Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

LUIZ FELIPE ANDRÉ FONTES

AVALIAÇÃO DE DIFERENTES METODOLOGIAS APLICADAS AO ENSINO DA GEOMETRIA

Orientador: Prof. Me. EDUARDO WAGNER

RIO DE JANEIRO
11/2015

LUIZ FELIPE ANDRÉ FONTES

AVALIAÇÃO DE DIFERENTES METODOLOGIAS APLICADAS AO ENSINO DA GEOMETRIA

Trabalho de conclusão de curso, apresentado por Luiz Felipe André Fontes ao Curso de Pós-graduação *stricto sensu* de Mestrado Profissional em Matemática, em Rede Nacional, para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica, pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Prof. Me. EDUARDO WAGNER

Rio de Janeiro
2015

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa,
PATRÍCIA FONTES, e minha mãe,
NEUZA FONTES, que sempre
estiveram ao meu lado me motivando
e torcendo pelo meu sucesso.

D

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a minha amada esposa, Patrícia Fontes, incansável em me motivar, e sonhar os meus sonhos, promovendo o estímulo de que preciso para perseguir meus objetivos.

A minha mãe, Neuza Fontes, cúmplice dos meus anseios e conquistas.

Aos professores que desempenharam com elegância o papel de disponibilizar e conduzir o árduo processo de compartilhamento do conhecimento.

Ao meu amigo Rafael Jesus e meu irmão Luiz Marcelo A. Fontes, companheiros de profissão que estavam ao meu lado nos momentos que precisei de ajuda para estudar para as provas.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Resumo

Este trabalho é o resultado de uma pesquisa qualitativa com a base em dados adquiridos por meio de avaliações e questionários feitos em sala de aula. Essa investigação baseia-se na comparação entre duas metodologias diferentes aplicadas ao ensino de geometria: uma utilizando o método tradicional, faz uso apenas do quadro branco e do livro didático e a outra empregando o método Van Hiele, é uma abordagem que usa níveis de aprendizagem que possibilitam os alunos serem sujeitos ativos do processo de aprendizagem da Geometria.

Esses métodos foram aplicados em duas turmas do segundo ano do Ensino Médio de colégios particulares, no município do Rio de Janeiro, e, em uma turma do NEJA, módulo 3, de um colégio estadual do Rio de Janeiro. A coleta de dados traz aspectos positivos e negativos das duas metodologias, podendo, assim, ajudar futuros professores a escolherem a melhor metodologia possível para cada tipo de turma em que lecionarão.

Palavras-chave: metodologia Van Hiele, Geometria, pesquisa qualitativa, metodologia tradicional.

Abstract

This study is the result of some qualitative research based upon data acquired via assessment and questionnaire carried out in the classroom. This investigation is based upon the comparison between two different methodologies applied to the teaching of Geometry: one of them uses using a traditional method, which consists of boar and textbook; the other using the Van Hiele´s method, which is an approach that makes use of learning levels that enable pupils to be active subjects in the learning process of Geometry.

These methods were used in two groups of the second grade of high school, from the private sector, in the city of Rio de Janeiro. If was also used in a group of adult students, NEJA (in portuguese) module 3, at a school from the state sector in the city of Rio de Janeiro. The data collection reveals positive and negative aspects from both methodologies, which may help teachers-to-be to choose the most appropriate to the group they will teach.

Key-words: Van Hiele methodology, Geometry, qualitative research, traditional methodology

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo analisar a comparação da metodologia tradicional - utilizada na aprendizagem do ensino de poliedros, na segunda série do ensino médio -, com o método Van Hiele, através de avaliação inicial e avaliação final, apresentando a performance do desenvolvimento dos alunos nos dois métodos.

O estudo foi realizado em duas turmas de colégios particulares, com mesmo perfil, idades entre 14 e 18 anos, com a média de 26 alunos por sala. Uma turma, do colégio estadual do Rio de Janeiro, turma de NEJA, módulo 3, apenas para alunos maiores de 18 anos.

O objetivo principal foi o de avaliar a metodologia tradicional e o ensino pelo método Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico. O objetivo específico foi o de identificar o nível de conhecimento geométrico que o aluno possuía, desenvolver a metodologia Van Hiele do desenvolvimento e pensamento geométrico, elaborar exercícios adequados e aplicar teste no início da aula e outro ao término da mesma, apontando os resultados e apresentando aos futuros professores, que poderiam otimizar suas aulas.

O modelo de Van Hiele foi utilizado para orientar a formação dos alunos e avaliar as suas habilidades, ajudando-os a atingirem um nível mais alto de pensamento geométrico; esse modelo teve sua origem na tese de doutorado de um casal holandês, Pierre e Dina Van Hiele, e consiste em cinco níveis de compreensão:

- Visualização ou Reconhecimento: neste nível, o aluno reconhece a figura sem considerar seus atributos ou suas propriedades;
- Análise: quando o aluno começa a utilizar as propriedades das figuras geométricas;
- Dedução Informal: o aluno consegue classificar os grupos de figuras de acordo com suas características, mesmo que utilizando uma linguagem informal;
- Dedução Formal: os alunos entendem a diferença entre axiomas, teoremas, postulados e definições;
- Rigor: neste nível, o aluno consegue trabalhar vários sistemas axiomáticos concomitantemente.

Os níveis são subdivididos em cinco fases: questionamento, orientação direta, explicitação, orientação livre e integração ou fechamento.

A metodologia Van Hiele tem propriedades de excelência para ajudar o professor a realizar suas atividades em sala de aula: Sequencial, Avanço, Intrínseco e Extrínseco, Linguístico e Combinação inadequada.

2 TEORIA DE VAN HIELE DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Pensamentos de como ensinar geometria povoam a cabeça dos educadores, e querendo extrapolar a metodologia tradicional, uma ótima opção seria aplicar os conteúdos geométricos abordados com *performances* do cotidiano do aluno, pois as figuras geométricas estão naturalmente no nosso dia a dia. A utilização do modelo Van Hiele é uma aplicação prática e concreta bem diferente da tradicional.

A teoria de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico surge inicialmente nas teses de Doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele na Universidade de Utrecht; posteriormente, outros pesquisadores, como, Adela Jaime, da Universidade de Valência, Lilian Nasser, da UFRJ e Ana Kaleff, da UFF, vêm adotando esse modelo.

A focalização é que o aprendizado é dividido em cinco níveis de compreensão de conceitos, e o professor é o facilitador de uma sequência de atividades para que os alunos avancem para o nível seguinte. Adela Jaime, da Universidade de Valência, assim categoriza os níveis de compreensão, em sua tese de Doutorado:

2.1 NÍVEIS DE COMPREENSÃO

O casal Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele concentrou seus esforços nos três primeiros níveis, pois eram para aplicações em escolas secundárias, com ênfase em geometria plana.

2.1.1 Nível 1: Reconhecimento ou Visualização

Neste primeiro nível, o aluno apenas visualiza o mundo que o rodeia, reconhecendo as figuras por sua aparência e forma, como, por exemplo, chama um “hexaedro”, de “dado”, para jogo de tabuleiro.

A descrição das figuras é baseada em seus aspectos físicos e posição no espaço, isto é, o reconhecimento, as diferenças e as classificações consideram as semelhanças físicas das figuras. Cada figura é vista como um objeto, independente de outras de mesma classe sem generalização de características. As descrições das características não são, necessariamente, usadas com termos matemáticos, pode-se chamar um “vértice” de “bolinha” e as “arestas” de “palitinhos”, por exemplo.

O uso das propriedades é impreciso para identificar e comparar, assim, os alunos aprendem o vocabulário básico para as figuras geométricas e termos matemáticos.

Como exemplo, podemos utilizar alguns recortes em papel cartão de alguns quadriláteros e separá-los em grupos de quadrados, losangos, retângulos, paralelogramos e trapézios.

2.1.2 Nível 2: Análise

Neste nível, começa o reconhecimento das propriedades geométricas de cada figura, podendo-se analisar e reconhecer os elementos matemáticos e as propriedades de cada figura individualmente, havendo a capacidade de generalização das propriedades.

Não há correlação de uma figura com outra. A demonstração de uma propriedade é feita a partir de um ou alguns casos.

Como exemplo podemos descrever um losango através de suas propriedades: 4 lados iguais, as diagonais são perpendiculares, os ângulos internos opostos são suplementares (a sua soma é 180°), e os lados opostos paralelos.

2.1.3 Nível 3: Dedução Informal

Na Dedução Informal, mesmo utilizando a linguagem informal, o aluno estabelece inter-relações usando a própria figura ou entre figuras, deduzindo propriedades ou fazendo grupo de figuras, já existindo a definição correta dos conceitos e propriedades das figuras.

Os alunos repetem demonstrações realizadas pelo professor, como, por exemplo, distinguir os poliedros por seu tipo de face, já que um octaedro e um tetraedro têm faces triangulares e um dodecaedro faces pentagonais.

Como exemplo temos o quadrado, que é um paralelogramo, pois também possui lados opostos paralelos.

2.1.4 Nível 4: Dedução Formal

Na Dedução Formal, os alunos são capazes de compreender e desenvolver demonstrações formais, compreender axiomas, propriedades e teoremas. Já aceitam a possibilidade de chegar ao mesmo resultado com diferentes desenvolvimentos, e já possuem uma visão global das demonstrações. Por exemplo, a demonstração de algumas propriedades de triângulo usando congruência de triângulos.

2.1.5 Nível 5: Rigor

Neste nível, já se percebe a capacidade para realizar deduções abstratas tendo por base um sistema de axiomas. Já é entendida a diferença entre diversos sistemas axiomáticos, havendo a compreensão da geometria não euclidiana. Por exemplo, o estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

2.2 FASES DE APRENDIZAGEM DA TEORIA VAN HIELE

A descrição das Fases a seguir apresentada é a que encontramos na tese de Doutorado de Adela Jaime, da Universidade de Valência.

Construir atividades pertinentes, vislumbrando que seu desenvolvimento seja suficiente para avançar de um nível para o outro, é a principal função do professor na teoria Van Hiele. Esse processo se divide em 5 fases: informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração.

2.2.1 Informação

Nesta fase, o professor interage com os alunos para investigar os conhecimentos anteriores sobre o assunto.

2.2.2 Orientação Dirigida

Os alunos exploram o assunto a partir do material que o professor selecionou, essas atividades devem ter respostas específicas e objetivas.

2.2.3 Explicação

Nesta fase, o professor é mero como observador. O aluno explica por escrito tudo que aprendeu e observou nas atividades anteriores.

2.2.4 Orientação Livre

Dividida em várias etapas, nesta fase o aluno ganha autonomia e experiência, podendo o professor obter várias respostas.

Os alunos resolvem atividades mais complexas que as anteriores, mesmo com mais de um tipo de desenvolvimento para uma mesma solução. Os estudantes aprendem a encontrar seu caminho.

2.2.5 Integração

Os estudantes apresentam uma visão global do tema, o professor interage na revisão e conclusão, fornecendo experiências e observações, sem apresentar novas ideias ou atividades.

2.3 PROPRIEDADES DO MODELO

Também apresentadas na tese de doutorado de Adela Jaime, da Universidade de Valência, as propriedades do modelo Van Hiele são de extrema importância para o professor direcionar suas atividades. As propriedades são:

- Sequencial
- Avanço
- Intrínseco e Extrínseco
- Linguística
- Combinação inadequada

2.3.1 Sequencial

O aluno avança em sequência, de nível em nível, e o sucesso da aprendizagem do nível em que está dependerá do aprendizado no nível anterior.

2.3.2 Avanço

O avanço de um nível para o outro está ligado diretamente ao conteúdo e aos métodos utilizados.

2.3.3 Intrínseco e Extrínseco

Um nível é pré-requisito do anterior. Por exemplo, um objeto apenas percebido em um nível será o objeto estudado no nível seguinte.

2.3.4 Linguística

A linguagem é sempre adequada ao nível em que o aluno está. Como é uma metodologia sequencial, podemos, por exemplo, chamar em um nível um objeto de estudo de "dado" e no nível seguinte de "hexaedro regular".

2.3.5 Combinação Inadequada

Todas as atividades e recursos utilizados pelo professor devem estar diretamente ligados ao nível de aprendizado do aluno, caso contrário, o resultado pode não ser satisfatório.

3 POLIEDROS

Este capítulo é dedicado aos professores, para que possam planejar suas aulas de poliedros com significativo conhecimento teórico.

Muitos professores têm dificuldade de definir poliedros, após algumas pesquisas, a definição de poliedros que provém de LIMA (2006) é muito interessante:

> Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:
>
> (a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e, apenas um, outro polígono.
>
> (b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
>
> (c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). (LIMA,2006)

Poliedros são figuras geométricas e também são conhecidos como sólidos geométricos, formados por 3 elementos básicos: Faces, Arestas e Vértices.

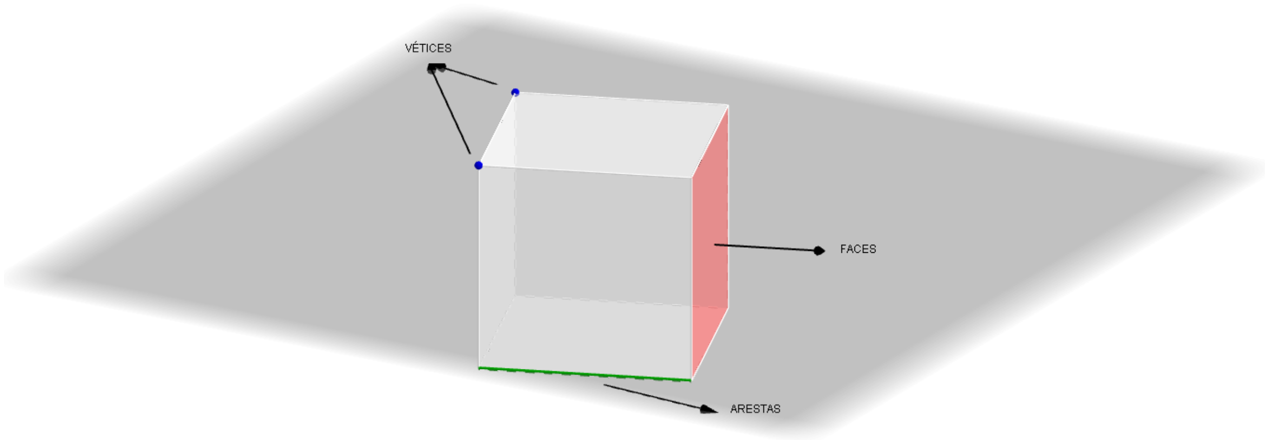


Figura 1: Faces, Arestas e Vértices

A definição de poliedro exige atenção, a fim de que, pela definição, qualquer pessoa possa construir um poliedro sem dúvida alguma.

Por exemplo, quando falamos que uma aresta tem que ser lado de dois e apenas dois polígonos estamos evitando que o aluno faça um tipo de figura como esta:

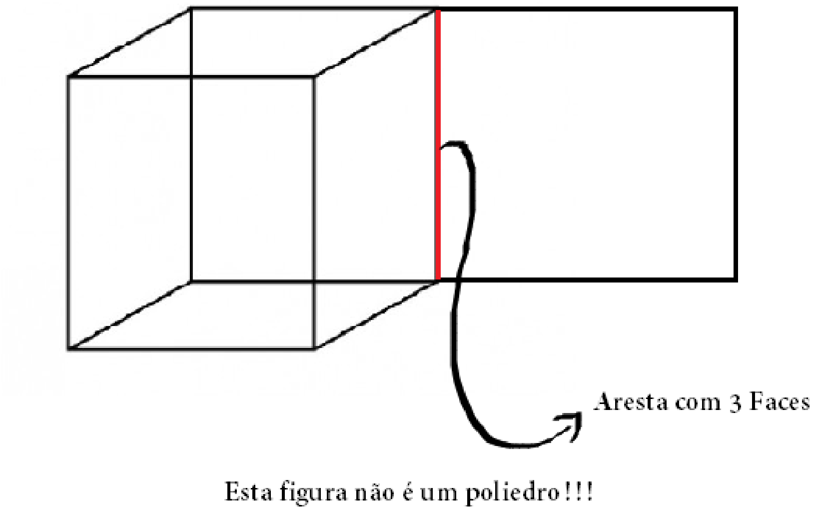


Figura 2

3.1 GÊNERO DE UM VÉRTICE

Gênero de um vértice é o número de arestas que incidem nele.

V_n representa o número de vértices de gênero n.

Na figura abaixo, A, B e C têm gênero 3, D, E, F e G têm gênero 4, H tem gênero 5.

Logo,

$V_3 = 3$, $V_4 = 4$, $V_5 = 1$.

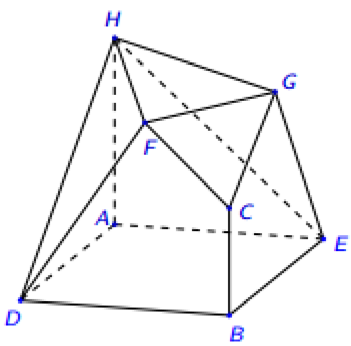


Figura 3

Contando o número de vértices de um poliedro, temos:

$$\mathbf{V = V_1+V_2+V_3+...+V_n}$$

Como cada aresta liga dois vértices, temos:

$$\mathbf{2A = 3V_3 + 4V_4 +...+ nV_n}$$

3.2 GÊNERO DE UMA FACE

Gênero de uma face é o número de arestas que esta face possui.

$\mathbf{F_n}$ representa o número de faces de gênero n.

O poliedro da figura abaixo é formado por dois triângulos, dois quadriláteros e dois pentágonos.

$F_3 = 2$, $F_4 = 2$, $F_5 = 2$

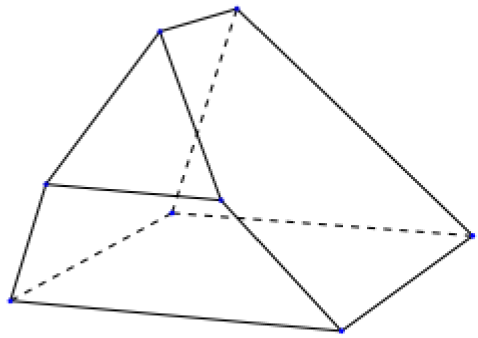


Figura 4

O número total de faces é a soma dos números de faces de cada gênero.

$$\mathbf{F = F_3 + F_4 + ... + F_n}$$

Como cada aresta é lado de exatamente duas faces, temos:

$$\mathbf{2A = 3F_3 + 4F_4 + ... +nF_n}$$

3.3 NOMENCLATURA DOS POLIEDROS

Número de faces	Nome do Poliedro
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Eneaedro
10	Decaedro
11	Undecaedro
12	Dodecaedro
13	Tridecaedro
14	Tetradecaedro
15	Pentadecaedro
16	Hexadecaedro
17	Heptadecaedro
18	Octadecaedro
19	Eneadecaedro
20	Icosaedro

Tabela 1: Nomenclatura dos poliedros

3.4 POLIEDRO CONVEXO

Conforme DOLCE (1993):

> Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos tais que:
>
> a) dois polígonos não estejam contidos num mesmo plano;
>
> b) cada lado de um polígono é comum a dois, e somente dois polígonos;
>
> c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no polígono e contém os restantes. A intersecção destes semi-espaços é chamada poliedro convexo. (DOLCE, 1993, p.124).

