VEKTORI

13. oktobar 2020

U matematici, fizici i drugim prirodnim i tehničkim naukama radi se sa dve vrste veličina. Veličine koje su u potpunosti određene samo svojom brojnom vrednošću nazivaju se skalarne veličine, kraće skalari. Primeri skalarnih veličina su temperatura, visina i težina. Skalarne veličine mogu biti pozitivne, negativne ili jednake nuli.

Za poznavanje veličina kao što su brzina, sila i jačina pored njihove skalarne veličine potrebno je poznavati još i njihov pravac i smer. Takve veličine nazivaju se vektorskim veličinama ili vektorima.

Geometrijsko predstavljanje vektora podrazumeva predstavljanje vektora preko orijentisanih duži.

Definicija i osnovni pojmovi

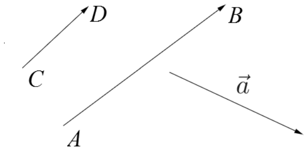
Definicija

Vektor ili orijentisana duž, u oznaci $\overrightarrow{AB}$, je duž AB u kojoj je A početna tačka duži, a B je njena krajnja tačka.

Definicija

Dužina duži AB je skalarna veličina i naziva se intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ i označava se $|\overrightarrow{AB}|$. Prava na kojoj leži duž AB naziva se pravac ili nosač vektora $\overrightarrow{AB}$, a njegov smer je od tačke A ka tački B.

Znači, vektor je definisan ako su mu zadati pravac, smer i intenzitet. Pored oznake $\overrightarrow{AB}$, tj. oznake u kojoj su navedene početna i krajnja tačka, za označavanje vektora koristi se i $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.



Vektor kod kojeg se poklapaju početna i krajnja tačka naziva se *nula vektor* i označava sa $\vec{0}$.

Očigledno je da je njegov intenzitet jednak nuli. Pravac i smer nula vektora se ne definišu.

Vektor različit od nula vektora naziva se *nenula vektor*.

Vektor čiji je intenzitet jednak 1 naziva se *jedinični vektor*.

Definicija i osnovni pojmovi

Definicija

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako imaju isti pravac ili su im pravci paralelni.

Kolinearni vektori mogu imati isti ili suprotan smer.

Nula vektor je kolinearan svakom vektoru.

Vektori koji imaju isti pravac i intenzitet, a suprotan smer nazivaju se *suprotni vektori*.

Suprotni vektor za vektor $\vec{a}$ označava se sa $-\vec{a}$, tako da se suprotni vektor vektora $\overrightarrow{AB}$ označava sa $-\overrightarrow{AB}$.

Definition

Vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su *komplanarni* ako leže u istoj ili u paralelnim ravnima.

Jednakost vektora moguće je definisati na tri načina. U zavisnosti od definicije jednakosti vektora posmatraju se različite klase vektora: slobodni vektori, vektori vezani za pravu i vektori vezani za tačku.

Nadalje, smatraće se da su dva vektora jednaka ako su jednaka u smislu naredne definicije.

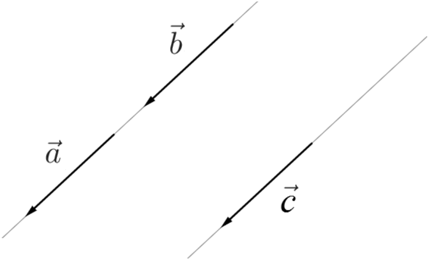
Definicija

Dva vektora su jednaka ako su im jednaki intenziteti, pravci su im paralelni ili se poklapaju i imaju iste smerove.

Ovi vektori nazivaju se *slobodni vektori*.

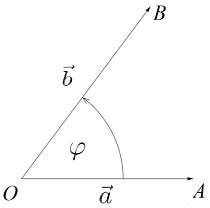
Jednakost vektora

Ako su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ dva jednaka slobodna vektora, tada se duž CD translacijom može preslikati na duž AB, i to tako što se tačka C preslikava na tačku A, a tačka D na tačku B. Jednakost vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ označava se sa $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ sa donje slike su jednaki u smislu definicije slobodnih vektora, tj. važi $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c}$.



Definicija

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dva nenula vektora i $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Najmanji ugao φ za koji treba rotirati vektor $\overrightarrow{OA}$ dok mu se smer ne poklopi sa smerom vektora $\overrightarrow{OB}$ naziva se ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Operacije sa slobodnim vektorima

Definicija

Zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a}+\vec{b}$, je vektor $\overrightarrow{AC}$, gde je $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ i $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ se nazivaju *nadovezani vektori*, a gornja definicija se naziva *pravilo trougla*.

