Transistor, n-Kanal-Typ. häufig, ermöglicht leistunglose Steuerung großer Ströme. (Aus praktischen Gründen der fast ausschließlich gebaute IGBT.)
		IGBT: Insulated Gate Bipolar Transistor, p-Kanal-Typ, selten. (Dieser IGBT-Typ wird aus praktischen Gründen sehr selten gebaut.)

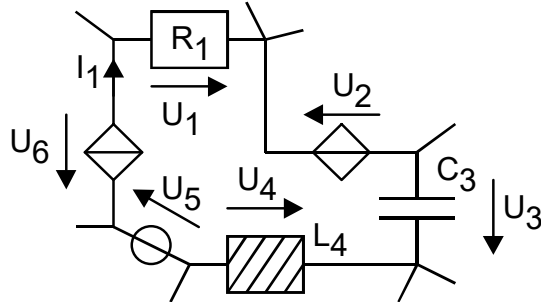
1.8 Spannung, Strom und Ladung

1.8.1 Kirchhoff'sche Maschenregel (Lit.: KVL: Kirchhoff's Voltage Law)

Die Summe aller Spannungen um eine Masche ist Null.

Bild 1.8.1:

Spannungen einer geschlossenen Masche eines Netzwerkes



Beispiel Bild 1.8.1:

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5 - U_6 = 0$$

Gegeben sei $U_1=1V$, $U_2=2V$, $U_3=3V$, $U_4=4V$, $U_5=5V$. Wie groß ist U_6 ?

$$U_6 = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5 = (1 - 2 + 3 - 4 + 5)V = 3V$$

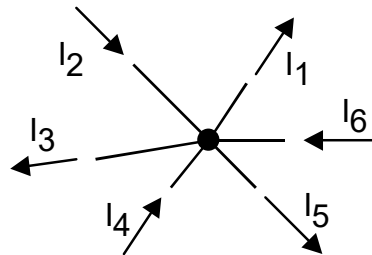
Diese Regel gilt bei Verwendung komplexer Spannungen für Real- und Imaginärteil.

1.8.2 Kirchhoff'sche Knotenregel (Lit.: KCL: Kirchhoff's Current Law)

Die Summe aller Ströme in einen Schaltungsknoten ist Null.

Bild 1.8.2:

Ströme an einem Knoten eines Netzwerkes



Beispiel Bild 1.2-2:

$$-I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 + I_6 = 0$$

Es sei $I_1=1mA$, $I_2=2mA$, $I_3=3mA$, $I_4=4mA$, $I_5=5mA$. Wie groß ist I_6 ?

$$I_6 = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = (1 - 2 + 3 - 4 + 5)mA = 3mA$$

Diese Regel gilt bei Verwendung komplexer Ströme für Real- und Imaginärteil.

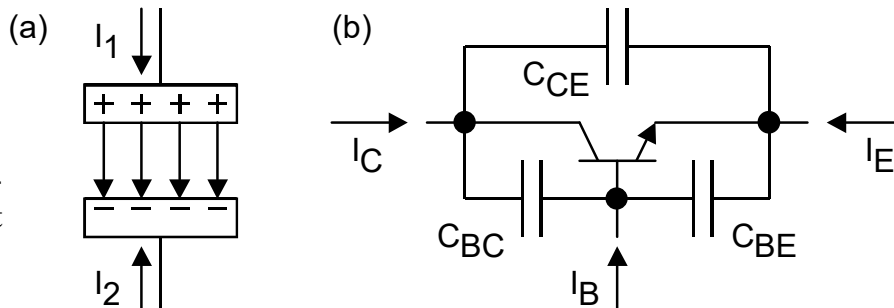
1.8.3 Ströme und Ladungen eines Bauelementes

Die Summe aller Ströme in ein Bauelement ist Null. Andernfalls lädt sich das Bauelement als Elektrode einer Kapazität durch Aufbau elektrischer Feldlinien gegen einen anderen Leiter auf.

Bild 1.8.3:

(a) Kapazität.

(b) Bipolartransistor, interne Kapazitäten explizit gezeichnet



Beispiel Bild 1.8.3(a): $I_{gesamt} = I_1 + I_2 = 0$

Die Ladung Q_1 auf der oberen Kondensatorplatte in berechnet sich zu $Q_1 = \int I_1 dt$

Die gesamte Ladung Q_{gesamt} in der Kapazität ist $Q_{gesamt} = Q_1 + Q_2 = \int I_{gesamt} dt = \int 0 dt = 0$, wobei $Q_2 = \int I_2 dt$ die Ladung auf der unteren Kondensatorplatte ist.

Beispiel Bild 1.8.3(b): $I_{gesamt} = I_C + I_B + I_E = 0$

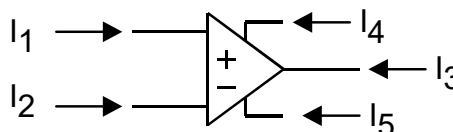
Die gesamte Ladung Q_{gesamt} in dem Transistor ist $Q_{gesamt} = \int I_{gesamt} dt = \int 0 dt = 0$.

1.8.4 Ströme und Ladungen einer Schaltung

Die Summe aller Ströme in eine Schaltung ist Null. Andernfalls lädt sich die Schaltung als Elektrode einer Kapazität durch Aufbau elektrischer Feldlinien gegen einen anderen Leiter auf.

Bild 1.8.4:

Operationsverstärker



Es bestehen keine galvanischen Verbindungen oder kapazitive Kopplungen zum Umfeld der Schaltung als den eingezeichneten.

Der gesamte Strom in die Schaltung ist $I_{gesamt} = \sum_k I_k = 0$

Die gesamte Ladung $Q_{gesamt}(I_{gesamt})$ einer Schaltung ist $Q_{gesamt} = \int I_{gesamt} dt = \int 0 dt = 0$

Beispiel Bild 1.8.4: $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$

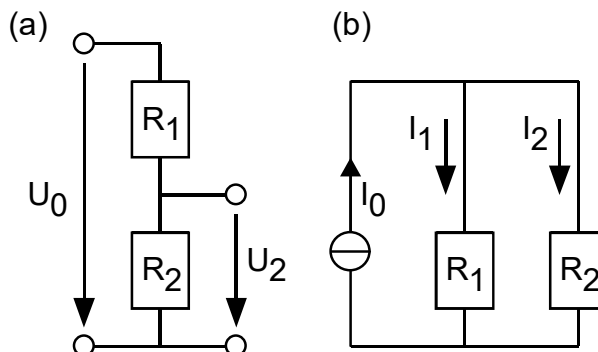
1.8.5 Spannungs- und Stromteiler

1.8.5.1 Formeln zur Berechnung von Spannungs- und Stromteilern

Es sei $G_1 = 1/R_1$ und $G_2 = 1/R_2$.