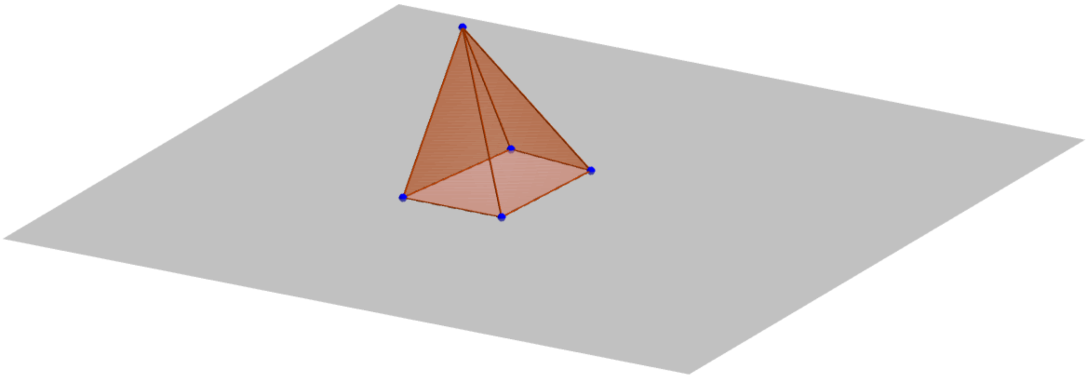


Figura 5: Exemplo de poliedro convexo

Um poliedro é não convexo quando o plano de pelo menos uma face divide o poliedro em duas ou mais partes.

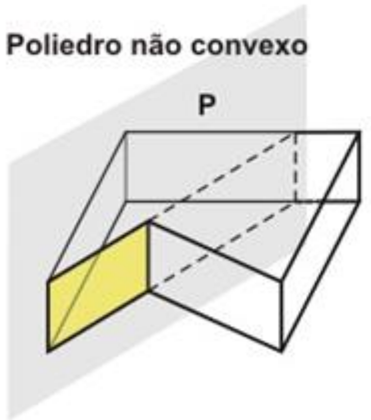


Figura 6: Exemplo de poliedro não convexo

3.5 RELAÇÃO DE EULER

Leonhard Euler teve a intuição sobre a relação entre os números de faces, arestas ou vértices de um poliedro convexo, essa relação ficou conhecida como Teorema de Euler:

Em todo poliedro convexo vale a relação:

$$\boxed{V + F = A + 2}$$

Onde V, A e F representam os números de vértices, de arestas e faces, respectivamente.

A demonstração da Relação de Euler pode ser encontrada nos sites:

http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/elon/rpm3.pdf e http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_AndreaCosta.pdf

3.6 POLIEDROS DE PLATÃO

Os poliedros de Platão possuem características próprias com as seguintes condições:

O número de arestas é igual em todas as faces;

Em cada vértice incidem o mesmo número de arestas (gênero de todos os vértices é igual);

Nos sólidos considerados poliedros de Platão, vale a relação de Euler (V + F = A + 2) onde V = vértices, A = arestas e F = faces.

A seguir temos um exemplo de Poliedro de Platão, pois está de acordo com as exigências descritas acima.

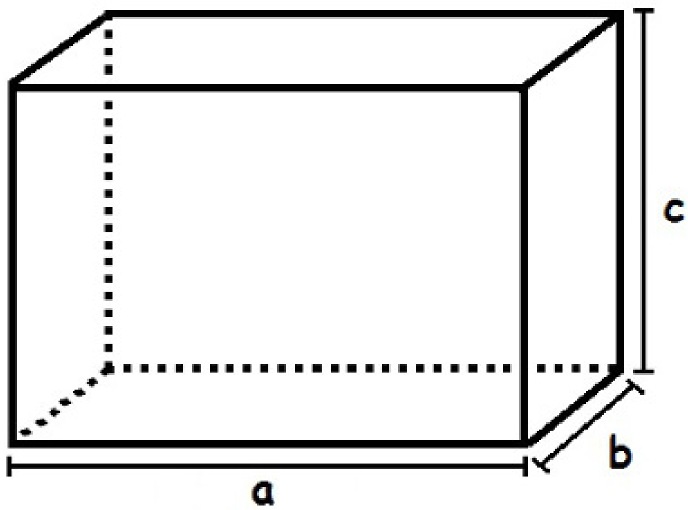


Figura 7: Paralelepípedo

As seis faces do sólido são quadriláteros, isto é, são formadas por quatro arestas.

O gênero de todos os vértices é igual, ou seja, em cada vértice incidem 3 arestas.

A relação de Euler pode ser aplicada, pois o sólido possui oito vértices, seis faces e 12 arestas:

V + F = A + 2

8 + 6 = 12 + 2

14 = 12 + 2

14 = 14 (verdadeiro)

Abaixo temos as classes dos Poliedros de Platão:

Poliedro	A	V	F
Tetraedro	6	4	4
Hexaedro	12	8	6
Octaedro	12	6	8
Dodecaedro	30	20	12
Icosaedro	30	12	20

Tabela 2: Poliedros de Platão

Demonstração:

Seja n o numero de lados de cada face e seja p o numero de arestas que concorrem em cada vértice. Temos $\boxed{2A = nF = pV}$ ou $\boxed{A = \frac{nF}{2} \text{ e } V = \frac{nF}{p}.}$

Substituindo na relação de Euler, obtemos $\frac{nF}{p} + F = \frac{nF}{2} + 2$

$F = \frac{4p}{2p+2n-pn}$.

$2p + 2n - pn < 0$.

Usaremos a seguinte propriedade fundamental: a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360°. Esta é a proposição 21 do Livro XI de Os Elementos de Euclides.

Em um sólido platônico as faces são polígonos regulares congruentes e são necessárias pelo menos três faces unidas em cada vértice para formar um sólido.

As faces são triângulos equiláteros com ângulos internos de 60°. Temos as seguintes possibilidades:

N° de Triângulos Equiláteros	Soma dos Ângulos	Poliedros Formado
3	180°	Tetraedro
4	240°	Octaedro
5	300°	Icosaedro
≥6	≥360°	Não existe

Tabela 3: Poliedros formados por triângulos equiláteros

As faces são quadradas com ângulos internos de 90°. Temos as seguintes possibilidades:

N° de Quadrados	Soma dos Ângulos	Poliedro Formado
3	270°	Cubo
4	≥360°	Não existe

Tabela 4: Poliedros formados por quadrados

As faces são pentágonos regulares com ângulos internos de 108°. Temos as seguintes possibilidades:

N° de Pentágonos Regulares	Soma dos Ângulos	Poliedro Formado
3	324°	Dodecaedro
≥4	≥360°	Não existe

Tabela 5: Poliedros formados por pentágonos regulares

Se as faces são polígonos regulares com $n \geq 6$ lados, então a soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice é ≥ 360°. Sendo assim, não existe nenhum sólido platônico com faces hexagonais, heptagonais, etc.

Logo, $n < 6$.

Como $p \geq 3$ e $n < 6$. As possibilidades são então as seguintes:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6-p}$$

Com $n = 3$ temos todas as faces triangulares

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{2p}{4-p}$$

Com n = 4 temos todas as faces quadrangulares

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10 - 3p}$$

Com $n = 5$ temos todas as faces pentagonais

1. Se $n = 3$, então $A = \frac{6p}{6-p}$ e, portanto, $F = \frac{2A}{n} = \frac{4p}{6-p}$. Desta última fórmula segue-se que $p < 6$. Agora:

(a) Se $p = 3$, então $F = 4$. Neste caso, o poliedro formado é o **tetraedro.**

(b) Se $p = 4$, então $F = 8$. Neste caso, o poliedro formado é o **octaedro.**

(c) Se $p = 5$, então $F = 20$. Neste caso, o poliedro formado é o **icosaedro.**

2. Se $n = 4$, então $A = \frac{4p}{4-p}$ e, portanto, $F = \frac{2A}{n} = \frac{2p}{4-p}$. Desta última fórmula segue-se que $p < 4$.

Sendo assim, $p = 3$ e, portanto, $F = 6$. Neste caso, o poliedro formado é o **cubo**.

3. Se $n = 5$, então $A = \frac{10p}{10-3p}$ e, portanto, $F = \frac{2A}{n} = \frac{4p}{10-3p}$. Desta última fórmula segue-se que $p < \frac{10}{3}$.

Sendo assim, $p = 3$ e, portanto, $F = 12$. Neste caso, o poliedro formado é o **dodecaedro.**

Platão estabeleceu algumas relações entre as classes de poliedros e a construção do Universo. Ele associou os poliedros com os elementos: cubo e terra, icosaedro e água, tetraedro e fogo, octaedro e ar, o dodecaedro foi associado ao universo.

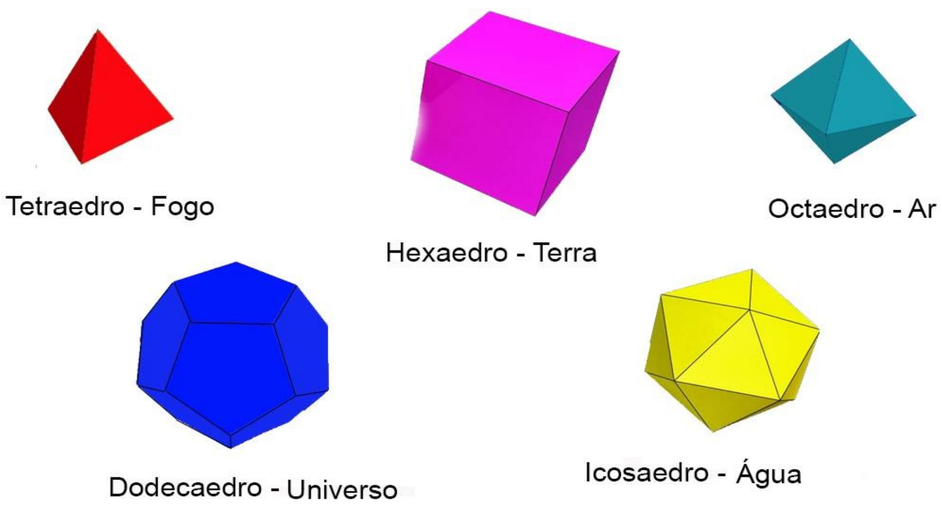


Figura 8: Poliedros de Platão

3.7 POLIEDROS REGULARES

Um Poliedro é considerado regular se suas faces são polígonos regulares e congruentes e se todos os seus vértices têm o mesmo gênero (gênero de vértices no item 3.1).

Existem exatamente cinco classes de poliedros regulares:

1. Tetraedro regular
2. Cubo
3. Octaedro Regular
4. Dodecaedro regular
5. Icosaedro regular

Todo poliedro regular é um Poliedro de Platão, mas nem todo Poliedro de Platão é um poliedro regular (Poliedros de Platão no capítulo 3.6)

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 ESCOLHAS DAS TURMAS

Para melhor atender à proposta de comparar duas metodologias abordando o mesmo tema, selecionei duas turmas, A e B, do mesmo colégio particular, com alunos cursando o segundo ano do Ensino Médio, e uma Turma C do colégio Estadual Maria Terezinha. As turmas A e B tinham o mesmo perfil e as duas já haviam estudado geometria plana e teriam o primeiro contato com Poliedros. Essa escola está localizada na Ilha do Governador no Rio de Janeiro e os alunos são em sua maioria da classe B. A turma C, é uma turma de EJA (Educação de Jovens e Adultos) módulo três, e está localizada na Praça Seca. As atividades se iniciaram na primeira semana de fevereiro de 2015.

4.1.1 Turma A - Metodologia Tradicional

Turma do turno da manhã, 30 alunos, 18 meninas e 12 meninos, idade de 15 a 17 anos, como na tabela abaixo.

Nem todos os alunos fizeram as avaliações.

IDADE	QUANTIDADE	SEXO MASCULINO	SEXO FEMININO
15	9	3	6
16	16	6	10
17	5	3	2

Tabela 6: Turma A - Perfil dos alunos

No conteúdo abordado na turma A, utilizei a metodologia tradicional, ou seja, livro didático (Paiva, Manoel Rodrigues, 2° edição, Editora Moderna, 2010), lista de exercícios e quadro branco. Utilizei 9 aulas, 50 minutos cada, totalizando 450 minutos, para abordagem do conteúdo e dos testes, tanto o inicial quanto o final. Os testes aplicados encontram-se no Apêndice.

As atividades foram divididas da seguinte forma:

- Primeira aula:

  Na primeira aula, com duração de 50 minutos, apliquei o teste inicial para avaliação de conteúdos anteriores (anexo 8.1).

- Segunda e terceira aulas:

  Na segunda e terceira aulas, com duração total de 1 hora e 40 minutos, expus o conteúdo e resolução de exemplos no quadro branco.

  No início da segunda aula foi defini o que é um poliedro:

> Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces, onde:
>
> (a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e, apenas um, outro polígono.
>
> (b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice, ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.
>
> (c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas). (LIMA,2006)

Posterior à definição, apresentei alguns exemplos de poliedro, como na figura abaixo, especificando os elementos dos poliedros.

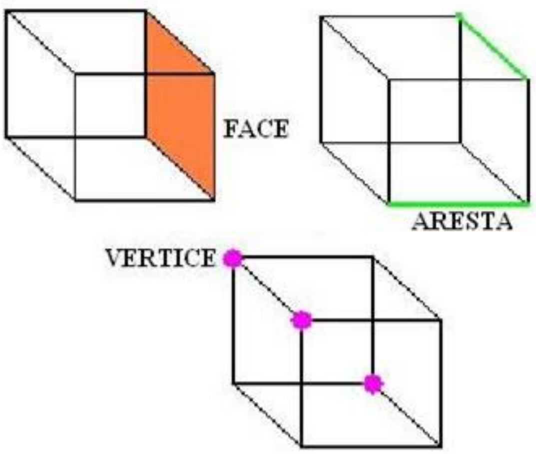


Figura 9: Elementos de um poliedro

Construí uma tabela no quadro branco, com a nomenclatura dos principais poliedros, semelhante à tabela 1, anexa ao item 3.5 Nomenclatura dos poliedros.

Após a nomenclatura, apresentei a definição de poliedros convexos:

> Consideremos um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos tais que:
>
> a) dois polígonos não estejam contidos num mesmo plano;
>
> b) cada lado de um polígono é comum a dois, e somente dois polígonos;
>
> c) o plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.
>
> Nessas condições, ficam determinados n semi-espaços, cada um dos quais tem origem no polígono e contém os restantes. A intersecção destes semi-espaços é chamada poliedro convexo. (DOLCE, 1993, p.124).

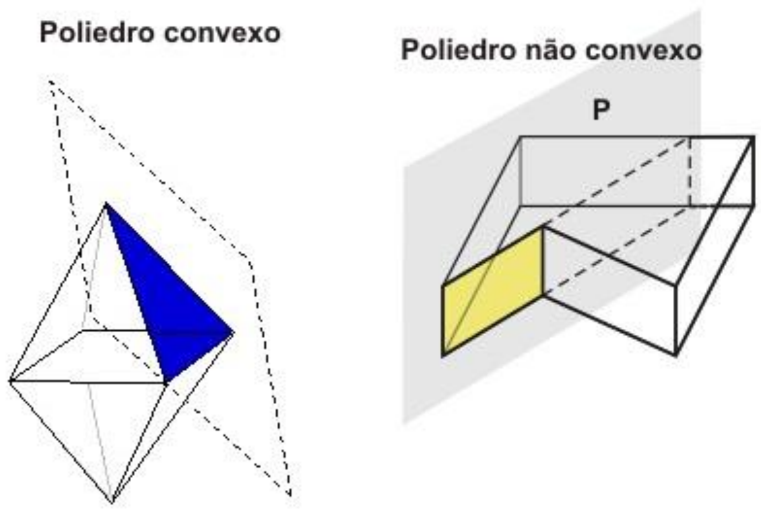


Figura 10: Poliedro convexo e não convexo

Após a definição de poliedros convexos, apresentei a definição de gênero de vértices e gênero de faces.

Gênero de um vértice é o número de arestas que incidem nele.

$\mathbf{V_n}$ representa o número de vértices de gênero n.

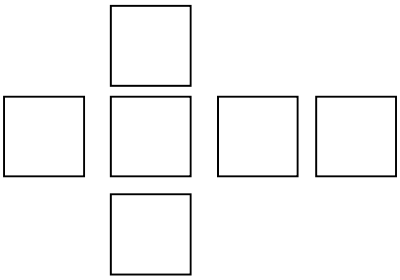
$$\boxed{\mathbf{2A = 3V_3 + 4V_4 + ... + nV_n}}$$

Gênero de uma face é o número de arestas que esta face possui.

$\mathbf{F_n}$ representa o número de faces de gênero n.

$$\boxed{\mathbf{2A = 3F_3 + 4F_4 + ... + nF_n}}$$

Para facilitar a compreensão dos alunos acerca da ideia de gênero de uma face e gênero de um vértice, elaborei o desenho de um cubo, e separadamente os seis quadrados que ele possui.



Contamos os lados dos quadrados, depois explicitei que cada quadrado apresenta a mesma quantidade de lados, porém, quando o poliedro é formado, a união de cada dois lados forma uma aresta, então, depois de somar todas as arestas separadamente, percebemos que era necessário dividir por 2 para resultar na quantidade correta.

Figura 11

2A = 4.6

2A = 24

A = 12

Utilizando o mesmo exemplo do cubo, fizemos a contagem de arestas saídas de cada vértice, e esse número o gênero do vértice. Percebemos que a mesma aresta sempre estava em dois vértices ao mesmo tempo, logo, esse valor teria que ser dividido por dois para apontar o número correto de arestas.

Exemplo 1:

Um poliedro convexo tem 2 faces triangulares e 3 faces quadrangulares, quantas arestas tem esse poliedro?

Resolução: como tem duas faces triangulares $F_3=2$ e três faces quadrangulares $F_4=3$.

Temos que, $2A = 3F_3 + 4F_4 \rightarrow 2A = 3.2 + 4.3 \rightarrow 2A = 18 \rightarrow A = 9$.

Logo, o poliedro tem 9 arestas como na figura abaixo.

É interessante desenhar para que os alunos percebam o que foi calculado.

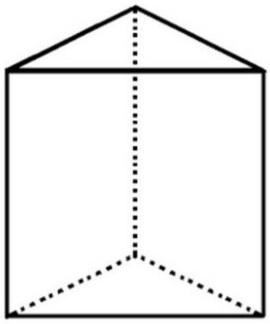


Figura 12 – poliedro com 2 faces triangulares e 3 quadrangulares

Após a definição sobre gêneros, expliquei a Relação de Euler:

V+F=A+2, onde V, A e F representam os números de vértices, faces e arestas do poliedro, respectivamente.

Após explicada a Relação de Euler, apresentei alguns exemplos para colocar em prática a teoria.

Exemplo 2:

Um poliedro convexo tem 6 vértices. De cada vértice partem 4 arestas. Qual o número de faces do poliedro?

Resolução: Como temos 6 vértices e de cada um deles partem 4 arestas temos que $v_4=6$,

$2A = 4V_4 \rightarrow 2A = 4.6 \rightarrow 2A = 24 \rightarrow A = 12$;

Como é um poliedro convexo, vale a relação de Euler

$V+F=A+2 \rightarrow 6+F=12+2 \rightarrow F=14-6 \rightarrow F=8$

O número de Faces desse poliedro é 8.

Exemplo 3:

Um poliedro convexo é constituído de 25 arestas e 15 faces. Quantos vértices possui esse poliedro?

Resolução: A relação de Euler, V+F=A+2, vale para qualquer poliedro convexo.

Temos então que $V +15 = 25 + 2 \rightarrow V=12$.