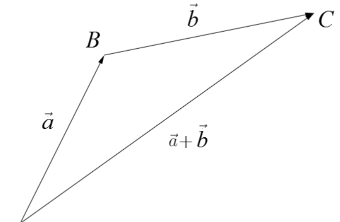
Ako se sabiraju dva nenula vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ sa paralelnim pravcima ili sa pravcima koji se poklapaju, pri čemu je $\vec{b}\neq-\vec{a}$, onda zbir $\vec{a}+\vec{b}$ ima isti pravac kao i vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$

1. smer je isti kao i smer vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i intenzitet je $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$, ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ istog smera,
2. smer je jednak smeru vektora koji ima veći intenzitet i intenzitet je $|\vec{a}+\vec{b}|=||\vec{a}|-|\vec{b}||$, ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotnog smera.

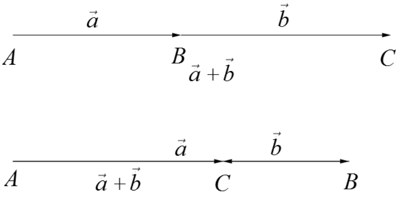
Operacije sa slobodnim vektorima

Primer

Na slici a) primenom pravila trougla sabrani su vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ koji nemaju isti pravac.
Na slici b) ilustrovano je sabiranje vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ koji su istog pravca. Na gornjoj slici vektori su i istog smera, a na donjoj su suprotnog smera. U oba slučaja njihov zbir je vektor $\overrightarrow{AC}$.



a)



b)

Iz definicije sabiranja vektora direktno sledi da je

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0} \quad \text{i} \quad (-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}.$$

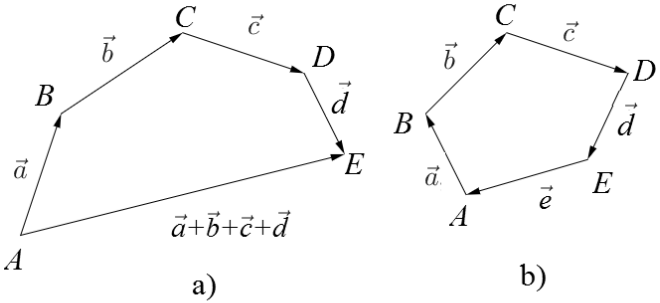
Sabiranje vektora po pravilu trougla može da se uopšti na n vektora ($n \geq 3$):

Neka su $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ vektori takvi da se krajnja tačka vektora $\vec{a}_i$ poklapa sa početnom tačkom vektora $\vec{a}_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, tj. vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ su nadovezani.

Zbir vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, u oznaci $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n$, je vektor $\vec{b}$ čija početna tačka je jednaka početnoj tački vektora $\vec{a}_1$, a krajnja tačka je jednaka krajnjoj tački vektora $\vec{a}_n$.

Primer

Na slici a) vektor $\overrightarrow{AE}$ *predstavlja zbir nadovezanih vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$ *i* $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$*, dok na slici b) može da se uoči da je zbir zadatih nadovezanih vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$ *i* $\vec{e} = \overrightarrow{EA}$ *vektor* $\overrightarrow{AA}$*, tj. nula vektor.*



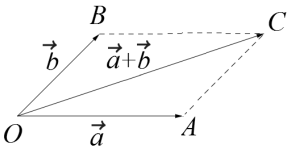
Operacije sa slobodnim vektorima

Vektori koji imaju zajednički početak mogu se sabirati na sledeći način.

Definicija

Zbir vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ sa zajedničkom početnom tačkom O je vektor $\overrightarrow{OC}$, gde je tačka C određena na taj način da figura $OACB$ bude paralelogram.

Ova definicija se naziva *pravilo paralelograma*. Vektori $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nazivaju se *komponente*, a vektor $\overrightarrow{OC}$ *rezultanta*. Vektor $\overrightarrow{OC}$ je dijagonala paralelograma $OACB$.



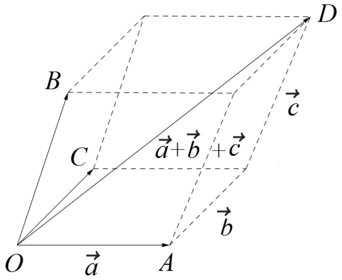
Pravilo paralelograma može se uopštiti i na sabiranje tri nekomplanarna vektora koja imaju zajedničku početnu tačku.