Bild 1.8.5.1:

- a) Spannungsteiler
b) Stromteiler



Beispiel Bild 1.8.5.1(a): Spannungsteiler

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} U_0$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} U_0$$

Berechnung eines Widerstandes R_2 , um eine Ausgangsspannung $U_2 = f(R_1, U_2)$ zu bekommen:

$$\frac{U_2}{U_0} = \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Anwendungen:

Berechnung von (Eingangsimpedanz) R_2 , wenn R_1 bekannt:

$$R_2 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} R_1$$

Berechnung von (Ausgangswiderstand) R_1 , wenn R_2 bekannt:

$$R_1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} R_2$$

Beispiel Bild 1.8.5.1(b): Stromteiler

$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_0$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$$

1.8.5.2 Anwendung von Spannungsteilern zur Impedanzmessung

Messen des Ausgangswiderstandes einer Schaltung

Bild 1.8.5.2(a):
Verstärker mit zuschaltbarer Last.

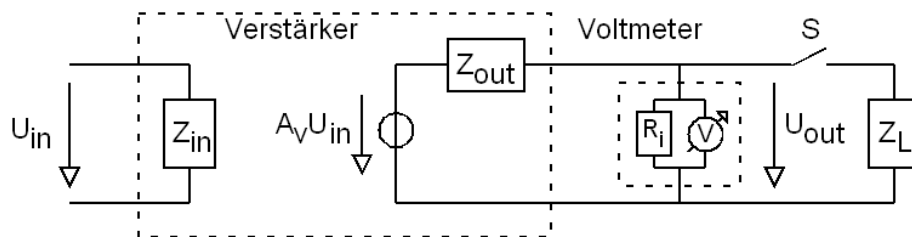


Bild 1.8.5.2(a) zeigt einen Verstärker dessen Ausgangswiderstand gemessen werden soll. Der Innenwiderstand R_i des Voltmeters soll wegen $R_i \gg Z_{out} || Z_L$ vernachlässigt werden. Bei geöffnetem Schalter und $U_{in}(t) = U_{i0} \cdot \sin(\omega t)$ messen wir die Ausgangsamplitude $U_{out} = U_0$. Bei geschlossenem Schalter und gleichem U_{in} ist die Ausgangsamplitude $U_{out} = a \cdot U_0$.

Aus obiger Spannungsteiler-Regel ergibt sich $Z_{out} = Z_L \frac{1-a}{a}$.

Beispiel: für $a=0,75$ und $Z_L=100\Omega$ ist der Ausgangswiderstand der Schaltung

$$Z_{out} = 100\Omega \frac{1-0,75}{0,75} = 33,3\Omega$$

Es sei daran erinnert, dass $0 \leq a \leq 1$ sein muss und dass für $a=1/2$ $Z_L=Z_{out}$ ist. Bei der sogenannten „Halbspannungsmethode“ verändert man Z_L bis $a=1/2$ ist.

Messen eines hohen Eingangswiderstandes

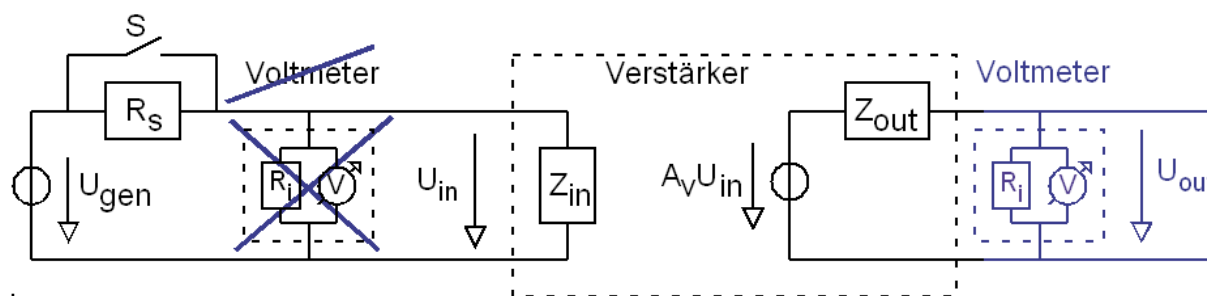


Bild 1.8.5.2(b): Messung eines hohen Eingangswiderstandes.

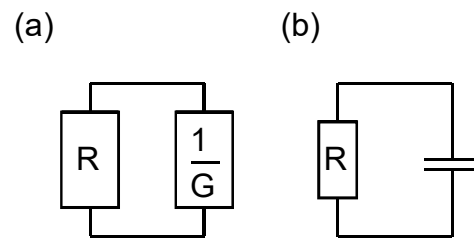
In Bild 1.8.5.2(b) soll der Eingangswiderstand einer Schaltung gemessen werden. Es sei z.B. $Z_{out} \approx 100\Omega$ und $Z_{in} \approx 5M\Omega$, daher wird $R_s = 4,7M\Omega$ gewählt. Das Messgerät ist mit einem Eingangswiderstand von $R_i \geq 1M\Omega$ spezifiziert. Würde man das Messgerät vor den Eingang schalten (durchgestrichen dargestellt), so würde man mehr den Innenwiderstand des Messgerätes als den Eingangswiderstand der Schaltung messen.

Daher hängt man das Messgerät an den Ausgang der Schaltung und misst, um welchen Faktor a die Amplitude U_{out} durch Zuschalten von R_S zusammenbricht. Bei konstanter Verstärkung A_V des Verstärkers muss der Spannungseinbruch a am Ein- und Ausgang gleich groß sein, so dass man den Faktor a , der am Eingang auftritt, am Ausgang messen kann. Mit Hilfe der Spannungsteilerformel angewendet auf R_S und Z_{in} erhält man

$$Z_{in} = R_S \frac{a}{1-a} \quad \text{mit} \quad a = \frac{U_{out}(R_S = 4,7M\Omega)}{U_{out}(R_S = 0\Omega)}$$

1.8.5.3 Parallelschaltung von Widerstand und Leitwert

Bild 1.8.5.3: Parallelschaltung von
 (a) Widerstand R und Leitwert G ,
 (b) Widerstand R und Leitwert sC .



