

第一章习题课

小测+第一章作业

2023.04.15

小测

1. 密立根是通过以下方法来测定电子
 - A. 测量电子束在电场和磁场中的
 - B. 利用威尔逊云室，测定过饱和
 - C. 测量极小带电油滴在重力、空的收尾速率
 - D. 采用电解方法测量电解一定量
2. 动能为 $E_1 = 5.0\text{keV}$ 、瞄准距离为 b_1

小测

3 . 氢原子光谱莱曼系和巴耳末系的系

A . $R/4$ 和 $R/9$

B . R 和 $R/4$

解析: 莱曼系: $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R$

4 . He原子一级电离电势为24.6V, 将
为:

小测

6. 设晶体中的原子是相互接触的球体
 ρ/m^3 ，铝原子的相对原子质量为 $A=27$ ，
 $\sim 1.6 \times 10^{-10} \text{m}$ 。

解析：每个原子平均占有的空间体

$$\text{简单立方 } R = \sqrt[3]{\frac{V}{8}} = 1.275 \times 10^{-10} \text{m}$$

小测

7. 一束10.0MeV的 α 粒子射至一厚度
 $\theta=60^\circ$ 处每分钟测得100个散射粒子。
测器每分钟测得400 个散射粒子，
测得的散射 α 粒子数为100。

解析: $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{E^2 \sin^4(\theta/2)}$ $\frac{\sin(45^\circ)}{\sin(30^\circ)} = \sqrt{2}$

小测

9. 在弗兰克-赫兹实验中, Hg原子在放波长为253.6nm的电磁辐射。由上述实验测得汞原子的第一激发电位为4.9eV。
(1eV = 1.6 × 10⁻¹⁹J)

解析:
$$h = \frac{\lambda E}{c} = \frac{253.6\text{nm} \times 4.9 \times 1.6 \times 10^{-19}\text{J}}{c}$$
$$= \begin{cases} 6.6274 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s} \\ 6.632 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s} \end{cases}$$

第一次作业

$$1.4 \quad l = 5\text{mm} \quad V = 1600\text{V} \quad \eta = 1.$$
$$v_g = 2.26 \times 10^{-4} \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \quad v_e =$$

代公式 (1.1.7) (1.1.9) ,

第一次作业

1.5

$$(1) \quad \mathbf{F} = -\frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

(1) 由库仑散射偏转角公式 $\text{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{a}$ 及 $\theta = 90^\circ$, 得瞄准距离:

$$b = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ}{E} = \frac{1}{2} \times 1.44 \text{eV} \cdot \text{nm} \frac{2 \times 79}{5.3 \times 10^6 \text{eV}} = 2.15 \times 10^{-14} \text{m}$$

(2) 此时的最短距离为:

$$r_{\min} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ}{2E} \left(1 + \text{csc} \frac{\theta}{2} \right) = 1.44 \text{eV} \cdot \text{nm} \frac{2 \times 79}{2 \times 5.3 \times 10^6 \text{eV}} (1 + \sqrt{2}) = 5.18 \times 10^{-14} \text{m}$$

(3) 当 $\theta = 180^\circ$ 时, 这种能量的 α 粒子与金核达到最短距离:

$$r_{\min} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ}{2E} \left(1 + \text{csc} \frac{180^\circ}{2} \right) = 1.44 \text{eV} \cdot \text{nm} \frac{2 \times 79}{2 \times 5.3 \times 10^6 \text{eV}} (1 + 1) = 4.3 \times 10^{-14} \text{m}$$

第一次作业

1.7

(1)

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$dn = nNt \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega \Rightarrow \frac{dn}{n} = Nt \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega$$

散射角大于90°的质子数占全部入射粒子数的百分比为:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dn}{n} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Nt \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} d\Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Nt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Nt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} Nt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E}\right)^2 \frac{8\pi}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d \sin \frac{\theta}{2} = Nt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E}\right)^2 8\pi \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZ}{4E}\right)^2 \frac{N_A \rho \cdot t}{A} 4\pi \\ &= (1.44eV \cdot nm)^2 \left(\frac{79}{4 \times 1.5 \times 10^6 eV}\right)^2 \frac{6.02 \times 10^{23} \times 1.932 \times 10^4 kg \cdot m^{-3} \times 10^{-6} m}{197 \times 10^{-3} kg} 4\pi \approx 2.66 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

第一次作业

1.7 (2)

$$\Delta n = nNt \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \Delta\Omega = nNt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \Delta\theta$$

$$\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2 = \Delta\theta_3$$

$$\Rightarrow \Delta n_1 : \Delta n_2 : \Delta n_3 = \frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_1}{2}} : \frac{\cos \frac{\theta_2}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_2}{2}} : \frac{\cos \frac{\theta_3}{2}}{\sin^3 \frac{\theta_3}{2}} = \frac{\cos 15^\circ}{\sin^3 15^\circ} : \frac{\cos 45^\circ}{\sin^3 45^\circ} : \frac{\cos 75^\circ}{\sin^3 75^\circ} = 1 : 0.0359 : 0.00513$$

$$\begin{aligned} \Delta n &= nNt \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \Delta\theta = \frac{IT}{e} \frac{N_A \rho t}{A} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZ}{4E} \right)^2 4\pi \times \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \Delta\theta \\ &= \frac{10 \times 10^{-9} \times 10 \times 60}{1.6 \times 10^{-19}} \times \frac{\cos 75^\circ}{\sin^3 75^\circ} \times \frac{2 \times 3.14}{180} \times 2.66 \times 10^{-4} = 1.0 \times 10^8 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right|_{\theta=30^\circ} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{zZe^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = (1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm})^2 \cdot \left(\frac{1 \times 79}{4 \times 1.5 \text{ MeV}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 15^\circ} \\ &= 8.01 \times 10^{-26} \text{ m}^2 = 8.01 \times 10^{-22} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

补充作业

1. 人体的温度设为 37 C° ，皮肤表面积
 - (1) 人体辐射谱的峰值对应的波长
 - (2) 单位面积的辐射本领 R ;
 - (3) 人体向外的辐射功率。

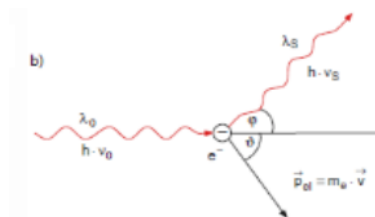
公式维恩位移定理

$$\lambda_m T = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$$

2、在金属钾的光电效应实验中， ν_0 为金属钾的逸出功。如果用波长 400 nm 入射

$$h\nu - \nu_0$$

3、在康普顿散射实验中，当入射光的波长分别为 0.050 nm 的 X 射线和 500 nm 的可见光时，反冲电子所获得的最大能量是多少？并分析其结果。



康普顿散射公式为

$$\lambda_s - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c}$$

其中 $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = 0.00243 \text{ nm}$

光子背散射时电子获得的能量最大，

0.050 nm 的 X 射线背散射后， $\lambda_s = 0.05243 \text{ nm}$

(1) 基态氢原子电子速度 $v = \alpha c$, l_1

1.10 试求氢原子的电子与原子核之间的库仑引力和万有引力以及它们的比值
从中可看出把万有引力略去不计是否合理.

解:

以基态为例, 库仑引力:

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{1}{a_0^2} = 1.44 \times 10^{-9} \text{ m} \times \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{(0.53 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

万有引力:

$$F_{\text{引}} = G \cdot \frac{Mm}{a_0^2} = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 9.1 \times 10^{-31}}{(0.53 \times 10^{-10})^2} \text{ N} = 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$\Rightarrow \frac{F_C}{F_{\text{引}}} = \frac{8.2 \times 10^{-8}}{3.6 \times 10^{-47}} = 2.3 \times 10^{39} \Rightarrow F_C \gg F_{\text{引}}.$$

1.11 分别计算氢的赖曼系、巴耳末系和帕邢系中最短和最长的波长，这三个线系分别属于哪个电磁波段。

解：

赖曼线系：

$$\tilde{\nu} = R_H \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad n = 2, 3, \dots$$

最短波长($n \rightarrow \infty$): $\lambda_{\min} = \frac{1}{R_H} = \frac{1}{1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}} = 91.16 \text{ nm}$ 紫外

最长波长($n = 2$): $\lambda_{\max} = \frac{1}{R_H(1 - \frac{1}{2^2})} = 121.5 \text{ nm}$ 紫外

巴耳末系：

$$\tilde{\nu} = R_H \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad n = 3, 4, \dots$$

最短波长($n \rightarrow \infty$): $\lambda_{\min} = \frac{4}{R_H} = 364.64 \text{ nm}$ 近紫外

最长波长($n = 3$): $\lambda_{\max} = \frac{1}{R_H(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2})} = 656.35 \text{ nm}$ 可见光

帕邢系：

$$\tilde{\nu} = R_H \left[\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad n = 4, 5, \dots$$

最短波长($n \rightarrow \infty$): $\lambda_{\min} = \frac{9}{R_H} = 820.44 \text{ nm}$ 红外

最长波长($n = 4$): $\lambda_{\max} = \frac{1}{R_H(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2})} = 1875.29 \text{ nm}$ 红外

1.12 求氦离子 He^+ 的电离能、第一和第二激发能、赖曼系第一条谱线的波长、巴耳末系限波长和第一波耳轨道半径。

解:

$$\text{氦离子}\text{He}^+\text{的能量: } E_n = Z^2 E_H = 4E_H$$

$$\text{电离能: } I_p = 0 - E_1 = 0 - 4E_{H1} = 4 \times 13.6\text{eV} = 54.4\text{ eV}$$

$$\text{第一激发能: } \Delta E_1 = E_2 - E_1 = 4(E_{H2} - E_{H1}) = 4E_{H1} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 40.8\text{ eV}$$

$$\text{第二激发能: } \Delta E_2 = 4E_{H1} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 48.4\text{ eV}$$

赖曼线系波数:

$$\tilde{\nu} = Z^2 R_{\text{He}} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) = 4R_{\text{He}} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 2, 3, \dots$$

第一条谱线($n = 2$)的波长:

$$\lambda = \frac{1}{4R_{\text{He}} \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{R_{\text{He}}} = 30.4\text{ nm}$$

巴尔末线系波数:

$$\tilde{\nu} = 4R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 3, 4, \dots$$

其系限波长($n = \infty$):

$$\lambda_{\infty} = \frac{1}{R} = 91.16(\text{nm})$$

第一波尔半径:

$$a_1 = \frac{a_0}{Z} = \frac{0.053\text{nm}}{2} = 0.0265\text{nm}$$

1.13 从含有氢和氦的放电管内得到的光谱中，发现有一条线离氢的 H_α 线 (656.279 nm) 的距离为 $2.674 \times 10^{-10} \text{ m}$ ，这被归之于一次电离的氦原子的跃迁。

(1) 找出 He^+ 的这一跃迁中涉及的能级的主量子数；

(2) 计算 He^+ 离子的里德伯常数，已知 $R_H = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ，氦核质量为 3726.358 MeV ；

(3) 假设核为无限重，计算 He^+ 的里德伯常数

解：

(1) 氢 H_α 线为巴耳末系第一条线：

$$\frac{1}{\lambda_{H_\alpha}} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)$$

He^+ 的波数：

$$\frac{1}{\lambda_{\text{He}^+}} = 4R_{\text{He}^+} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R_{\text{He}^+} \left(\frac{1}{(m/2)^2} - \frac{1}{(n/2)^2} \right)$$

由于所观察到的谱线距 H_α 线很近，所以应取 $m = 4$ ， $n = 6$ 。谱线的差别主要是由 R 的不同造成的，所以这一跃迁所涉及的主量子数为 4 和 6。

(2) 考虑核质量的影响

$$R_H = R_\infty \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{M_p}} \right) = R_\infty \left(\frac{1}{1 + \frac{0.511}{938.272}} \right) = 0.9994557 R_\infty = 1.0967758 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$R_{\text{He}^+} = R_\infty \left(\frac{1}{1 + \frac{m_e}{M_{\text{He}^+}}}} \right) = R_\infty \left(\frac{1}{1 + \frac{0.511}{3726.358}} \right) = 0.9998629 R_\infty = 0.9998629 \times \frac{R_H}{0.9994557} = 1.0972226 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (3)$$

核质量无限重

$$R_{\text{He}^+} = R_\infty = \frac{R_H}{0.9994557} = 1.097373 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

1.14 某一气体放电管中装有 ^1H 、 ^2H 、 $^3\text{He}^+$ 、 $^4\text{He}^+$ 、 $^6\text{Li}^{++}$ 、和 $^7\text{Li}^{++}$ 原子和离子。

(1) 计算它们的电离能量，

(2) 当放电管所加的电压从零逐渐增大时，最先出现哪一条谱线？

解：

(1) 电离能： $I_p = hcRZ^2$

^1H ：

$$I_p = hcZ^2 R_H = hc \frac{R_\infty}{1 + \frac{0.511}{938.272}} = 1239.84244 eV \times 10^{-9} m \times 1.0967758 \times 10^7 m^{-1} = 13.5983 eV$$

^2H ：

$$I_p = hc \frac{R_\infty}{1 + \frac{0.511}{938.272 + 939.566}} = 1239.84244 \times 10^{-9} \times \frac{1.097373 \times 10^7}{1 + \frac{0.511}{1877.838}} = 13.6020 eV$$

${}^3\text{He}^+$:

$$I_p = hc \frac{R_\infty}{1 + \frac{0.511}{2 \times 938.272 + 939.566}} = \frac{1239.84244 \times 10^{-9} \times 1.097373 \times 10^7}{1 + \frac{0.511}{2 \times 938.272 + 939.566}} = 54.4133 \text{ eV}$$

同样: ${}^4\text{He}^+$: 54.4158 eV、 ${}^6\text{Li}^{++}$: 122.4411 eV、 ${}^7\text{Li}^{++}$: 122.4427 eV

(2)

${}^1\text{H}$: $n = 2 \rightarrow n = 1$ 的跃迁能量:

$$E = hcR_H \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} hcR_H$$

${}^2\text{H}$: $n = 2 \rightarrow n = 1$ 的跃迁能量:

$$E = hcR_D \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} hcR_D$$

${}^3\text{He}^+$: $n = 2 \rightarrow n = 1$ 的跃迁能量:

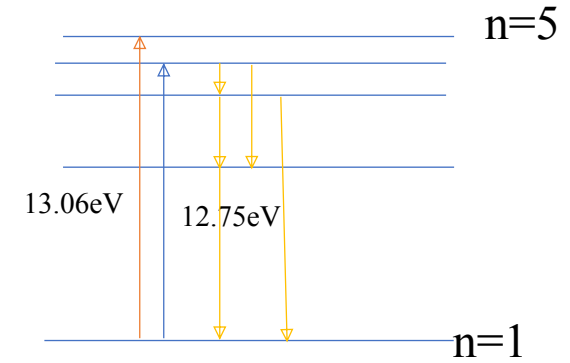
$$E = 4hcR_{\text{He}^+} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 3hcR_{\text{He}^+}$$

由于 $R_D > R_H$

所以, 所有跃迁能量中, ${}^1\text{H}(n = 2 \rightarrow n = 1)$ 的跃迁能量最小, 所以最先出现 ${}^1\text{H}$ 赖曼系的第一条线, 其波长为:

$$\lambda = \frac{4}{3} \frac{1}{R_H} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{1.0967758 \times 10^7} = 121.57 \text{ nm}$$

1.15、用12.9eV的电子去激发原子



$$E = h\nu$$

(1) $n = 2, 3, 4$

$$\lambda_{21} = 121.6 \text{ nm}; \lambda_{31} = 102.6 \text{ nm}; \lambda_{41} = 97.3 \text{ nm};$$

$$\lambda_{32} = 656.5 \text{ nm}; \lambda_{42} = 486.3 \text{ nm}; \lambda_{43} = 1875.6 \text{ nm}$$

(2) $3.86 \text{ m/s}; 7.78 \times 10^{-8} \text{ eV}$

(2)发射的光子和反冲原子组成系统，由动量守恒可知，氢原子反冲动量为：

$$E_{31} = 13.6 * (1 - 1/9) = 12.09 \text{ eV}$$

$$P = E_{31}/c = 6.448 \times 10^{-27} \text{ kgm/s};$$

$$P = mv, \text{ 则氢原子的速度为 } v = 3.86 \text{ m/s}$$

1.16

$$(1) \begin{cases} E_n = -\frac{\mu}{m_e} \frac{Z^2}{n^2} E_H \\ \mu = \frac{m_\mu M}{M+m} \end{cases}, \text{折合质量 } \mu = \frac{m_\mu M}{M+m}$$