Logo, o poliedro possui 12 vértices.

Exemplo 4:

Um decaedro possui todas as faces quadrangulares. Determinar o número de vértices desse poliedro.

Resolução: o poliedro tem 10 faces com quatro arestas cada; logo, o número de arestas é dado por: $A = \frac{10.4}{2}$, A=20.

Como é um poliedro convexo V+10=20+2→V=12.

Logo, o poliedro possui 12 vértices.

Exemplo 5:

Um poliedro convexo é constituído por 20 arestas e seu número de vértices é igual ao número de faces. Quantas faces tem esse poliedro?

Resolução: Como é um poliedro convexo, vale a relação de Euler:

V+F=A+2, onde F=V

F+F=20+2→2F=22→F=11.

Logo, o poliedro possui 11 faces.

Após esses exemplos, apresentei a definição de poliedros de Platão e poliedros regulares.

Os poliedros de Platão possuem características próprias e se enquadram nas seguintes condições:

• O número de arestas é igual em todas as faces;

• Em cada vértice incide o mesmo número de arestas (gênero de todos os vértices é igual);

• Nos sólidos, considerados poliedros de Platão, vale a relação de Euler (V + F = A + 2) onde V = vértices, A = arestas e F = faces.

Também apresentei as cinco classes de poliedros de Platão: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e o icosaedro.

Um poliedro convexo é regular se, e somente se:

1. Todas as suas faces são polígonos regulares congruentes entre si;

2. Todos os seus vértices têm que ter o mesmo número de arestas que incidem nele.

Demonstrei as cinco classes de poliedros regulares: tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e o icosaedro regular.

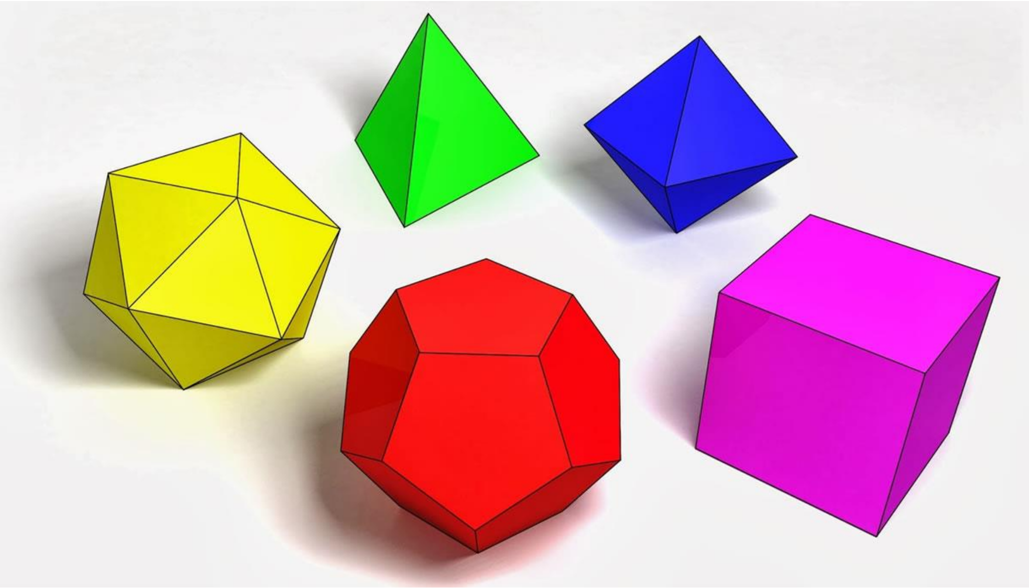


Figura 13 – Poliedros de Platão

Observação: todo poliedro regular é um Poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é um poliedro regular.

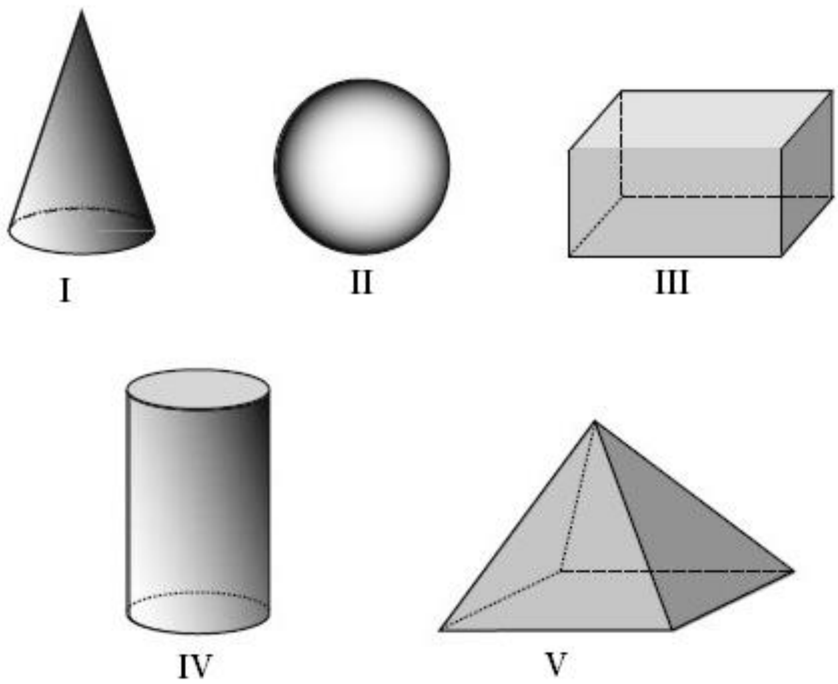
Uma observação importante é que muitos dos alunos observados não conseguiram desenhar os poliedros e tiveram dificuldade de compreensão das fórmulas. A sugestão é que o professor apresente alguns poliedros para que os alunos tenham contato com material concreto, o que facilitaria a absorção do conteúdo.

- Quarta e quinta aulas:

  Na quarta e quinta aulas, com duração total de 1hora e 40 minutos, foi dedicado um tempo para a resolução de atividade proposta. Nessa atividade foi dada uma lista com 8 exercícios:

  Questão 1

  Qual dessas figuras são poliedros?



Solução: Os sólidos III e V.

Questão 2

Um poliedro convexo tem 14 vértices. Em 6 desses vértices concorrem 4 arestas, em 4 desses vértices concorrem 3 arestas e, nos demais vértices concorrem 5 arestas. O número de arestas desse poliedro é igual a:

Solução:

Sendo $V=14$, $V_4=6$, $V_3=4$, $V_5=4$.

$2A = 3V_3+4V_4+5V_5$

$2A = 3.4+4.6+5.4$

$2A = 12+24+20$

$2A = 56$

$A=28$

Logo, o número de arestas desse poliedro é 28.

Questão 3

Num poliedro convexo de 10 arestas, o número de faces é igual ao número de vértices. Quantas faces tem esse poliedro?

Solução: Pelas informações, $F = V$.

Utilizando a relação de Euler, temos: 10 + 2 = 2V.

Logo, V = 6.

Logo, o número de faces é o mesmo. Isto é, há 6 faces.

Questão 4

Num poliedro convexo o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces desse poliedro.

Solução: De acordo com as informações, temos:

$$\begin{cases} A+2=V+F \\ A=V+6 \end{cases} \Rightarrow V+6+2=V+F \Rightarrow F=8.$$

Questão 5

Um poliedro convexo apresenta faces quadrangulares e triangulares. Calcule o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares é igual a 5.

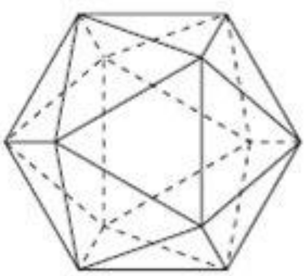
Solução: Considerando o número de faces quadrangulares e "y" o de triangulares, concluímos, de acordo com as informações, que A = 4x e y = 5. Temos:

$$\begin{cases} A=4y \\ 4y=\dfrac{5(4)}{2}+\dfrac{3y}{2} \end{cases} \Rightarrow 8y=20+3y \Rightarrow 5y=20 \Rightarrow y=4$$

Logo há 5 + 4 = 9 faces.

Questão 6

Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?

Solução:

F5 = 12, F_6=20, Então F=12+20=32.

$2A = 5F_5+6F_6$

2A = 5.12+6.20

2A = 60 + 120

2A = 180

A = 90

Pela relação de Euler

V + F = A + 2

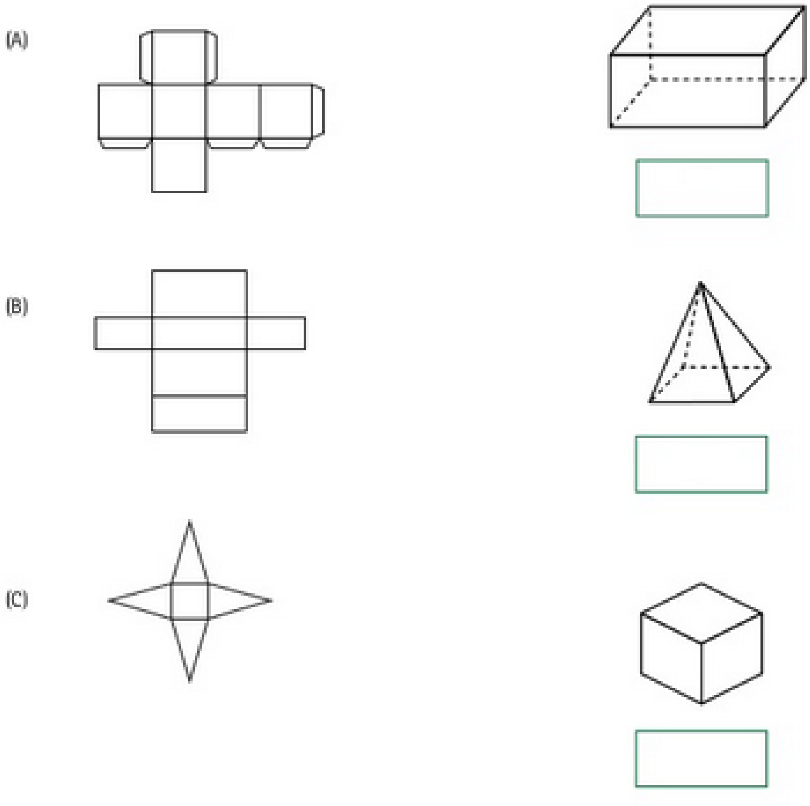
V + 32 = 90 + 2

V=60.

Logo, esse poliedro possui 60 vértices.

Questão 7

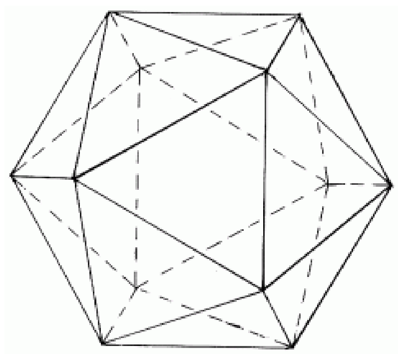
Associe as planificações com seus sólidos



Solução: B, C e A nesta ordem.

Questão 8

Quantas arestas, vértices e faces tem o icosaedro regular correspondente à figura abaixo?



Solução: um icosaedro tem 20 faces, como todas as faces são triangulares,

$2A = 3.20 \rightarrow A=30$

$V+F=A+2 \rightarrow V+20=30+2 \rightarrow V=12$

Logo, o icosaedro tem 20 faces, 30 arestas e 12 vértices.

- Sexta aula:

  Na sexta aula, com duração de 50 minutos, orientei individualmente cada aluno, com esclarecimento de suas dúvidas e explicação de algumas pendências.

- Sétima aula:

  Na sétima aula, com duração de 50 minutos, corrigi a atividade proposta. As soluções das atividades estão logo após os exercícios.

- Oitava aula:

  Na oitava aula, com duração de 50 minutos, os alunos fizeram avaliação final (em anexo no capítulo 8.2).

- Nona e última aula:

  Na nona aula, com duração de 50 minutos, conversei com os alunos e sugeri que fizessem uma avaliação sobre as aulas de poliedros.

Algumas dessas avaliações estão abaixo apresentadas.

Questionário para os alunos da turma A

Ao término das aulas, os alunos avaliaram as atividades, seguem algumas opiniões:

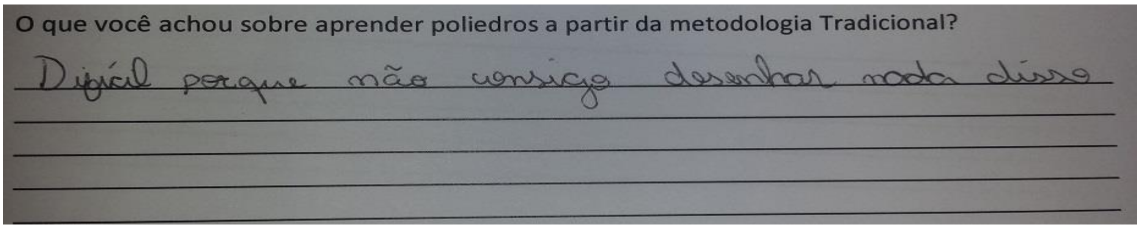


Figura 14: Alunos X – 1

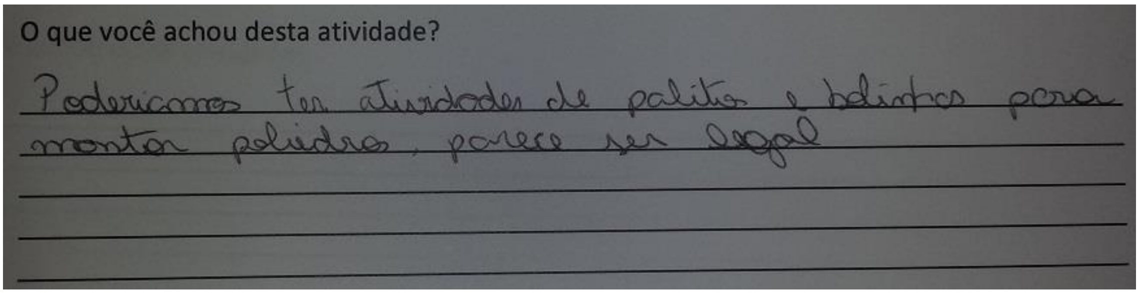
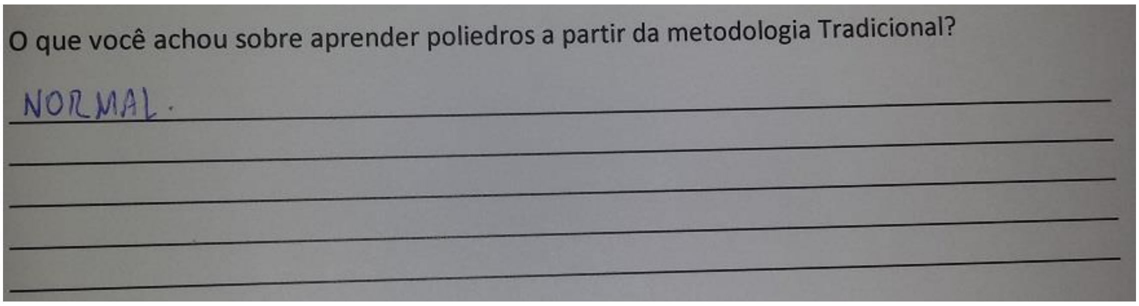
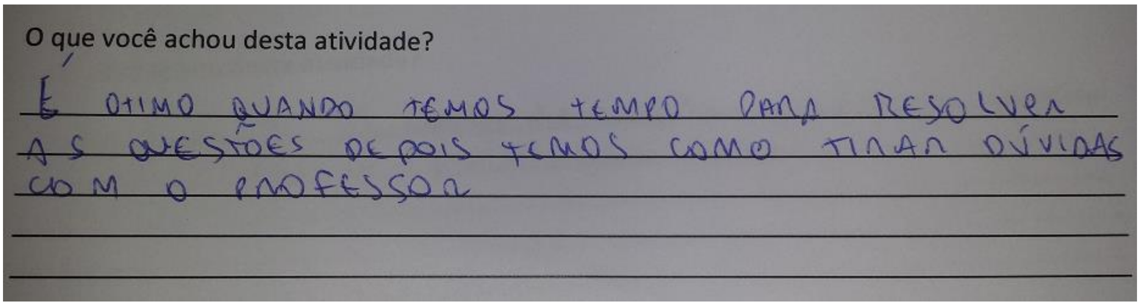


Figura 15: Aluno X – 2


O que você achou sobre aprender poliedros a partir da metodologia Tradicional?

NORMAL.

Figura 16: Aluno P – 1


O que você achou desta atividade?

É OTIMO QUANDO TEMOS TEMPO PARA RESOLVER AS QUESTÕES DEPOIS TEMOS COMO TIRAR DÚVIDAS COM O PROFESSOR

Figura 17: Aluno P – 2

4.1.2 Turma B - Metodologia Van Hiele

Turma um pouco menor que a A, com 23 alunos, sendo 12 meninos e 11 meninas, com idades de 14 a 18 anos, como na tabela abaixo.

IDADE	QUANTIDADE	SEXO MASCULINO	SEXO FEMININO
14	1	1	-
15	9	4	5
16	10	6	4
17	2	-	2
18	1	1	-

Tabela 7: Turma B - Perfil dos alunos

O conteúdo abordado na turma B foi feito com a Metodologia Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino de Poliedros.

Utilizei 9 aulas, de 50 minutos cada, totalizando 450 minutos, para abordagem do conteúdo e dos testes, tanto o inicial quanto o final. Os testes aplicados estão em anexo no capítulo 8.

Como esta metodologia demandou supervisão de cada atividade proposta, os alunos foram distribuídos em cinco grupos, três grupos com cinco alunos e dois grupos com quatro.

A aplicação da Metodologia Van Hiele está melhor contextualizada no item 4.3.

- Primeira aula:
  Duração de 50 minutos, teste inicial para avaliação de conteúdos anteriores (Anexo 8.1).

- Segunda e terceira aulas:
  Duração total de 1hora e 40 minutos, aplicação do nível 1 da metodologia Van Hiele.

- Quarta e quinta aulas:
  Duração de 1hora e 40 minutos, nível 2 da metodologia Van Hiele.

- Sexta e sétima aulas:
  Duração de 1hora e 40 minutos, nível 3 da metodologia Van Hiele.

- Oitava aula:
  Duração de 50 minutos, avaliação final (em anexo ao capítulo 8.2).

- Nona e última aula:
  Duração de 50 minutos, interação com os alunos e avaliação das aulas de poliedros.

4.1.3 Turma C - Metodologia Van Hiele

Turma do turno da noite, Colégio Estadual Professora Maria Terezinha de Carvalho Machado, com 40 alunos inscritos, sendo que apenas 14 alunos frequentavam as aulas, com idade de 19 a 56 anos, como na tabela abaixo.

Nem todos os alunos fizeram as avaliações.

IDADE	QUANTIDADE	SEXO MASCULINO	SEXO FEMININO
19	3	2	1
20	3	2	1
22	2	1	1
25	1	0	1
38	1	1	0
40	1	0	1
41	1	1	0
44	1	0	1
56	1	1	0

Tabela 8: Turma C - Perfil dos alunos

O conteúdo abordado na turma C foi feito com a Metodologia Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino de Poliedros.

Utilizei 16 aulas, de 30 minutos cada, totalizando 480 minutos, para abordagem do conteúdo e dos testes, tanto o inicial quanto o final.

Como esta metodologia demandou supervisão de cada atividade proposta, os alunos foram distribuídos em três grupos, dois grupos com cinco alunos e um grupo com quatro.