Häufig findet man die Parallelschaltung von einem Leitwert und einem Widerstand. Man erhält die Gesamtimpedanz zu

$$Z = R \parallel G^{-1} = \frac{G^{-1}R}{G^{-1} + R} = \boxed{\frac{R}{1 + GR}}$$

Der Widerstand wird also um den Faktor $(1+GR)$ gemindert. Als Beispiel sei hier die Parallelschaltung eines Widerstandes R und einer Kapazität mit Leitwert sC genannt. Als Gesamtimpedanz erhält man

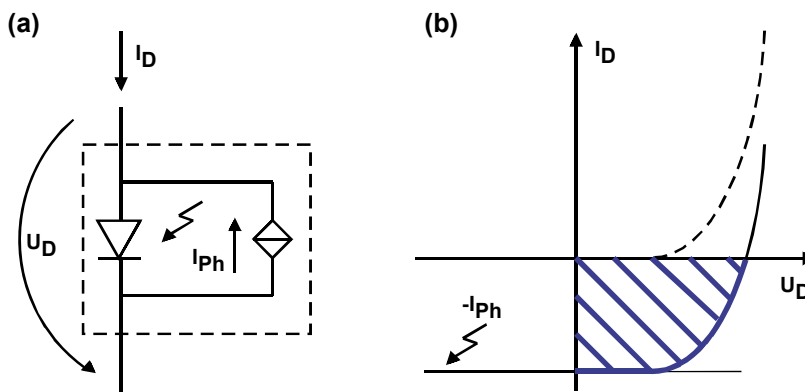
$$Z = \frac{R}{1 + sCR}$$

1.8.6 Energie-Quellen und -Senken

1.8.6.1 Identifikation von Energie-Quellen und -Senken

Wenn Spannungs- und Strompfeil an einem zweipoligen Bauelement in die gleiche Richtung zeigen, dann handelt es sich bei einem positiven Produkt um eine Energiesenke und bei einem negativen Produkt um eine Energiequelle. (Wechsel möglich, z.B. C, L, Akku, Photodiode ...)

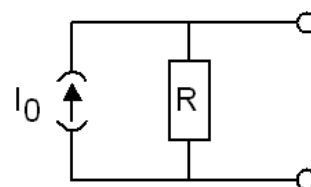
Bild 1.8.6.1: Solarzelle. Sie kann je nach Betrieb als Energiequelle oder Senke arbeiten. Im Bild arbeitet sie im schraffierten Bereich als Quelle.



1.8.6.2 Umwandlung von linearen Netzwerken nach Norton und Thévenin

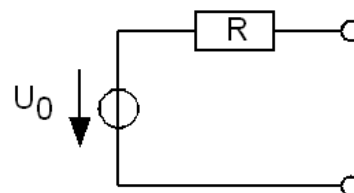
Norton-Theorem

Jede lineare Schaltung bestehend aus Spannungsquellen, Stromquellen und Widerständen lässt sich in ihr Norton-Äquivalent umwandeln, welches aus einer Stromquelle und einem parallelen Widerstand besteht.



Thévenin-Theorem

Jede lineare Schaltung bestehend aus Spannungsquellen, Stromquellen und Widerständen lässt sich in ihr Thévenin-Äquivalent umwandeln, welches aus einer Spannungsquelle und einem seriellen Widerstand besteht.



Norton-Thévenin-Äquivalent-Umwandlungen:

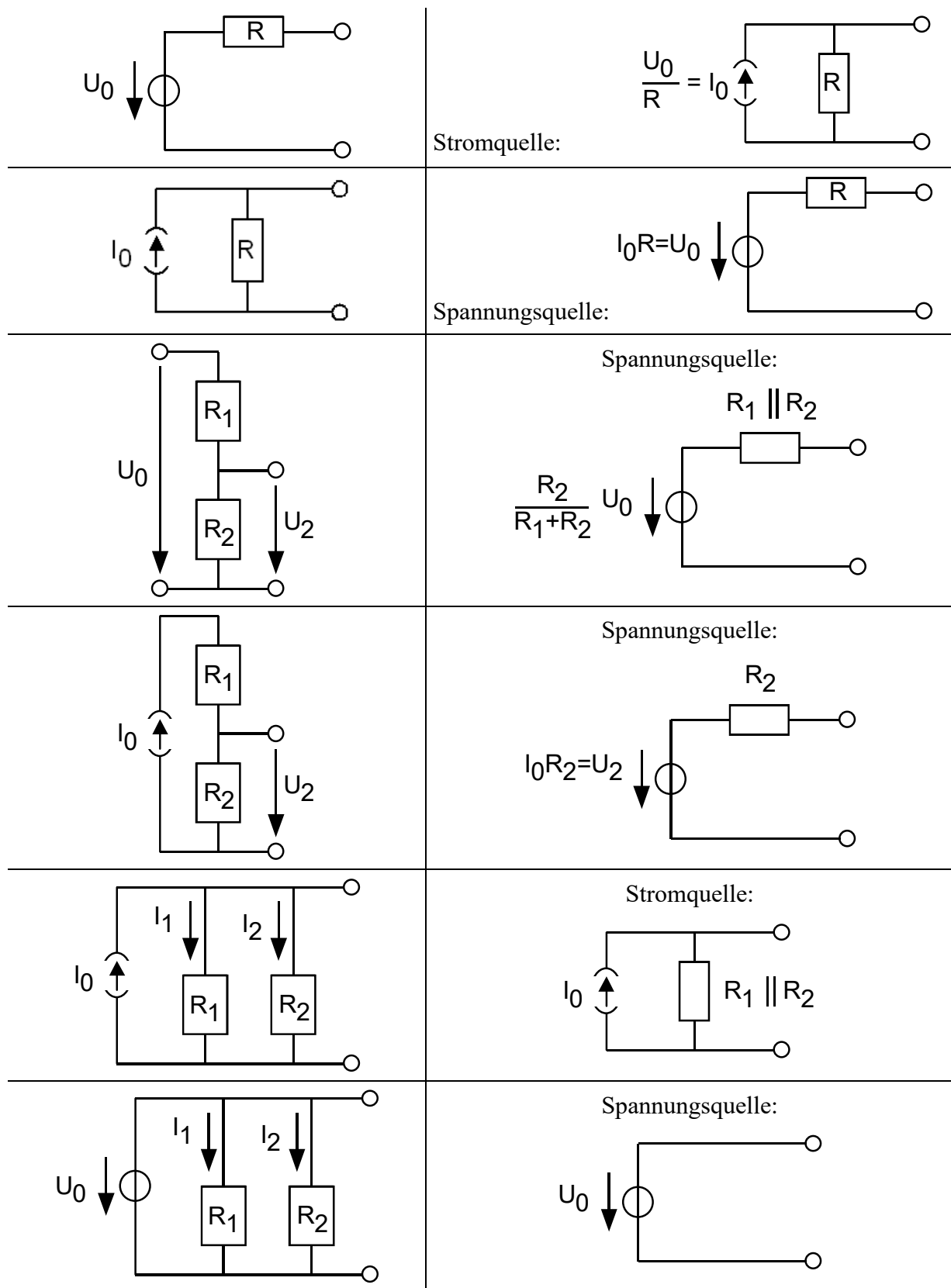
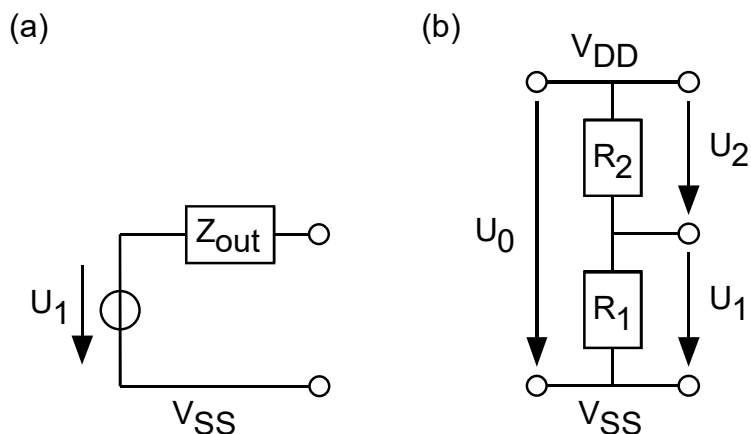