Neka su $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ tri nekomplanarna vektora sa zajedničkom početnom tačkom O. Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nadovezani vektori pri čemu je krajnja tačka vektora $\vec{a}$ isto što i početna tačka vektora $\vec{b}$ i krajnja tačka vektora $\vec{b}$ jednaka je početnoj tački vektora $\vec{c}$ i $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{OB}$.

Nad vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ može da se konstruiše paralelopiped. Vektor $\vec{d}$ čija je početna tačka jednaka početnoj tački vektora $\vec{a}$ i krajnja tačka je jednaka krajnjoj tački vektora $\vec{c}$ je zbir vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, što se piše

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}.$$

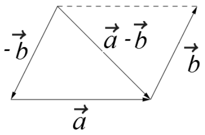
Opisano pravilo naziva se *pravilo paralelopipeda*, a vektor $\vec{d}$ je telesna dijagonala paralelopipeda.



Definicija

Razlika *vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*, u oznaci* $\vec{a} - \vec{b}$*, je vektor* $\vec{c}$ *takav da je* $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Da je vektor $\vec{c}$ razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ piše se $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.



Na slici je prikazana razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Može da se pokaže da je razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jedinstveno određen vektor, kao i da je razlika vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka zbiru vektora $\vec{a}$ i vektora $-\vec{b}$, tj.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Definicija

Proizvod skalara $\alpha \neq 0$ i vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$, u oznaci $\alpha\vec{a}$, je vektor

1. *čiji je pravac paralelan pravcu vektora $\vec{a}$,*
2. *intenzitet je $|\alpha||\vec{a}|$, gde je $|\alpha|$ apsolutna vrednost skalara α i $|\vec{a}|$ je intenzitet vektora $\vec{a}$,*
3. *ima isti smer kao i vektor $\vec{a}$ ako je $\alpha > 0$, a suprotan ako je $\alpha < 0$.*

Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ onda je $\alpha\vec{a} = \vec{0}$.

Ako vektori imaju iste pravce, njihovi pravci su i paralelni.

Uvrštavanjem $\alpha = -1$ u $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ dobija se $\vec{b} = (-1)\vec{a} = -\vec{a}$, tj. vektor suprotan vektoru $\vec{a}$.

Za vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ neka je vektor $\vec{a}_0$ definisan sa

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}. \tag{1}$$

Pravac vektora $\vec{a}_0$ je isti kao i pravac vektora $\vec{a}$, vektori $\vec{a}_0$ i $\vec{a}$ imaju isti smer, a intenzitet vektora $\vec{a}_0$ je $|\vec{a}_0| = \frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$.

Vektor $\vec{a}_0$, definisan sa (1) naziva se *jedinični vektor vektora $\vec{a}$* ili *ort vektora $\vec{a}$*.

Ako je $\vec{a}_0$ jedinični vektor vektora $\vec{a}$, sledi da je

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0,$$

tj. svaki nenula vektor može da se predstavi kao proizvod njegovog intenziteta i jediničnog vektora $\vec{a}_0$ koji ima isti pravac i smer kao i vektor $\vec{a}$.

Vektori $\vec{a} \neq \vec{0}$ i $\alpha\vec{a}$ za $\alpha \neq 0$ imaju paralelne pravce, pa su kolinearni.

Dva kolinearna vektora mogu se razlikovati po smeru i intenzitetu, pa kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ može da se predstavi sa

$$\vec{b} = \alpha\vec{a},$$

gde je α skalar. Nula vektor je kolinearan svakom vektoru, tj. $\vec{0} = 0\vec{a}$ za svaki vektor $\vec{a}$.

Teorema

Nenula vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoje skalari α i β od kojih je bar jedan različit od nule i

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}.$$

Teorema

Nenula vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako postoje skalari α, β i γ od kojih je bar jedan različit od nule i

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

Linearna kombinacija vektora

Definicija

Vektor

$$\vec{s} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i$$

gde su $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\vec{a}_i \in V$ *naziva se* *linearna kombinacija vektora* $\vec{a}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definicija

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *su* *linearno zavisni* *ako postoje skalari* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *od kojih je bar jedan različit od nule takvi da je*

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *su* *linearno nezavisni* *ako nisu linearno zavisni.*

Vektori $\alpha\vec{a}$ i $\beta\vec{b}$ takvi da je

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

nazivaju se komponentama vektora $\vec{c}$ duž vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Teorema

Za svaka tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ako i samo ako je $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Prethodna teorema se može formulisati i na sledeći način.