2、(2) μ 原子与Li原子核组成一个整体素。

$$m = 207m_e = 207 m_e, \quad M = \frac{6.941}{12} m_p$$

1.17

π 原子的质量为273 me, $Z=50$ 的
量 $u=273 \text{ me}$

$$\begin{cases} E_n = \\ r_n = \end{cases}$$

(1) $E_1 = -273 * 50^2 * 13.6 = -9.282 \text{ MeV}$

波尔理认为

$$E_1 = \frac{1}{2} m_e \alpha^2 c^2$$

1.18

(1) Na原子核与内壳层的10个电子组成类氢体系。

Na原子核质量 $m = 22.99 / 1.008 * 1836 m_e$

$$\begin{cases} E_n = - \\ r_n = \frac{m_e}{\mu} \end{cases}$$

谢谢！

第二章习题课

小测+第二章作业

姚宗麟 2023.05.13



第二章作业

2.1

(1) 室温 $T=300\text{K}$

$$E_e = E_n = E_{He} = \frac{3}{2}kT = 6.21 \times 10^{-21}\text{J} = 0.0388\text{eV}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \begin{cases} e: 6.227\text{nm} \\ n: 0.145\text{nm} \\ He: 0.0726\text{nm} \end{cases}$$

(2) 光子: $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 12.4\text{keV}$

$$\text{实物粒子: } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \Rightarrow E = \frac{h^2c^2}{2mc^2\lambda^2} = \begin{cases} e: 150.45\text{eV} \\ n: 0.0818\text{eV} \\ He: 0.0205\text{eV} \end{cases}$$

第二章作业

2.2

$$(1) E_e = E_p = eU = 10\text{keV}$$

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \begin{cases} e: 0.01227\text{nm} = 0.1227\text{\AA} \\ p: 0.2862\text{pm} \end{cases}$$

$$(2) B = 46\text{G} = 4.6 \times 10^{-3}\text{T}$$

$$evB = \frac{m_e v^2}{r} \Rightarrow p_e = m_e v = eBr = 3.68 \times 10^{-24}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{p_e} = 1.8\text{\AA} = 0.18\text{nm}$$

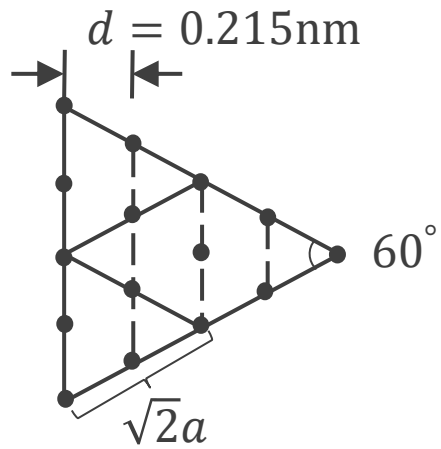
$$(3) \because T = 50\text{GeV} \gg 2m_e c^2 = 1.022\text{MeV}$$

\therefore 公式 $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2T\sqrt{1+T/(2mc^2)}}}$ 中 $\frac{T}{2mc^2}$ 项不可忽略, 即需要考虑相对论效应.

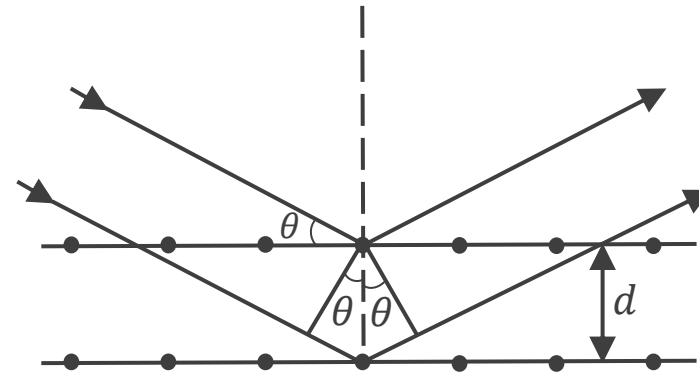
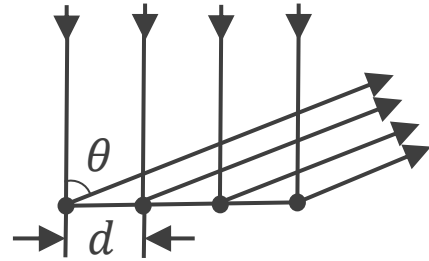
\therefore 将T代入上式, 可得 $\lambda = 2.48 \times 10^{-8}\text{nm}$.

第二章作业

电子晶体衍射和布拉格衍射



$$d \sin \theta = n\lambda$$



$$2d \sin \theta = n\lambda$$

第二章作业

2.3

实验条件 $V = 54\text{V}$, $d = 0.215\text{nm}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 T}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 eV}} = 0.167\text{nm}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{n\lambda}{d} = 0.777n \leq 1 \Rightarrow n \leq 1.287$$

课本P54 (2.1.12)式 $\sqrt{V} = n \frac{1.227}{d \sin \theta} \Rightarrow n = 2, \theta = 50^\circ$ 时, $V = 222\text{V}$.

2.5

热中子能量(P54) $E = 0.025\text{eV}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\sqrt{2m_n c^2 E}} = 0.18\text{nm}$$

由 $2d \sin \theta = n\lambda$ 可得

$$d = \frac{n\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{\lambda}{2 \sin 30^\circ} = \lambda = 0.18\text{nm}$$

第二章作业

$$2.4 \quad E_e = E_\gamma = 10\text{keV} \Rightarrow \lambda_\gamma = \frac{hc}{E_\gamma} = 0.124\text{nm}, \lambda_e = \frac{hc}{\sqrt{2m_e c^2 E_e}} = 0.01227\text{nm}$$

①戴维孙-盖末晶体衍射模型 $d = 0.314\text{nm}$

$$\alpha_\gamma = 180^\circ - \theta_\gamma = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda_\gamma}{d}\right) = \begin{cases} n = 1: 156.74^\circ \\ n = 2: 127.83^\circ \end{cases}$$

$$\alpha_e = 180^\circ - \theta_e = 180^\circ - \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda_e}{d}\right) = \begin{cases} n = 1: 177.76^\circ \\ n = 2: 175.52^\circ \end{cases}$$

②布拉格衍射模型 $d = 0.314\text{nm}$

$$\theta_\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda_\gamma}{2d}\right) = \begin{cases} n = 1: 11.39^\circ \\ n = 2: 23.26^\circ \end{cases}, \theta_e = \sin^{-1}\left(\frac{n\lambda_e}{2d}\right) = \begin{cases} n = 1: 1.12^\circ \\ n = 2: 2.24^\circ \end{cases}$$

I. $\alpha = 2\theta$

$$\alpha_\gamma = \begin{cases} n = 1: 22.78^\circ \\ n = 2: 46.52^\circ \end{cases}, \alpha_e = \begin{cases} n = 1: 2.24^\circ \\ n = 2: 4.48^\circ \end{cases}$$

II. $\alpha = 180^\circ - 2\theta$

$$\alpha_\gamma = \begin{cases} n = 1: 157.22^\circ \\ n = 2: 133.48^\circ \end{cases}, \alpha_e = \begin{cases} n = 1: 177.76^\circ \\ n = 2: 175.52^\circ \end{cases}$$

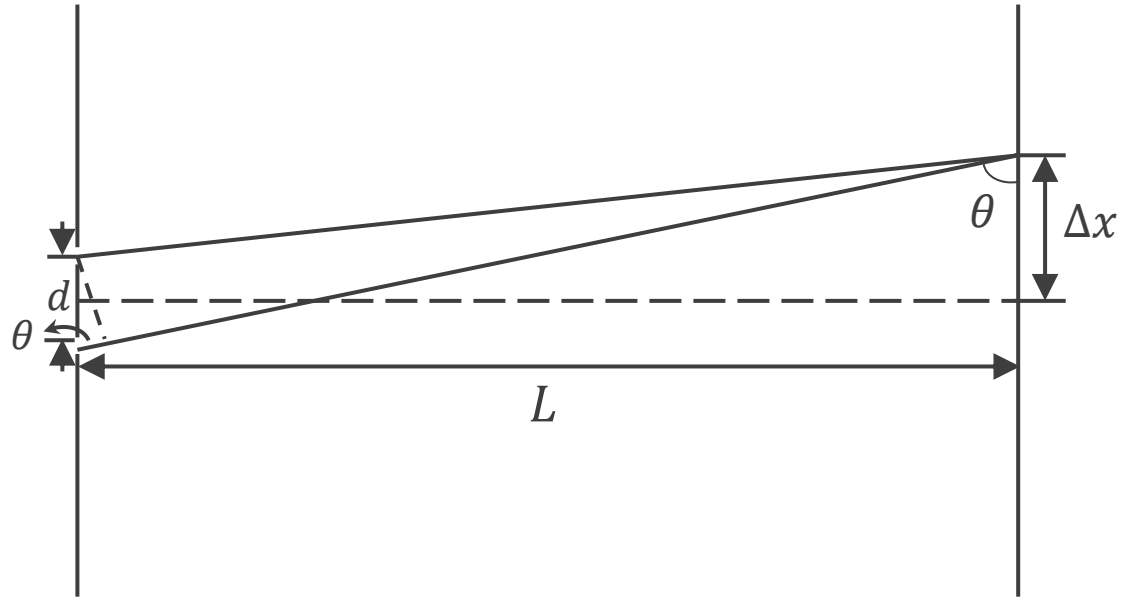
第二章作业

2.6

$$v = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \lambda_p = \frac{h}{m_p v} = 0.99 \text{ nm}$$

$$\tan \theta = \frac{L}{\Delta x} = \frac{d}{\lambda}$$

$$\Rightarrow d = \frac{L}{\Delta x} \lambda = 2.475 \times 10^{-5} \text{ m}$$



第二章作业

2.9

$$r \cdot p \approx \hbar$$

$$(1) H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$H' = 0 \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu Ze^2} = \frac{m_e a_0}{\mu Z} = \frac{\hbar}{\alpha Z \mu c} \Rightarrow H = -\frac{\mu}{m_e} \frac{Z^2 e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} = -\mu c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2}$$

$$(2) H = \sqrt{p^2 c^2 + \mu^2 c^4} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = c \sqrt{\frac{\hbar^2}{r^2} + \mu^2 c^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$H' = 0 \Rightarrow r = \frac{\hbar}{\alpha Z \mu c} \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} \Rightarrow H = \mu c^2 \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$$

$$\therefore 1 - \alpha^2 Z^2 \geq 0 \Rightarrow Z \leq \frac{1}{\alpha} = 137 \quad Z \ll \alpha \Rightarrow \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2} \approx 1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{2}$$

$$(3) \frac{p^2}{2m} = V_0 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0}}$$

第二章作业

2.11

设 d 为狭缝宽度, L 为狭缝距离

I. 衍射公式

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d} \sim \tan \theta = \frac{d/2}{L}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt{2\lambda L} = \sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{2mE}}} = 4.953 \times 10^{-5} \text{m}$$

II. 不确定性关系

$$d \cdot p_{\perp} = h \Rightarrow v_{\perp} = \frac{h}{md} \Rightarrow \Delta x = v_{\perp} t = v_{\perp} \frac{l}{v_{\parallel}} = \frac{h}{md} \frac{l}{\sqrt{2E/m}} = \frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{2mE}}} = 4.953 \times 10^{-5} \text{m}$$

$$d \cdot p_{\perp} = \hbar \Rightarrow d = 1.976 \times 10^{-5} \text{m}$$

第二章作业

2.12

$$(1) E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \propto n^2 \Rightarrow E_2 = 4E_1 = 152\text{eV}$$

(2) I. 虚功原理

$$Fda = -dE = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^3} = \frac{2E_1}{a} = 1.216 \times 10^{-7}\text{N}$$

II. 动量定理

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{2mv}{T} = \frac{2mv}{2a/v} = \frac{2E_1}{a} = 1.216 \times 10^{-7}\text{N}$$

第二章作业

2.13

将电子波函数分离变量 $\psi(x, y, z) = \psi_1(x) \psi_2(y) \psi_3(z)$

一维无限高方势阱波函数 $\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, 能量 $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2$

$$\Rightarrow \psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{c}} \sin\left(\frac{n_3 \pi z}{c}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi z}{c}\right)$$

$$E = E_x + E_y + E_z = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right)$$

$\therefore a = b = c = 0.2\text{nm}$ 时,

基态: $n_1 + n_2 + n_3 = 3, E_0 = 28.2\text{eV}$

第一激发态: $n_1 + n_2 + n_3 = 4, E_1 = 56.4\text{eV} \Rightarrow E_1 - E_0 = 28.2\text{eV}$

第二章作业

2.14 (束缚态能级 $V_0 > E$)

I. $x < 0$ $\psi_1 = 0$

II. $0 \leq x \leq a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi = E\psi$$

$$\Rightarrow \psi_2 = A \sin kx + B \cos kx, \text{ 其中 } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

III. $x > a$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi + V_0 \psi = E\psi$$

$$\psi_3 = C e^{lx} + D e^{-lx}, \text{ 其中 } l = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\text{边界条件: } \begin{cases} \psi_2(0) = \psi_3(\infty) = 0 \\ \psi_2(a) = \psi_3(a) \\ \psi_2'(a) = \psi_3'(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = C = 0 \\ A \sin ka = D e^{-la} \\ Ak \cos ka = -D l e^{-la} \end{cases} \Rightarrow \tan ka = -\frac{k}{l}$$

第二章作业

2.15 I. $E < V_0$ 时,

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi = \begin{cases} -k^2 \psi & x < 0 \\ l^2 \psi & x > 0 \end{cases}, \text{其中 } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, l^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ \psi_2 = Ce^{-lx} & x > 0 \end{cases}, \text{边界条件 } \begin{cases} A + B = C \\ ik(A - B) = -lC \end{cases}$$

$$\therefore \text{透射率 } T = \left| \frac{j_T}{j_I} \right| = 0, \text{反射率 } R = \left| \frac{j_R}{j_I} \right| = \frac{|B|^2}{|A|^2} = 1$$

II. $E > V_0$ 时,

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi = \begin{cases} -k^2 \psi & x < 0 \\ -l^2 \psi & x > 0 \end{cases}, \text{其中 } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, l^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ \psi_2 = Ce^{ilx} & x > 0 \end{cases}, \text{边界条件 } \begin{cases} A + B = C \\ k(A - B) = lC \end{cases}$$

$$\therefore \text{透射率 } T = \left| \frac{j_T}{j_I} \right| = \frac{l |C|^2}{k |A|^2} = \frac{4kl}{(k+l)^2}, \text{反射率 } R = \left| \frac{j_R}{j_I} \right| = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k-l)^2}{(k+l)^2}$$

第二章作业

$u(x)$ 和 $u'(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=a$ 两点连续

$$\rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik_1(A_1 - B_1) = k_2(A_2 - B_2) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_2 e^{k_2 a} + B_2 e^{-k_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} \\ k_2(A_2 e^{k_2 a} - B_2 e^{-k_2 a}) = ik_1 A_3 e^{ik_1 a} \end{cases}$$

$$\text{得 } T = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2) \sinh^2(k_2 a) + 4k_1^2 k_2^2}$$

2.16

$$\text{穿透概率: } P = \frac{4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 \sinh^2(k_2 a) + 4k_1^2 k_2^2} \xrightarrow{k_2 a \gg 1} \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}}$$

$$\text{代入 } P = 10^{-3}, k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = 5.12 \text{ nm}^{-1}, k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} = 5.12 \text{ nm}^{-1} \\ \Rightarrow a = 0.81 \text{ nm}$$

第二章作业

2.17 原子核半径 $r = 10^{-15}\text{m} = 10^{-6}\text{nm} \Rightarrow$ 势能大小 $V = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = 1.44\text{MeV}$

I. 看成势阱问题

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mr^2} = 376\text{GeV} \gg V$$

II. 不确定性关系

$$rp = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow E = pc = \frac{\hbar c}{2r} = 99\text{GeV} \gg V$$

第二章作业

2.18 氢原子基态 $R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_0}}, Y_{00}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

(1) $\psi = R_{10}(r)Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$

(2) $\bar{r} = \int_0^\infty R_{10} \cdot r \cdot R_{10} \cdot r^2 dr = \frac{4}{a_0^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{3}{2} a_0$

(3) 径向波函数归一化条件: $\int_0^\infty r^2 R_{nl}^2(r) dr = 1$

径向分布概率密度函数为 $f(r) = r^2 R_{nl}^2(r) = r^2 R_{10}^2(r)$

$\Rightarrow f'(r) = 0 \Rightarrow r = a_0$

(4) $V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \Rightarrow \bar{V} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{1}{r} \cdot r^2 R_{nl}^2(r) dr = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$

(5) I. $\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$

II. $\bar{T} = \int_0^\infty R_{10} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) R_{10} \cdot r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}$