Bild 1.8.6.2: Elektrisch äquivalente Schaltkreise.

1.8.6.3 Spannungsquelle mit Spannungsteiler realisieren

Bild 1.8.6.3:

- (a) Benötigte Schaltung.
 (b) Realisierung mit Hilfe von V_{DD} .



Benötigt werde eine Spannungsquelle mit der Quellspannung U_1 und der Ausgangsimpedanz Z_{out} gemäß Bild 1.8.6.3(a) benötigt. Realisiert werden soll diese Quelle mit dem Spannungsteiler in Bildteil (c).

Wir definieren die Spannungsteiler-Verhältnisse als $a = \frac{U_1}{U_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, $b = \frac{U_2}{U_0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Aus der Parallelschaltungsformel $Z_{out} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ergibt sich $Z_{out} = a R_2 = b R_1$

Und somit $R_1 = \frac{Z_{out}}{b}$, $R_2 = \frac{Z_{out}}{a}$. Einsetzen der Spannungsverhältnisse für a und b liefert

$$\boxed{R_1 = Z_{out} \frac{U_0}{U_2}}$$

$$\boxed{R_2 = Z_{out} \frac{U_0}{U_1}}$$

Wenn man die Konstante b eliminieren möchte: Wie aus der obigen Definition von a und b leicht zu ersehen ist gilt $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$. Folglich kann $R_1=Z_{out}/b$ auch bestimmt werden aus

$$R_1 = \frac{Z_{out}}{1-a} = R_2 \frac{a}{1-a} .$$

1.9 Lineare Überlagerung (Superposition) in linearen Netzwerken

1.9.1 Anwendung auf beliebige, lineare Netzwerke

Bild 1.9.1(a):

Lineares Netzwerk mit drei voneinander unabhängigen Quellen.

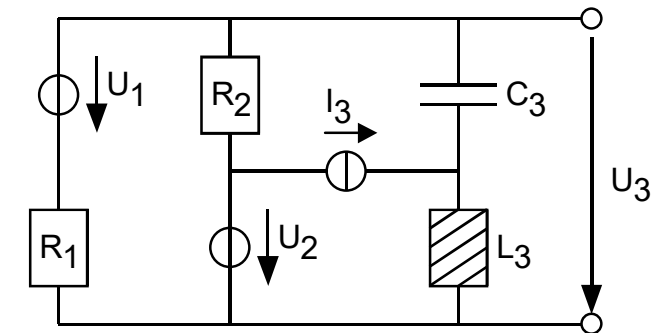
Gesamtspannung $U_3 = U_{3,1} + U_{3,2} + U_{3,3}$
 Gesamtstrom $I_{C3} = I_{C3,1} + I_{C3,2} + I_{C3,3}$
 Gesamtstrom $I_{L3} = I_{L3,1} + I_{L3,2} + I_{L3,3}$

Partialgrößen U_i, I_{Ci}, I_{Li} berechnen:

(b.1): Situation für $U_2=I_3=0$, Berechnung der Partialgrößen $I_{C3,1}, I_{L3,1}, U_{3,1}$ mit der Quellenumwandlung $I_1=U_1/R_1$:

$$I_{C3,1} = I_{L3,1} = I_1 \frac{R_1 \parallel R_2}{(R_1 \parallel R_2) + Z_3} = I_1 \frac{R_{12}}{R_{12} + Z_3}$$

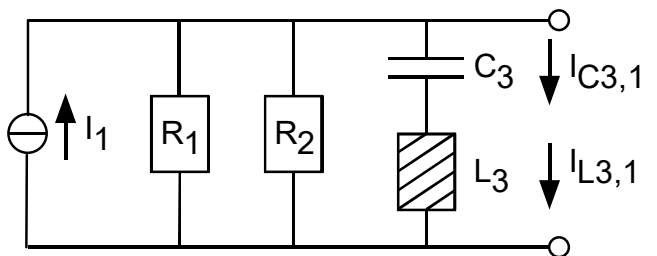
$$= \frac{U_1}{R_1} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + Z_3}, \quad U_{3,1} = I_{3,1}(sL + 1/sC)$$



(b.2): Situation für $U_1=I_3=0$, Berechnung der Partialgrößen $I_{C3,2}, I_{L3,2}, U_{3,2}$ mit der Quellenumwandlung $I_2=U_2/R_2$:

$$I_{C3,2} = I_{L3,2} = I_2 \frac{R_{12}}{R_{12} + Z_3} = \frac{U_2}{R_2} \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + Z_3},$$