Teorema

Svaka tri nekomplanarna vektora $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su linearno nezavisna.

Teorema

Neka su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni. Tada za svaki vektor $\vec{d}$ postoje skalari α, β i γ takvi da je $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Operacije sa slobodnim vektorima

Neke osobine množenja vektora skalarom navedene su u sledećoj teoremi.

Teorema

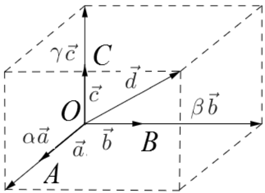
Za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve vektore $\vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$ je

1. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
4. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Definicija

Uređeni skup od tri nekomplanarna vektora $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ naziva se trijedar vektora.

Neka je O proizvoljna tačka prostora i neka je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, gde su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ nekomplanarni vektori. Svaki vektor $\vec{d}$ se na jedinstven način može predstaviti preko vektora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, tj.



$$\vec{d} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Dakle, svaki vektor se može razložiti na komponente preko vektora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$, kao što je prikazano na slici.

Skalari α, β i γ nazivaju se *koordinate vektora* $\vec{d}$, što se obeležava sa

$$\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Ako su vektori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ međusobno normalni onda se za trijedar koji oni obrazuju kaže da je *pravougli* ili *Dekartov*.

Ako su pored toga vektori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ jedinični, onda se odgovarajući trijedar naziva *ortonormiran*.

Nadalje se pretpostavlja da posmatrani trijedar obrazuju tri jedinična vektora $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ koja su međusobno normalna. Ovaj trijedar određuje tri međusobno normalne usmerene prave koje se nazivaju *koordinatne ose*. Sve tri koordinatne ose imaju zajedničku tačku O koja se naziva *koordinatni početak*, a vektori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$ označavaju se sa $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$, redom.

Koordinatni sistem i koordinate vektora

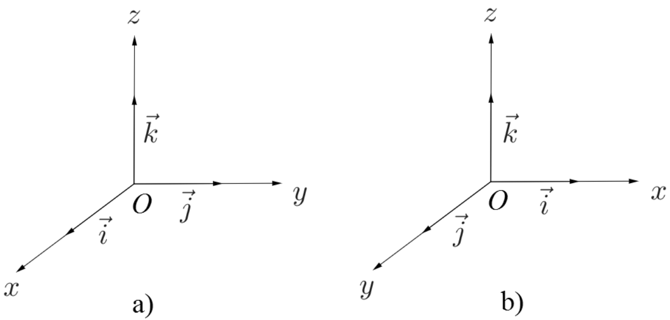
Osa određena koordinatnim početkom O i vektorom $\vec{i}$ naziva se *x-osa*, dok se ose određene koordinatnim početkom O i vektorima $\vec{j}$ i $\vec{k}$ nazivaju *y-osa* i *z-osa*, redom.

Koordinatne ose određuju *koordinatne ravni*. Postoje ukupno tri koordinatne ravni. Svaka od njih je određena sa dve koordinatne ose, tako da postoje *xy-ravan, xz-ravan* i *yz-ravan*.

Sve koordinatne ravni imaju jednu zajedničku tačku, koordinatni početak O.

Uređeni skup od tri ose koje prolaze kroz zajedničku tačku O i koje su uzajamno normalne obrazuje *Dekartov pravougli koordinatni sistem*.

Koriste se dva pravougla sistema: *desni* (*engleski*) i *levi* (*francuski*). Kod desnog pravouglog sistema rotacija x-ose prema y-osi oko z-ose najkraća je u smeru suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu (videti sliku a)), dok je kod levog pravouglog sistema rotacija x-ose prema y-osi oko z-ose najkraća u smeru kretanja kazaljke na satu (videti sliku b)).



Mi ćemo posmatrati desni pravougli koordinatni sistem.

Ako je $\vec{r}_M = (x, y, z)$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$, onda su x, y i z normalne projekcije vektora $\vec{r}_M$ na $x-$osu, $y-$osu i $z-$osu.