第二章作业

补充题

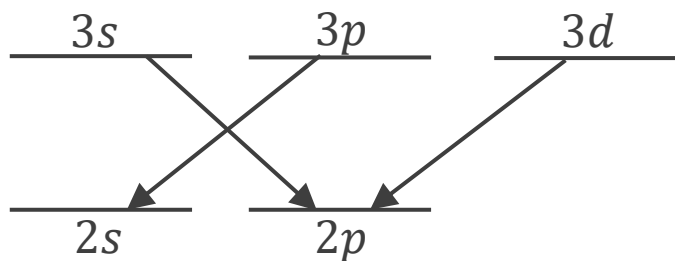
1. 氢原子 $n = 3$ 能级的简并度是多少？其中 $l = 2$ 态的电子的轨道角动量大小是多少？有多少个可能的量子化取向？

$$\sum_0^{n-1} (2l + 1) = n^2, L = \sqrt{l(l + 1)}\hbar, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

注意这里并没有考虑电子自旋。

2. 试写出巴尔末线系的 H_α 线对应的所有电偶极允许跃迁。

$$H_\alpha: n = 3 \rightarrow n = 2$$



- $(3; s; 0) \rightarrow (2; p; 0, \pm 1)$
- $(3; d; 0) \rightarrow (2; p; 0, \pm 1)$
- $(3; d; +2) \rightarrow (2; p; +1)$
- $(3; d; -2) \rightarrow (2; p; -1)$
- $(3; p; 0, \pm 1) \rightarrow (2; s; 0)$
- $(3; d; +1) \rightarrow (2; p; 0, +1)$
- $(3; d; -1) \rightarrow (2; p; 0, -1)$

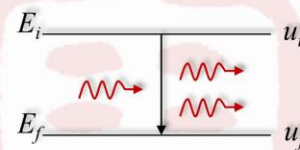
氢原子(类氢离子)

$$u_{n'l'm'} \rightarrow u_{nlm}$$

$$\lambda_{fi} \propto \left| \int u_{n'l'm'}^* (-er) u_{nlm} d\tau \right|^2 \neq 0$$

- 要求:
- $\Delta n = n' - n = \text{任意值}$ (对 r 的积分不为零)
 - $\Delta l = l' - l = \pm 1$ (对 θ 的积分不为零)
 - $\Delta m = m' - m = 0, \pm 1$ (对 φ 的积分不为零)

电偶极跃迁的选择定则



小测

1. 不确定关系是微观物质的客观规律，它来源于：

A. 在微观范围轨道概念不适用

B. 实物粒子具有波粒二象性

C. 对微观体系,目前实验精度不够

D. 实验上发现能级有一定宽度

2. 一个粒子被限制在 x 和 $x+L$ 处两个不可穿透的壁之间， $\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L}x)$ ，则处于最低能态的粒子在 x 与 $x+L/3$ 之间被找到的概率是多少？

A. 0.19

B. 0.72

C. 0.33

D. 0.50

解析：
$$P = \frac{2}{L} \int_0^{L/3} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0.1955$$

3. 氢原子处于基态的径向波函数是 $R_{10} = ce^{-\frac{r}{a_0}}$ ，那么，它的归一化常数等于

A. $2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2}$

B. $2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{2/3}$

C. $\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2}$

D. $\left(\frac{2}{a_0}\right)^{2/3}$

解析：
$$1 = c^2 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{a_0^3}{4} c^2 \Rightarrow c = \frac{2}{a_0^{3/2}}$$

小测

4. 在量子力学中，对于氢原子问题，从薛定谔方程及其所满足物理条件，就可以直接得到以下各力学量的量子化，而无需人为地加上量子化条件

- A. 动量，角动量，能量
- B. 能量，动量，动量 z 方向分量
- C. 能量，角动量，角动量 z 方向分量
- D. 能量，轨道角动量，动量

5. 由于中子的质量比电子大1838倍，因此

- A. 中子衍射实验需使其能量比电子大很多倍；
- B. 中子衍射实验需使其能量比电子小很多倍；
- C. 中子的穿透深度比电子大；
- D. 中子衍射对轻、重原子同样敏感。

第二章小测填空题 和第三章习题

2023-5-13

6. 已知电子质量为 $9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$ ，一电子的运动速度为 $1/5c$ ，其德布罗意波长为_____。

$$\lambda = \frac{h}{mv} \sqrt{(1 - \beta^2)} = \frac{hc}{mc^2\beta} \sqrt{(1 - \beta^2)} = 0.01188 \text{nm}$$

7. 利用一维自由粒子的定态波函数 $e^{ipx/\hbar}$ 和 $e^{-ipx/\hbar}$ ，可以组合成偶宇称波函数为_____，奇宇称波函数为_____。

$$A (e^{ipx/\hbar} + e^{-ipx/\hbar})$$

8. 经过10kV电势差加速的电子束和质子束的德布罗意波长分别为： $\lambda_e =$ _____nm， $\lambda_p =$ _____nm。

$$p = \frac{\sqrt{521 \text{keV} * 521 \text{keV} - 0.511 \text{keV} * 0.511 \text{keV}}}{c} \quad \lambda = \frac{h}{p} = 0.012206 \text{nm}$$

对于质子，可以不需要考虑相对论，

$$p = \sqrt{2mc^2T} \quad \lambda = hc / \sqrt{2mc^2T} = 0.000286 \text{nm}$$

9. 设用球坐标表示的粒子波函数为 $\psi(r, \theta, \varphi)$ ，则有

(1) 粒子在球壳 $(r, r+dr)$ 中被观测到的概率为_____。

(2) 在 (θ, φ) 方向立体角元中找到粒子的概率为_____。

$$\rho(r)r^2 dr = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\rho(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi = \int_0^\infty |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

10. 一原子的激发态发射波长为600nm的光谱线，假设测量波长的精度为 $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 10^{-7}$ ，该原子态的寿命为多长_____。

能量和时间的不确定关系为

$$\tau = \frac{\hbar}{2\Delta E}$$

$$\Delta E = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$\tau = 1.6\mu s$$

3.1 μ^- 粒子被氢原子俘获形成 μ 氢原子, 基态时其轨道运动的磁矩有多大? 基态电子偶素中电子和正电子绕共同质心运动的磁矩有多大? (已知 $m_\mu = 207m_e$)

解:

μ 氢原子基态轨道磁矩:

$$\mu_{l(\mu-H)} = -\frac{e}{2M} \vec{L}$$

其中 M 是 μ -H 的折合质量 $M = \frac{m_\mu \cdot m_H}{m_\mu + m_H} = \frac{207 \times 1836}{207 + 1836} m_e = 186.03 m_e$

$$\therefore \mu_{l(\mu-H)} = \frac{1}{186.03} \mu_H$$

基态电子偶素中电子和正电子绕共同质心运动, 正负电子产生相反的电流。

$$\Rightarrow \mu_{l(e^- - e^+)} = 0$$

3.2 一束基态氢原子束按斯特恩-盖拉赫实验方法通过极不均匀的磁场, 磁场梯度

$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 1.5 \times 10^2 T^2 \cdot m^{-1}$, 氢原子的速度为 $v = 10^4 m/s$, 磁场区的长度为

$d_1 = 20 cm$, 从磁场到屏的漂移的距离 $d_2 = 10 cm$ (如图所示). 求氢原子束在

屏上的裂距 Δz . (已知氢原子的质量为 $1.6 \times 10^{-27} kg$)

解:

$$\vec{F} = -\nabla U = -g_s \mu_B m_s \frac{\partial B_z}{\partial z} = \pm \frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B$$

式中:

$$g_s = 2; m_s = \pm \frac{1}{2}; \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9.274 \times 10^{-24} J \cdot T^{-1}; \frac{\partial B_z}{\partial z} = 1.5 \times 10^2 T^2 \cdot m^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta z = 0.69 mm$$

(书上答案有误, 或者题中改为 $d_1 = 10 cm$, $d_2 = 20 cm$, 即得到答案 $0.42 mm$)

3.3 一束自旋为 $1/2$ ，磁矩为 μ 的中性粒子束沿 x 方向通过斯特恩-盖拉赫实验装置结果该中性粒子束按粒子的 μ_z 值不同而分裂.如果入射束中的粒子磁矩是下列情况之一，粒子束通过斯特恩-盖拉赫实验装置后的行为如何？

(a)磁矩沿 $+z$ 方向极化（排列），(b)磁矩沿 $-z$ 方向极化，(c)磁矩沿 $+y$ 方向极化，(d)不极化解：

只考虑自旋磁矩引起的分裂，不考虑轨道磁矩：

$$\vec{F} = -g_s \mu_B m_s \frac{\partial B_z}{\partial z}; m_s = \pm \frac{1}{2}; \frac{\partial B_z}{\partial z} < 0$$

(a)磁矩沿 $+z$ 方向极化 $m_s = +\frac{1}{2}$ ， \vec{F} 向上，则粒子束向上偏转；

(b)磁矩沿 $-z$ 方向极化 $m_s = -\frac{1}{2}$ ， \vec{F} 向下，则粒子束向下偏转；

(c)磁矩沿 $+y$ 方向极化，同 d，粒子束分裂为 2 束；

(d)不极化 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ ，则粒子束分裂为上下两束。

C、当在 y 方向极化，在 z 表象下表示波函数为，

$$|\varphi\rangle = a|S_z \uparrow\rangle + a|S_z \downarrow\rangle$$

经过 Z 方向去向测量后，波函数坍缩为 Z 的本征值之一，故而分裂为两束

D，如果原子不极化，亦是如此。

3.5 试计算氢原子中的2P态由于自旋-轨道相互作用产生的能级裂距等效于电子自旋磁矩在磁感应强度B为多少的磁场中产生的能级裂距?

解:

正解:

自旋轨道相互作用修正项 (3.3.8) 式:

$$\Delta E_{ls} = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n \frac{n[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]}{2l(l+1)(l+1/2)}$$

两个能级的分裂能量:

$$\begin{cases} \Delta E_{ls} = +\frac{1}{6} \alpha^2 E_2 = \frac{1}{24} \alpha^2 \cdot (-13.6 \text{ eV}) = -3.02 \times 10^{-5} \text{ eV} & ; j = 1/2 \\ \Delta E'_{ls} = -\frac{1}{12} \alpha^2 E_2 = -\frac{1}{48} \alpha^2 \cdot (-13.6 \text{ eV}) = 1.51 \times 10^{-5} \text{ eV} & ; j = 3/2 \end{cases}$$

两个能级的能量差:

$$\Delta E = |\Delta E_{ls} - \Delta E'_{ls}| = 4.53 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = \frac{4.53 \times 10^{-5} \text{ eV}}{2 \cdot 5.788453 \times 10^{-5} \text{ eV} \cdot T^{-1}} = 0.391 \text{ T}$$



3.6 对于量子数 $L = 1$, $S = 1/2$ 的原子, (1) 计算 $\vec{L} \cdot \vec{S}$ 可能的值; (2) 计算其总角动量可能的值.

解:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) = \frac{1}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\hbar^2$$

$$j = 1 \pm \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ 及 } \frac{3}{2}$$

$$\therefore \vec{S} \cdot \vec{L} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 = -\hbar^2 & ; j = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \left[\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4} \right] \hbar^2 = \frac{1}{2} \hbar^2 & ; j = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \Rightarrow J = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar; \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

3.7 今测得氢原子 $n = 3$ 是由谱项自下至上依次相差 0.1082 cm^{-1} 与 0.0361 cm^{-1} 的三能级构成. 试问其莱曼系的第二条实际是由波长相差多少的两谱线构成的?

解:

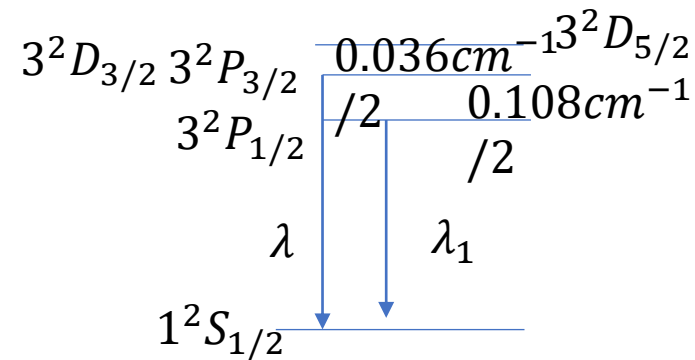
$$\text{莱曼系第二条谱线 } \lambda = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{1}{1-3^{-2}} = 1.02573 \times 10^{-7} \text{ m}$$

对应跃迁: $3^2P_{1/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$ 和 $3^2P_{3/2} \rightarrow 1^2S_{1/2}$ (选择定则: $\rightarrow 1^0S_{1/2}$ 和 $3^2D_{5/2, 3/2} \rightarrow$ 是禁戒的)

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\tilde{\nu} = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda$$

其中 $\Delta\tilde{\nu} = 0.1082 \text{ cm}^{-1}$

$$\therefore \Delta\lambda = \lambda^2 \cdot \Delta\tilde{\nu} = (1.02573 \times 10^{-7} \text{ m})^2 \times 0.1082 \text{ cm}^{-1} = 1.14 \times 10^{-4} \text{ nm}$$



3.8 光谱仪的分辨本领 $R = \lambda/\delta\lambda$ 为多大时, 可以分辨出氢原子 H_α 线 (巴尔末系第一条) 的全部精细结构成分? (不考虑蓝母位移)

解:

氢原子 H_α 线 (巴尔末系第一条, 总共 7 条允许跃迁): $\lambda = \frac{1}{R_H} \cdot \frac{1}{2^{-2}-3^{-2}} = 6.56470 \times 10^{-7} \text{ m}$

$\Delta\tilde{\nu}$ 最小 0.0361 cm^{-1} 对应的跃迁为: $3^2D_{1/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$ 和 $3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$

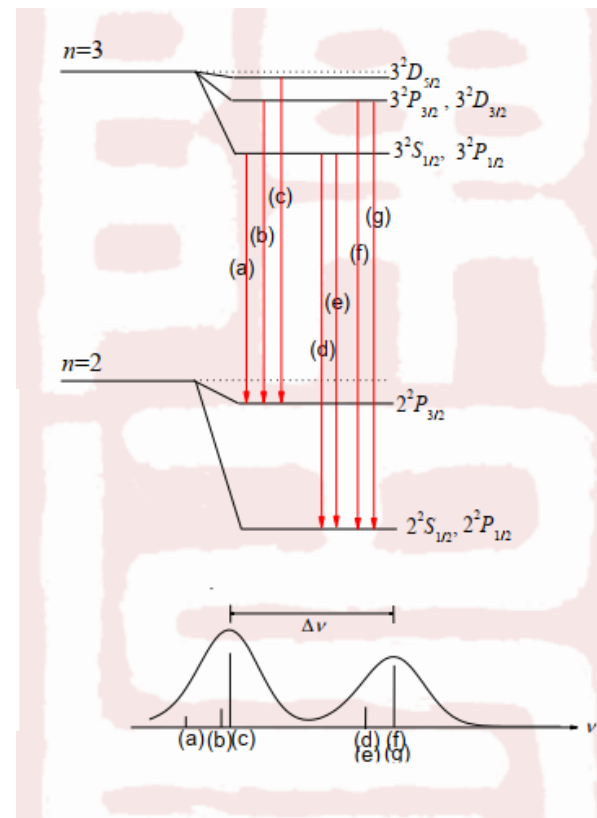
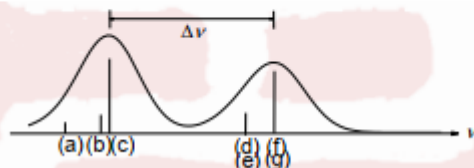
$\therefore R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{1}{\lambda \cdot \Delta\tilde{\nu}} = 4.2 \times 10^5$ (用到 3.7 题中 $\Delta\lambda = \lambda^2 \cdot \Delta\tilde{\nu}$)

氢原子 H_α 线的精细结构谱线相对移位和相对强度

谱线	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
移位(cm^{-1})	-0.071	0.037	0.073	0.294	0.294	0.402	0.402
相对强度	0.20	1.0	9	1.04	0.1	2.08	5.0

H_α 双线的间隔主要是 (c) 线和 (f)/(g) 线之间的间隔

$$\Delta\tilde{\nu} = 0.402 - 0.073 = 0.329 \text{ cm}^{-1}$$



3.9 解:

(1)

$$n=2 \text{ ————— } 2^2S_{1/2} \text{ ————— } 2^2P_{1/2} \text{ ————— } 2^2P_{3/2}$$

$$n=1 \text{ ————— } 1^2S_{1/2}$$

(2)

$$\text{相对论动能修正: } \Delta E_m = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{l+1/2} \right) = \frac{5}{4} \alpha^2 E_1 \text{ ————— (3.3.5)}$$

$$\text{自旋-轨道相互作用: } l \neq 0, \Delta E_{ls} = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n \frac{n[j(j+1)-s(s+1)-l(l+1)]}{2l(l+1)(l+1/2)} \text{ ————— (3.3.8)}$$