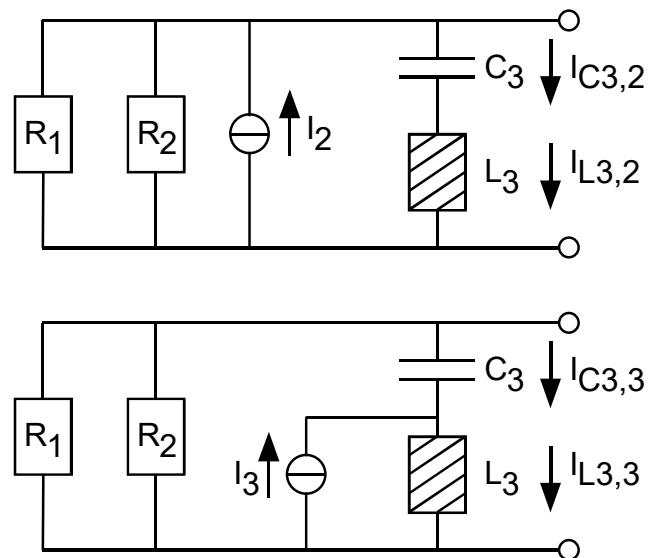
$$U_{3,2} = I_{3,2}(sL + 1/sC)$$



(b.3): Situation für $U_1=U_2=0$, Berechnung der Partialgrößen $I_{C3,3}, I_{L3,3}, U_{3,3}$:

$$I_{L3,3} = I_3 \frac{Z_C}{Z_C + X_{L3}}, \quad I_{C3,3} = -I_3 + I_{L3,3}$$

$$U_{3,3} = I_{L3,3} sL + I_{C3,3} /sC$$



Gemäß dem Prinzip der linearen Superposition (i.e. der linearen Überlagerung) überlagert sich der Einfluss der einzelnen Quellen linear und unabhängig voneinander. Das Verhalten des Netzwerkes kann berechnet werden, indem man die Wirkungen der einzelnen Quellen einzeln berechnet und anschließend summiert. Bildteil (a) oben zeigt ein lineares Netzwerk mit drei voneinander unabhängigen Quellen. Gesucht seien U_3, I_{C3} und I_{L3} .

Die Partialströme und -spannungen einer unabhängigen Quelle findet man, indem man die Quellgrößen aller anderen Quellen zu Null setzt. Eine Spannungsquelle mit Spannung Null ist ein Kurzschluss. Eine Stromquelle mit Strom Null ist eine Unterbrechung.

Abhängige Quellen müssen gleichzeitig gerechnet werden, z.B. U_{GS} und I_D eines FETs.

1.9.2 R2R-Leiter: Multipler Spannungsteiler und D/A-Wandler

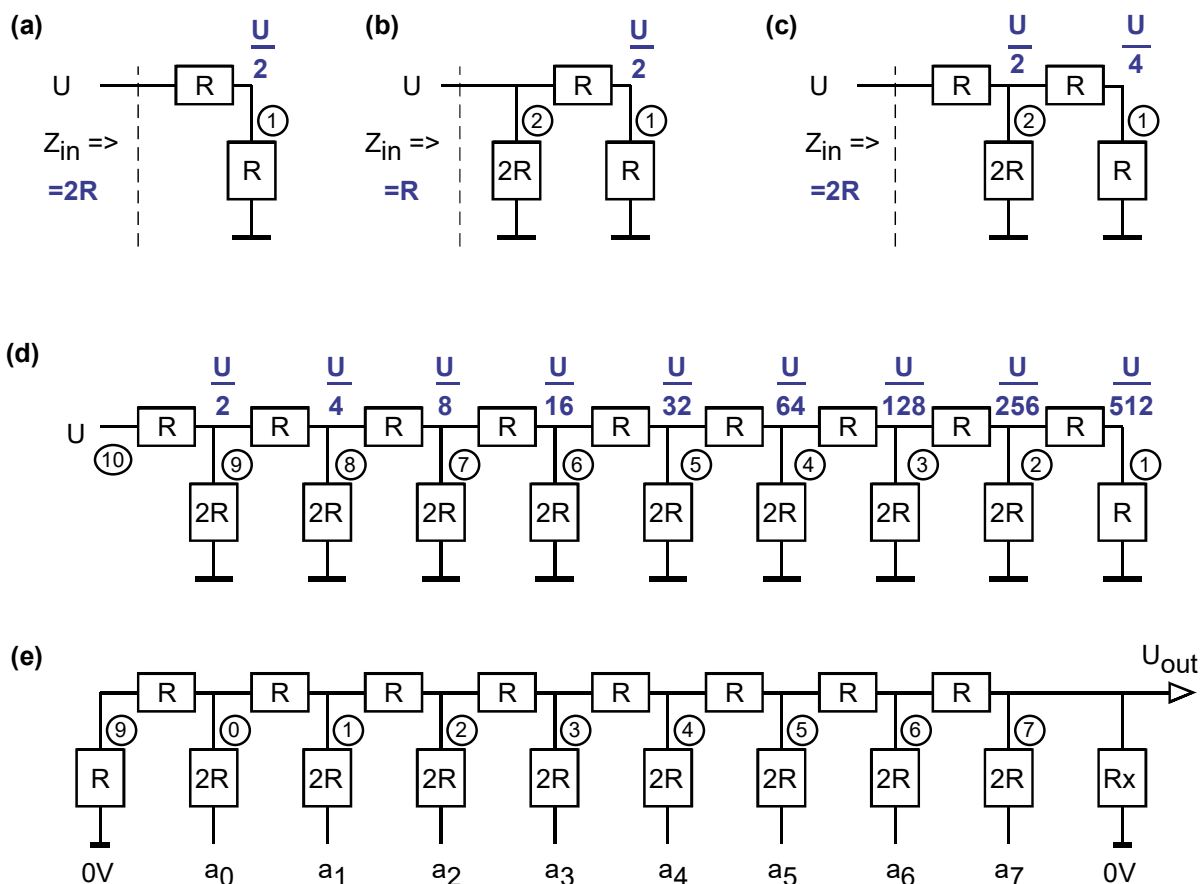


Bild 1.9.2: Spannungsteiler und lineare Superposition, aus Prüfungsaufgabe

Schreiben Sie in Bild 1(a) die Werte für die Spannung an Knoten 1 (gekennzeichnet durch einen Kreis um die Ziffer '1') als $f(U)$ und Z_{in} als $f(R)$. (2P)

Schreiben Sie in Bild 1(b) die Spannung an Knoten 1 als $f(U)$ und Z_{in} als $f(R)$. (2P)

Schreiben Sie in Bild 1(c) Spannungswerte an Knoten 1 und 2 als $f(U)$ und Z_{in} als $f(R)$. (2P)

Schreiben Sie in Bild 1(d) die Werte für die Spannungen an die Knoten 1 ... 9 als $f(U)$. (2P)

In Bild 1(e) seien a_x ($x=0...7$) ideale Spannungsquellen mit $Z_{out}=0\Omega$ und $R_x=2R$. Welche Impedanz Z_i gegen Masse haben die Schaltungsknoten i ($i=0...7$) als $f(R)$? (2P)
 $Z_i = 2R/3, i=0...7$

Bild 1(e): $R_x=2R$, alle Quellen $a_j=0V$ für $j \neq i$ und $a_i=U$? Wie groß ist U_i ? $U_i = U/3$ (2P)

Bild 1(e): $R_x=2R$, $a_7=a_5=U$ und alle Quellen $a_j=0V$. Wie groß ist U_{out} ? $U_i = U/3 + U/12$ (2P)

Bild 1(e): $R_x \rightarrow \infty$, $a_7=U$ und alle Quellen $a_{j \neq 7} = 0V$? Wie groß ist U_{out} ? $U_{out} = U/2$ (2P)

Allgemein: $U_{out} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^7 a_i 2^{i-8}$ wenn $R_x=2R$. In der Praxis meist $R_x \rightarrow \infty$, $U_{out} = \sum_{i=0}^7 a_i 2^{i-8}$.