Teorema

Intenzitet vektora $\vec{a} = (x, y, z)$ je

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Za vektore

$$\begin{aligned}\vec{a_1} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)\\ \vec{a_2} &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)\end{aligned}$$

na osnovu definicije sabiranja vektora sa paralelnim pravcima je

$$\begin{aligned}\vec{a_1} + \vec{a_2} &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\\ &= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}\\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).\end{aligned}$$

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ primenom osobina množenja vektora skalarom je

$$\alpha\vec{a_1} = \alpha(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = \alpha x_1\vec{i} + \alpha y_1\vec{j} + \alpha z_1\vec{k} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Važi i da je

$$\begin{aligned}\vec{a_1} - \vec{a_2} &= \vec{a_1} + ((-1)\vec{a_2})\\ &= (x_1, y_1, z_1) + (-x_2, -y_2, -z_2)\\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Primer

Dati su vektori $\vec{a} = (4, -3, 1)$ i $\vec{b} = (5, -2, -3)$. Odrediti vektore $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - 3\vec{b}$. Izračunati intenzitet vektora $\vec{a}$ i odrediti jedinični vektor $\vec{a}_0$ vektora $\vec{a}$.

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} + \vec{b} &= (4+5, -3+(-2), 1+(-3)) = (9, -5, -2),\\
\vec{a} - \vec{b} &= (4-5, -3-(-2), 1-(-3)) = (-1, -1, 4),\\
2\vec{a} + \vec{b} &= (2\cdot 4, 2\cdot(-3), 2\cdot 1) + (5, -2, -3)\\
&= (8-6, 2) + (5, -2, -3) = (13, -8, -1),\\
\vec{a} - 3\vec{b} &= (4, -3, 1) - (15, -6, -9) = (-11, 9, 10),\\
|\vec{a}| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26},\\
\vec{a}_0 &= \left(\tfrac{4}{\sqrt{26}}, -\tfrac{3}{\sqrt{26}}, \tfrac{1}{\sqrt{26}}\right).
\end{aligned}
$$

Jednakost vektora zadatih preko koordinata se svodi na jednakost odgovarajućih koordinata, tj.

$$\vec{a_1} = \vec{a_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{i} \quad y_1 = y_2 \quad \text{i} \quad z_1 = z_2.$$

Kolinearnost vektora zadatih preko koordinata se svodi na proporcionalnost odgovarajućih koordinata, tj.

$$\begin{aligned} \vec{a_2} = \alpha\vec{a_1} \quad &\Leftrightarrow \quad (x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 = \alpha x_1 \text{ i } y_2 = \alpha y_1 \text{ i } z_2 = \alpha z_1. \end{aligned}$$

Primer

Dati su vektori $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ i $\vec{b} = (\alpha^2, \alpha^2 - \alpha, \alpha - 2)$. Odrediti, ako je to moguće, vrednost realnog parametra α tako da vektori $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{0}$ budu jednaki.

Rešenje: Iz $\vec{a} + \vec{b} = (-1 + \alpha^2, \alpha^2 - \alpha, \alpha - 1)$ i $\vec{0} = (0, 0, 0)$ dobija se sistem

$$-1 + \alpha^2 = 0 \quad \wedge \quad \alpha^2 - \alpha = 0 \quad \wedge \quad \alpha - 1 = 0$$

čije je rešenje $\alpha = 1$.

Ako su $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ dve tačke prostora čiji su vektori položaja $\vec{r_1} = \overrightarrow{OM_1}$ i $\vec{r_2} = \overrightarrow{OM_2}$ redom, tada je

$$\begin{aligned}\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_1 O} \\ &= \overrightarrow{M_1 M_2} \\ &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).\end{aligned}$$

Neka je $\vec{r_M} = (x, y, z)$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$ različite od koordinatnog početka i $\alpha = \sphericalangle(\vec{i}, \vec{r}_M)$, $\beta = \sphericalangle(\vec{j}, \vec{r}_M)$ i $\gamma = \sphericalangle(\vec{k}, \vec{r}_M)$ tada je

$$x = |\vec{r}| \cos \alpha, y = |\vec{r}| \cos \beta, z = |\vec{r}| \cos \gamma$$

pa je

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{r}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{r}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

Primer

Izračunati rastojanje između tačaka $M_1(1,2,-1)$ i $M_2(1,0,-1)$ i uglove koje vektor položaja $\vec{r_2}$ tačke M_2 zaklapa sa koordinatnim osama. Naći jedinični vektor vektora $\vec{r_2}$.

Rešenje: $\overrightarrow{M_1M_2} = (1,0,-1) - (1,2,-1) = (0,-2,0)$.
Rastojanje između tačaka M_1 i M_2 jednako je intenzitetu vektora $\overrightarrow{M_1M_2}$, tj. $|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{4} = 2$.
Vektor $\vec{r_2} = (1,0,-1)$ je vektor položaja tačke M_2 i $|\vec{r_2}| = \sqrt{2}$. Iz

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{i} \quad \cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

je $\alpha = \sphericalangle(\vec{r_2}, \vec{i}) = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \sphericalangle(\vec{r_2}, \vec{j}) = 0$ i $\gamma = \sphericalangle(\vec{r_2}, \vec{k}) = \frac{3\pi}{4}$.
Vektor $\vec{r} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ je jedinični vektor vektora $\vec{r_2}$.