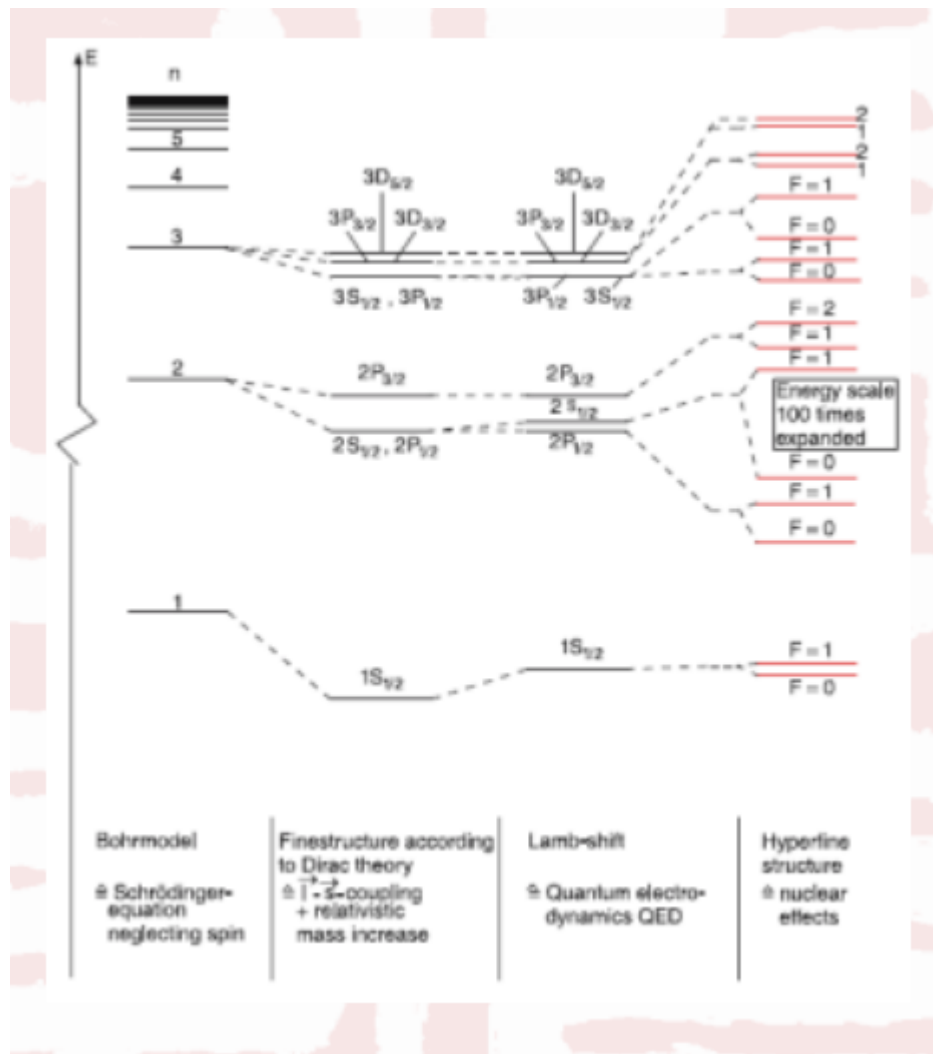
$$\text{相对论势能修正: } l = 0, \Delta E_V = -\frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} E_n n \text{ ————— (3.3.10)}$$

蓝姆移位: ①对于同一 n 值的态, j = 1/2 的能级位移最大, j > 1/2 的能级的蓝姆位移非常小, 几乎可以忽略; ②n 越大, 蓝姆移位越小。(P116)

$$\text{超精细结构: } \Delta E = \frac{a}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)] \text{ ————— (3.3.19)}$$

$n = 1, l = 0, m = 0, j = 1/2, s = 1/2$ $\Delta E_m = \frac{5}{4} \alpha^2 E_1;$	$\Delta E_{ls} = 0;$	$\Delta E_V = -\alpha^2 E_1;$	$\Delta E_{Lamb} \neq 0;$	$E_{\text{超精细}} \sim \frac{E_{\text{精细}}}{2000}$
$n = 2, l = 0; j = 1/2$ $\Delta E_m = \frac{13}{16} \alpha^2 E_2;$	$\Delta E_{ls} = 0;$	$\Delta E_V = -\frac{\alpha^2}{2} E_1;$	$\Delta E_{Lamb} \neq 0;$	$E_{\text{超精细}} \sim \frac{E_{\text{精细}}}{2000}$
$n = 2, l = 1; j = 1/2$ $\Delta E_m = \frac{7}{48} \alpha^2 E_2;$	$\Delta E_{ls} = -\frac{\alpha^2}{6} E_2;$	$\Delta E_V = -\frac{\alpha^2}{2} E_2;$	$\Delta E_{Lamb} \neq 0;$	$E_{\text{超精细}} \sim 0$
$n = 2, l = 1; j = 3/2$ $\Delta E_m = \frac{7}{48} \alpha^2 E_2;$	$\Delta E_{ls} = -\frac{\alpha^2}{12} E_2;$	$\Delta E_V = -\frac{\alpha^2}{2} E_2;$	$\Delta E_{Lamb} \sim 0;$	$E_{\text{超精细}} \sim 0$

Relativistic 和 Spin-Orbit 修正 ($\sim \alpha^2 E_n$) > Lamb 移位 ($j = \frac{1}{2}, \sim \frac{\alpha^2 E_n}{10}$) > 超精细结构 ($\sim \frac{\alpha^2}{2000} E_n$)



$$\Delta E = \frac{a}{2} [F(F+1) - J(J+1) - I(I+1)]$$

$$a = g_I \frac{m_e}{M_p} m_e c^2 \alpha^4 \frac{1}{j(j+1)(2l+1)} \frac{Z^3}{n^3}$$

3.10 解:

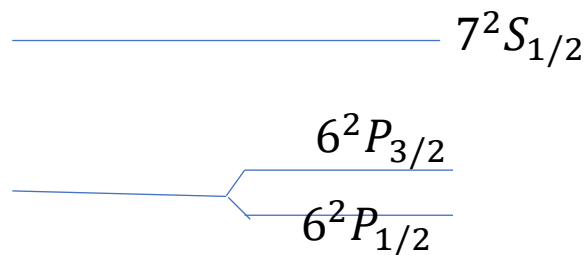
(1) Cs 原子: $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{1/2}$ & $7^2S_{1/2} \rightarrow 6^2P_{3/2}$

(2) $\Delta E = hc(\tilde{\nu}_2 - \tilde{\nu}_1) = 6.87 \times 10^{-2} \text{ eV}$

(3) $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_B g_s m_s \cdot B$

$$\Rightarrow B = \frac{\Delta E}{2\mu_B g_s m_s} = \frac{\Delta E}{2\mu_B} = 5.935 \times 10^2 \text{ T}$$

$${}^2S_{1/2} \quad m = \pm \frac{1}{2}$$
$$g = 1 + \frac{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} + 1) + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} + 1) - 0 \times (0 + 1)}{2 \times \frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} + 1)} = 2$$



3.11 解:

(1)

$\Delta l = \pm 1; \Delta j = 0, \pm 1$ (能级次序: $4S < 4P < 3D$)

$\lambda_1: 4^2P_{1/2} \rightarrow 4^2S_{1/2}$ $\lambda_2: 4^2P_{3/2} \rightarrow 4^2S_{1/2}$ $\lambda_3: 3^2D_{3/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$ $\lambda_4: 3^2D_{3/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$ $\lambda_5: 3^2D_{5/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$

(2)

4S 态:

$$E_{4s} = -I = -4.32 \text{ eV}$$

$$E_{4s} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{Z_{4s}^{*2}}{n^2} = -4.32 \text{ eV}$$

$$\Rightarrow Z_{4s}^* = 2.25$$

$$E_{4s} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{1}{(n - \Delta_{nl})^2} = -\frac{\mu\alpha^2c^2}{(4 - \Delta_{4s})^2}$$

4P 态:

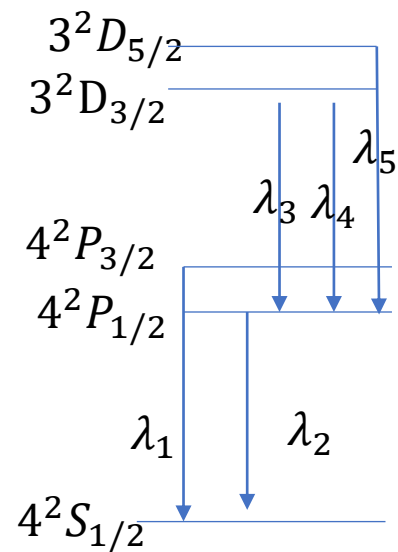
$$E_{4p} = E_{4s} + h\nu = -4.32 \text{ eV} + \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{769.90 \text{ nm}} = -2.70 \text{ eV}$$

$$E_{4p} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{Z_{4p}^{*2}}{n^2} = -2.70 \text{ eV}$$

$$\Rightarrow Z_{4p}^* = 1.78$$

$$E_{4p} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{1}{(n - \Delta_{nl})^2} = -\frac{\mu\alpha^2c^2}{(4 - \Delta_{4p})^2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta_{4p} = 4 - 2.25 = 1.75$$



3D 态:

$$E_{3d} = E_{4p} + h\nu = -2.70 \text{ eV} + \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{1177.17 \text{ nm}} = -1.65 \text{ eV}$$

$$E_{3d} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{Z_{3d}^{*2}}{n^2} = -1.65 \text{ eV}$$

$$\Rightarrow Z_{3d}^* = 1.04$$

$$E_{3d} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{1}{(n - \Delta_{nl})^2} = -\frac{\mu\alpha^2c^2}{(4 - \Delta_{3d})^2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta_{3d} = 0.12(3)$$

3.12 解:

方法一:

$$\text{主线系: } \tilde{\nu}_n = \frac{R}{(3-\Delta_s)^2} - \frac{R}{(n-\Delta_p)^2}$$

$$\text{第一辅线系 (漫线系): } \tilde{\nu}_n = \frac{R}{(3-\Delta_p)^2} - \frac{R}{(n-\Delta_d)^2}$$

$$\text{第二辅线系 (锐线系): } \tilde{\nu}_n = \frac{R}{(3-\Delta_p)^2} - \frac{R}{(n-\Delta_s)^2}$$

$$\text{基线系: } \tilde{\nu}_n = \frac{R}{(3-\Delta_d)^2} - \frac{R}{(n-\Delta_f)^2}$$

$$\tilde{\nu}_\infty = \frac{R}{(3-\Delta_{3s})^2} = \frac{1}{241.3 \text{ nm}}$$

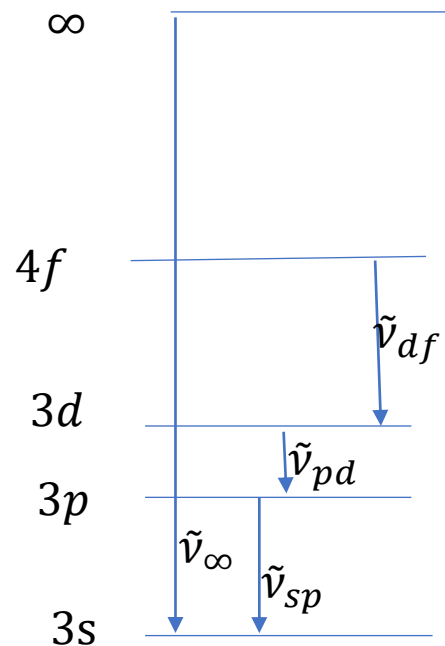
$$\tilde{\nu}_{sp} = \frac{R}{(3-\Delta_{3s})^2} - \frac{R}{(3-\Delta_{3p})^2} = \frac{1}{589.3 \text{ nm}}$$

$$\tilde{\nu}_{pd} = \frac{R}{(3-\Delta_{3p})^2} - \frac{R}{(3-\Delta_{3d})^2} = \frac{1}{819.3 \text{ nm}}$$

$$\tilde{\nu}_{df} = \frac{R}{(3-\Delta_{3d})^2} - \frac{R}{(4-\Delta_{4f})^2} = \frac{1}{1845.9 \text{ nm}} \text{ (原题有误)}$$

解上述等式得:

$$\Delta_{3s} = 1.3729; \Delta_{3p} = 0.8827; \Delta_{3d} = 0.0096(5); \Delta_{4f} = 0.0016(8)$$



3.13 解:

$$N_1:N_2 = \frac{g_1}{g_2} e^{-(E_1-E_2)/kT}$$

$$E_1 - E_2 = \Delta E_1 - \Delta E_2 = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{894.35 \text{ nm}} - \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{852.11 \text{ nm}} = 0.0687 \text{ eV}$$

$$N_1:N_2 = I_1:I_2 = 2:3; \quad g_1:g_2 = 2:4$$

$$\therefore T = 2770 \text{ K}$$

3.14 解:

$$(1) \quad g_j = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$$

$$\begin{cases} {}^2P_{3/2}: l = 1, s = 1/2, j = 3/2 \Rightarrow g_j = \frac{4}{3} \\ {}^2D_{5/2}: l = 2, s = 1/2, j = 5/2 \Rightarrow g_j = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$(2) \quad \Delta E = g_j \mu_B B$$

$$\therefore \Delta E_P > \Delta E_D$$

(3) $U = -\vec{\mu}_j \cdot \vec{B} = m_j g_j \mu_B B$, 分裂为 $(2j + 1)$ 条等间隔的能级。

$$\begin{cases} {}^2P_{3/2}: \Delta E = 2j \Delta E_P = 4 \mu_B B \\ {}^2D_{5/2}: \Delta E = 2j \Delta E_D = 6 \mu_B B \end{cases}$$

3.15 解:

${}^2P_{1/2}$ & ${}^2S_{1/2}$ 在弱磁场中, 由于 $j = 1/2$, 故分别分裂为 $2j + 1 = 2$ 个能级。

$$\Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = (m_2g_2 - m_1g_1)\mathcal{L}$$

${}^2S_{1/2}$ 中 $g_1 = 2$; ${}^2P_{1/2}$ 中 $g_2 = 2/3$; 选择定则 $\Delta m = 0, \pm 1$, 跃迁有**四条**, 分别为:

$$m_2 = 1/2, m_1 = 1/2 \quad \text{时, } \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = -\frac{2}{3}\mathcal{L} \quad \sigma$$

$$m_2 = 1/2, m_1 = -1/2 \quad \text{时, } \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = \frac{4}{3}\mathcal{L} \quad \pi$$

$$m_2 = -1/2, m_1 = 1/2 \quad \text{时, } \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = -\frac{4}{3}\mathcal{L} \quad \pi$$

$$m_2 = -1/2, m_1 = -1/2 \quad \text{时, } \tilde{\nu} - \tilde{\nu}_0 = \frac{2}{3}\mathcal{L} \quad \sigma$$

σ & π 偏振线波数差:

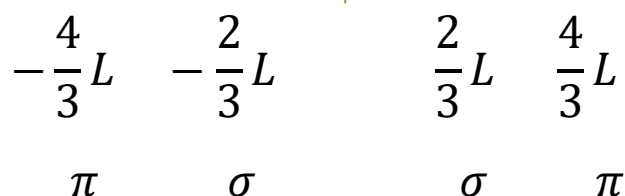
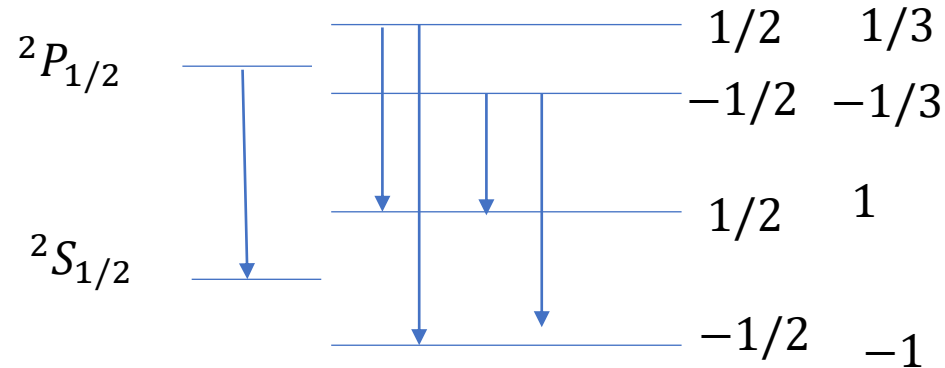
$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = -\frac{1}{\tilde{\nu}^2} \Delta\tilde{\nu} = -\lambda^2(m_2g_2 - m_1g_1)\mathcal{L}$$

$$0.600\text{nm} = -(589.59\text{nm})^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_B B}{hc}$$

$$\Rightarrow B = 55.5\text{ T}$$

$$L = \frac{\mu_B B}{hc}$$

$$\Delta m = 0 \pm 1$$



3.16 解:

(1)

考虑了相对论效应和自旋-轨道耦合后, 量子数 $n = 3$ 的能级数为 5, 分别是:

$$3^2S_{1/2}, 3^2P_{1/2}, 3^2P_{3/2}, 3^2D_{3/2}, 3^2D_{5/2}$$

(2)