1.10 Verstärkung – Leistung – Bandbreite

1.10.1 Grundprinzip der Spannungsverstärkung

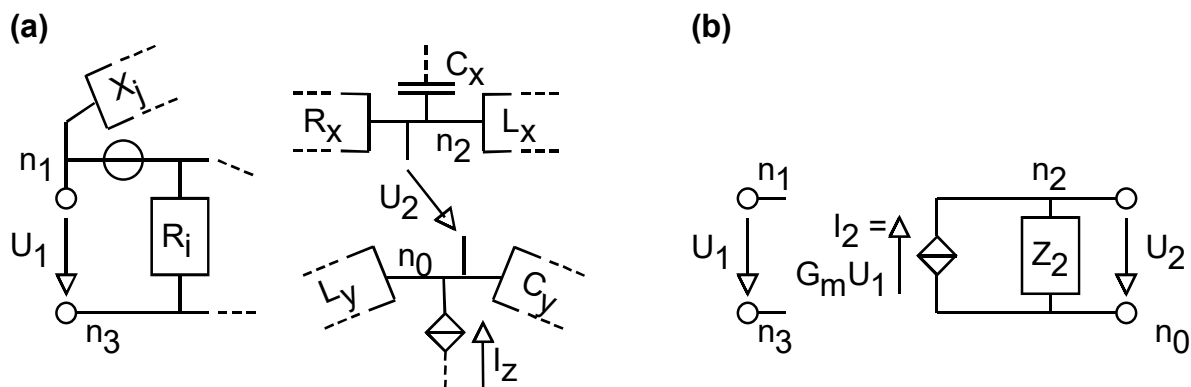


Bild 1.10.1: (a) Beliebiges Netzwerk mit $U_2=f(U_1)$, (b) reduziertes Netzwerk

Bild 1.10.1(a) zeigt ein beliebiges Netzwerk mit $U_2=f(U_1)$. Nach einigen Umformungen sei es gelungen, das Netzwerk auf die im Bildteil (b) gezeigten Komponenten zu reduzieren. Mit diesem reduzierten Netzwerk lässt sich die Spannungsverstärkung $A_v=U_2/U_1$ zu ermitteln.

Es ist

$$\begin{aligned}
 U_2 &= I_2 Z_2 &= (G_m \cdot U_1) Z_2 &= (G_m \cdot Z_2) U_1 \\
 &\text{Ohm'sches Gesetz} &= I_2 = (..) &= A_v = (..)
 \end{aligned}$$

Die Spannungsverstärkung $A_v=U_2/U_1$ berechnet sich zu

$$A_v = \frac{U_2}{U_1} = G_m Z_2$$

Im reduzierten Netzwerk ...

- darf zwischen den Knoten n_1 und n_3 eine beliebige Schaltung liegen, entscheidend ist die Spannung U_1 zwischen den Knoten n_1 und n_3 .
- ist Z_2 die Impedanz zwischen den Knoten, zwischen denen U_2 gemessen wird.
- enthält Z_2 sämtliche Einflüsse auf die Impedanz zwischen den Knoten n_2 und n_0 , muss also eine anliegende Lastimpedanz mit einbeziehen.

1.10.2 Indirekte Messung von Strom- und Leistungsverstärkung

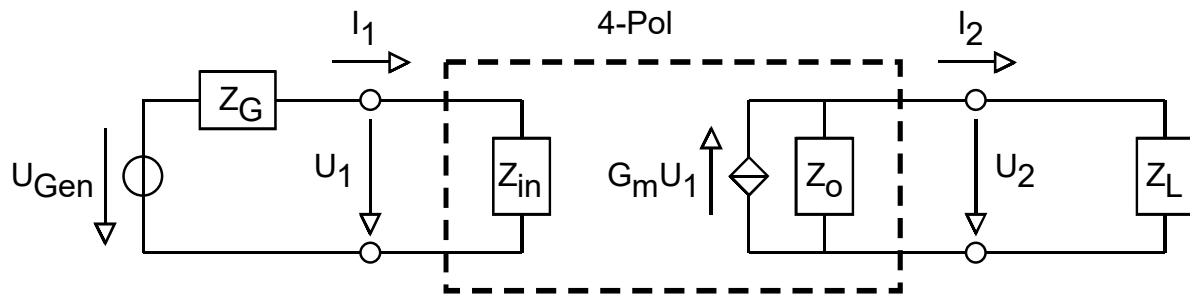


Bild 1.10.2: Beliebiges 4-Pol-Netzwerk

Bild 1.10.2 zeigt einen beliebigen 4-Pol-Netzwerk, gespeist von einem Generator mit Innenwiderstand Z_G und belastet mit einer Lastimpedanz Z_L . Es ist

Spannungsverstärkung:
$$A_V = \frac{U_2}{U_1} \quad (\text{Gl. 1})$$

Stromverstärkung:
$$A_I = \frac{I_2}{I_1} \quad (\text{Gl. 2})$$

Eingangsimpedanz:
$$Z_{in} = \frac{U_1}{I_1} \quad (\text{Gl. 3})$$

Ausgangsimpedanz:
$$Z_o$$

Lastimpedanz:
$$Z_L = \frac{U_2}{I_2} \quad (\text{Gl. 4})$$

Für den Zusammenhang zwischen Stromverstärkung und Spannungsverstärkung folgt

$$A_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_2 / Z_L}{U_1 / Z_{in}} = \frac{U_2}{U_1} \frac{Z_{in}}{Z_L} = A_V \frac{Z_{in}}{Z_L}$$

Die Leistungsverstärkung A_P des Systems als Funktion von A_V , Z_{in} und Z_L berechnet sich zu

$$A_P = A_V A_I = A_V \frac{Z_{in}}{Z_L} A_V = A_V^2 \frac{Z_{in}}{Z_L}$$

Anmerkungen:

- Da keine speziellen Voraussetzungen an das Netzwerk geknüpft wurden, gilt diese Formel sehr allgemein und erlaubt ein Messen von A_I ohne Öffnen des Stromkreises.
- Die oft schwierig zu messende Ausgangsimpedanz Z_o wird in der Formel nicht benötigt.
- A_V muss im Betrieb und bei anliegender Last gemessen werden, da $A_V, A_I, A_P = f(Z_L)$.