Primer

Odrediti koordinate tačke $T(x, y, z)$ koja duž određenu tačkama $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ deli u razmeri $m : n$.

Rešenje: Uvedimo oznaku $\lambda = \frac{m}{m+n}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1T} : \overrightarrow{M_1M_2} = m : (m+n) \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_1T} \cdot (m+n) = m \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_1T} = \tfrac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{M_1T} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\
&\Leftrightarrow \quad x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1), y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1), z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1),
\end{aligned}$$

pa su koordinate tražene tačke

$x = \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1, \quad y = \lambda y_2 + (1 - \lambda)y_1, \quad z = \lambda z_2 + (1 - \lambda)z_1.$

Specijalno, sredina duži M_1M_2 ima koordinate

$x = \frac{x_1+x_2}{2}, y = \frac{y_1+y_2}{2}, z = \frac{z_1+z_2}{2}.$

Skalarni proizvod vektora

Definicija

Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$, *u oznaci* $\vec{a} \cdot \vec{b}$, *ako su vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *različiti od nula vektora, definisan je sa*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}). \tag{2}$$

Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *jednak nula vektoru* $\vec{0}$, *tada je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Primer

Izračunati skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = 17$, $|\vec{b}| = 2$ i $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Rešenje: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 17 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -17.$

Skalarni proizvod vektora

Primer

Za vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$ važi

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}| \cos 0 = 1^2 \cdot 1 = 1$$

i

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} = 1^2 \cdot 0 = 0.$$

Slično, mogu se izračunati i preostali skalarni proizvodi vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema:

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 1 & 0 \\ \vec{k} & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Skalarni proizvod vektora

Neke osnovne osobine skalarnog proizvoda navedene su u teoremi koja sledi.

Teorema

Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori i λ skalar. Tada je

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
2. $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$,
3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$,
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$,
5. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$,
6. *za nenula vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ važi* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Primer

Odrediti ugao između jediničnih vektora $\vec{m}$ i $\vec{n}$, ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ međusobno normalni vektori i $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$.

Rešenje: Primenom osobina skalarnog proizvoda sledi

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad (\vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (5\vec{m} - 4\vec{n}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 5\vec{m} \cdot \vec{m} - 4\vec{m} \cdot \vec{n} + 10\vec{n} \cdot \vec{m} - 8\vec{n} \cdot \vec{n} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 5|\vec{m}|^2 + 6|\vec{m}||\vec{n}| \cos \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) - 8|\vec{n}|^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad 5 + 6 \cos \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) - 8 = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \cos \sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \tfrac{1}{2},
\end{aligned}
$$

pa je $\sphericalangle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Primer

Dati su vektori $\vec{p} = \alpha\vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{q} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ uzajamno normalni vektori i $|\vec{m}| = 2$ i $|\vec{n}| = \frac{1}{2}$. Odrediti, ako je moguće, parametar α tako da vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ budu uzajamno normalni. Izračunati intenzitet vektora $\vec{q}$.

Rešenje: Iz osobina skalarnog proizvoda sledi

$$\vec{p}\cdot\vec{q} = (\alpha\vec{m}+2\vec{n})\cdot(5\vec{m}-4\vec{n}) = 5\alpha|\vec{m}|^2 + (10-4\alpha)\vec{m}\cdot\vec{n} - 8|\vec{n}|^2 = 0.$$

Iz $\vec{m} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{m}\cdot\vec{n} = 0$, dobija se $20\alpha - 2 = 0$ i $\alpha = \frac{1}{10}$.

$$\vec{q}\cdot\vec{q} = (5\vec{m}-4\vec{n})\cdot(5\vec{m}-4\vec{n}) = 25|\vec{m}|^2 - 40\vec{m}\cdot\vec{n} + 16|\vec{n}|^2 = 0.$$

Iz $|\vec{m}| = 2$ i $|\vec{n}| = \frac{1}{2}$, $\vec{m} \perp \vec{n}$ i $|\vec{q}|^2 = \vec{q}\,\vec{q}$ sledi $|\vec{q}|^2 = 100 + 4$, tj. $|\vec{q}| = 2\sqrt{26}$.

