



INAOE

INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA, OPTICA Y ELECTRÓNICA.

Análisis y generación de anillos de Montgomery discretos con polarización inhomogénea.

Por

Lic. Sergio Reyes Barragán

Tesis sometida como requisito parcial para
obtener el grado de **Maestro en Ciencias en la
especialidad de Óptica** en el Instituto Nacional
de Astrofísica, Óptica y Electrónica.

Enero 2020, Santa María Tonantzintla, Puebla.

Supervisada por el: Dr. Ulises Ruiz Corona

©INAOE 2020

Derechos Reservados

El autor otorga al INAOE el permiso de
reproducir y distribuir copias de esta tesis en su
totalidad o en partes mencionando la fuente.



© INAOE

MMXIII

Agradecimientos:

Agradezco a mi padre, madre y hermana por su apoyo y cariño dado hacía mi en esta etapa académica de mi vida.

Agradezco a mi asesor de tesis el Dr. Ulises Ruiz Corona, por su apoyo, enseñanzas y consejos que me brindó para la finalización de este trabajo. Así también agradecer al Dr. Víctor Manuel Arrizón Peña, por permitirme realizar el experimento central de este trabajo en su laboratorio de óptica adifraccional. Agradezco a mi sinodales, Dr. Rubén Ramos García, Dr. Félix Aguilar Valdez y Dr. Julio Cesar Ramírez San Juan por su tiempo para revisar, corregir y aconsejarme en la mejora de mi escrito de tesis.

Agradezco a mis amigos y compañeros por su gran apoyo.

Agradezco al INAOE por permitirme realizar mis estudios en esta gran institución y agradecimiento al CONACyT por el apoyo dado hacía mi para la conclusión de esta especialidad.

Índice general

Índice general	4
Capítulo 1 Introducción	6
1.1 Objetivos de la tesis	7
1.2 Contenido de la tesis	7
Capítulo 2 Ecuación de onda y estados de polarización de la luz	8
2.1 Introducción	8
2.2 Ecuación de onda	8
2.2.1 Ondas monocromáticas	9
2.3 Polarización	11
2.3.1 Polarización lineal	12
2.3.2 Polarización circular	14
2.3.3 Polarización elíptica	15
2.3.4 Vectores de Jones	17
2.4 Superposición de ondas	19
Capítulo 3 Anillos de Montgomery	23
3.1 Introducción	23
3.2 Transformada de Fourier y Difracción	23
3.3 Efecto Talbot	26
3.4 Solución a los Anillos de Montgomery	29
Capítulo 4 Generación de campos ópticos periódicos mediante holografía sintética	
4.1 Campos ópticos adifraccionales	32
4.2 Holografía Sintética	33
4.2.1 Generación de campos ópticos usando SPHs	34
4.2.2 Holograma Kinoform	35
Capítulo 5 Resultados y análisis experimental	40
5.1 Introducción	40
5.2 Caracterización del Modulador espacial de luz	40
5.3 Arreglo Experimental	44
5.3.1 Análisis de generación de los anillos de Montgomery mediante un Kinorform	45
5.4 Resultados experimentales	47
5.4.1 Generación experimental de campos ópticos con polarización inhomogénea mediante anillos discretos de Montgomery	47
Capítulo 6 Conclusiones	57
A Apéndice A. Series de Fourier	58
B Apéndice B. Transformada de Fourier	62
C Apéndice C. Análisis matricial de los estados de polarización de los campos generados	65
Bibliografía	67

Resumen

En el presente trabajo de tesis se generaron campos ópticos con polarización inhomogéneos, como producto del análisis y simulación de los anillos de Montgomery. Partiendo de conocimientos básicos de la óptica como lo son las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de onda, polarización y la interferencia de ondas; abordamos el Efecto Talbot de manera breve, hasta realizar el procedimiento para la solución matemática de los anillos de Montgomery. Gracias a la holografía sintética, podemos obtener hologramas de fase desplegados por un modulador espacial de luz (LC-SLM: Liquid-Cristal Spatial Light Modulation) para generar anillos discretos de Montgomery. Dicho modulador debe ser caracterizado para conocer la respuesta del dispositivo al recibir señales de voltaje utilizando la distancia de Talbot Z_t . Mediante la simulación en MATLAB es posible obtener un holograma de fase con la información codificada de la amplitud de la suma de ondas planas, dicho holograma puede ser desplegado en el LC-SLM y mediante transformadas de Fourier realizadas por un sistema formador de imagen $4f$, podemos reconstruir la amplitud del campo y realizar la propagación del mismo. Con la ayuda de elementos ópticos como polarizadores y retardadores de onda, es posible modificar la polarización del campo cambiando así la uniformidad de este, para que finalmente con una cámara CCD capturar imágenes del campo y realizar un mapa de las elipses de polarización en diversos puntos de intensidad del campo.