1.10.3 Verstärkungs-Bandbreite-Produkt

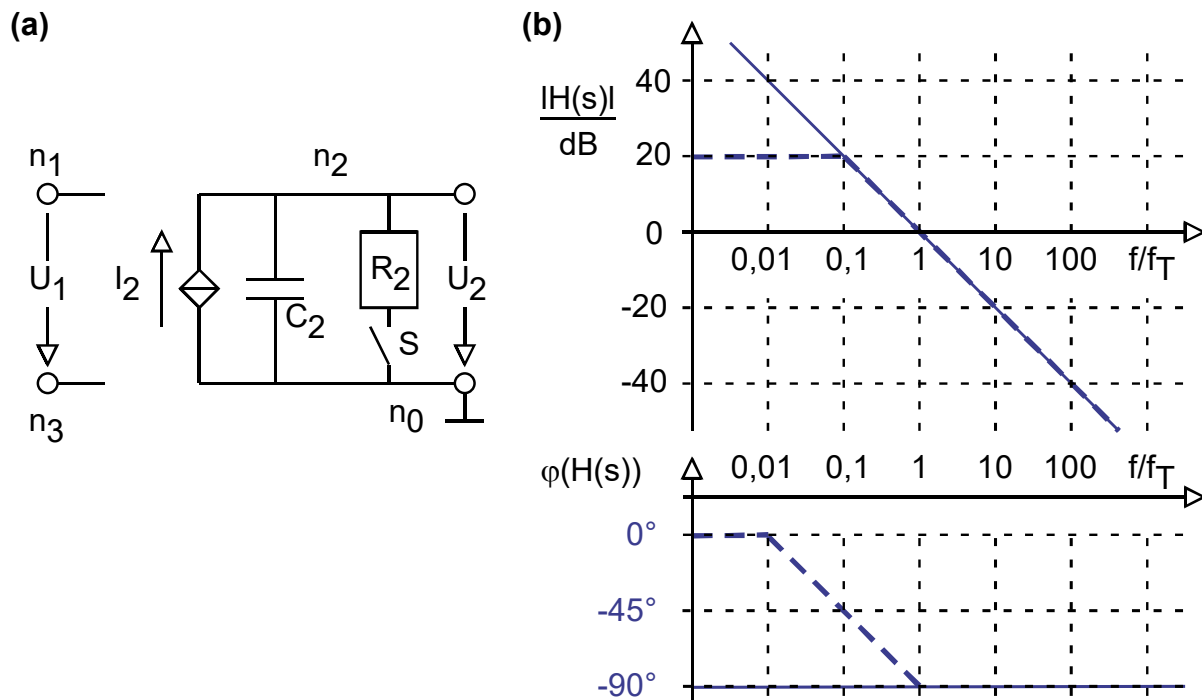


Bild 1.10.3.1: (a) Verstärker-Netzwerk, (b) Übertragungsfunktion

Auf einer 1/f (i.e. -20dB/dec) Kennlinie ist das Produkt aus Bandbreite und Verstärkung konstant.

Gegeben sei das Verstärkernetzwerk in **Bild 1.10.3.1(a)** und $I_2 = G_m U_1$ mit konstantem $G_m > 0$. Die Übertragungsfunktion $H(s) = U_2(s)/U_1(s)$ für offenen (nichtleitenden) Schalter S berechnet sich zu

$$H(s) = G_m Z_2 = G_m / sC_2.$$

Für $s = j2\pi f$ ergibt sich die Übertragungsfunktion $H(jf)$ zu

$$H(jf) = G_m Z_2 = G_m / j2\pi f \cdot C_2.$$

also $|H(jf)| = f_T / f$. Die durchgezogene Linie im Bode-Diagramm in Bild 1.10.3.1(b) stellt diese Übertragungsfunktion dar.

Das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GB mit $G = |H(jf)|$ und $f = B$ berechnet sich zu

$$GB = \left| \frac{G_m}{j2\pi B C_2} \right| \cdot B = \frac{G_m}{2\pi C_2}$$

Zur Berechnung von GB stellen wir die Rechnung in der Transitfrequenz auf:

$$GB = f_T \cdot 1 = f_T \text{ (vorausgesetzt, die Steigung in } f=f_T \text{ nicht schon } 0 \text{ oder } -40\text{dB/dec} \text{ ist)}$$

Der Schalter S in Bild 1.10.3.1(a) werde nun geschlossen (Innenwiderstand 0Ω). Dadurch ergibt sich ein Pol in der Frequenz ω_p (festgelegt durch die Bedingung $R=X_C$ mit $X_C=1/(\omega_p \cdot C)$). Seine Wirkung auf die Asymptoten der Übertragungsfunktion sind in Bild 1.10.3.1(b) gestrichelt eingezeichnet. Verstärkungs-Bandbreite-Produkt ist auf der Geraden mit der Steigung von -20dB/dec gültig, also in Bild 1.10.3.1(b) für $f > f_p = 0,1 f_T$.

Bild 1.10.3.2 zeigt eine Eingangsspannung $U_1 = 2,5V \cdot \cos(2\pi f_1 t)$ zu dem Netzwerk in Bild 1.10.3.1 und für $t \leq t_1$ sowie f_1/f_T für $t > t_2$ die zugehörige Ausgangsspannung U_2 im eingeschwungenen Zustand. (Zwischen t_1 und t_2 findet ein Einschwingvorgang statt.) Wie groß ist das Verhältnis f_1/f_T für $t \leq t_1$ bzw. f_2/f_T für $t > t_2$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort. (Eine Antwort finden Sie in der SC-Prüfung vom WS 2001/2002.)