A aplicação da Metodologia Van Hiele está melhor contextualizada no item 4.3.

- Primeira e segunda aulas:

  Duração de 60 minutos, teste inicial para avaliação de conteúdos anteriores (Anexo 8.1).

- Terceira, quarta, quinta e sexta aulas:

  Duração total de 2 horas, nível 1 da metodologia Van Hiele.

- Sétima, oitava, nona e décima aulas:

  Duração de 2 horas, nível 2 da metodologia Van Hiele.

- Décima primeira, décima segunda e décima terceira aulas:

  Com duração de 1hora e 30 minutos, apliquei o nível 3 da metodologia Van Hiele.

- Décima quarta e décima quinta aulas:
  Duração de 60 minutos, avaliação final (anexo ao capítulo 8.2).

- Décima sexta aula:
  Duração de 30 minutos, interação com os alunos e avaliação das aulas de poliedros.

4.2 APLICAÇÃO DE TESTE INICIAL

Mesmo sabendo que as turmas já tinham conhecimento de geometria plana, precisei averiguar o conteúdo adquirido antes das aulas, para tanto, foi aplicado teste, que permitiu perceber o nível de conhecimento de cada turma e suas dificuldades.

Com os resultados desse teste foi possível otimizar as atividades considerando o conhecimento que os alunos possuíam, para melhor adaptá-las à realidade do grupo.

4.3 APLICAÇÃO DA METODOLOGIA VAN HIELE

4.3.1 Nível 1 – Visualização

Neste nível, ainda não são reconhecidos os sólidos por suas propriedades, então são associados os poliedros com formas naturais ou artificiais que temos em nosso cotidiano, como dados de jogos, pirâmides, um tijolo, etc.; entretanto, podemos adquirir um vocabulário geométrico e diferenciar as formas geométricas.

<u>Fase 1: Informação</u>

No intuito de obter informações sobre o que os alunos conhecem sobre poliedros entreguei para cada grupo:

- Um conjunto de dados, sendo eles de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 lados;
- Papel para anotações.

Solicitei que os alunos iniciassem um debate sobre os poliedros (em forma de dado) distribuídos para que fizessem anotações sobre o sólido. Orientei os grupos a associarem o sólido com elementos do seu cotidiano.

Os grupos se esforçaram para descobrir quantas arestas, vértices e faces têm cada poliedro, distinguindo qual o tipo de face em cada um dos poliedros, mas nessa fase os alunos ainda não conseguiam distinguir o que é aresta, face e vértice pelo nome, mas eram capazes de comparar com elementos do dia a dia.

Nessa fase comparamos os elementos do dia a dia dos alunos com as propriedades matemáticas, como, por exemplo, quando eles falavam que o nome de onde ficava o número do dado era lado, apresentava-lhes o nome correto.

Fase 2: Orientação dirigida

1. Solicitei que cada grupo confeccionasse um poliedro, utilizando palitos de dente e massinha de modelar.
2. Cada grupo registrou em um papel o número de arestas faces e vértices do poliedro construído.
3. Os grupos fizeram um rodízio com seus poliedros e para cada um deles registrou o número de arestas, vértices e faces.

Fase 3: Explicitação

Nesta fase, os grupos escolheram um representante para apresentar os resultados obtidos nas fases anteriores.

Os alunos não aprovaram a fixação da massinha de modelar, pois os palitos se soltavam com facilidade. Para a atividade do Nível 2 esse material precisou ser substituído.

Enquanto mediador, apenas acompanhei a apresentação, intervindo quando necessário.

Fase 4: Orientação Livre

Trata-se de uma atividade mais elaborada para os grupos desenvolverem. Solicitei a construção de 8 triângulos, com 12 palitos (arestas) e 6 vértices construídos com massa de modelar.

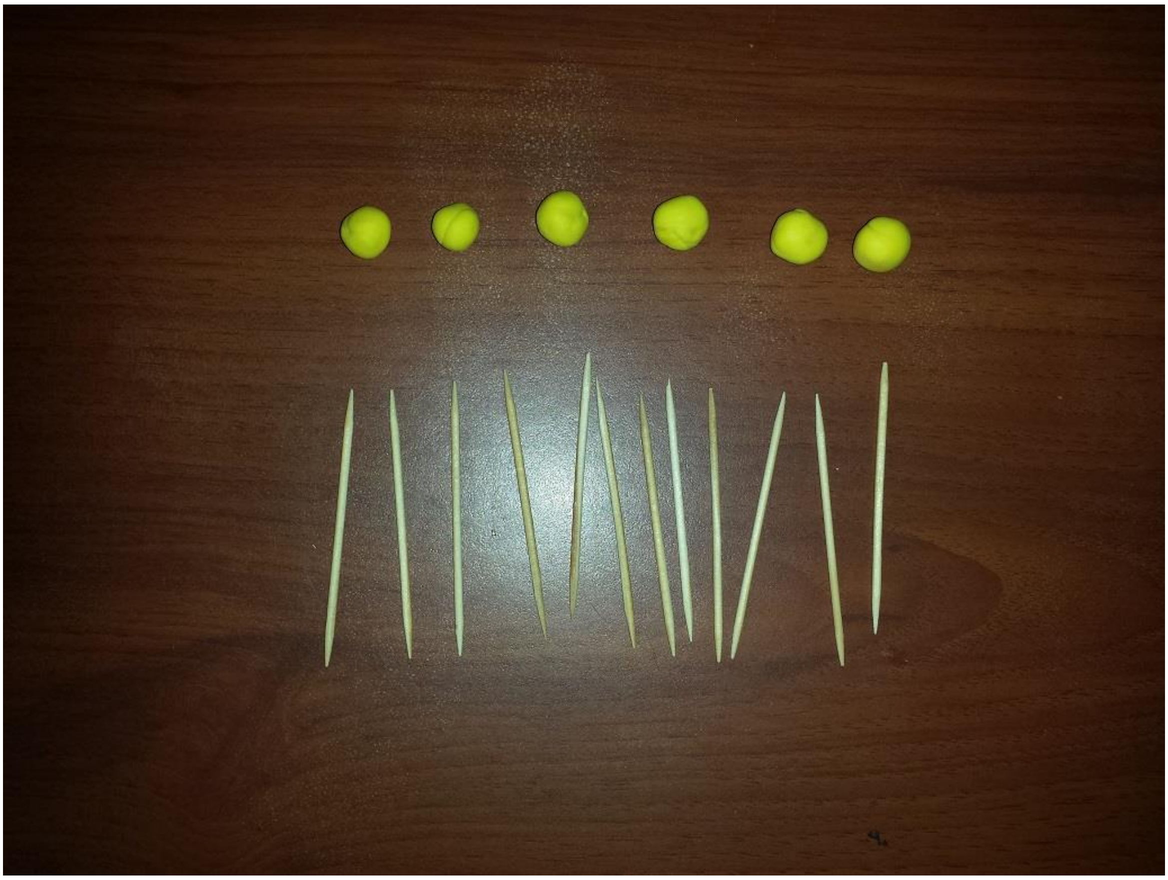


Figura 18: Material para atividade - Palitos e massa de modelar

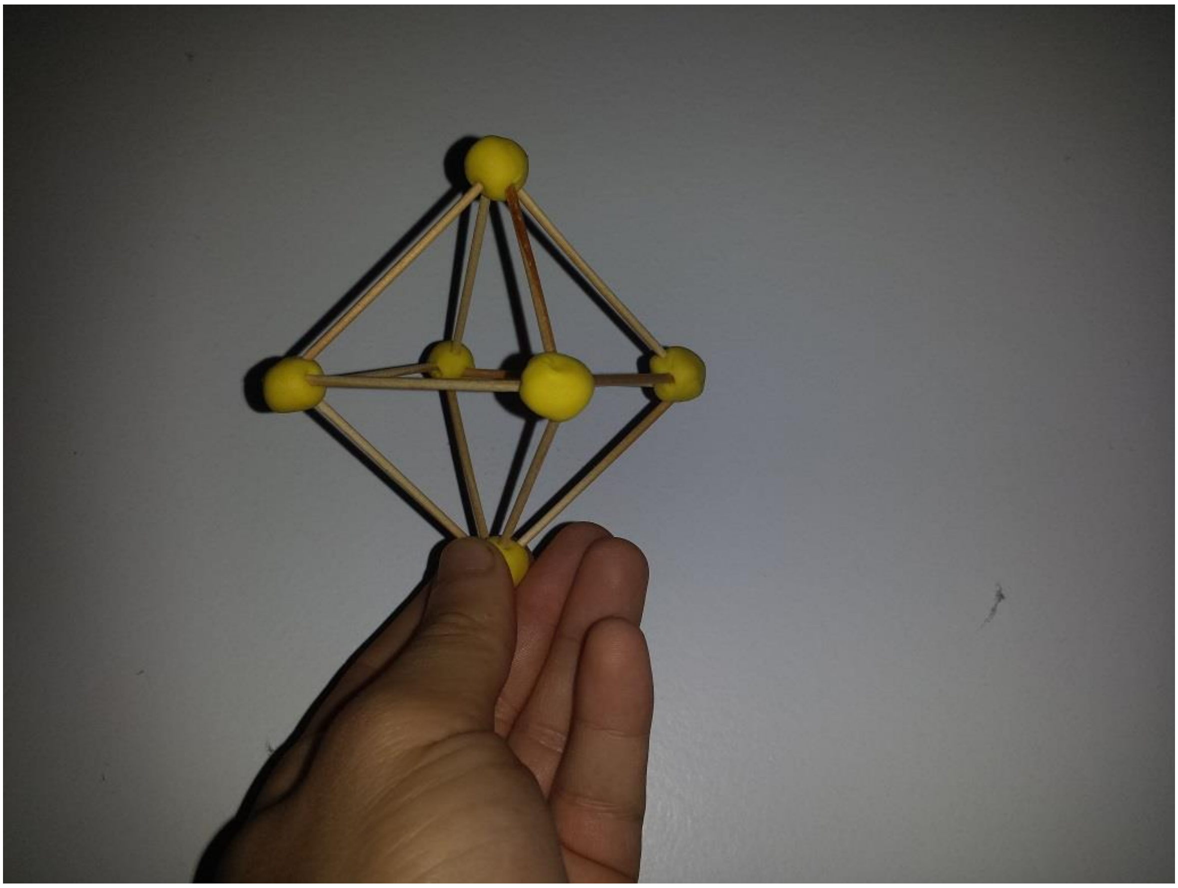


Figura 19: Foto tirada do octaedro construído por grupo da Turma B.

A princípio, apenas um grupo da turma B conseguiu construir o poliedro, mas depois que os grupos visualizaram a atividade também conseguiram construir. Essa atividade ainda foi feita com massa de modelar, pois foi no mesmo dia que a atividade da fase 2.

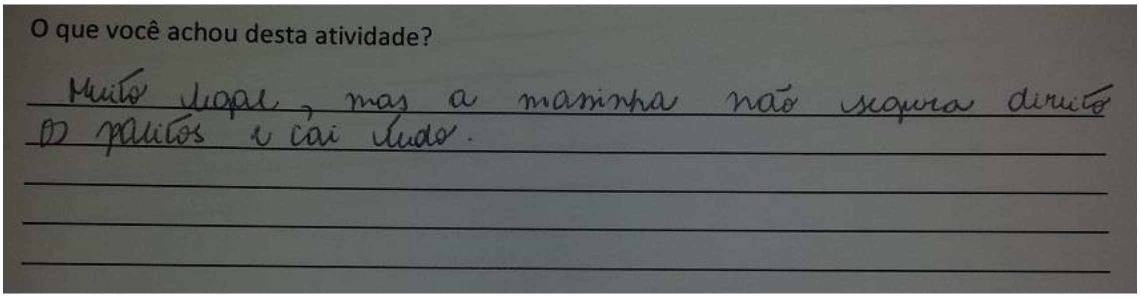
Fase 5: Integração

Foi o momento de conclusão, onde não foram abordados novos conteúdos, mas, sim, organizados e formalizados os conteúdos trabalhados anteriormente. O grupo elaborou uma síntese das atividades.

Questionários

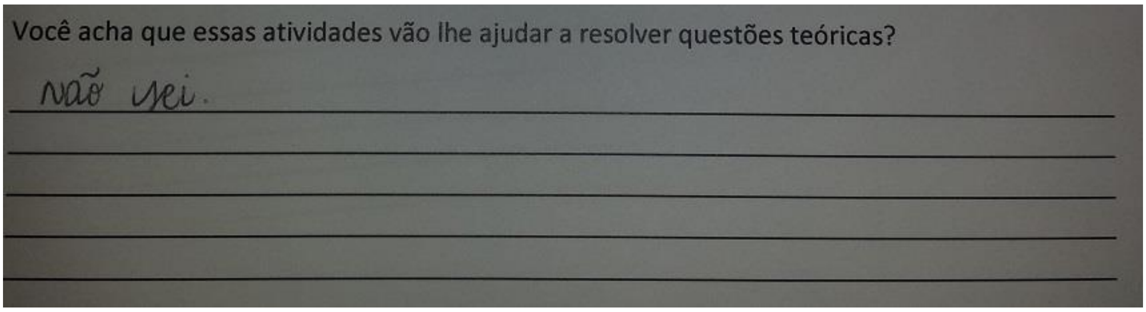
Ao término de cada atividade, os alunos receberam questionário para avaliação da atividade, tanto na turma B quanto na turma C.

Questionário para os alunos da turma B


O que você achou desta atividade?

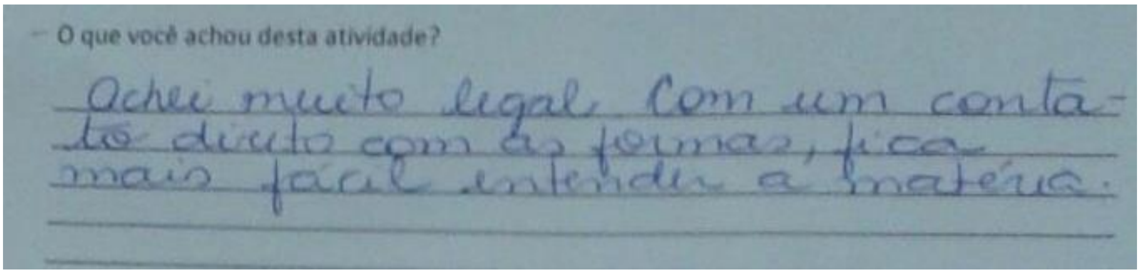
Muito legal, mas a massinha não segura direito os palitos e cai tudo.

Figura 20: Aluno Y


Você acha que essas atividades vão lhe ajudar a resolver questões teóricas?

Não sei.

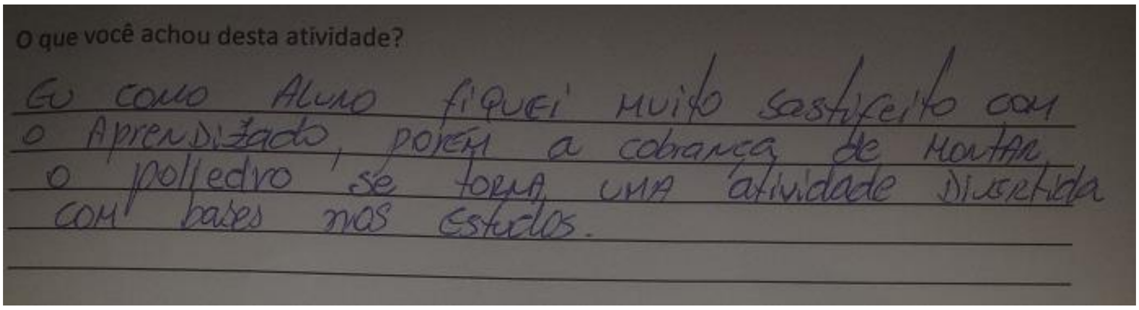
Figura 21: Aluno Y


O que você achou desta atividade?

Achei muito legal. Com um contato direto com as formas, fica mais fácil entender a matéria.

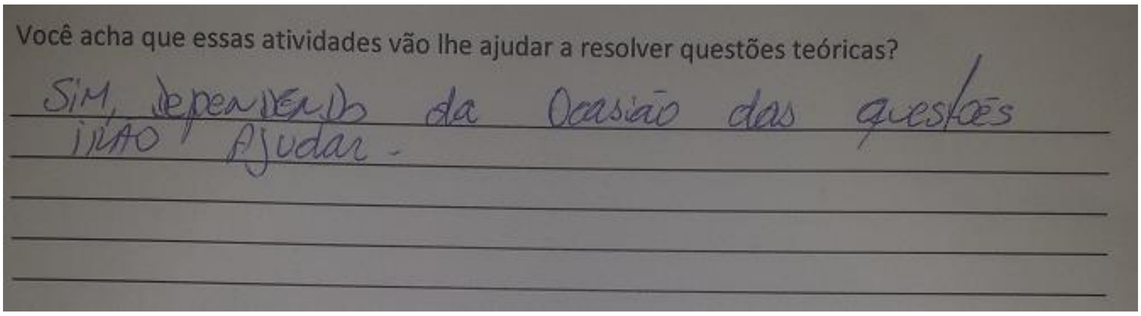
Figura 22: Aluno Q

Questionário para os alunos da turma C


O que você achou desta atividade?

Eu como aluno fiquei muito sastifeito com o aprendizado, porém a cobrança de montar o poliedro se torna uma atividade divertida com bases nos estudos.

Figura 23: Aluno Z


Você acha que essas atividades vão lhe ajudar a resolver questões teóricas?

Sim, dependendo da Ocasião das questões irão Ajudar.

Figura 24: Aluno Z

4.3.2 Nível 2 – Análise

Neste nível começa o reconhecimento das propriedades geométricas de cada figura, podendo analisar e reconhecer os elementos matemáticos e as propriedades de cada uma individualmente. Existe a capacidade de generalização das propriedades. Não há relação de uma figura com outra. A demonstração de uma propriedade se mostra a partir de um ou alguns casos.

<u>Fase 1: Informação</u>

Apresentei para a turma todos os poliedros de Platão, explicando as propriedades sem rigor matemático. Perguntei os números de vértices, arestas e faces dos poliedros, para que os grupos analisassem suas quantidades. Cada grupo recebeu:

- Um poliedro formado por canudos, que tinham apenas a estrutura formada pelas arestas, receberam um dodecaedro, um hexaedro e um tetraedro.