Capítulo 1

Introducción

La replicación de un campo óptico en la dirección longitudinal sin el uso de una lente es un fenómeno de interés por razones teóricas y experimentales [1]. Este fenómeno de autoimágenes fue observado y descrito primeramente por Talbot en 1836 [2]. Él iluminó una rejilla de difracción y un arreglo rectangular de pequeños agujeros, ambos con una fuente de luz blanca. Más allá de las estructuras, él observó patrones de intensidad de colores semejantes a la forma periódica de los mismos objetos difractantes. Lord Rayleigh (1881) fue la primera persona en explicar este experimento analíticamente, atribuyendo su origen a la interferencia de los haces difractados [3]. Él mostró para el caso de frentes de ondas planas iluminando una rejilla lineal, que su distribución de intensidad se repite a lo largo de la dirección de iluminación con un periodo longitudinal igual a $2d/\lambda$, donde d es el periodo de la rejilla y λ la longitud de onda de la luz [4].

Cronológicamente, los siguientes en estudiar el fenómeno fueron Winkelmann [5], Weisel [6] y Wolfke [7], quienes examinaron la formación de imágenes en microscopia. Pasaron muchos años para que este fenómeno fuera abordado nuevamente; fueron Cowley y Moodie quienes hicieron un intensivo estudio de las propiedades del campo de difracción de Fresnel de objetos periódicos [8]. Ellos nombraron imágenes de Fourier a imágenes bien definidas de objetos, mientras que aquellos patrones intermedios a los planos de las imágenes de Fourier las llamaron como imágenes de Fresnel; dichas imágenes recibieron atención en el trabajo de Rogers [9] y especialmente de Winthrop y Worthington [10]. Finalmente, el término autoimagen fue introducido por Montgomery, y se usó junto con el término efecto Talbot en sus publicaciones que aparecieron en los años setenta y ochenta [11]. Montgomery desarrollo condiciones necesarias que debe satisfacer un objeto para repetir su transmitancia de amplitud compleja a lo largo de la dirección de iluminación. Como hemos mostrado, históricamente el efecto Talbot ha sido ampliamente estudiado y utilizado para un gran número de aplicaciones tales como la interferometría [12], procesamiento de imagen [13], divisores de haz [14, 15], guías de onda [16] y atrapamiento óptico [17].

1.1. Objetivos de la tesis

1. Generar anillos de Montgomery discretos con diferente polarización.
2. Generar hologramas mediante la simulación de interferencia de ondas planas.
3. Reconstrucción de la amplitud de un campo óptico con la ayuda de hologramas de fase desplegados por un modulador espacial de luz de cristal líquido (LC-SLM).
4. Obtener la curva de modulación del LC-SLM.
5. Realizar un análisis cualitativo de la polarización los campos capturados mediante una CCD.

1.2. Contenido de la tesis

El desarrollo de la presente tesis se divide en 6 capítulos, así como las citas bibliográficas se denotan con un número encerrado entre corchetes cuadrados

1^{do} En este capítulo se presenta una breve introducción de los antecedentes históricos del fenómeno de autoimágenes.

2^{do} Se hace una breve descripción de la teoría acerca de las ecuaciones de Maxwell, la polarización de la luz, matrices de Jones y superposición de ondas.

3^{ro} Se dará inicio en este capítulo con una breve deducción para el campo de difracción de Fresnel y Fraunhofer, luego se realiza un análisis simple sobre el efecto Talbot, en particular aspectos relacionados con la distancia de Talbot. Así como también el análisis de la solución matemática de los anillos de Montgomery.

4^{to} Se da la información básica sobre la holografía sintética, detalles teóricos y formas para la generación de hologramas de fase, herramienta de gran importancia en este trabajo.

5^{to} Se muestra la implementación experimental, iniciando con la caracterización del modulador espacial de luz y presentando las imágenes capturas con la información de los campos ópticos obtenidos de los anillos de Montgomery discretos.

6^{to} Se presentan las conclusiones generales, así como los comentarios finales acerca de está experimento; y posibles trabajos a futuro que podrían derivarse de la presente tesis.

Capítulo 2

Ecuación de onda y estados de polarización de la luz.

2.1. Introducción

En el presente capítulo, se hace una revisión general de la ecuación de onda, partiendo de las ecuaciones de Maxwell. Posterior a esto se introduce la expresión para una onda monocromática, y a partir de esto se hace una revisión de los estados de polarización de la luz, junto con el formalismo de las matrices de Jones. Por último, se deduce la expresión para la superposición de campos eléctricos.

2.2. Ecuación de onda.

La dinámica de una onda, en general, está determinada por la llamada ecuación de movimiento de onda. Hablando en términos de mecánica clásica, la ubicación de una onda en todo momento debe ser determinada por dicha ecuación. Y matemáticamente hablando, una función que cumpla con la ecuación de onda, se dice que representa a una función de onda.

Para llegar a la expresión de la Ecuación de onda, hay que comenzar presentando las conocidas ecuaciones de Maxwell [18], en particular en el vacío:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.2.4)$$

donde \vec{E} y \vec{B} son respectivamente el campo eléctrico y magnético, y c es la constante de la velocidad de la luz en el vacío. Cada una de estas ecuaciones representa una generalización de algunas observaciones experimentales. La ec.(2.2.1) es la ley de Gauss sin fuentes, que a su vez se deduce de la ley de Coulomb, la ec.(2.2.2) representa el hecho de que nunca se han observado monopolos magnéticos, la ec.(2.2.3) es la forma diferencial de la ley de inducción electromagnética de Faraday y la ec(2.2.4) es conocida como la ley de Ampere en ausencia de una densidad de corriente en el vacío.