强磁场下, 量子数 $n = 3$ 的能级数为 14 (忽略自旋轨道相互作用)。

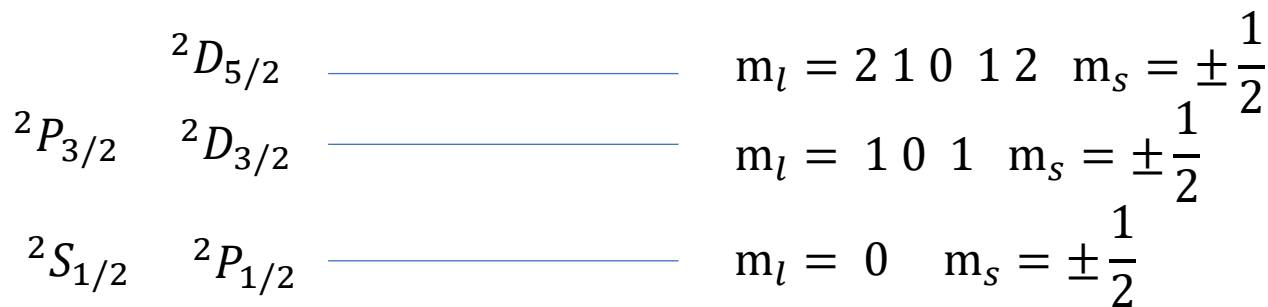
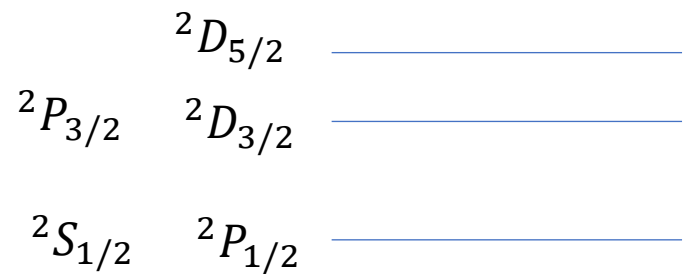
$$U = (m_l + 2m_s)\mu_B B$$

$$3s: m_l + 2m_s = \pm 1$$

$$3p: m_l + 2m_s = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$3d: m_l + 2m_s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$\Delta E \sim \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j+0.5}\right)$ 根据公式是按照 j 分裂



3.17 解:

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = 2$$

$$\Delta E = g\mu_B B = 1.16 \times 10^{-4} \text{ eV} \quad (3.5.12)$$

电子自旋变换方向, 即 $\Delta m = 1$

$$\nu = \frac{g_j \mu_B B}{h} = \frac{1.16 \times 10^{-4} \text{ eV}}{4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}} = 2.8 \times 10^{10} \text{ Hz} \quad (3.5.22)$$



3.18 解:

书中(3.3.21)式:

$$\Delta E(F = 1) - \Delta E(F = 0) = a$$

$$\therefore a = h\nu = 6.63 \times 10^{-34} \cdot 1420 \times 10^6 J = 9.41 \times 10^{-25} J (\text{或 } 5.87 \times 10^{-6} eV)$$

3.19 解:

电子顺磁共振 (3.5.22): $h\nu = g_j \mu_B B$

$$\therefore g_j = \frac{h\nu}{\mu_B B} = 0.8$$

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} = 0.8; \quad s = \frac{1}{2}; \quad j = l \pm 1/2$$

解得: $l = 2, 1/2; j = l - 1/2$ 和 $l = -3, -3/2; j = l + 1/2$

$\therefore l = 2; j = 3/2$ 原子处于 ${}^2D_{3/2}$

谢谢!



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第四次习题课

第四章作业+第三次小测

2023.06.08



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第四章作业

4.1

He原子基态电子组态： $1s^2$

$L=0, S=0,1,2 \Rightarrow J=0,1,2 \Rightarrow {}^1S_0, {}^3S_1, {}^5S_2$

玻色子波函数交换对称 \Rightarrow 自旋波函数交换对称 $\Rightarrow {}^1S_0, {}^5S_2$

S大(自旋取向平行)的能量更低 $\Rightarrow {}^5S_2$

第四章作业

4.2

ΔE_1 : 电子的空间波函数不同, 使得库仑相互作用不同, 导致能级发生劈裂。

ΔE_2 : 交换效应导致的能级分裂。

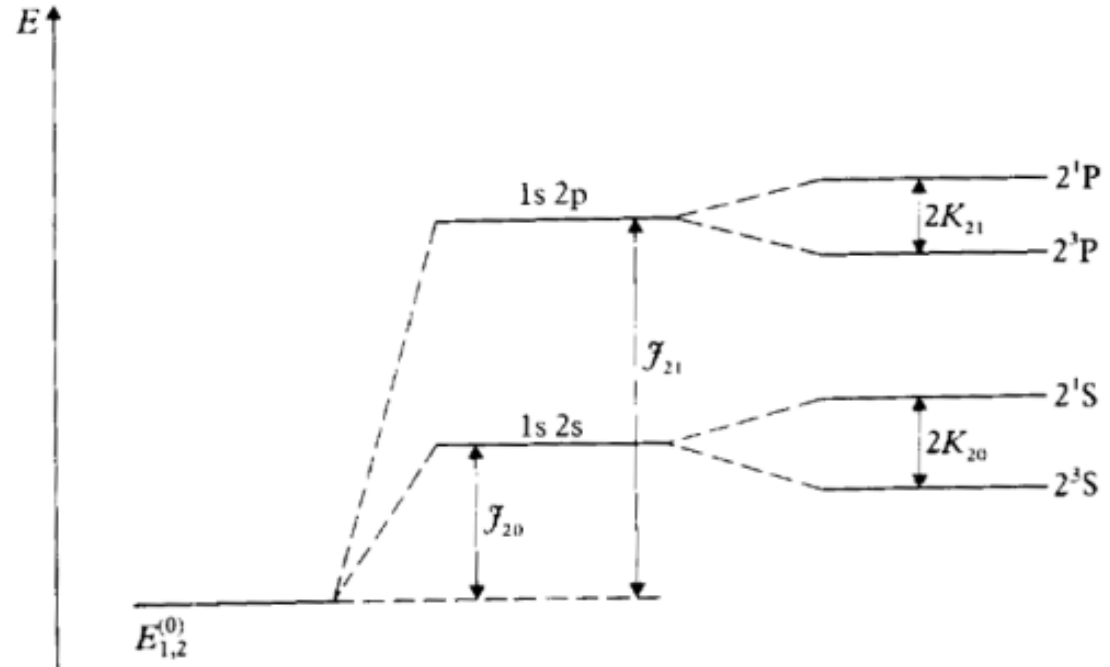
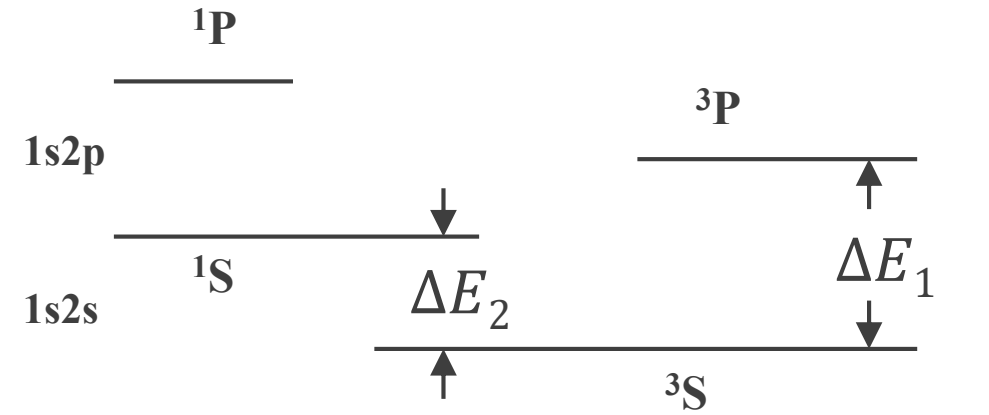
自旋平行的三重态能量修正: $\Delta E_A = J - K$

自旋反平行单重态能量修正: $\Delta E_S = J + K$

$$\Delta E_1 = J_{21} - J_{20} + K_{20} - K_{21}$$

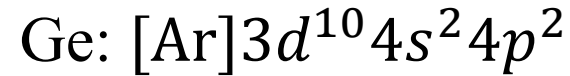
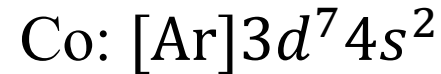
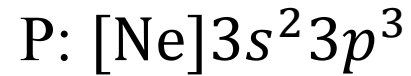
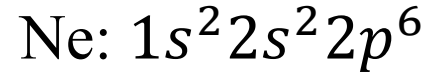
$$\Delta E_2 = 2K_{20}$$

$$\Delta E_1 - \Delta E_2 = J_{21} - J_{20} - K_{20} - K_{21} > 0$$



第四章作业

4.3



4.4

等效电子 nd^2 :

$$G = C_{2(2l+1)}^v = C_{2*5}^2 = 45$$

非等效电子 $n_1 dn_2 d$:

$$G = \prod_{i=1}^v 2(2l_i + 1) = 2 * 5 * 2 * 5 = 100$$

4.5

$$(1) n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$$

$$(2) {}^1P_2: L=1, S=0 \Rightarrow J=1$$

$${}^3F_3: L=3, S=1 \Rightarrow J=2, 3, 4$$

第四章作业

4.6

np³:

$M_l \backslash M_s$	3/2	1/2	-1/2	-3/2
3				
2		(1 ⁺ 1 ⁻ 0 ⁺)	(1 ⁺ 1 ⁻ 0 ⁻)	
1		(1 ⁺ 0 ⁻ 0 ⁺)(1 ⁺ 1 ⁻ -1 ⁺)	(1 ⁻ 0 ⁻ 0 ⁺)(1 ⁺ 1 ⁻ -1 ⁻)	
0	(1 ⁺ 0 ⁺ -1 ⁺)	(1 ⁺ 0 ⁻ -1 ⁺)(1 ⁺ 0 ⁺ -1 ⁻) (1 ⁻ 0 ⁺ -1 ⁺)	(1 ⁺ 0 ⁻ -1 ⁻)(1 ⁻ 0 ⁺ -1 ⁻) (1 ⁻ 0 ⁻ -1 ⁺)	(1 ⁻ 0 ⁻ -1 ⁻)
-1		(-1 ⁺ 0 ⁻ 0 ⁺)(1 ⁺ -1 ⁻ -1 ⁺)	(-1 ⁻ 0 ⁻ 0 ⁺)(1 ⁻ -1 ⁻ -1 ⁺)	
-2		(-1 ⁺ -1 ⁻ 0 ⁺)	(-1 ⁺ -1 ⁻ 0 ⁺)	
-3				

${}^4S_{3/2}$ ${}^2P_{3/2,1/2}$ ${}^2D_{5/2,3/2}$

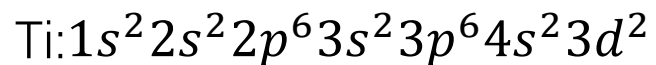
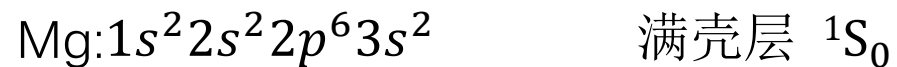
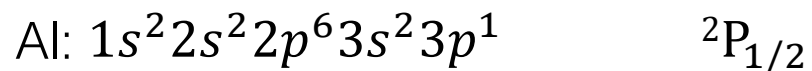
状态数: $G = C_{2(2l+1)}^v = C_{2*3}^3 = 20$ / 4+4+2+6+4=20

第四章作业

4.7

$$\frac{J_{max} - 1}{J_{max}} = \frac{3}{5} \Rightarrow J_{max} = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} L + S = \frac{5}{2} \\ |L - S| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow L = 1, S = \frac{3}{2} \Rightarrow {}^4P_{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}}$$

4.8



Hund规则: S最大 $\Rightarrow S=1$, L最大 $\Rightarrow L=3$, 不到半满J最小 $\Rightarrow J=2 \Rightarrow {}^3F_2$

第四章作业

4.9 $4d^8 5s^1$

$$4d^8 \Rightarrow 4d^2: L + S \text{ 为偶数} \Rightarrow {}^1G_4, {}^3F_{4,3,2}, {}^1D_2, {}^3P_{0,1,2}, {}^1S_0$$

$$5s^1: l = 0, s = 1/2 \Rightarrow {}^2G_{9/2}, {}^4F_{9/2, 7/2, 5/2, 3/2}, {}^2F_{7/2, 5/2}, {}^2D_{5/2, 3/2}, {}^4P_{5/2, 3/2, 1/2}, {}^2P_{3/2, 1/2}, {}^2S_{1/2}$$

基态: S最大, L最大, 超过半满J最大 $\Rightarrow {}^4F_{9/2}$

4.10 $6p7p$

$$l_1 = l_2 = 1, s_1 = s_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow j_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \quad j_2 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{1,0}, \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)_{2,1}, \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)_{2,1}, \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)_{3,2,1,0}$$

第四章作业

4.11 Cl: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ ${}^2P_{3/2}$ $M_J = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 4条

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{4}{3}$$

H: $1s^1$ ${}^2S_{1/2}$ $g_J = 2$

$$\Delta x \propto a \propto \mu_{jz} \propto g_J \Rightarrow \frac{\Delta x_{Cl}}{\Delta x_H} = \frac{g_{JCl}}{g_{JH}} \Rightarrow \Delta x_{Cl} = 0.4cm$$

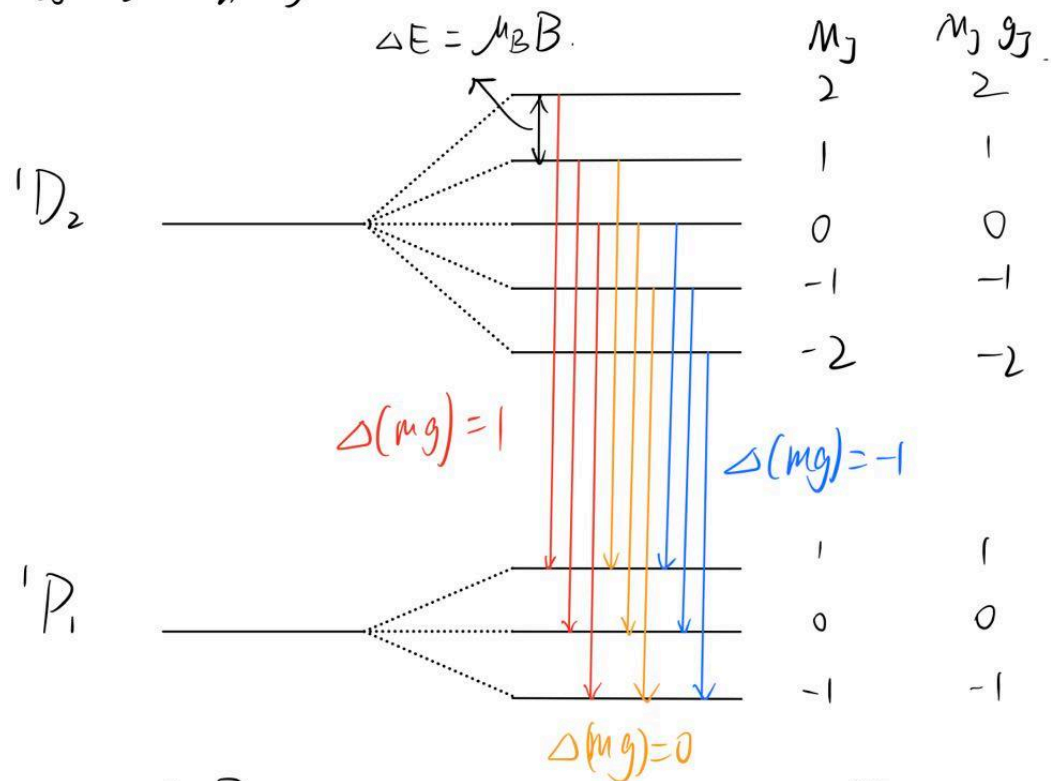
第四章作业

4.12

$B = 2T$. 弱场

$${}^1D_2: g_J = \frac{3}{2} + \frac{-2 \times 3}{2 \times 2 \times 3} = 1$$

$${}^1P_1: g_J = \frac{3}{2} + \frac{-1 \times 2}{2 \times 1 \times 2} = 1$$



$$\Delta \nu = \frac{\mu_B B}{h} = 2.8 \times 10^{10} \text{ Hz} \Rightarrow \frac{e}{m} = 4\pi \frac{\Delta \nu}{B} = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

第四章作业

4.13

(1)

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{3}{2}$$

(2)

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{J(J+1) - 0(0+1)}{2J(J+1)} = 2$$

(3)

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{0(0+1) - J(J+1)}{2J(J+1)} = 1$$