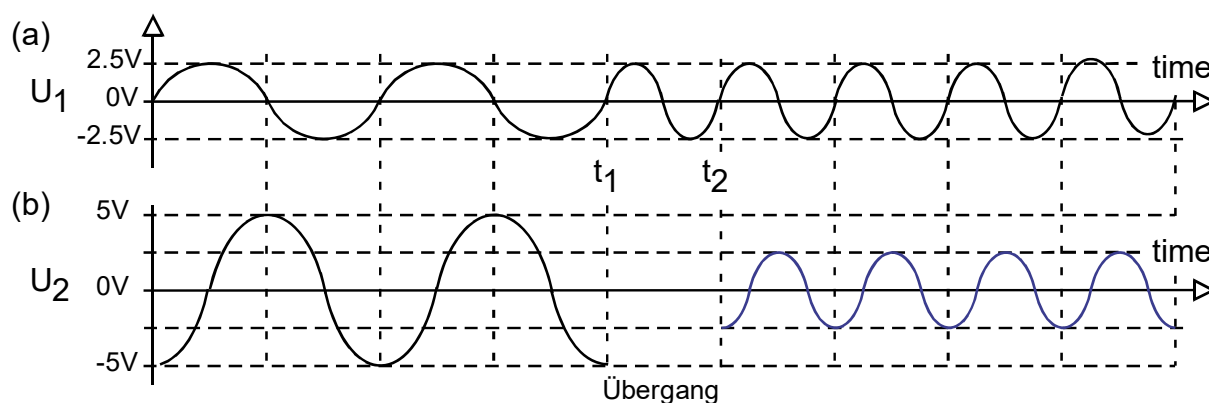


Bild 1.10.3.2: Veranschaulichung des Verstärkungs-Bandbreite-Produkts im Zeitbereich: (a) Eingangsspannung und (b) Ausgangsspannung des Netzwerkes in Bild 1.10.3-1(a).

1.11 Miller-Effekt

1.11.1 Miller-Effekt: Herleitung

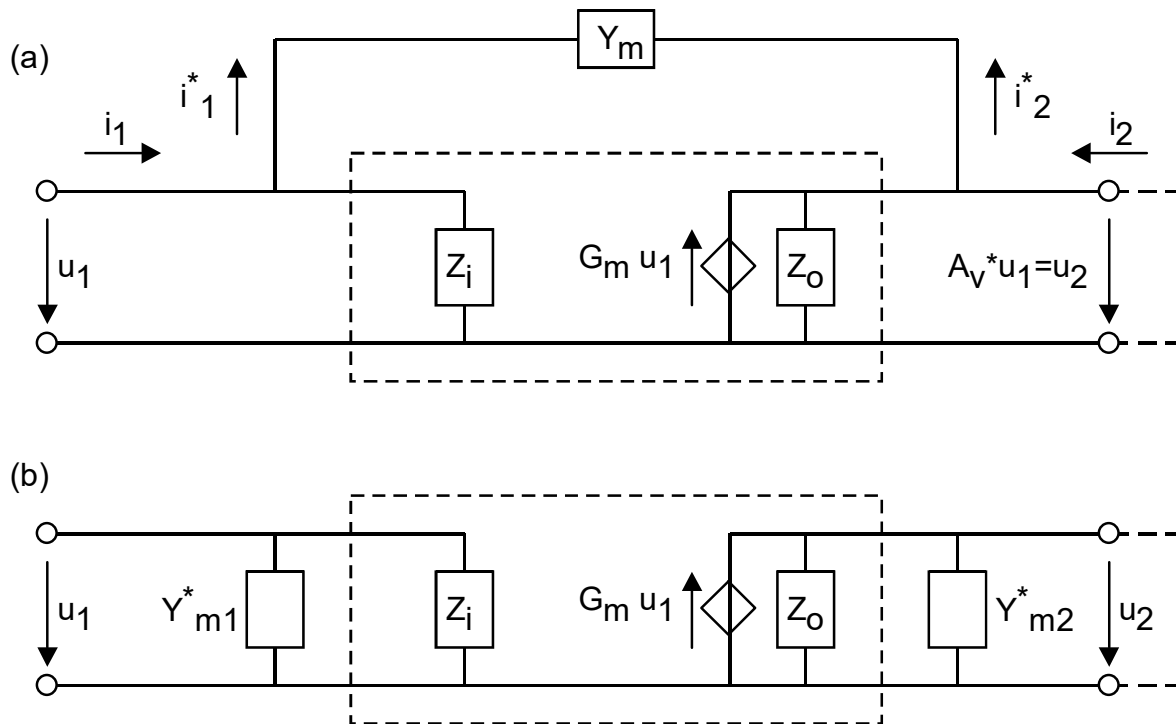


Bild 1.11.1: (a) Leitwert Y_m über einem Schaltungsteil mit $u_2 = A_v u_1$,
 (b) Umformung der Schaltung nach Miller.

Bild 1.11.1(a) zeigt eine Schaltung mit $u_2 = A_v u_1$ und einem Leitwert Y_m (bzw. Impedanz $Z_m=1/Y_m$) zwischen u_1 und u_2 . Diese Schaltung lässt sich nach dem Theorem von Miller in die Schaltung von Bild 1.11.1(b) umformen. Beweis:

$$i_1^* = (u_1 - u_2)Y_m = (u_1 - A_v u_1)Y_m = u_1(1 - A_v)Y_m$$

$$Y_{m1}^* = i_1^* / u_1 = (1 - A_v)Y_m$$

$$\boxed{Y_{m1}^* = (1 - A_v)Y_m}$$

⇔

$$\boxed{Z_{m1}^* = \frac{Z_m}{1 - A_v}}$$

Analog berechnet sich Y_{m2}^* als Funktion von A_v und Y_m :

$$i_2^* = (u_2 - u_1)Y_m = (u_2 - u_2 / A_v)Y_m = u_2(1 - 1 / A_v)Y_m$$

$$Y_{m2}^* = i_2^* / u_2 = (1 - 1 / A_v)Y_m$$

$$\boxed{Y_{m2}^* = (1 - 1 / A_v)Y_m}$$

⇔

$$\boxed{Z_{m2}^* = \frac{Z_m}{1 - 1 / A_v}}$$

1.12 Referenzen

- [1] *The MathWorks*, verfügbar : <https://de.mathworks.com/>.
- [2] *UC Berkeley*, verfügbar : <http://bwrcs.eecs.berkeley.edu/Classes/IcBook/SPICE/>
- [3] *Spice 3 User's Manual*: <https://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/Electronics2/userguide/>
- [4] *Spice tutorial 1.3.0 documentation* : <http://vision.lakeheadu.ca/eng4136/spice/index.html#>
- [5] *LTspice*, verfügbar : <https://www.analog.com/>
- [6] Texas Instruments, *TL08x*, verfügbar :
https://www.ti.com/lit/ds/symlink/tl084.pdf?ts=1601321791157&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F
- [7] *Cluster Leistungselektronik*, Film Part 2, verf.: <https://www.youtube.com/watch?v=9npjKwJ4hnl>