Skalarni proizvod vektora

Teorema

Ako su vektori $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$, *onda je*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Dokaz.

Primenom osobina skalarnog proizvoda i korišćenjem tablice iz gornjeg primera sledi

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= x_1x_2\ \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1y_2\ \vec{i} \cdot \vec{j} + x_1z_2\ \vec{i} \cdot \vec{k} \\
&+ y_1x_2\ \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1y_2\ \vec{j} \cdot \vec{j} + y_1z_2\ \vec{j} \cdot \vec{k} \\
&+ z_1x_2\ \vec{k} \cdot \vec{i} + z_1y_2\ \vec{k} \cdot \vec{j} + z_1z_2\ \vec{k} \cdot \vec{k} \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.
\end{aligned}$$

Skalarni proizvod vektora

Primer

Dati su vektori $\vec{a} = (1, 3, -1)$ i $\vec{b} = (-2, -4, 3)$. Izračunati skalarni proizvod vektora $2\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - 3\vec{b}$ i ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rešenje: $2\vec{a} + \vec{b} = (2, 6, -2) + (-2, -4, 3) = (0, 2, 1)$ i
$\vec{a} - 3\vec{b} = (1, 3, -1) - (-6, -12, 9) = (7, 15, -10)$.

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-3\vec{b}) = (0, 2, 1)\cdot(7, 15, -10) = 0\cdot 2+2\cdot 15+1\cdot(-10) = 20.$

Iz $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (1, 3, -1) \cdot (1, 3, -1) = 1 + 9 + 1 = 11$ je $|\vec{a}| = \sqrt{11}$.
$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 - 12 - 3 = -17$, pa se dobija

$$\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-17}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}, tj. \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\frac{-17}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{29}}.$$

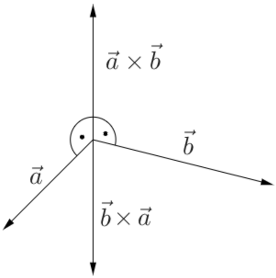
Vektorski proizvod vektora

Definicija

Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, u oznaci $\vec{a} \times \vec{b}$, ako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ različiti od nula vektora, je vektor takav da

1. *pravac vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je normalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$,*
2. *smer vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je takav da je rotacija vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ oko vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ kraća u smeru suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu, tj. vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a} \times \vec{b}$ obrazuju desni trijedar,*
3. *intenzitet vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ je jednak $|\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$.*
   Ako je bar jedan od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nula vektor onda je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Ako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{a}\times\vec{b}$ obrazuju desni trijedar, onda vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{b}\times\vec{a}$ obrazuju levi trijedar, tj. rotacija vektora $\vec{a}$ prema vektoru $\vec{b}$ oko vektora $\vec{b}\times\vec{a}$ je kraća u smeru kretanja kazaljke na satu.



Iz definicije vektorskog proizvoda direktno sledi da je

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

i da je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednaka intenzitetu njihovog vektorskog proizvoda.
Osobina $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ naziva se *antikomutativnost vektorskog proizvoda*.

Vektorski proizvod vektora

Neke osobine vektorskog proizvoda date su u teoremi koja sledi.

Teorema

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ vektori i λ skalar. Tada je

1. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
4. *za* $\vec{a} \neq \vec{0}$ *i* $\vec{b} \neq \vec{0}$ *važi* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow (\exists\lambda)\ \ \vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Primer

Za vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema, primenom definicije vektorskog proizvoda, dobija se tablica u kojoj su predstavljeni njihovi vektorski proizvodi

$$\begin{array}{c|ccc} \times & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hline \vec{i} & \vec{0} & \vec{k} & -\vec{j} \\ \vec{j} & -\vec{k} & \vec{0} & \vec{i} \\ \vec{k} & \vec{j} & -\vec{i} & \vec{0} \end{array}.$$

□

Primer

Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{p}$ i $\vec{q}$, gde je $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a} + \vec{b}$, $\sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$, a $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su uzajamno normalni jedinični vektori.

Rešenje: Iz definicije vektorskog proizvoda je $P = |\vec{p}||\vec{q}| \sin \frac{\pi}{4}$.
Uvrštavanjem $\vec{a}\vec{b} = 0$ i $\vec{a} = \vec{b} = 1$ u

$$|\vec{p}|^2 = \vec{p}\vec{p} = (2\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

dobija se $|\vec{p}|^2 = 5$, tj. $|\vec{p}| = \sqrt{5}$.

Slično, $|\vec{q}| = \sqrt{2}$.