第四章作业

4.14

允许: (1)(3)

禁戒: (2) $\Delta S=0$; (4) $J = 0 \nrightarrow J = 0$; (5) $\Delta J = 0, \pm 1$

4.15

3p4p: $^1S_0, ^3S_1, ^1P_1, ^3P_{2,1,0}, ^1D_2, ^3D_{3,2,1}$

3s3p: $^1P_1, ^3P_{2,1,0}$

共18种: $^1S_0, ^1P_1, ^1D_2 \rightarrow ^1P_1$; $^3S_1, ^3P_1, ^3D_1 \rightarrow ^3P_{2,1,0}$
 $^3P_2, ^3D_2 \rightarrow ^3P_{2,1}$; $^3P_0 \rightarrow ^3P_1$; $^3D_3 \rightarrow ^3P_2$

第四章作业

4.16

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = \frac{hc}{T} \Rightarrow h = \frac{\lambda_{\min} T}{c} = 4.147 \times 10^{-15} \text{eV} \cdot \text{s} \\ = 6.635 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

4.17

只有在n=1壳层出现空位时才能观察到K线系，所需能量：

$$E = hc\tilde{\nu}_K = hcR(Z - 1)^2 = 26.33 \text{keV} > \text{电子能量 } E_e = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = 20 \text{keV}$$

4.18

$$\text{K}_\alpha \text{线波长满足: } \frac{1}{\lambda} = R(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$\Rightarrow Z = 1 + \sqrt{\frac{4}{3\lambda R}} = \begin{cases} 0.2291: 24 & \text{Cr} \\ 0.1542: 29 & \text{Cu} \end{cases}$$

第三次测验题目

曲三标



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

1. 碱金属原子一般结构的能级与氢原子能级相比, 其特点是 (A)

- A. 对应一个主量子数 n 有 n 个能级, 且每个能级数值均小于相同 n 的氢原子能级值
- B. 对应一个主量子数 n 仍为一个能级, 但数值在相同 n 的氢原子能级之下
- C. 对应一个主量子数 n 其能级要由 n, l 决定, 其能级数值大于相同 n 的氢原子能级值
- D. 对应一个主量子数 n 仍为一个能级, 但数值在相同 n 的氢原子能级之上

对于碱金属原子

$$E_{nl} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{1}{(n-\Delta_{nl})^2} \quad \Delta_{nl} \quad l = 0 \ 1 \ \dots \ n-1,$$

单个价电子的轨道贯穿, 会造成不同L层的电子能级移动不同,

对于氢原子

$$E_{nl} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{1}{n^2}$$

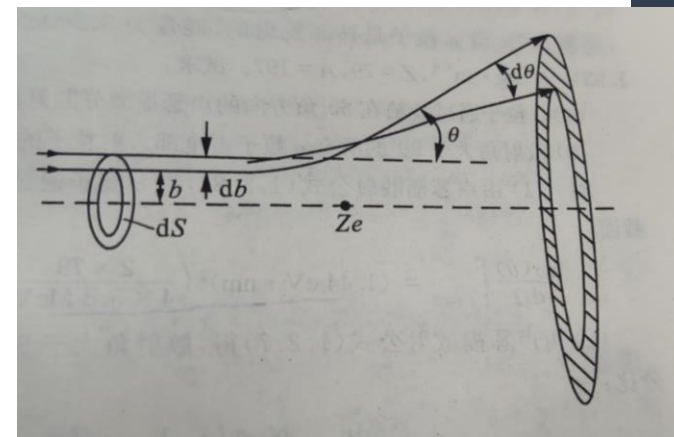
氢原子不存在轨道贯穿作用, 能级不移动。

2. 一束强度为 I_0 、横截面为 A 的均匀 α 粒子束，垂直入射到一很薄的金箔上。已知金箔厚度为 t ，数密度为 N ，当碰撞参量为 b 时，散射角为 θ ，则 $I_0 ANt 2\pi b |db|$ 等于 (B)

- A. 单位时间内被金箔散射、且散射角为 θ 的 α 粒子数
- B. 单位时间内被金箔散射、且散射角处于 $\theta \sim \theta + d\theta$ 之间的 α 粒子数
- C. 单位时间内被金箔散射、且散射角为 θ 处的单位立体角内的 α 粒子数
- D. 单位时间内被金箔散射、且散射角大于 θ 的 α 粒子数

一个 α 离子打一个金原子对应应在 $dS = 2\pi b |db|$ 环上，被散射到 θ 到 $\theta + d\theta$ 的角度范围内，根据题意， α 离子束穿过的区域包含的金原子个数为 ANt ，单位时间的 α 离子为 I_0 。

C选项单位立体角是一个微分量，等价于 dS/S ，如书中公式 (1.2.6-1.2.7)



3. 在氢原子中电子处于第二玻尔轨道的德布罗意波长是 B

A. $\lambda = \frac{p}{h}$;

B. $\lambda = 4\pi a_0$;

C. $\lambda = 8\pi a_0$;

D. $\lambda = \frac{h}{p}$ 。

$$\oint p d\varphi = mvr2\pi = nh, \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi r}{n} \rightarrow \frac{2\pi \cdot 4a_0}{2} = 4\pi a_0$$

D选项，没有用原子物理中的常量表示，故而不选

4. 一个电子限制在 x 与 $x+\Delta x$ 两个不可穿透的墙壁之间, $\Delta x = 0.05\text{nm}$, 则电子最低能量是多少

A. 0.2eV B. 1.5eV C. 15eV D. 150eV

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m\Delta x} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2c^2}{2mc^2\Delta x^2} = \frac{n^2 \cdot 1240 \cdot 1240 \text{eV}^2 \cdot \text{nm}^2}{4 \cdot 2 \cdot 511 \text{keV} \cdot 0.05 \cdot 0.05 \cdot \text{nm}^2} = 150 \text{eV}$$

5. Li 原子 ($Z=3$) 3S、3P、3D 的谱项依次为： 16280.5cm^{-1} 、 12559.9cm^{-1} 和 12202.5cm^{-1} ，则相应的有效量子数依次为：

A. 1.589, 1.960, 2.000 ;

B. 2.596, 2.999, 2.956 ;

C. 2.596, 2.956, 2.999 ;

D. 2.596, 2.956, 3.030 。

$$E_{nl} = -\frac{1}{2}\mu\alpha^2c^2\frac{1}{(n-\Delta_{nl})^2} = hc\tilde{\nu}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{R}{(n-\Delta_{nl})^2} = \frac{1.09737 \times 10^5 \text{cm}^{-1}}{(n-\Delta_{nl})^2}$$

6. 考虑精细结构, 不考虑兰姆位移, 氢光谱巴耳

末系的 H_α 线应有:

- A. 双线; B. 三线;
 C. 五线; D. 七线。

能级惊喜结构按J量子数分裂成不同的能级,

3.3.2 氢原子光谱的精细结构

能级的精细结构分裂导致相应光谱的精细结构分裂。原子吸收和辐射电磁波可以近似看作是一种电偶极振荡。对于这种电偶极辐射, 原子对应的跃迁要满足如下的选择定则(选择定则的物理内涵将在第8章中介绍)

$$\Delta l = \pm 1, \quad \Delta j = 0, \pm 1 \quad (3.3.12)$$

以氢原子光谱巴耳末系的 H_α 线为例讨论光谱的精细结构, 按照选择定则, H_α 线相应的精细结构跃迁如图3.3.2所示, 允许的跃迁有7个, 分别是

- (a) $3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$, (b) $3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$, (c) $3^2D_{5/2} \rightarrow 2^2P_{3/2}$
 (d) $3^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, (e) $3^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$
 (f) $3^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, (g) $3^2D_{3/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$

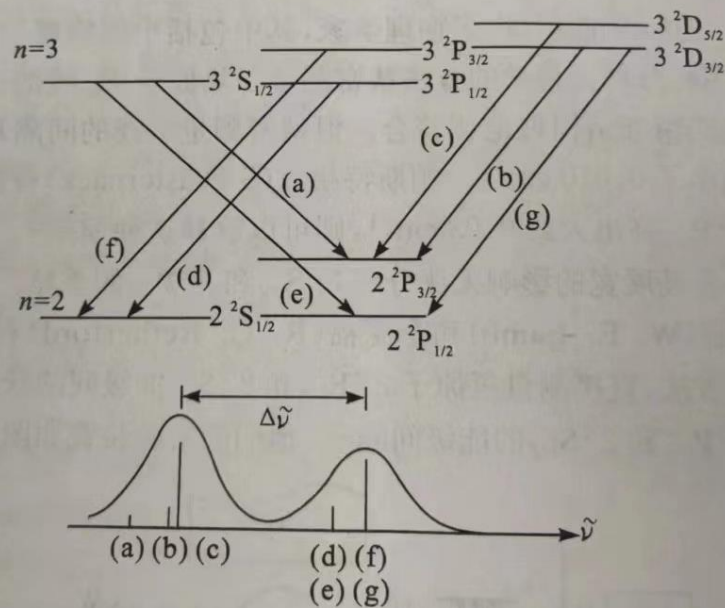


图 3.3.2 氢原子光谱的巴耳末系 H_α 线相应的精细结构跃迁

7. $\frac{e}{m}$ 为电子的荷质比, L 、 S 和 J 分别为电子的总轨道、总自旋和总角动量, 则原子的总磁矩为:

A. $-\frac{e}{2m}(J+S)$;

B. $-\frac{e}{2m}(L+S)$;

C. $-\frac{e}{2m}(2L+S)$;

D. $-\frac{e}{2m}\frac{L+S}{J(J+1)}$ 。

$$\mu = -\frac{\mu_B}{\hbar}(g_l L + g_s S) = -\frac{\mu_B}{\hbar}(L + 2S) = -\frac{e}{2m}(J + S)$$

8. 在外磁场中的原子，若外磁场 \mathbf{B} 可视为弱磁场，则：

A. μ_l 和 μ_s 先耦合成 μ 再与 \mathbf{B} 耦合

B. 由于 \mathbf{B} 弱使 μ_l 与 μ_s 不能耦合成 μ

C. 由于 \mathbf{B} 弱，所以磁场对原子的作用总可忽略

D. μ_l 与 μ_s 分别同 \mathbf{B} 耦合，而后形成总附加能

原子内部磁场约为0.1-100T，当外场远小于原子内磁场时，L-S耦合能远高于原子与外部磁场的相互作用能，此时，先考虑LS耦合，在考虑耦合后的总磁矩与外磁场的相互作用能。

9. 基态原子态为 $^2F_{7/2}$ 和 $^2D_{3/2}$ 的中性原子束，按斯特恩-盖拉赫方法，通过极不均匀磁场后各分裂成多少束？

A. 8束和5束；

B. 8束和4束；

C. 3束和5束；

D. 11束和7束。

$$F_z = -\mu_{jz} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

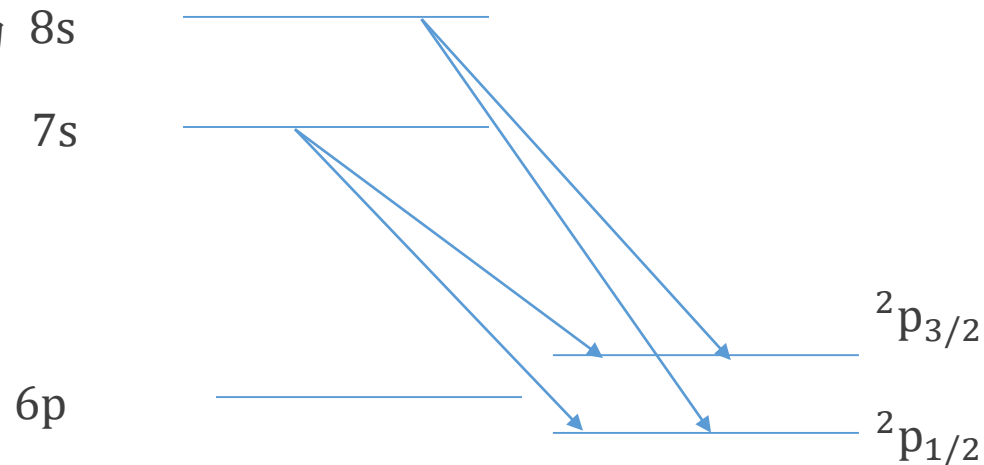
$$\mu_{jz} = -g_j m_j \mu_B, m_j = j, j-1, \dots, -j$$

在外磁场中中，有效磁矩的投影一共有 $(2J+1)$ 个，所以分离为8和4束

10. 已知铯原子第二辅线系的第一条谱线由波数为 6805cm^{-1} 和 7359cm^{-1} 的双重线构成，那么，这一线系第二条谱线结构的波数差为：

- A. 55.4cm^{-1} ; B. 5.54cm^{-1} ; C. 554cm^{-1} ; D. 0.554cm^{-1} 。

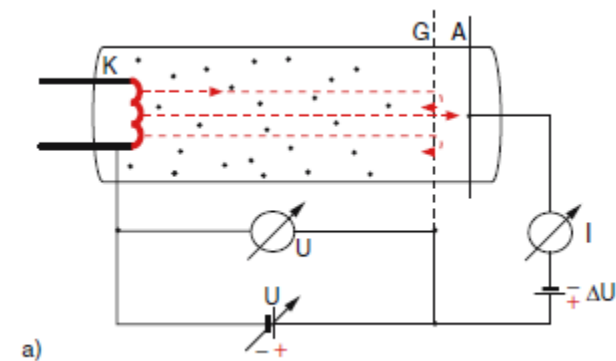
铯原子第二辅线系的第一条谱线为 $7s \rightarrow 6p$ ，
铯原子第二辅线系的第二条谱线 $8s \rightarrow 6p$ ，
双线结构来源于 $^2p_{3/2}$ 与 $^2p_{1/2}$ 能级不同，所以第二条谱线结构的波数差与第一条谱线双线结构的波数差相同，为 $8s$
 $7359-6805\text{cm}^{-1}$



11. 动能为5.3MeV的 α 粒子与静止的金核 ($Z=79$) 发生弹性散射, 当散射角 θ 为 120° 和 60° 时所对应的瞄准距离分别为 b_1 和 b_2 , 则 $b_1:b_2 = \cot 60^\circ / \cot 30^\circ = 1/3$ 。

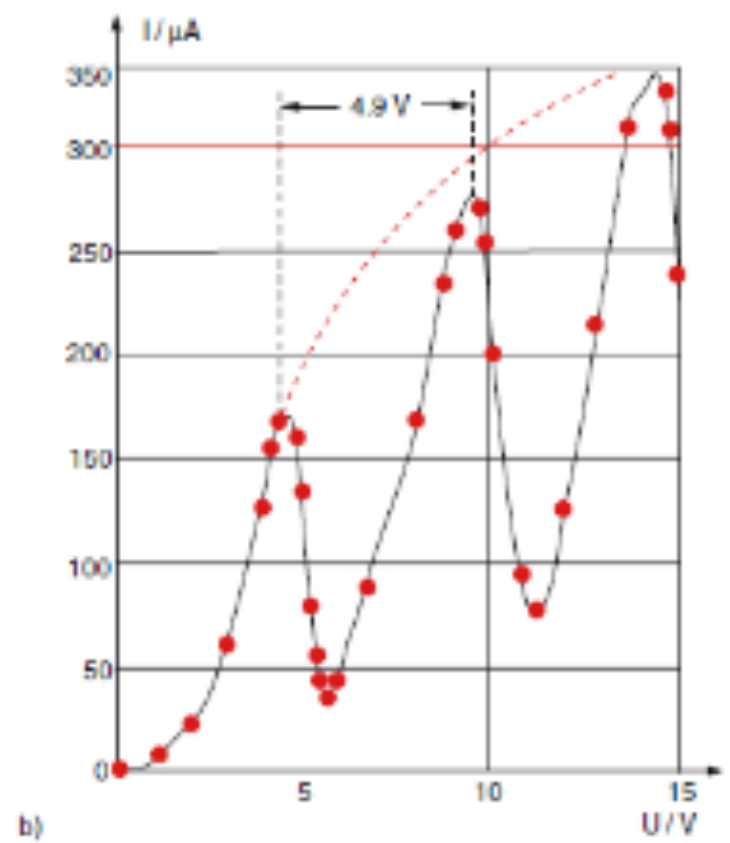
α 离子散射角度 θ 与瞄准距离 b , 离子能量 E 满足关系式 $\cot \frac{\theta}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{2Eb}{zZe^2} \frac{2b}{a}$

12. 在研究电子与汞蒸气原子的非弹性碰撞的弗兰克-赫兹实验中，得到的伏安曲线是由一系列的峰和谷组成的，其峰（或谷）的间距约为4.9V，由此可知汞原子的第一激发电势约为 4.9。实验中还可以观察到汞原子发出的光谱线，其波长约为_____。