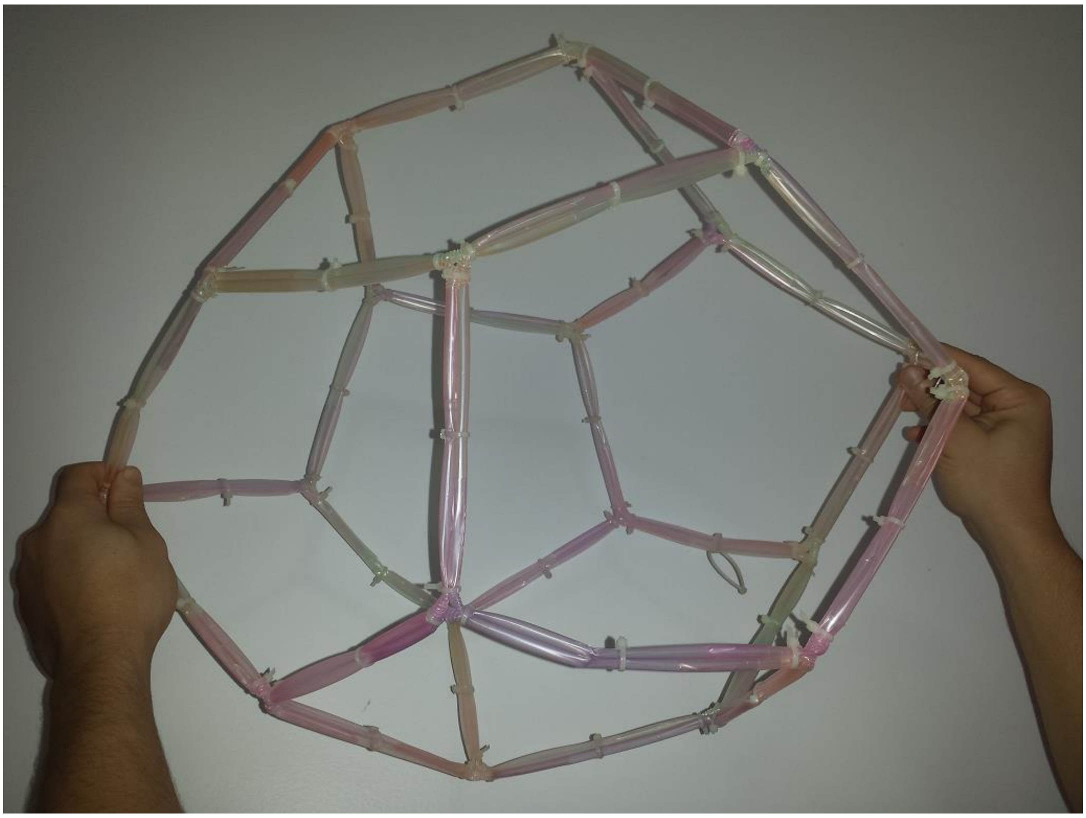


Figura 25: Dodecaedro

- 4 tabelas, uma para cada poliedro.

Uma das constatações mais interessantes é que com essa atividade os alunos entenderam a fórmula $\boldsymbol{2A = 3F_3 + 4F_4 + ... + nF_n}$ *com mais facilidade que na metodologia tradicional, pois puderam visualizar que quando juntamos dois polígonos, a união dos dois lados forma uma aresta, que é, portanto, representada por "2A" na fórmula.*

Fase 2: Orientação dirigida

Nesta atividade, substituímos a massa de modelar por bolinhas de isopor, que permitiu a construção de uma estrutura mais estável para os poliedros.

Com minha orientação, os grupos tentaram construir um poliedro com apenas bolinhas de isopor para os vértices, palito para as arestas, e papel cartão para as faces. Solicitei que construíssem um tetraedro e um hexaedro com essa estrutura.

Com a construção dos poliedros, os alunos tiveram a visualização do teorema de Euler através do material concreto e puderam comparar as bolinhas de isopor, os palitinhos e as faces de papel cartão com a fórmula, percebendo o seu sentido.

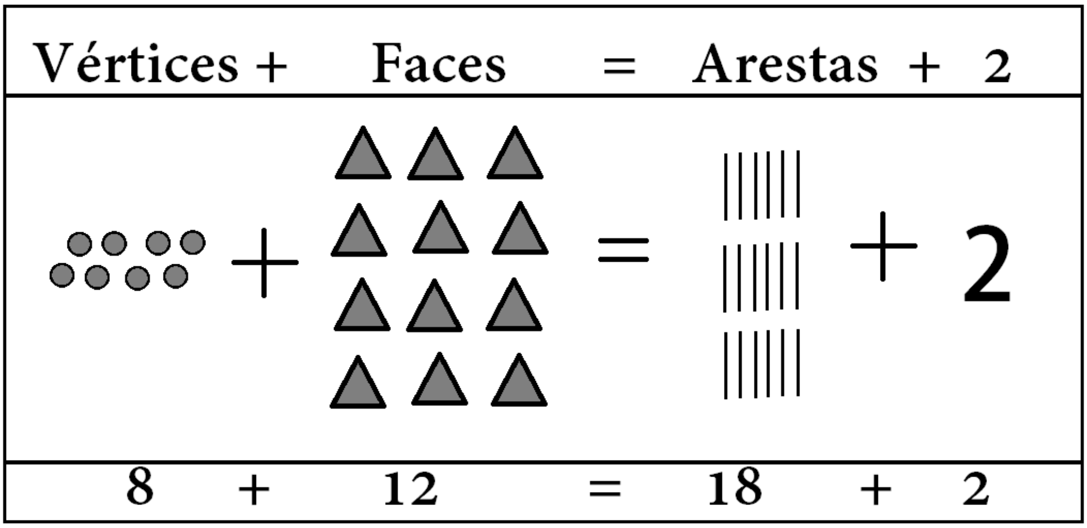


Figura 26: Teorema de Euler

Fase 3: Explicitação

O aluno escolhido por cada grupo mostrou o resultado obtido na realização das atividades, sob minha observação. *Nesta fase houve expressiva interação entre os grupos, que explicitaram o que entenderam e também suas maiores dúvidas.*

Fase 4: Orientação Livre

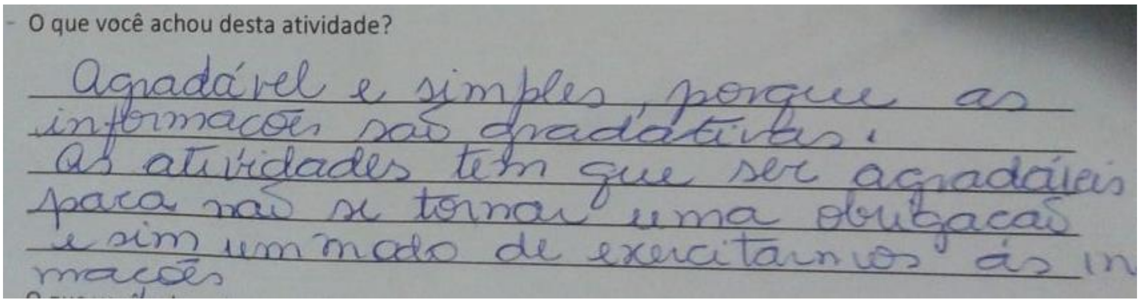
Cada grupo recebeu uma tabela, e completou com o número de vértices, arestas e faces de cada um dos poliedros de Platão.

Nessa atividade os alunos tiveram que procurar o próprio caminho para encontrar sua resolução. Alguns usaram as fórmulas, outros desenharam, no entanto todos tentaram resolver da melhor maneira possível. Quando completaram a atividade, demonstrei todos os caminhos possíveis para que conhecessem as opções.

Fase 5: Integração

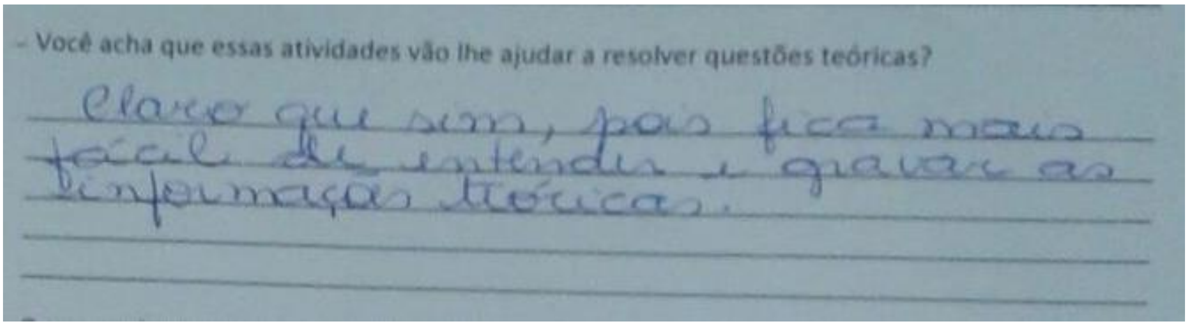
Foi o momento de conclusão, onde não abordei novos conteúdos e sim formalizei àqueles abordados anteriormente. O grupo apresentou sua síntese.

Questionário para os alunos da turma B


- O que você achou desta atividade?

Agradável e simples, porque as informações são gradativas. As atividades têm que ser agradáveis para não se tornar uma obrigação e sim um modo de exercitarmos ás informações

Figura 27: Aluno Q


- Você acha que essas atividades vão lhe ajudar a resolver questões teóricas?

Claro que sim, pois fica mais fácil de entender e gravar as informações teóricas.

Figura 28: Aluno Q

4.3.3 Nível 3 - Dedução Informal

Neste nível mesmo que utilizando a linguagem informal, o aluno consegue estabelecer inter-relações usando a própria figura ou entre figuras, deduzindo propriedades ou fazendo grupo de figuras, já existindo a definição correta dos conceitos e propriedades das figuras.

Já conseguem repetir demonstrações realizadas pelo professor, como, por exemplo, distinguir os poliedros por seu tipo de face, um octaedro e um tetraedro têm faces triangulares e um dodecaedro faces pentagonais.

<u>Fase 1: Informação</u>

Nesta fase não utilizei o material concreto em sala de aula e abordei o conteúdo de Poliedros com maior rigor matemático, desenvolvendo e provando algumas propriedades.

Fase 2: Orientação Dirigida

Nesta fase procurei facilitar o percurso dos alunos a fim de tornar a atividade menos cansativa. Desse modo apliquei algumas questões teóricas e esclareci dúvidas, quando solicitado.

Fase 3: Explicitação

Nesta fase, o representante de cada grupo falou para a turma sobre o que aprendeu nesse nível e informou a dificuldade que teve nas aplicações sem o material concreto. Defini a ordem de apresentação dos grupos e observei o que entenderam sobre o assunto.

Com a troca de experiência dos alunos, foram esclarecidas algumas dúvidas da turma, pois muitas eram comuns ao grupo.

Fase 4: Orientação Livre

Cada grupo recebeu 3 questões teóricas para resolverem sem o auxílio de material concreto. Entreguei aleatoriamente algumas das questões abaixo:

1) Determinar o número de arestas e o número de vértices de um poliedro convexo com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares.

2) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

3) Quantas faces, arestas e vértices possuem o poliedro chamado de Hexaedro?

4) Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

5) Um poliedro convexo tem 16 faces. De um dos seus vértices partem 5 arestas; de 5 outros vértices partem 4 arestas e, de cada um dos vértices restantes, partem 3 arestas. Qual o número total de arestas desse poliedro?

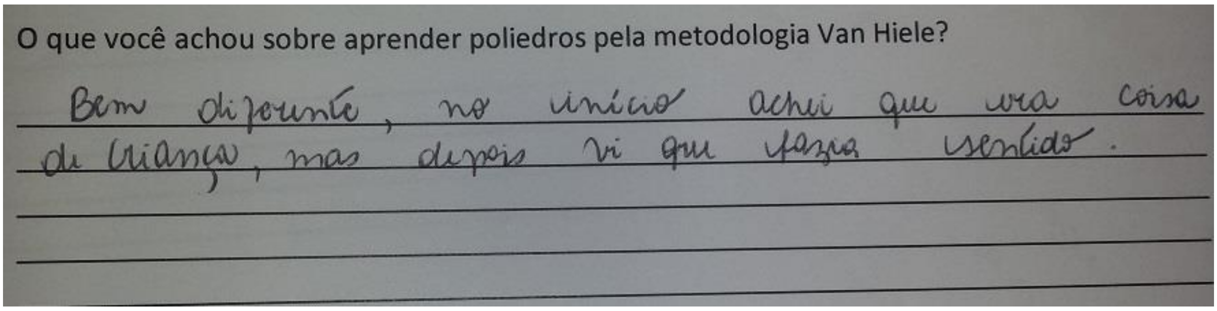
6) Qual o número de vértices de um poliedro convexo de 10 faces quadrangulares?

Após o tempo determinado para solução dos problemas, resolvi as questões no quadro, para que os alunos vissem as possibilidades de desenvolvimento.

Fase 5: Integração

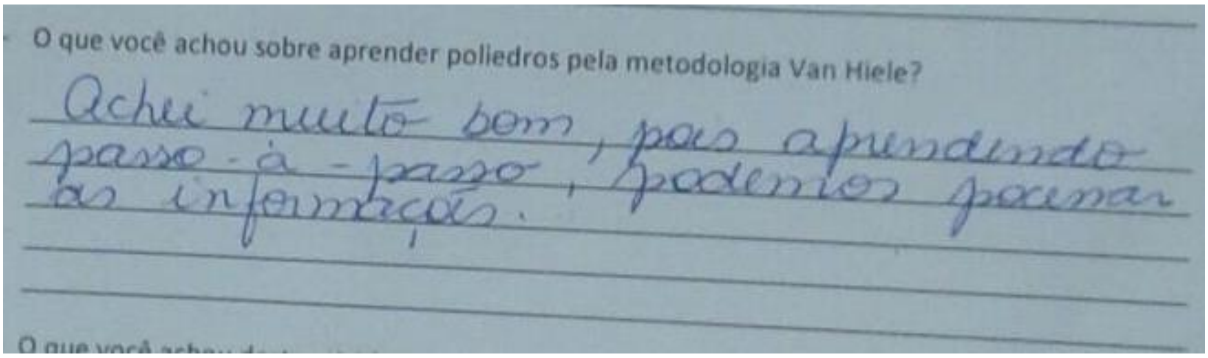
Foi o momento de conclusão, sem abordagem de novos conteúdos, com a formalização e organização dos conteúdos abordados anteriormente. Cada grupo fez sua síntese das atividades.

Questionário para os alunos da turma B


O que você achou sobre aprender poliedros pela metodologia Van Hiele?

Bem diferente, no início achei que era coisa de criança, mas depois vi que fazia sentido.

Figura 29: Aluno Y


O que você achou sobre aprender poliedros pela metodologia Van Hiele?

Achei muito bom, pois aprendendo passo-à-passo, podemos passar as informações.

Figura 30: Aluno Q

Questionário para os alunos da turma C

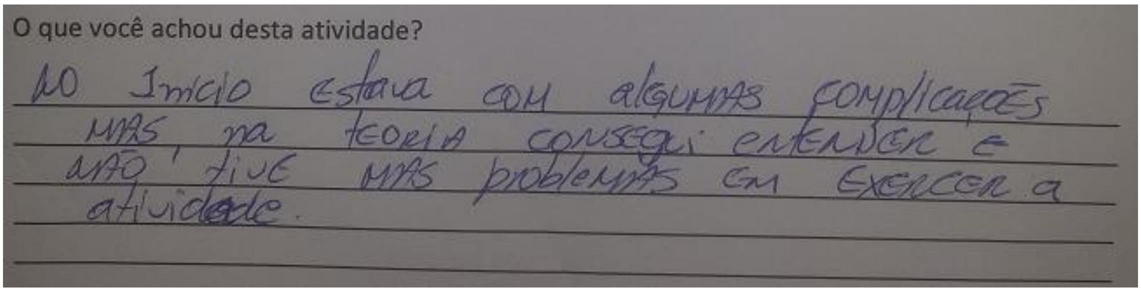

O que você achou desta atividade?
No Inicio estava com algumas complicações mas, na teoria consegui entender e não tive mas problemas em exercer a atividade.

Figura 31: Aluno Z

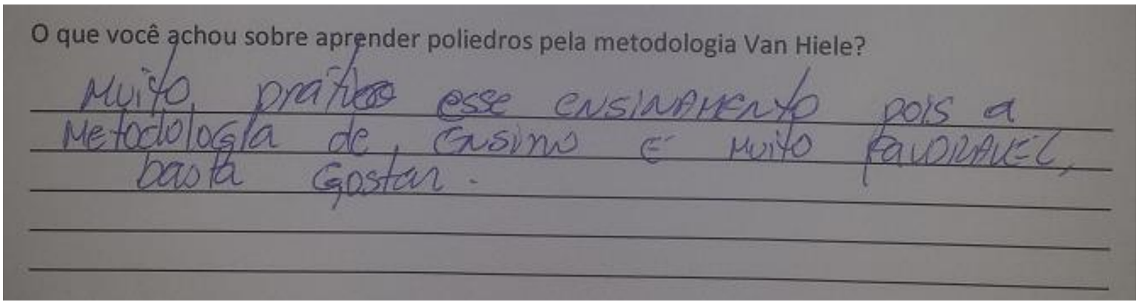

O que você achou sobre aprender poliedros pela metodologia Van Hiele?
Muito prático esse ensinamento pois a Metodologia de ensino é muito favorável, basta Gostar.

Figura 32: Aluno Z

4.4 APLICAÇÃO DE TESTE FINAL

O teste final englobou os conteúdos de geometria plana e de poliedros e tinha a finalidade de esclarecer quanto o aluno melhorou o seu conhecimento de geometria plana e quanto aprendeu de geometria espacial.

5 DESCRIÇÃO DE DADOS

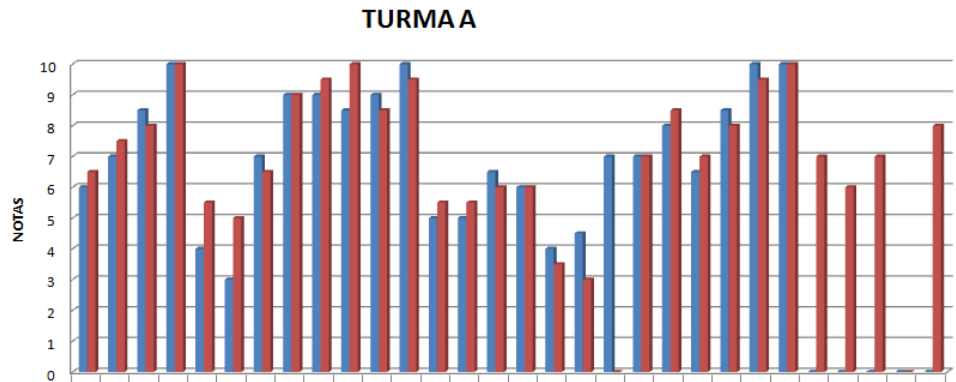
5.1 NOTAS DOS TESTES

Apresentamos as notas dos testes iniciais e dos testes finais de cada turma, em cujo gráfico pode ser observado o desenvolvimento dos alunos de cada turma.

5.1.1 Turma A

A turma A, na qual foi aplicada a metodologia tradicional, teve uma boa média das notas, tanto no teste inicial quanto no teste final, os alunos já tinham visto geometria plana anteriormente e compreenderam com facilidade a geometria espacial.