Dakle, $P = \sqrt{5}\,\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{5}$.

Vektorski proizvod vektora

Teorema

Ako je $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1, y_1, z_1)$ *i* $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2, y_2, z_2)$, *onda je*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \\
&= x_1x_2\ \vec{i} \times \vec{i} + x_1y_2\ \vec{i} \times \vec{j} + x_1z_2\ \vec{i} \times \vec{k} \\
&+ y_1x_2\ \vec{j} \times \vec{i} + y_1y_2\ \vec{j} \times \vec{j} + y_1z_2\ \vec{j} \times \vec{k} \\
&+ z_1x_2\ \vec{k} \times \vec{i} + z_1y_2\ \vec{k} \times \vec{j} + z_1z_2\ \vec{k} \times \vec{k} \\
&= x_1y_2\ \vec{i} \times \vec{j} - x_1z_2\ \vec{k} \times \vec{i} \\
&- y_1x_2\ \vec{i} \times \vec{j} + y_1z_2\ \vec{j} \times \vec{k} \\
&+ z_1x_2\ \vec{k} \times \vec{i} - z_1y_2\ \vec{j} \times \vec{k} \\
&= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (-x_1z_2 + x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Vektorski proizvod vektora

Vektorski proizvod vektora zadatih u ortonormiranoj bazi može da se napiše u obliku tzv. *simboličke determinante* čiju prvu vrstu čine vektori $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, a drugu i treću vrstu čine projekcije tačaka A i B, redom. Dakle,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Primer

Odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (2, 1, 2)$ i $\vec{b} = (3, 2, 2)$.

Rešenje: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, 2, 1)$, pa je

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Mešoviti proizvod vektora

Definicija

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je skalarni proizvod vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$, tj. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$.

Teorema

Mešoviti proizvod tri nekomplanarna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednak je zapremini V paralelopipeda određenog tim vektorima ako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju desni trijedar, tj. $-V$ ako vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ obrazuju levi trijedar.

Dakle, apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad tim vektorima

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Mešoviti proizvod vektora

Osnovne osobine mešovitog proizvoda navedene su u teoremi koja sledi.

Teorema

Za mešoviti proizvod vektora važi

1. $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b}$,
2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\lambda\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \times \lambda\vec{b})\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})(\lambda\vec{c}),\ \lambda \in \mathbb{R}$,
3. *mešoviti proizvod nenula vektora jednak je nuli ako i samo ako su vektori komplanarni.*

Mešoviti proizvod vektora

Primer

Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori. Ispitati komplanarnost vektora $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ i $\vec{c}-\vec{a}$.

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
& ((\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{b}-\vec{c}))(\vec{c}-\vec{a}) \\
= \quad & (\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}-\vec{a}) \\
= \quad & (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{c})\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\vec{c} \\
& -(\vec{a}\times\vec{b})\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\vec{a}-(\vec{b}\times\vec{c})\vec{a} \\
= \quad & (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}-(\vec{c}\times\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}\times\vec{c})\vec{b} \\
& -(\vec{a}\times\vec{a})\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{a})\vec{c}-(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} \\
= \quad & 0,
\end{aligned}
$$

pa su vektori $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ i $\vec{c}-\vec{a}$ komplanarni.

Mešoviti proizvod vektora

Teorema

Ako je

$$\begin{aligned}\vec{a} &= x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}=(x_1,y_1,z_1),\\ \vec{b} &= x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=(x_2,y_2,z_2),\\ \vec{c} &= x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}=(x_3,y_3,z_3),\end{aligned}$$

onda je

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=(y_1z_2-y_2z_1)x_3-(x_1z_2-x_2z_1)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)z_3.$$

Izraz na desnoj strani jednakosti je determinanta trećeg reda u razvijenom obliku tako da se mešoviti proizvod vektora $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ i $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$ može predstaviti u obliku

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Mešoviti proizvod vektora

Primer

Izračunati visinu prizme čije su ivice određene vektorima $\vec{a} = (1, 0, -2)$, $\vec{b} = (0, 1, -2)$ i $\vec{c} = (-1, 3, 5)$, ako je njena osnova paralelogram konstruisan nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Rešenje: $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 9$ pa je $V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 9.$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 2, 1).$$

Površina osnove prizme je $B = |\vec{a} \times \vec{b}| = 3$. Zapremina V prizme se može izračunati i iz $V = B \cdot H$, gde je H visina prizme. Iz $V = 9$ i $B = 3$ sledi da je $H = \frac{9}{3} = 3$.