当电子能量加速到4.9eV时，电子与气体发生非弹性碰撞把能量传递给原子，剩余电子动能较小，无法克服GA之间的势垒，导致电流降低。表明原子内存在着分离的能级，能级差为4.8eV

$$h\nu = 4.9\text{eV} \rightarrow \nu = 253.06\text{nm}$$



13. 氢原子中电子若处于 $n=2, l=1$ 的状态, 则该电子的轨道角动量在外场方向投影 L_z 的可能值为 $0 \pm 1 \hbar$

14. 某碱金属原子的价电子从 $4d$ 态跃迁到 $4p$ 态(考虑精细结构), 则可能的跃迁为

4d LS耦合, $4^2D_{5/2}$ 和 $4^2D_{3/2}$

3p LS耦合, $4^2P_{3/2}$ $4^2P_{1/2}$

电偶极跃迁规则为 $\Delta l = \pm 1, \Delta j = 0 \pm 1$ ($0 \rightarrow 0$ 除外), 故可能的跃迁

$4^2D_{5/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$; $4^2D_{3/2} \rightarrow 4^2P_{3/2}$; $4^2D_{3/2} \rightarrow 4^2P_{1/2}$

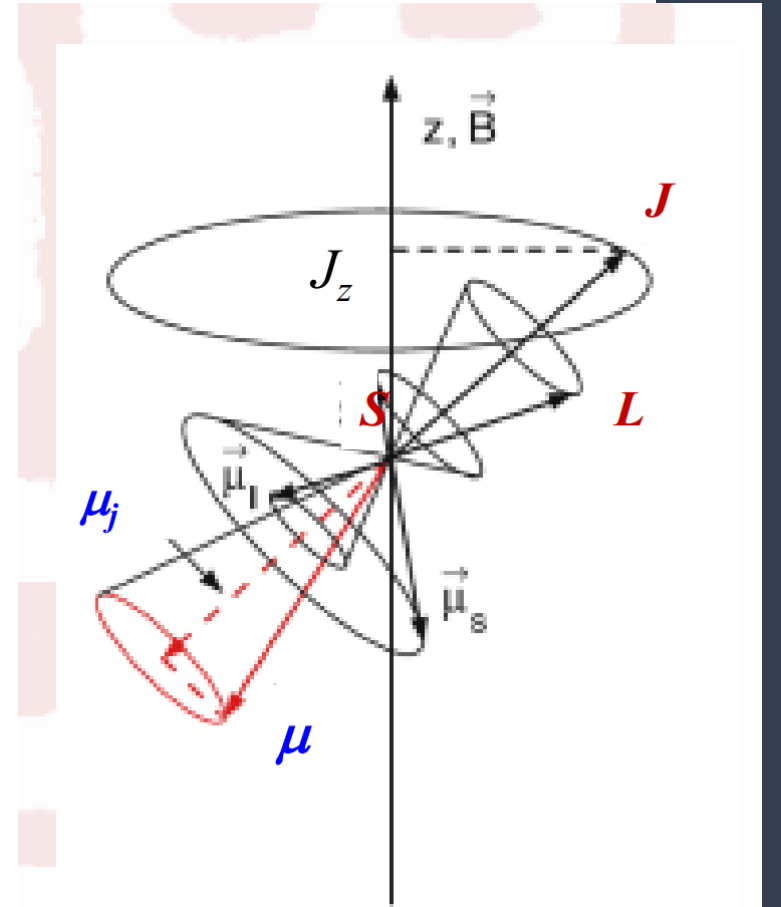
15. 在原子中轨道磁距 μ_L 与轨道角动量 L 方向相反, 自旋磁距 μ_S 与自旋角动量 S 的方向相反, 但总磁距 μ_J 与总角动量 J 一般不共线, 这是由于的结果。

$$\mu = -\frac{\mu_B}{\hbar}(g_L L + g_S S) = -\frac{\mu_B}{\hbar}(L + 2S) = -\frac{e}{2m}(J + S)$$

$$J = L + S$$

这是因为L和S的g因子不同,

$g_L = 1$ $g_S = 2$
 导致磁矩与角动量不共线。



16. 碱金属原子铯($^{133}_{55}\text{Cs}$), 其基态的原子态是 $6^2\text{S}_{1/2}$, 其核自旋为 $7/2$ 。基态的两个超精细能级 $F = 4$ 和 $F = 3$ 的间隔约为 9192 MHz 。

电子处在基态 $6s$, 光谱项为

$$L = 0 \quad S = \frac{1}{2} \quad J = 1/2 \quad \text{原子基态为 } 6^2\text{S}_{1/2}$$

原子核的自旋角动量

$$I = 7/2$$

$$F = 4$$

原子体系的总角动量为

$$F = I + J$$

$$6^2\text{S}_{1/2}$$

$$F = 3$$

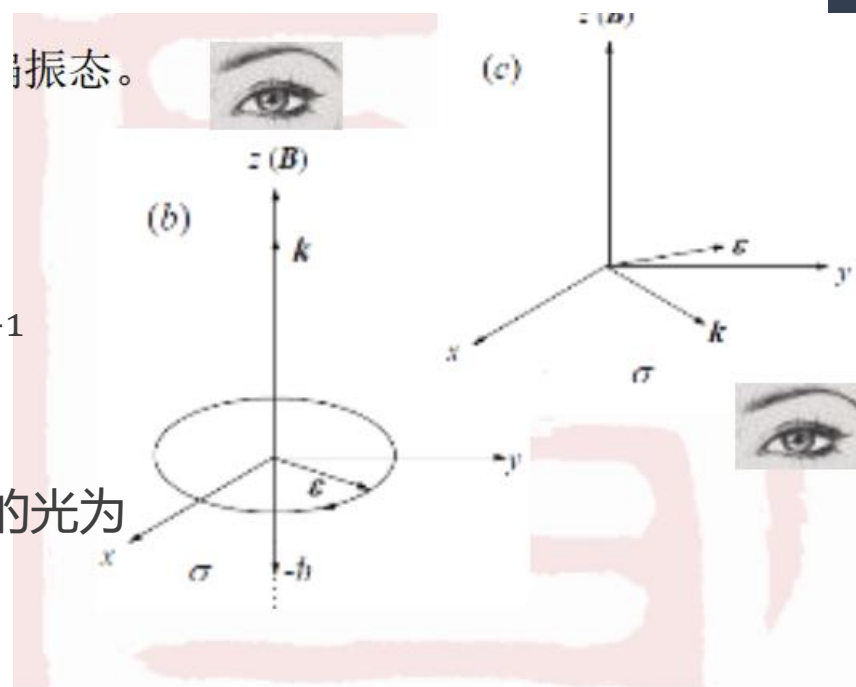
F 可能的取值为 4 和 3 , 即为超精细结构的能级

17. 在 $B=1.00\text{T}$ 的磁场中，在垂直于磁场的方向观察，正常塞曼效应中各谱线总的裂距应该是_____ cm^{-1}

强磁场中发生塞曼分裂，光谱波数满足公式

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 + \frac{\mu_B B}{hc} + \Delta m_l = \begin{cases} \tilde{\nu}_0 + \mathcal{L} & \Delta m_l = +1 \\ \tilde{\nu}_0 & \Delta m_l = 0 \\ \tilde{\nu}_0 - \mathcal{L} & \Delta m_l = -1 \end{cases} \quad \mathcal{L} = 0.466 \text{cm}^{-1}$$

垂直于磁场的方向观察，无法观察到 $\Delta m = 0$ 的 π 偏振光，观察到的光为 $\Delta m_l = \pm 1$ 的 σ 光，波数相差 $2\mathcal{L} = 0.9336 \text{cm}^{-1}$



18. 处于 $^2S_{1/2}$ 的基态钾原子，在0.40 T的磁场中，若要诱导电子的自旋变换方向，则需要外加振荡电磁场的频率为_____Hz。

$^2S_{1/2}$ 的能级在外磁场下分裂为二能级结构

$$\begin{array}{l} g_s m_s \mu_B B = \mu_B B \quad \text{-----} \quad 0.40 \text{ T} \\ -g_s m_s \mu_B B = -\mu_B B \quad \text{-----} \end{array}$$

$$2\mu_B B = h\nu \rightarrow \nu = 1.12 \times 10^{10} \text{ Hz}$$

19. 处于 ${}^2P_{3/2}$ 态的原子的朗德因子 g 是____，其有效磁矩为____，磁矩在外磁场方向分量的可能值为_____。

$${}^2P_{3/2} \quad L=1, \quad S=1/2 \quad J=3/2$$

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = 4/3$$

有效磁矩为

$$\mu = g\sqrt{J(J+1)} \mu_B = 2\sqrt{15}\mu_B/3$$

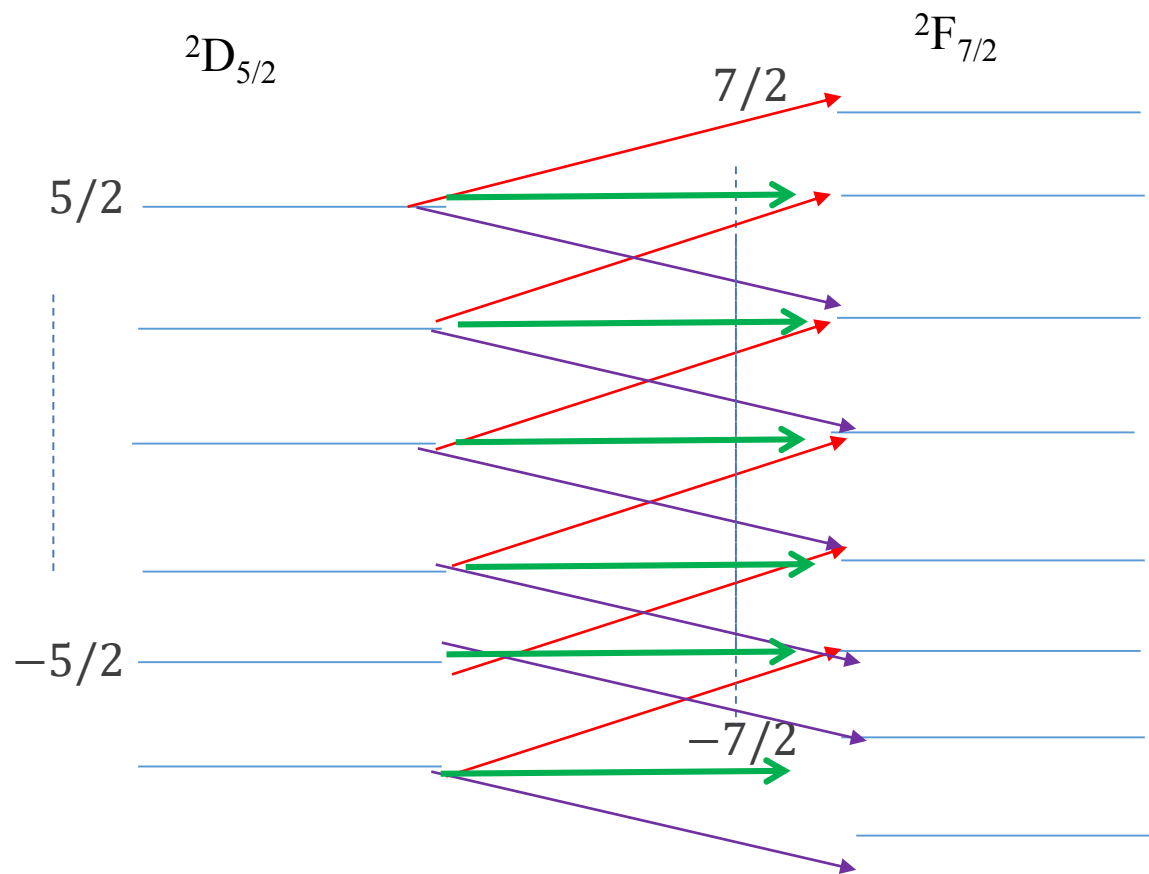
投影为

$$\mu_{jz} = -g_j m_j \mu_B, \quad m_j = j \quad j-1 \quad \dots \quad -j$$

$$\mu_{jz} = (2, 2/3, -2/3, -2) \mu_B$$

20. ${}^2D_{5/2} \rightarrow {}^2F_{7/2}$ 跃迁在弱磁场中可分裂为 18 条谱线。在平行于磁场方向可看到 12 条谱线。迎着磁场方向看, 满足 $\Delta M =$ -1 的谱线是左旋圆偏振光; 满足 $\Delta M =$ +1 的谱线则是右旋圆偏振光。

跃迁规则为 $\Delta L = \pm 1, \Delta m = 0 \pm 1$



谢谢!



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

第四次习题课

第四章小测+第五章作业

姚宗麟 2023.06.22



第五章作业

$$A + B \rightarrow A^+ + B^- (\text{相距无穷远}) \quad \Delta E_1 = E_{\text{亲和}} - E_{\text{电离}}$$

$$A^+ + B^- (\text{相距无穷远}) \rightarrow AB \quad \Delta E_2 = -E_p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0}$$

$$\Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 = E_{\text{亲和}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} - E_{\text{电离}}$$

5.1

$$R_0 = 0.305\text{nm}, E_{\text{电离}} = 4.34\text{eV}, E_{\text{亲和}} = 3.08\text{eV} \Rightarrow \Delta E = 3.46\text{eV}$$

5.2

$$E_{\text{电离}} = 4.34\text{eV}, E_{\text{亲和}} = 3.82\text{eV}, \Delta E = 4.64\text{eV} \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_0} = 5.16\text{eV} \Rightarrow R_0 = 0.279\text{nm}$$

第一条转动光谱线 $J = 1 \leftarrow J = 0$:

$$\tilde{\nu}_1 = 2B = \frac{\hbar}{2\pi\mu c R_0^2} = 0.232\text{cm}^{-1}$$

第五章作业

纯转动光谱：(选择定则 $\Delta J = \pm 1, \Delta M_J = 0, \pm 1$) $B = \frac{\hbar}{4\pi\mu c R_0^2}, D = \frac{\hbar^3}{4\pi k \mu^2 c R_0^6}$

$$\text{转动能 } E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) = hcBJ(J+1)$$

$$\text{谱线波数 } \tilde{\nu}_J = \frac{E_J - E_{J-1}}{hc} = 2BJ$$

$$\text{谱线间隔 } \Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_J - \tilde{\nu}_{J-1} = 2B$$

考虑离心畸变：

$$\text{转动能 } E_J = hc[BJ(J+1) - DJ^2(J+1)^2]$$

$$\text{谱线波数 } \tilde{\nu}_J = \frac{E_J - E_{J-1}}{hc} = 2BJ - 4DJ^3$$

$$\text{谱线间隔 } \Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_J - \tilde{\nu}_{J-1} = 2B - 4D(3J^3 - 3J + 1)$$

5.3

$$\text{谱线间隔 } \Delta\tilde{\nu} = 2B = \frac{\hbar}{4\pi Ic} = 16.94\text{cm}^{-1}$$

$$\Rightarrow I = \mu R_0^2 = 3.3 \times 10^{-47} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Rightarrow R_0 = 0.142\text{nm}$$

第五章作业

振转光谱：经典振动频率 $\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$

简谐振动(选择定则 $\Delta v = \pm 1$): $E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$, 谱线波数 $\tilde{\nu} = \frac{\nu_0}{c} = \tilde{\nu}_0$

非简谐振动(选择定则 $\Delta v = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$):

$$E_v = h\nu_0 \left(v + \frac{1}{2}\right) - h\nu_0 \eta \left(v + \frac{1}{2}\right)^2, \tilde{\nu}(v' \leftarrow 0) = v' \tilde{\nu}_0 - v'(v' + 1) \eta \tilde{\nu}_0$$

同一电子态 $(v', J') \leftarrow (v, J)$ 的跃迁 ($B' \approx B$):

R支 ($\Delta J = +1$), $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(v' \leftarrow v) + 2B(J + 1), J = 0, 1, 2, \dots$

P支 ($\Delta J = -1$), $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}(v' \leftarrow v) - 2BJ, J = 1, 2, 3, \dots$

$\Delta J = 0$ 禁戒, $\tilde{\nu}(v' \leftarrow v)$ 为谱带基线.