As notas estão apresentadas no gráfico abaixo:



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
TURMA A TESTE INICIAL	6	7	8,5	10	4	3	7	9	9	8,5	9	10	5	5	6,5	6	4	4,5	7	7	8	6,5	8,5	10	10	0	0	0	0	0
TURMA A TESTE FINAL	6,5	7,5	8	10	5,5	5	6,5	9	9,5	10	8,5	9,5	5,5	5,5	6	6	3,5	3	0	7	8,5	7	8	9,5	10	7	6	7	0	8

Figura 33: Notas da Turma A

5.1.2 Turma B

A turma B, na qual foi aplicada a metodologia Van Hiele, teve uma boa média das notas, tanto no teste inicial quanto no teste final, mesmo tendo apresentado resistência para começar as atividades com o material concreto. Estão apresentadas as notas no gráfico a seguir:

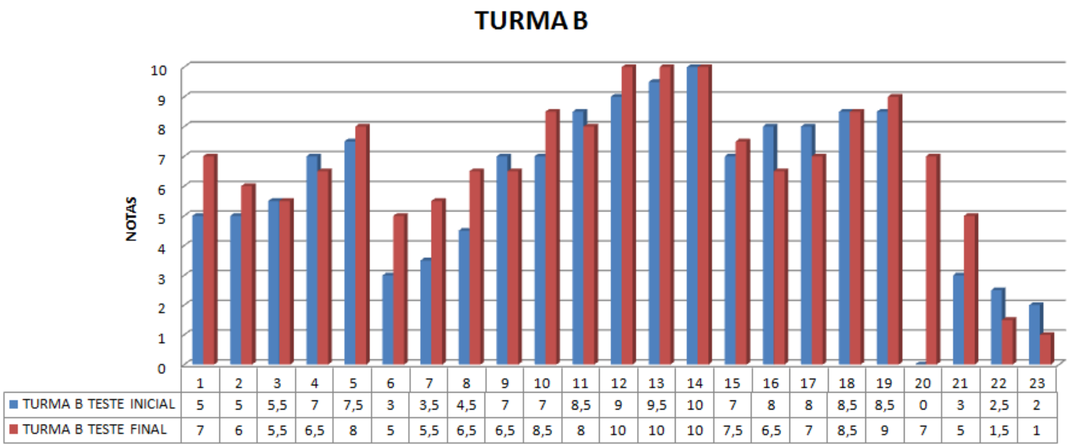


Figura 34: Notas da Turma B

5.1.3 Turma C

A turma C, na qual foi utilizada a metodologia Van Hiele, teve um aumento de notas muito significativo. Essa turma tinha pouco contato com a geometria plana, por isso as notas do pré-teste foram muito baixas, porém o grupo, como um todo, teve grande aceitação da metodologia aplicada a eles.

Logo, quando foi aplicado o teste final, as notas foram muito mais altas que as do teste inicial, pois conseguiram compreender com mais facilidade a geometria espacial sem depender da geometria plana, as atividades com material concreto possibilitaram uma melhor visualização e compreensão.

Quando foram apresentadas as atividades, os alunos avaliaram como infantis, mas logo viram que aprendiam de verdade utilizando-a.

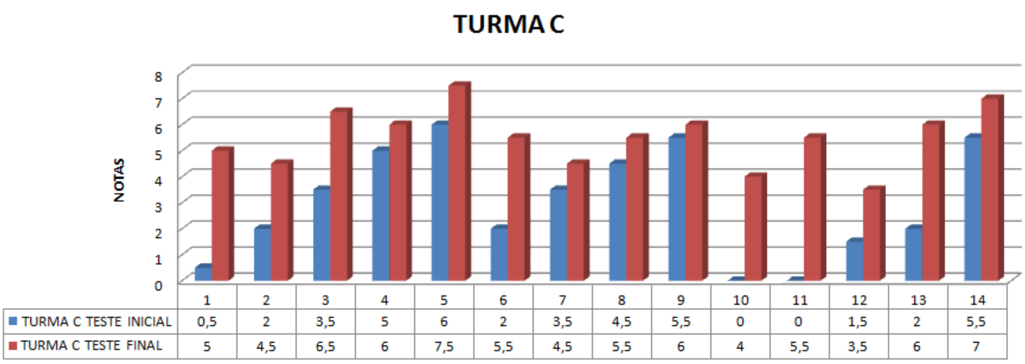


Figura 35: Notas da Turma C

5.2 OBSERVAÇÕES

As turmas A e B eram de colégios particulares, a turma A já era composta por alunos antigos do colégio, e na turma B, havia apenas alguns alunos novos, alguns vindos de colégio público e outros de particular, mas, em sua maioria, de colégio particular.

A turma C nunca tinha tido contato com geometria plana, alguns alunos ficaram sem estudar por anos, tendo muita dificuldade no aprendizado, porém, com a utilização de material concreto, os alunos conseguiram entender muito bem a matéria sem o domínio de geometria plana.

5.3 MÉDIA DAS TURMAS

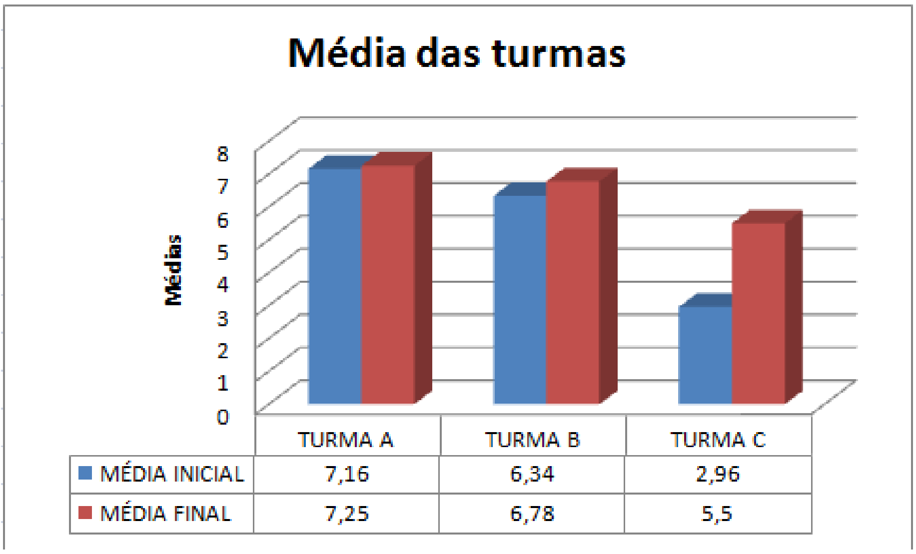


Figura 36: Média das turmas

A diferença entre a nota inicial e a nota final da turma C foi muito expressivo porque inicialmente os alunos praticamente ignoravam a geometria plana, mas, após as aulas, absorveram bastante conteúdo sobre geometria espacial, apresentando um resultado avaliativo final considerado razoável no teste final, mesmo essa nota não sendo tão alta quanto nas turmas A e B.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 CONCLUSÕES FINAIS SOBRE A METODOLOGIA DO MODELO DE VAN HIELE

A tabela abaixo apresenta resumidamente os aspectos positivos e negativos apresentados pela metodologia do modelo de Van Hiele.

ASPECTOS POSITIVOS	ASPECTOS NEGATIVOS
• Depois de iniciada as atividades, os alunos participam bastante, mostrando grande interesse quando trabalhando com sólidos geométricos. • A construção de poliedros fez com que os alunos entendessem melhor as fórmulas. • Alguns alunos que não mostram interesse em aulas tradicionais se interessaram bastante pela aula com materiais concretos.	• Os colégios não fornecem material necessário para as atividades. • As turmas têm dificuldade em iniciar as atividades. • Leva-se muito mais tempo para se preparar a aula.

Figura 37: Aspectos positivos e Negativos da Metodologia Van Hiele

6.2 OPINIÃO DO PROFESSOR

A escolha da metodologia a ser aplicada em sala de aula tem que ser muito bem pesquisada, pois dependendo do perfil da turma, o professor não terá problemas em fazer atividades com material concreto, mas se fizer a escolha errada terá muita dificuldade em trabalhar com a turma.

A metodologia Van Hiele se aplica muito bem quando a turma não teve muito contato com geometria plana, pois aprende “brincando” todas as características das figuras.

Sobretudo quando o aluno já tem esse conhecimento adquirido, apresenta preconceito no início das atividades, oferecendo grande resistência, pois considera que está perdendo tempo ou até mesmo fazendo uma “brincadeira de criança”.

Quanto menor a turma, melhor para aplicar a Metodologia Van Hiele, pois como se precisa dar atenção maior para os alunos, um professor sozinho sem assistente terá dificuldade com turma grande.

Em suma, todas as metodologias são boas, mas se o professor avaliar o perfil da turma antes de começar as atividades, as aulas terão um rendimento muito maior, pois trabalhará o conteúdo a ser abordado da melhor forma possível.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LIMA, Elon; CARVALO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. *A matemática do ensino médio*. v.2. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

COÊLHO, Saul Mark Lima. *O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas usando material concreto.* Disponível em: <http://www.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/eventos/evento2004/GT14/GT9.PDF>.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. Vendo e entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. Niterói: UFF, 2003. 209 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica (2013). *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília, DF: Diretoria de Currículos e Educação Integral, 2013 – MEC/ SEB/ DICEI.

PAIVA, M. (2010). *Matemática 2 Paiva.* São Paulo: Moderna.

NASSER, L. (1997). *Geometria segundo a Teoria de Van Hiele.* Rio de Janeiro: IM / UFRJ.

http://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/elon/rpm3.pdf

http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_AndreaCosta.pdf

ALVES, George de Souza; SAMPAIO, Fábio Ferrentini. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. Separata de: Revista de Sistemas de Informação, Macaé: FSMA.

LIMA, Elon Lages. Matemática e ensino. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 3. ed.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. Novas tecnologias no ensino da matemática: tópicos em ensino de geometria. Rio de Janeiro: UAB, 2008. 223 p

LIMA, Elon Lages. Meu professor de matemática e outras histórias. Coleção Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 6. ed. 241p.

http://www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Luciana%20Silva.pdf

http://www.mat.ufmg.br/~espec/monografiasPdf/Monografia_Rosangela.pdf

LOPES, Maria Laura M. Leite. Sobre o ensino da Geometria. Boletim GEPEM nº 15, p. 5- 15, junho/1983. LOPES, Maria Laura M. Leite e NASSER, Lilian. Geometria na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: Projeto Fundão IM/UFRJ, 1996

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, 1997.

ADELA JAIME, *Aportaciones a la Interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele*, Universidade de Valência, 1993, Tese de Doutorado sob a orientação de Angel Gutierrez.

P.M. VAN HIELE, *El problema de la comprensión*, Universidade de Valencia, 1990, Versão em espanhol do original *De Problematiek van het inzcht, 1957,* realizada pelo projeto *Diseño y evaluación de uma propuesta curricular de aprendizaje de la geometria em Enseñanza Media basada em el modelo de razonamiento de Van Hiele* sob a orientação de Angel Gutiérrez.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar, 10*. 5ª Edição. São Paulo: Editora Atual, 1993.

8 Anexos

8.1 Teste inicial

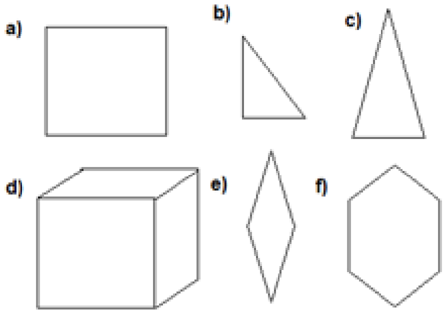
PROFMAT **TESTE INICAL** SBM

NOME: ____ TURMA:__________

DATA:___ / ___ /___ SEXO:___________ IDADE:____ ESCOLA:________________

Questão 01

Quais das figuras abaixo são quadriláteros?



Questão 02

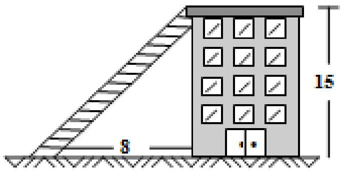
Quantos lados tem um:

a) Triângulo:
b) Quadrilátero:
c) Pentágono:
d) Hexágono:
e) Heptágono:

Questão 03

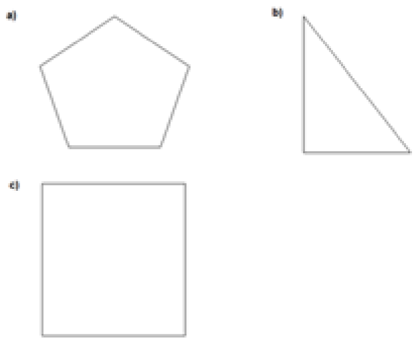
A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:

a) 12 m.
b) 30 m.
c) 15 m.
d) 17 m.
e) 20 m.



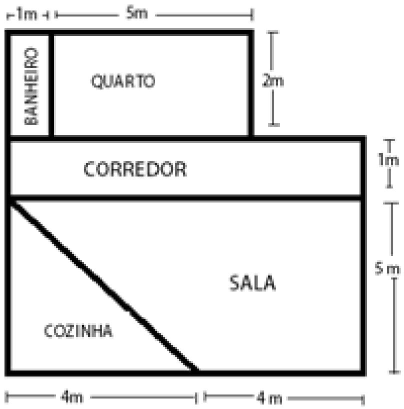
Questão 04

Quantas diagonais e quantos vértices têm as figuras abaixo?



Questão 05

Calcule a área da planta da casa abaixo:



8.2 Teste final

PROFMAT

TESTE FINAL

SBM

NOME: ____ TURMA:__________

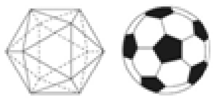
DATA:___ / ___ /___ SEXO:___________ IDADE:____ ESCOLA:________________

Questão 01

Um poliedro convexo tem 3 faces pentagonais e algumas faces triangulares. Qual o número de faces desse poliedro, sabendo que o número de arestas é o quádruplo do número de faces triangulares.

Questão 02

Arquimedes descobriu um poliedro convexo formado por 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, todas regulares. Esse poliedro inspirou a fabricação da bola de futebol que apareceu pela primeira vez na Copa do Mundo de 1970. Quantos vértices possui esse poliedro?



Questão 03

Determine o número de vértices, arestas, faces e a soma dos ângulos das faces dos poliedros convexo que possuem:

a) 6 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

b) 5 faces pentagonais 3 faces triangulares.

Questão 04

Quantas arestas tem um icosaedro?

Questão 05

Unindo-se o centro de cada face de um cubo, por segmentos de reta, aos centros das faces adjacentes, obtêm-se as arestas de um poliedro regular. Quantas faces tem esse poliedro?

Questão 6

A soma S das áreas das faces de um tetraedro regular em função de sua aresta é:

a) a^2.
b) $\sqrt{3}\,a^2$.
c) $4\,a^2$.
d) $\sqrt{5}\,a^2$.
e) $\sqrt{2}\,a^2$.

1.3 Fotos das turmas

Todas as fotos foram tiradas nas atividades feitas em sala de aula.

Foto 1 – Turma C: Atividade aplicada na fase 1 do nível 1 da metodologia Van Hiele.

Foto 2 – Turma C: Atividade aplicada na fase 1 do nível 1 da metodologia Van Hiele.

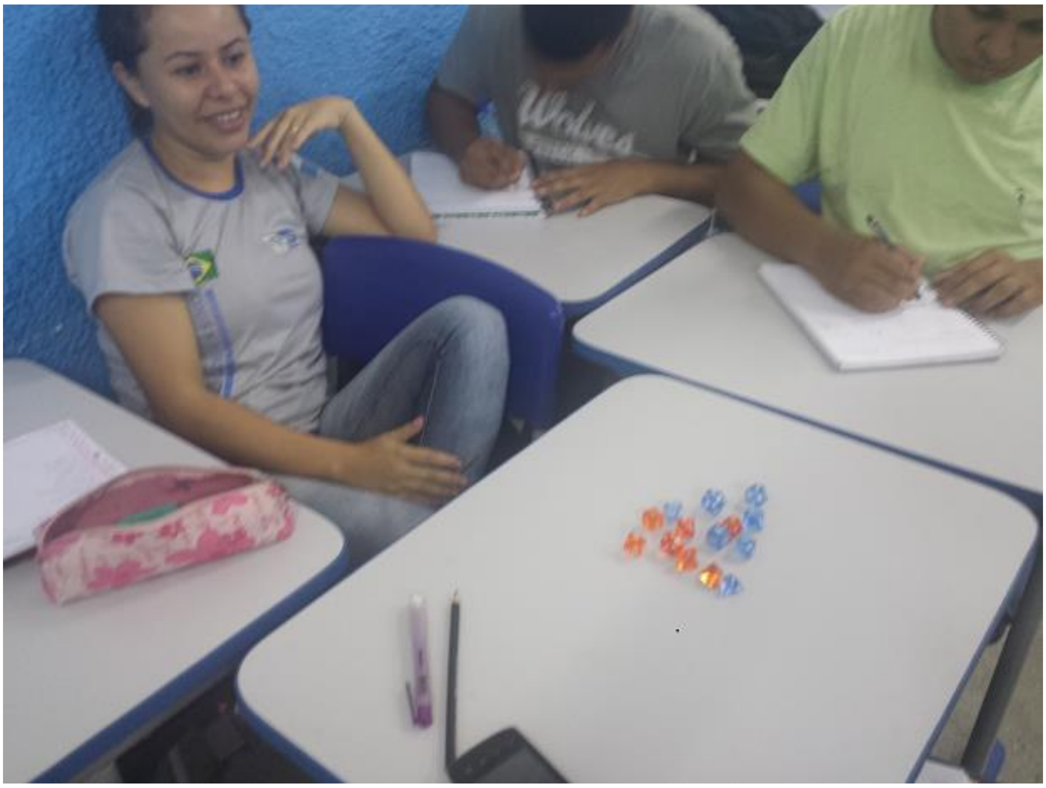


Foto 3 – Turma C: Atividade aplicada na fase 1 do nível 1 da metodologia Van Hiele.

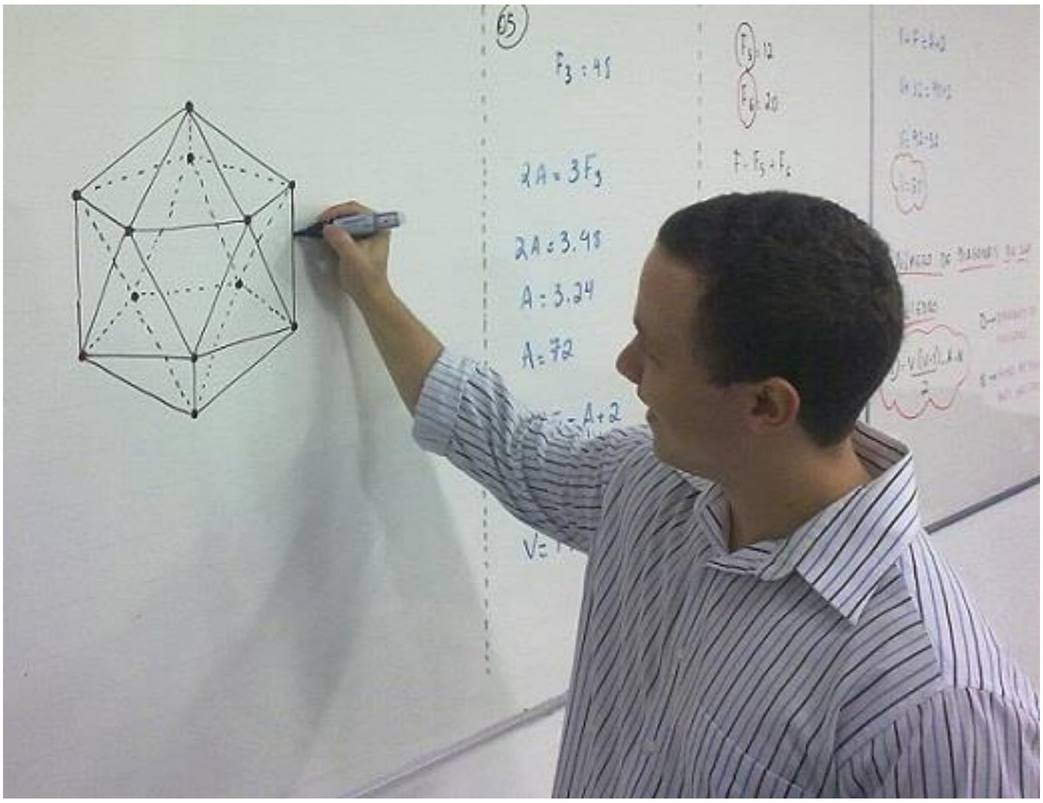


Foto 4 – Turma A: Parte teórica da metodologia tradicional.

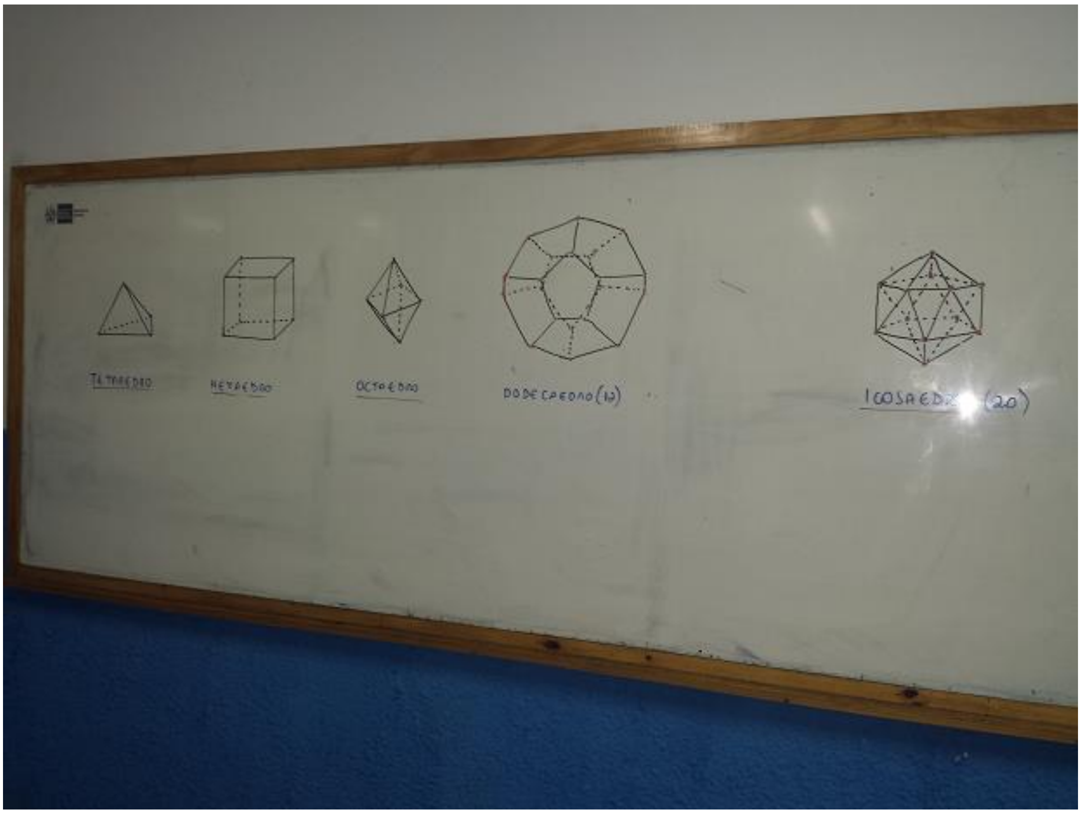


Foto 5 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 1 do Nível 2 da Metodologia Van Hiele.

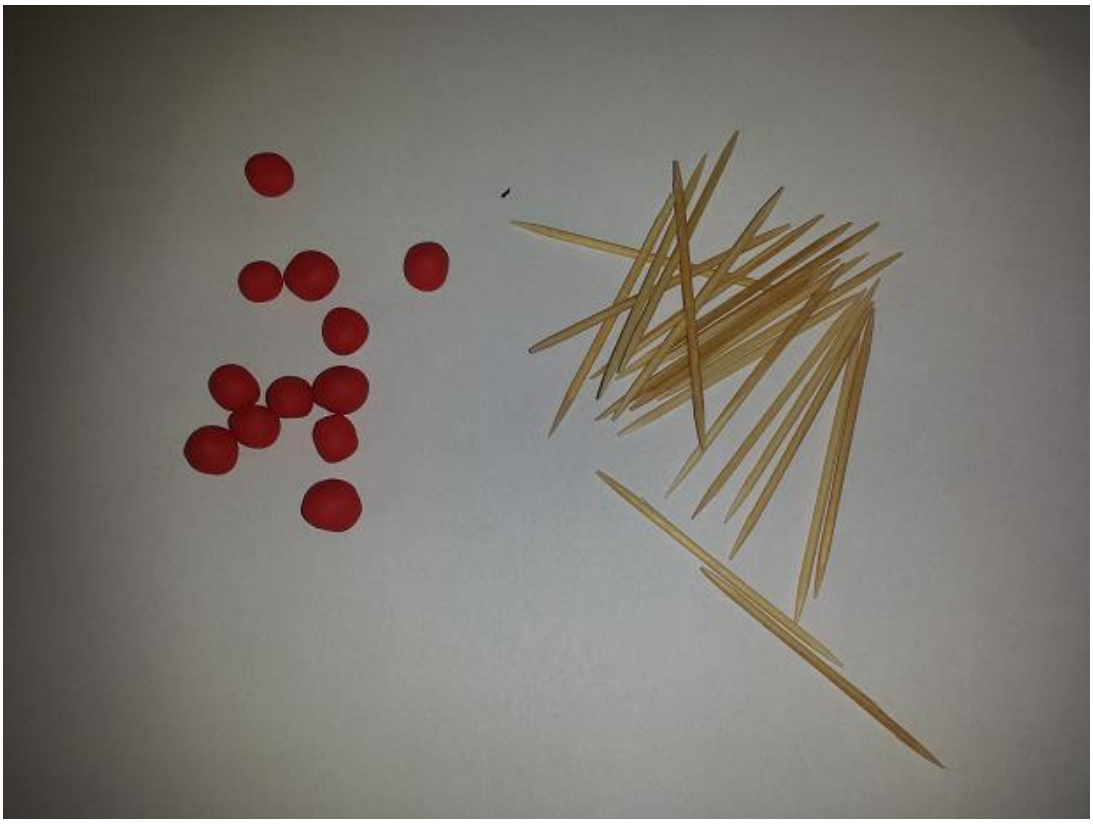


Foto 6 – Turma B: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

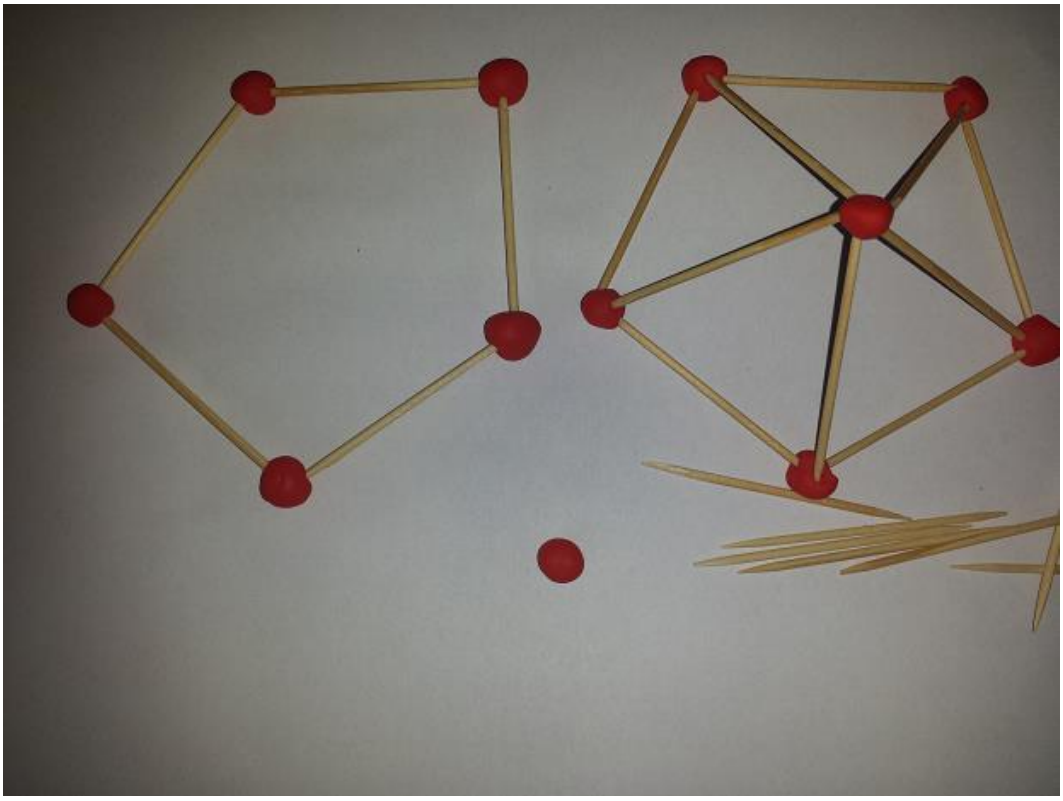


Foto 7 – Turma B: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

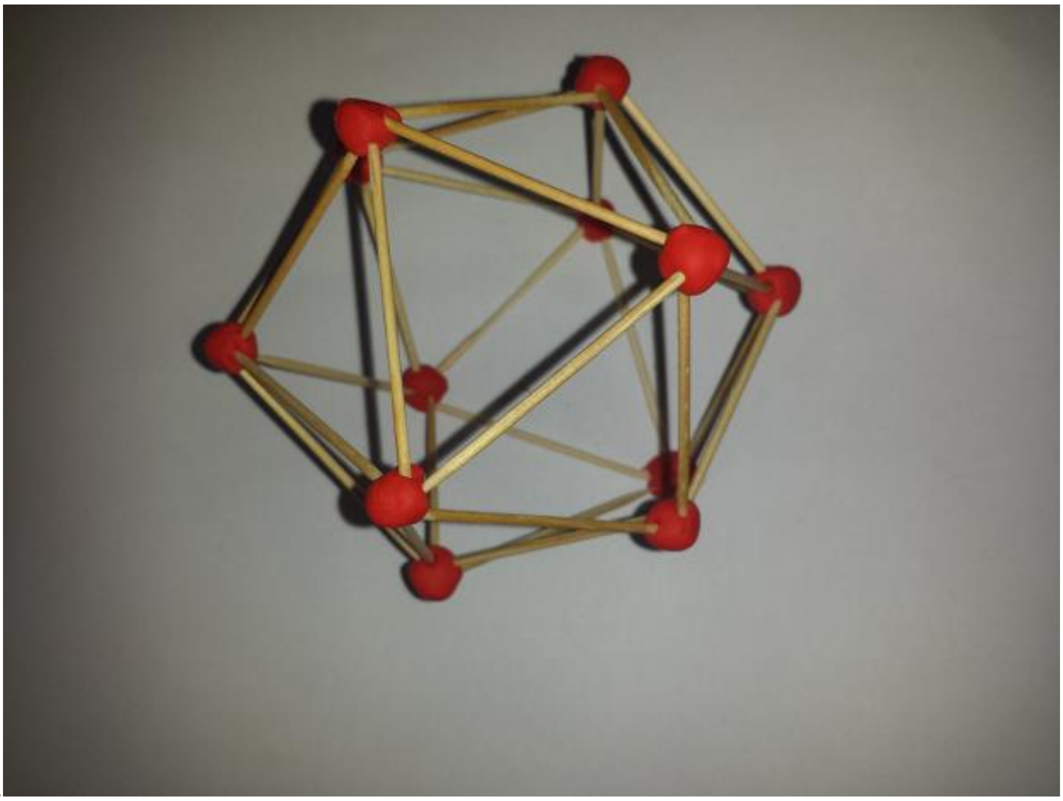


Foto 8 – Turma B: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

Hiele.

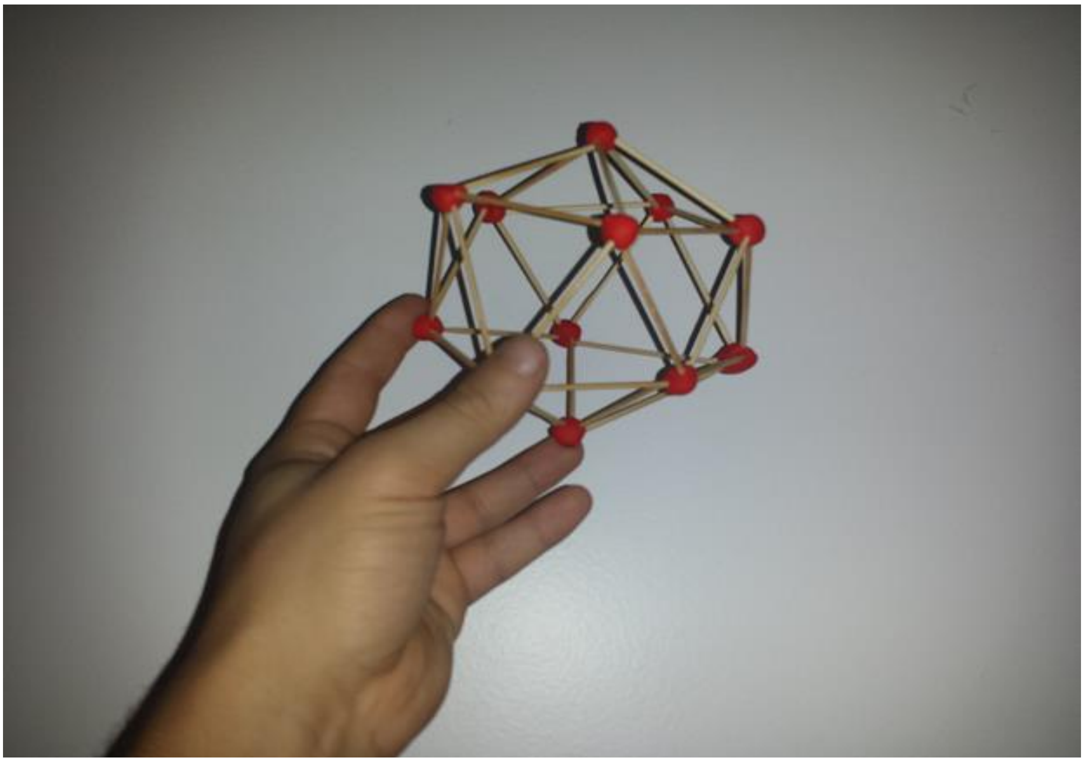


Foto 9– Turma B: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

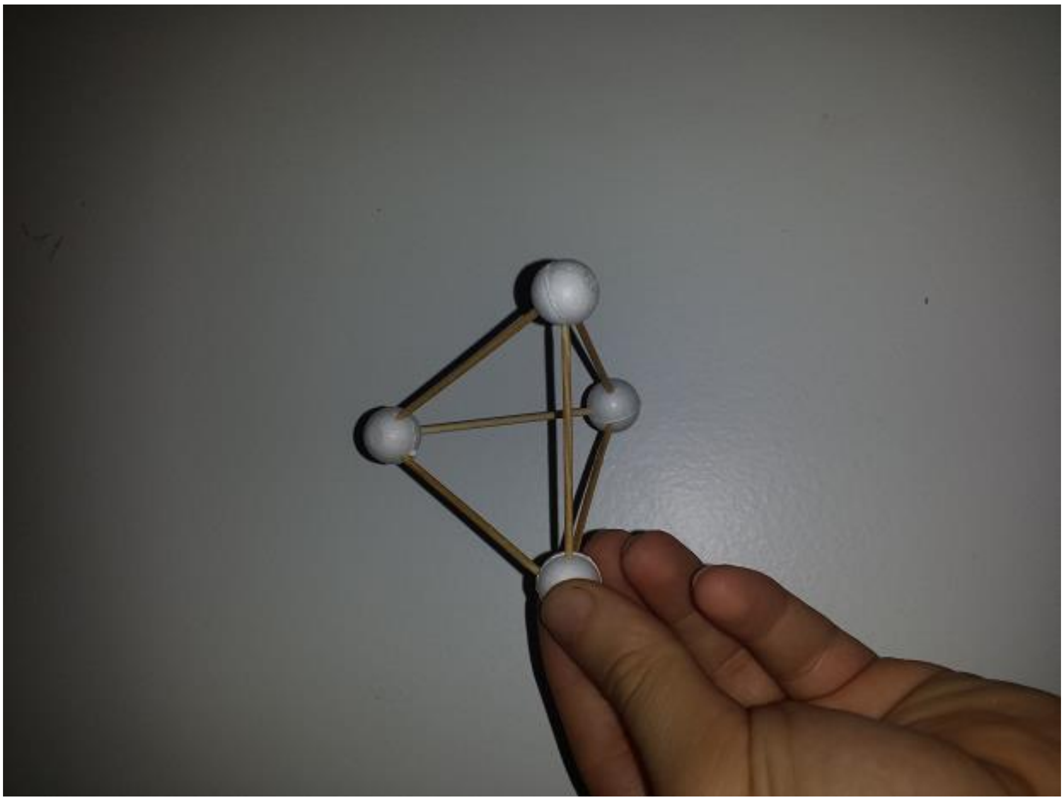


Foto 10 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 2 da Metodologia Van Hiele.