5.4 室温下 $k_B T = 0.0259 \text{ eV}$

振动基态 $E_0 = \frac{1}{2} h\nu_0 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = 0.1853 \text{ eV} \Rightarrow$ 激发态 $E_v = h\nu_0 \left(v + \frac{1}{2}\right) = 0.3706 \left(v + \frac{1}{2}\right)$

考虑玻尔兹曼分布, 基态布居数占总粒子数:

$$\frac{N_0}{N} = \frac{g_0 e^{-E_0/(k_B T)}}{\sum_v g_v e^{-E_v/(k_B T)}} = 1 - e^{-\frac{h\nu_0}{k_B T}} = 0.99999939 \approx 1$$

第五章作业

$$5.5 \quad \text{H}^{35}\text{Cl} \text{折合质量} \mu = \frac{m_{\text{H}}m^{35}\text{Cl}}{m_{\text{H}}+m^{35}\text{Cl}} = \frac{35}{36}m_{\text{u}}, \text{H}^{37}\text{Cl} \text{折合质量} \mu' = \frac{m_{\text{H}}m^{37}\text{Cl}}{m_{\text{H}}+m^{37}\text{Cl}} = \frac{37}{38}m_{\text{u}}$$

H^{35}Cl 基频带波数(忽略非谐项修正)

$$\tilde{\nu}(1 \leftarrow 0) = \tilde{\nu}_0 = \frac{\nu_0}{c} = \frac{\sqrt{k}}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{\mu}} = 2886.19\text{cm}^{-1}$$

$\Rightarrow \text{H}^{37}\text{Cl}$ 基频带波数:

$$\frac{\tilde{\nu}'_0}{\tilde{\nu}_0} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}} = \sqrt{\frac{35}{36} \cdot \frac{38}{37}} \Rightarrow \tilde{\nu}'_0 = 2884.02\text{cm}^{-1}$$

$$\Rightarrow \Delta\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 - \tilde{\nu}'_0 = 2.17\text{cm}^{-1}$$

5.6

谱线间隔为 $2B = 3.86\text{cm}^{-1} \Rightarrow B = 1.93\text{cm}^{-1}$

缺失的波数为谱带基线 $\tilde{\nu}_0 = 2170.21\text{cm}^{-1}$

$$\therefore R_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{4\pi\mu c B}} = 0.1128\text{nm}, k = \mu(2\pi c \tilde{\nu}_0)^2 = 1904.8\text{N} \cdot \text{m}^{-1}, \text{其中} \mu = \frac{12 \times 16}{12 + 16}m_{\text{u}} = 6.857m_{\text{u}}$$

第五章作业

5.7

$${}^{23}\text{Na}{}^{35}\text{Cl}: \mu_1 = \frac{23 \times 35}{23 + 35} m_u = 13.88 m_u$$

$${}^{23}\text{Na}{}^{37}\text{Cl}: \mu_2 = \frac{23 \times 37}{23 + 37} m_u = 14.18 m_u$$

$$(1) R_0 \text{ 相等} \Rightarrow B = \frac{\hbar}{4\pi\mu c R_0^2} = \frac{A}{\mu}, \quad \text{转动光谱 } \tilde{\nu}_J = 2BJ = 2AJ \frac{1}{\mu}$$

由同位素效应导致的谱线间隔为:

$$\Delta\tilde{\nu} = 2J\Delta B = 2AJ \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{分辨率 } R = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}} = \frac{2AJ \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right)}{AJ \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)} = 2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = 0.0214$$

$$(2) k \text{ 相等} \Rightarrow \tilde{\nu}_0 = \frac{\sqrt{k}}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\mu}}, \quad \text{振动光谱 } \tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 = \frac{c}{\sqrt{\mu}}$$

$$\Rightarrow R' = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}} = 2 \frac{c \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \right)}{c \left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} + \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \right)} = 0.0107 < R$$

故无法分辨。

第五章作业

5.8

分子电子态 $^{2S+1}\Lambda$: $S = \sum s_i$, $\Lambda = |M_L| = |\sum m_{li}|$

对于 $(\sigma_g 2p)^1(\sigma_u 2p)^1$, $S = 0, 1$, $\Lambda = 0 + 0 = 0 \Rightarrow$ 电子态 $^1\Sigma, ^3\Sigma$

电子振转光谱:

$$\text{选择定则} \begin{cases} \Delta\Lambda = 0, \pm 1 \\ \Delta S = 0 \\ \Delta v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \Delta J = 0, \pm 1 \quad (J = 0 \text{到} J' = 0 \text{禁戒}) \end{cases}$$

$$\text{跃迁谱线波数 } \tilde{\nu} = \tilde{\nu}_e + \tilde{\nu}_v + \tilde{\nu}_J = \frac{1}{hc} [(E'_e - E_e) + (E_{v'} - E_v) + (E_{J'} - E_J)]$$

$$\text{其中, } \tilde{\nu}_v = \left(v' + \frac{1}{2}\right) \tilde{\nu}'_0 - \left(v' + \frac{1}{2}\right)^2 \eta' \tilde{\nu}'_0 - \left(v + \frac{1}{2}\right) \tilde{\nu}_0 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \eta \tilde{\nu}_0$$

$$\tilde{\nu}_J = B'J'(J' + 1) - BJ(J + 1)$$

第五章作业

根据 ΔJ 的不同, 将谱线分为:

R支($\Delta J = +1$),

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\text{ev}} + 2B' + (3B' - B)J + (B' - B)J^2, \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

P支($\Delta J = -1$),

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\text{ev}} - (B' + B)J + (B' - B)J^2, \quad J = 1, 2, 3, \dots$$

Q支($\Delta J = 0$),

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_{\text{ev}} + (B' - B)J + (B' - B)J^2, \quad J = 1, 2, 3, \dots$$

另, $^1\Sigma - ^1\Sigma$ 的选择定则为 $\Delta J = \pm 1$, 没有Q支

第五章作业

5.9

$$\tilde{\nu}_e = 103678.9\text{cm}^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{\nu}_{\text{ev}}(0 \leftarrow 0) = \tilde{\nu}_e + \frac{1}{2}\tilde{\nu}'_0 - \frac{1}{4}\eta'\tilde{\nu}'_0 - \frac{1}{2}\tilde{\nu}_0 + \frac{1}{4}\eta\tilde{\nu}_0 = 102877.359\text{cm}^{-1}$$

$$\text{R支: } \tilde{\nu}_R = 102879.649 + 1.425J - 0.865J^2 \quad J = 0, 1, 2, \dots$$

$$J = 0: 102879.649\text{cm}^{-1}$$

$$J = 1: 102880.209\text{cm}^{-1}$$

$$J = 2: 102879.039\text{cm}^{-1}$$

$$J = 3: 102876.139\text{cm}^{-1}$$

$$\text{P支: } \tilde{\nu}_P = 102877.359 - 3.155J - 0.865J^2 \quad J = 1, 2, 3, \dots$$

$$J = 1: 102873.339\text{cm}^{-1}$$

$$J = 2: 102867.589\text{cm}^{-1}$$

$$J = 3: 102860.109\text{cm}^{-1}$$

$$J = 4: 102850.899\text{cm}^{-1}$$

$B' < B$, 带头在紫端, 为 102880.209cm^{-1}

第五章作业

拉曼散射: ($\Delta J = 0, \pm 2$)

小拉曼位移线:

$$J + 2 \leftarrow J: \Delta \tilde{\nu}_J = -4B \left(\frac{3}{2} + J \right), J = 0, 1, 2, \dots$$

$$J + 2 \leftarrow J: \Delta \tilde{\nu}_J = 4B \left(\frac{3}{2} + J \right), J = 0, 1, 2, \dots$$

大拉曼位移线: ($1 \leftarrow 0$ 最强, $B' \approx B$)

S支($\Delta J = +2$):

$$\tilde{\nu}_S = \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_0 - 6B' - (5B' - B)J - (B' - B)J^2 \approx \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_0 - 4B \left(J + \frac{3}{2} \right), J = 0, 1, 2, \dots$$

O支($\Delta J = -2$):

$$\tilde{\nu}_O = \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_0 - 2B' + (3B' + B)J - (B' - B)J^2 \approx \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_0 + 4B \left(J - \frac{1}{2} \right), J = 2, 3, 4, \dots$$

Q支($\Delta J = +2$):

$$\tilde{\nu}_Q = \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_0 - (B' - B)J - (B' - B)J^2 \approx \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_0, J = 0, 1, 2, \dots$$

第五章作业

5.10

$$\text{入射光波数: } \tilde{\nu}_i = \frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{632.8\text{nm}} = 15802.78\text{cm}^{-1}$$

$$\text{散射光波数: } \tilde{\nu}_1 = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{532.1\text{nm}} = 18793.46\text{cm}^{-1}$$

$$\tilde{\nu}_2 = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{780.5\text{nm}} = 12812.30\text{cm}^{-1}$$

由于, $\tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_i = 2990.68\text{cm}^{-1} \approx \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_2 = 2990.48\text{cm}^{-1}$

可认为两种散射光是来自于对称分布的大拉曼散射的Q支, 故拉曼位移的大小即为经典振动频率:

$$\nu_0 = c\tilde{\nu}_0 = c\Delta\tilde{\nu}_Q = \frac{c}{2}(\tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_i + \tilde{\nu}_i - \tilde{\nu}_2) = \frac{c}{2}(\tilde{\nu}_1 - \tilde{\nu}_2) = 8.97 \times 10^{13}\text{Hz}$$

第四次小测题目

曲三标



1. 一个 p 电子和一个 s 电子在 $j-j$ 耦合下所形成的全部原子态是:

A. $(3/2, 3/2)_3, (3/2, 3/2)_0, (1/2, 1/2)_1, (1/2, 1/2)_0$;

B. $(3/2, 1/2)_2, (3/2, 1/2)_1, (1/2, 1/2)_1, (1/2, 1/2)_0$;

C. $(3/2, 1/2)_2, (3/2, 1/2)_1$;

D. $(1/2, 1/2)_1, (1/2, 1/2)_0$;

自旋轨道耦合远大于剩余静电势时, 采用 $j-j$ 耦合规则,
对于 p 电子, LS 耦合, $j_1=3/2, 1/2$,
对于 s 电子, 采用 LS 耦合, $j_2=1/2$,
原子态 表示为 $(j_1, j_2)_J$

2. 某原子基态电子组态中最外层是三个等效的p电子，它可能组成的原子态有： ${}^2P_{1/2,3/2}$ 、 ${}^2D_{3/2,5/2}$ 和 ${}^4S_{3/2}$ ，则该原子的基态为：

A. ${}^2P_{1/2}$ ； B. ${}^2P_{3/2}$ ； C. ${}^2D_{3/2}$ ； D. ${}^4S_{3/2}$ 。

原子基态的判断规则

- 1、对于给定的电子组态，能量最低的原子态必然具有泡利原理所允许的最大的S值
- 2、S值相同的状态中，L值大的态能量最低
- 3、对于等效电子组态 $(nl)^v$ ，当 $v < 2l + 1$ 时，即不到半满支壳层时，一个多重态中J最小时，能量最低； $v > 2l + 1$ 时，即超过半满支壳层时，一个多重态中J最大时，能量最低。

3. 在加速电压为 $2 \times 10^6 \text{ V}$ 工作的X射线管所产生的短波限的波长为多少nm?

A. 10^{-6} ; B. 6.21×10^{-13} ; **C. 6.21×10^{-4}** ; D. 1.5×10^{-16} 。

射线管工作原理为高速电子撞击金属靶面产生 X射线，产生的X射线源于原子内K、L壳层之间的跃迁。电子碰撞原子可把自身的动能全部传递给原子，激发内部的电子从基态跃迁到激发态，再跃迁到基态产生X射线。

$$\text{短波限} \frac{hc}{\lambda} = eU, \lambda = \frac{hc}{eU} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{2 \times 10^6 \text{ eV}} = 6.21 \times 10^{-4} \text{ nm}$$

4. 利用莫塞莱定律，试求波长从0.1935nm的 K_{α} 线是属于哪种元素所产生的?

A. Al (Z=13) ; **B. Fe (Z=26)** ; C. Ni (Z=28) ; D. Zn (Z=30) 。

莫塞莱公式

$$\tilde{\nu}_K = \frac{1}{\lambda} = R(Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right)$$

$$R = 1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1}, \rightarrow Z = 26$$

5. 由L-S耦合形成的³D态中两个能级间隔之比为:

A. 2:1 B. 3:2 C. 3:1 D. 4:3

朗德能级间隔定则为: 两个相邻能级的间隔与他们中较大的J值成正比

$$\Delta E_J - \Delta E_{J-1} = \xi(L, S)J$$

$${}^3D \rightarrow {}^3D_{3,2,1}, (\Delta E_3 - \Delta E_2) : (\Delta E_2 - \Delta E_1) = 3:2$$

二、填空题

6. 若按玻尔理论计算氦原子的电离能, 则所得结果要比实际值大 (填“大”或“小”), 产生差别的原因是由于两个电子的库伦排斥作用。

两个电子库伦排斥能抬高了电子的能级, 更容易一价电离出氦原子的外层电子, 所以实际的电离能小于用玻尔理论计算的电离能。

7. 已知氩原子 ($Z = 18$)、钪原子 ($Z = 21$) 和锰原子 ($Z = 25$) 基态时的电子组态分别为 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ 、 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$ 和 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$ ，则按洪德定则，它们基态的原子态分别是 1S_0 、 $^2D_{3/2}$ 和 $^6S_{5/2}$ 。

1、 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ 为满壳层 $S=0$ ， $L=0$ ，基态为 1S_0

2、 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1 4s^2$ 中 $3d^1$ ， $L=2$ ， $S=1/2$ ；LS 耦合得到 $^2D_{\frac{5}{2}}$ ，基态为 $^2D_{3/2}$

3、 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s^2$ 中 $3d^5$ 中五个电子自旋同向，根据泡利不相容原理，五个电子的轨道角动量量子数分别取 2、1、0、-1、-2，能量最低，此时 $S=5/2$ ， $L=0$ ， $J=5/2$ 。光谱项为 $^6S_{5/2}$

原子基态的判断规则

1、对于给定的电子组态，能量最低的原子态必然具有泡利原理所允许的最大的 S 值

2、 S 值相同的状态中， L 值大的态能量最低

3、对于能级电子组态 $(nl)^v$ ，当 $v < 2l + 1$ 时，即不到半满壳层时，一个多重态中 J 最小时，能量最低； $v > 2l + 1$ 时，即超过半满壳层时，一个多重态中 J 最大时，能量最低。

8. 某原子的三个价电子分别处于s, p, d态, 则按L-S耦合, 该原子总轨道量子数L的可能值为3、2、1, 总自旋量子数S的可能值为____, 其能级的多重性应为____重。

1、 $l_1 l_2 l_3=0、1、2$, 轨道 $L=|l_3 + l_2| \cdots |l_3 - l_2|=3、2、1$

2、 $s_1 s_2 s_3=1/2、1/2、1/2$, 自旋角动量 $S=|s_1 + s_2 + s_3| \cdots |s_1 - s_2 + s_3|=3/2、1/2$

3、 $S=3/2、1/2$ 。 $2S+1=4、2$

9. 某原子基态时其电子填满了K, L壳层和3s支壳层, 并在3p支壳层上填了3个电子, 则其原子序数 $Z = \underline{\quad}$, 基态的原子态为 $\underline{\quad}$ 。这种原子束在斯特恩—盖拉赫实验中将分裂成 $\underline{\quad}$ 束, 在均匀磁场 B 中将分裂成 $\underline{\quad}$ 个子能级, 各相邻子能级的间隔 $\Delta \varepsilon = \underline{\quad} \mu_B B$ (μ_B 为玻尔磁子)。

1、 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$ $Z=15$

2、 $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$ 中 $3p^3$ 三个电子自旋同向, 根据泡利不相容原理, 其余三个电子的轨道角动量量子数分别取1、0、-1, 能量最低, 此时 $S=3/2$, $L=0$, $J=3/2$.光谱项为 ${}^4S_{3/2}$ (根据宏特规则)

3、 $F_z = -\mu_{jz} \frac{\partial B_z}{\partial z}$, $\mu_{jz} = -g_j m_j \mu_B$, $m_j = j, j-1, \dots, -j$, 在外磁场中中, 有效磁矩的投影一共有 $(2J+1)$ 个, 故而分裂为4束

4、在均匀磁场中分裂能级为 $U = -\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\mu}_j = -B \mu_{jz} = g_j m_j \mu_B B$, $m_j = j, j-1, \dots, -j$, 在外磁场中中, 有效磁矩的投影一共有 $(2J+1)$ 个, 能级分裂为4个

5、相邻能级间隔为 $g_j \mu_B B$, $g_j = 1 + \frac{J(J+1)+S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)} = 2$, $\Delta \varepsilon = \underline{2} \mu_B B$

10. 镁原子 ($Z=12$) 基态时最外层的电子组态为_____, 基态原子态为_____. 若它被激发到 $3p4p$ $^3P_{2,1,0}$ 态, 则往 $3s4p$ $^3P_{2,1,0}$ 态直接跃迁可产生____条谱线; 往基态直接跃迁可产生____条谱线。

1、 $1s^22s^22p^63s^2$

2、满壳层基态为 1S_0

3、 $\Delta S = 0$, $\Delta L = \pm 1, \Delta J = 0 \pm 1$, $0 \rightarrow 0$ 除外, 一个由 $^3P_2 \rightarrow ^3P_{2,1}, ^3P_1 \rightarrow ^3P_{2,1,0}, ^3P_0 \rightarrow ^3P_1$ 六条谱线

4、往基态谱线跃迁 $^3P_{2,1,0} \rightarrow ^1S_0$ 不满足 $\Delta S = 0$, 无法跃迁

谢谢!



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China