Foto 11 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

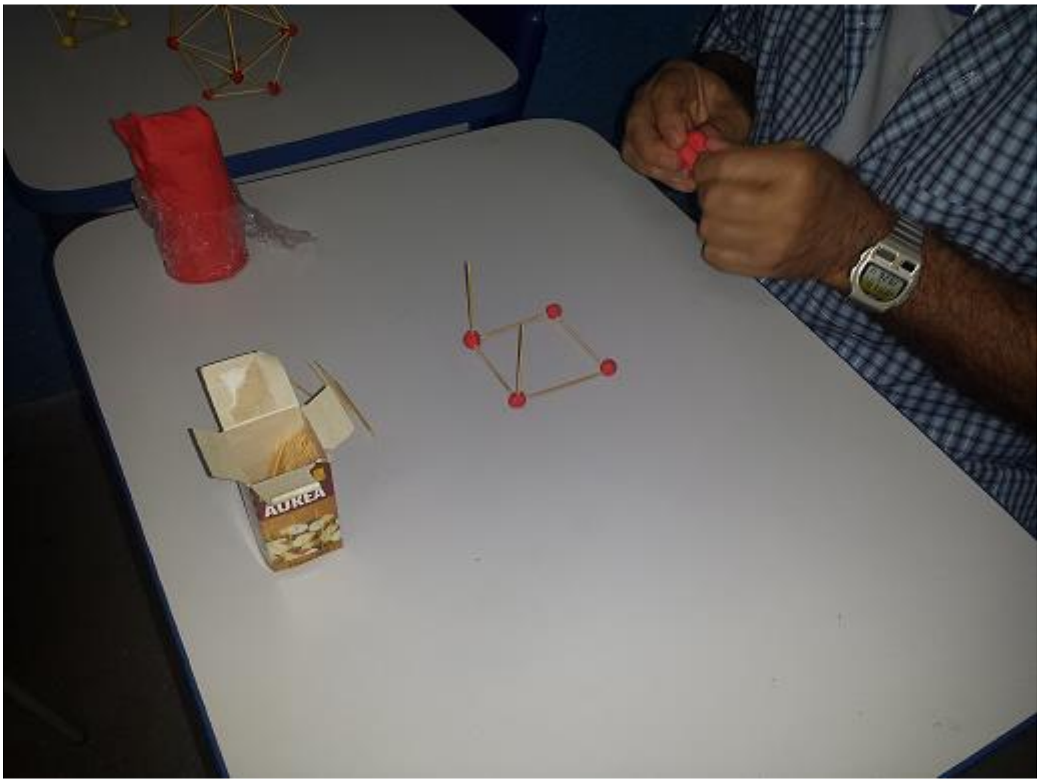


Foto 12 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

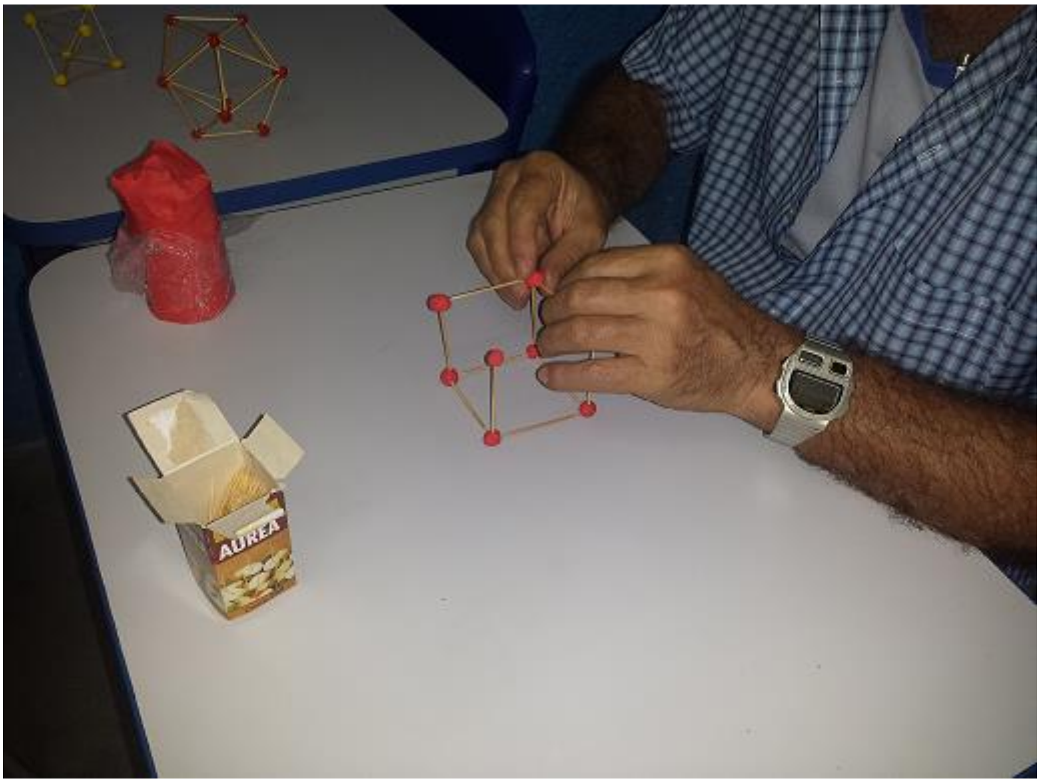


Foto 13 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

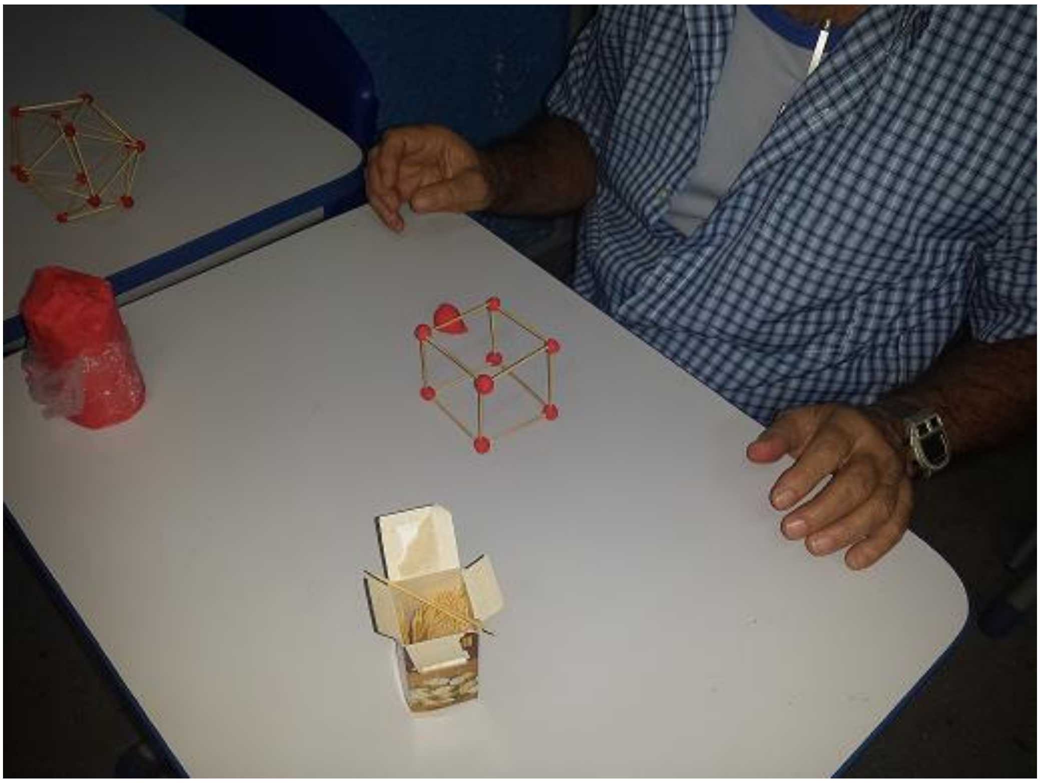


Foto 14 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

Foto 15 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

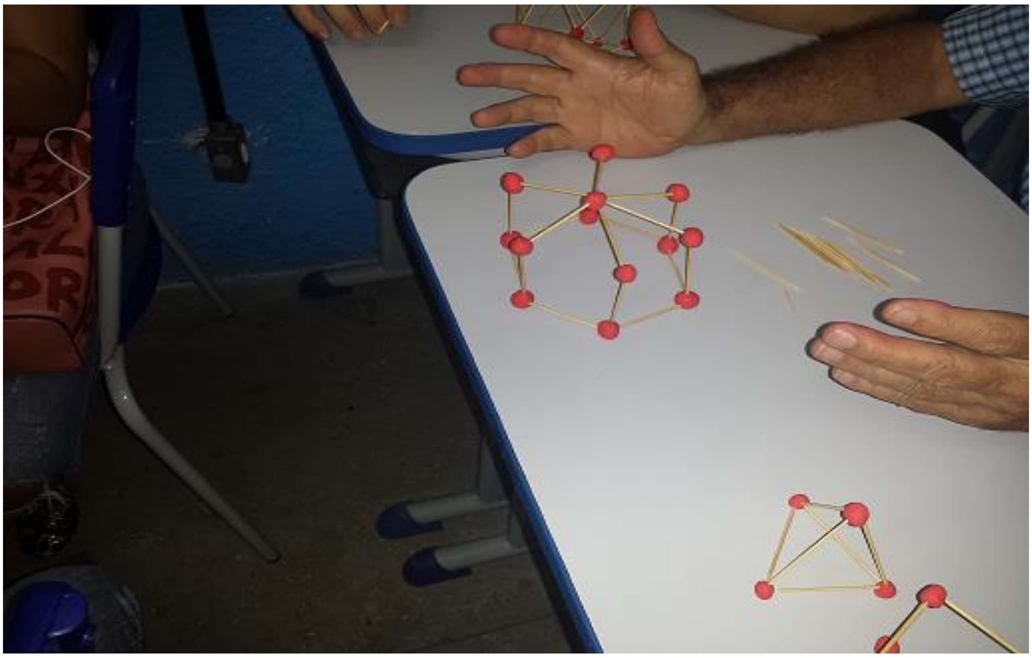


Foto 16 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

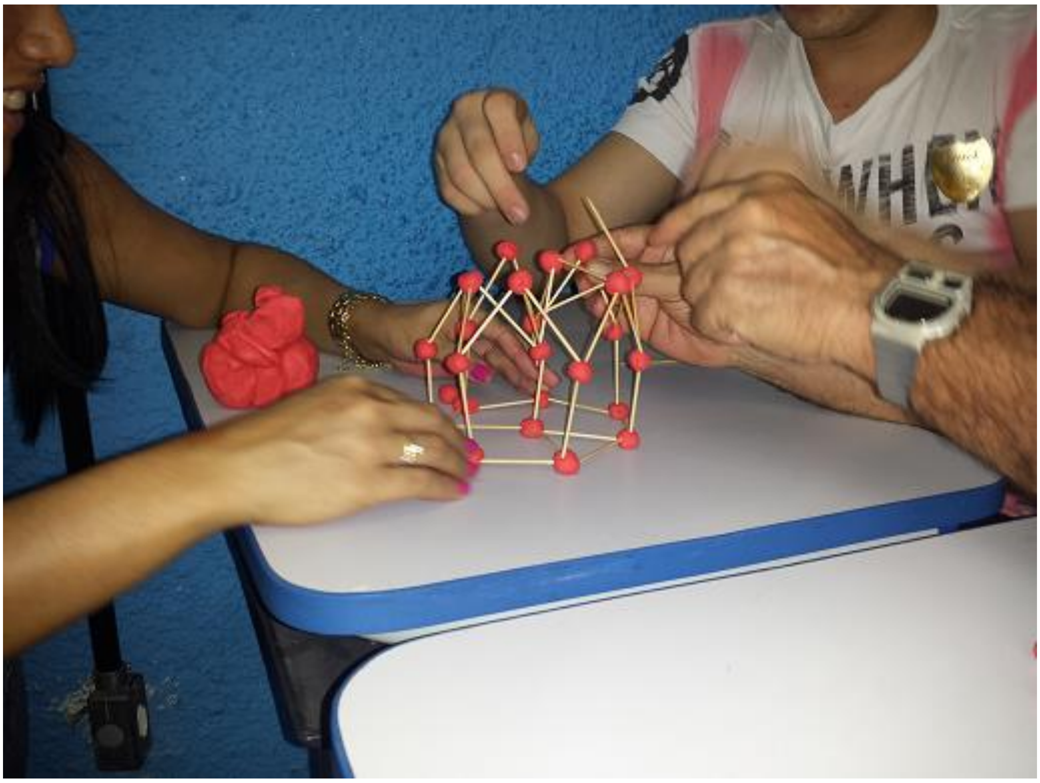


Foto 17 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

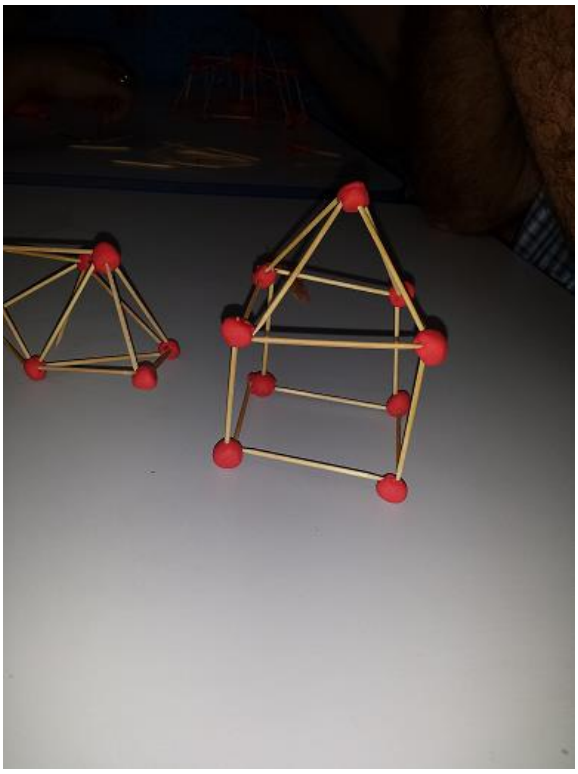


Foto 18 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

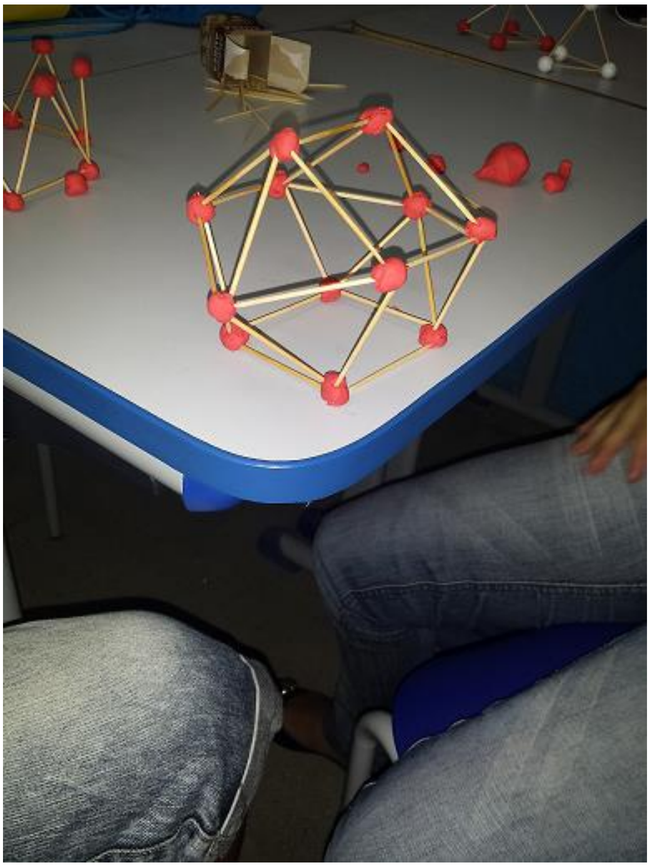


Foto 19 - Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

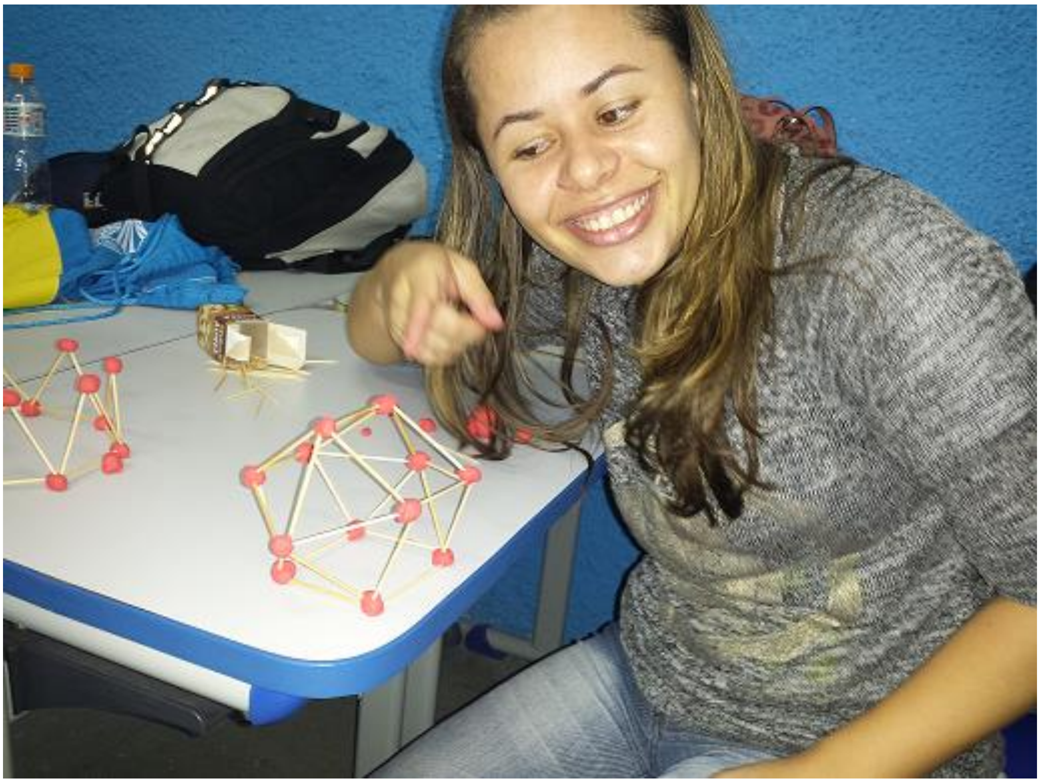


Foto 20 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

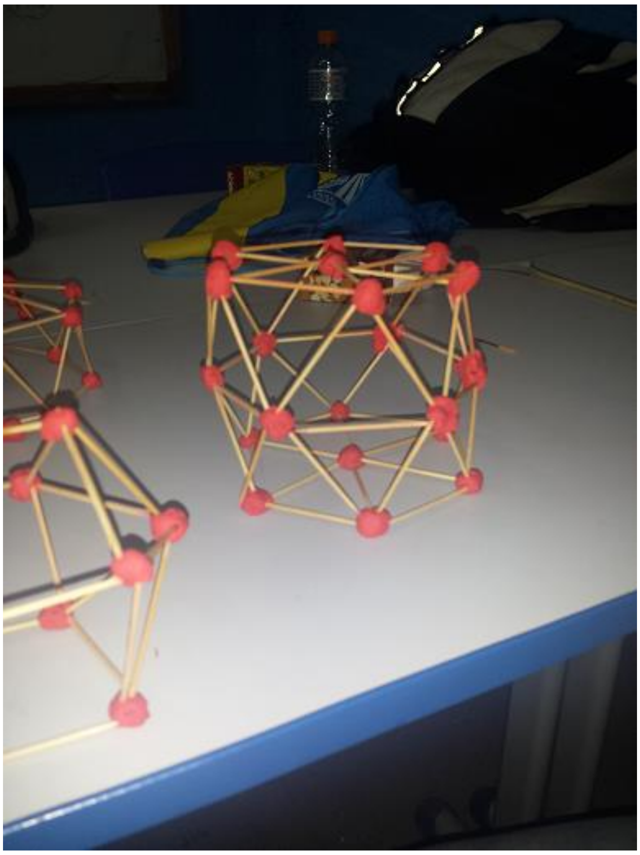


Foto 21 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.

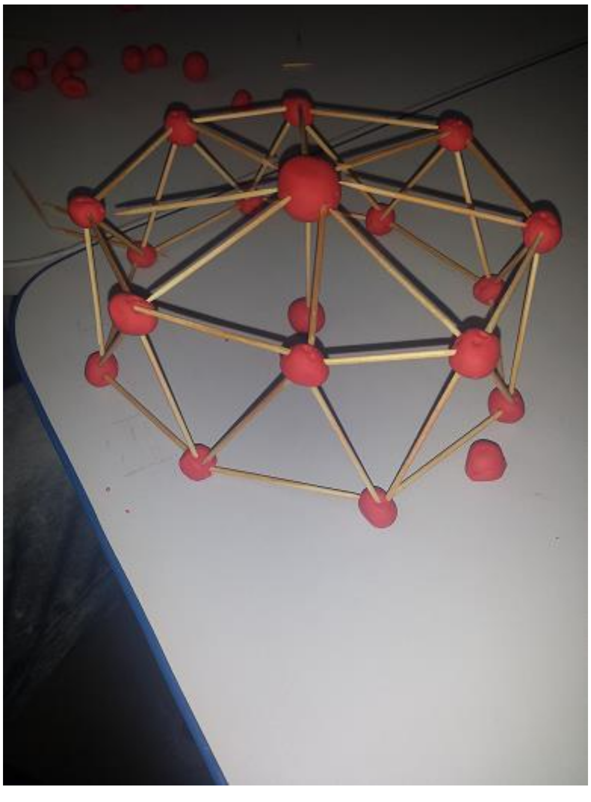


Foto 22 – Turma C: Atividade aplicada na Fase 2 do Nível 1 da Metodologia Van Hiele.