Podemos decir que una de las consecuencias más importantes de las ecuaciones de Maxwell, es la deducción de las ecuaciones de propagación de ondas electromagnéticas en un medio lineal, isotrópico y homogéneo. La ecuación de onda para el campo eléctrico \vec{E} se obtiene al calcular el rotacional de la ec. (2.2.3) por ambos lados:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.2.5)$$

Considerando la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ reescribimos la ec. (2.2.5) como:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (2.2.6)$$

Utilizando las ecs.(2.2.1) y (2.2.4), la ec.(2.2.6) queda reescrita como:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.2.7)$$

Finalmente, podemos presentar la ecuación de onda para el campo eléctrico como

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2.8)$$

y con un procedimiento análogo, partiendo de la ec.(2.2.4) se puede obtener la ecuación de onda para el campo magnético

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2.9)$$

las ecuaciones obtenidas anteriormente rigen el campo electromagnético en un medio lineal, isotrópico y homogéneo en el que la densidad de carga es cero. Al inicio de esta sección, se dijo que una función que cumpla con la ecuación de onda se le puede considerar como una onda, sin embargo, no necesariamente una onda electromagnética; para que esto sea así, no es suficiente satisfacer la ecuación de onda, las ecuaciones de Maxwell también deben satisfacerse. Las ecs. (2.2.8) y (2.2.9) son una consecuencia directa de las ecuaciones de Maxwell, pero lo inverso no es cierto; por eso al resolver las ecuaciones de onda, debe tenerse cuidado en obtener soluciones a las ecuaciones de Maxwell.

2.2.1. Ondas monocromáticas.

Las ondas monocromáticas son ondas en las que todos los campos están caracterizados por una sola frecuencia. Con esto en mente, podemos resolver la ec. (2.2.8) para encontrar una forma general del campo eléctrico. Consideremos una función representativa del campo eléctrico como $\vec{E}(\vec{r}, t)$ de manera que podamos separar la dependencia espacial y temporal del siguiente modo:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.2.10)$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación de propagación de onda, obtenemos

$$e^{-i\omega t} \left(\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{r}) \right) = 0, \quad (2.2.11)$$

dado que la exponencial no puede ser cero, solo queda la igualación del término entre paréntesis para ser igualado a cero. Suponiendo por simplicidad, que \vec{E} varía sólo en una dirección, por ejemplo en z , completamente independiente de x y y . Entonces reescribimos la ec. (2.2.11) como:

$$\frac{\partial^2 E(z)}{dz^2} + (\omega/c)^2 E(z) = 0, \quad (2.2.12)$$

esta expresión se le conoce como la ecuación de Helmholtz, matemáticamente similar a la ecuación del oscilador armónico y tiene como solución

$$E(z) = E_0 e^{\pm ikz}, \quad (2.2.13)$$

donde E_0 es una constante y $k = \omega/c$. Sustituyendo esta expresión de $E(z)$ en la ec.(2.2.10) obtenemos:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-i(kz \pm \omega t)} \quad (2.2.14)$$

El campo eléctrico físico se obtiene tomando la parte real de la ecuación anterior, además $\vec{E}(\vec{r})$ en general puede ser complejo, de modo que el campo eléctrico real es proporcional a una función coseno, de manera que tenemos:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz \pm \omega t), \quad (2.2.15)$$

o equivalentemente

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos[\omega(z/c \pm t)]. \quad (2.2.16)$$

La ec.(2.2.15) representa una onda sinusoidal que se desplaza hacia la izquierda o derecha (según sea el signo $+$ ó $-$ respectivamente) en la dirección z . Al valor ω se le conoce como la frecuencia angular, relacionada con la frecuencia de la onda $f = \omega/2\pi$. Se define en magnitud a $k = 2\pi/\lambda$ como la constante de propagación de la onda (más adelante se explica el significado vectorial de k), siendo λ la longitud de la onda. Finalmente, de la relación $k = \omega/c$, se deduce la importante ecuación:

$$c = \lambda f. \quad (2.2.17)$$

La ec.(2.2.17) nos indica que la longitud de onda y su frecuencia temporal son inversamente proporcionales entre sí, y existe una constante de proporcionalidad que resulta ser la velocidad de la luz en el vacío.

2.3. Polarización.

La teoría ondulatoria de Fresnel postula la existencia de dos componentes ortogonales definidas como $u_1(r,t)$ y $u_2(r,t)$, las cuales fueron llamadas perturbaciones ópticas [19]. Actualmente, sabemos que esas perturbaciones son representadas por el campo eléctrico. Fresnel realizó la hipótesis de que las componentes del campo son descritas mediante dos ecuaciones, conocidas como las ecuaciones de onda:

$$\nabla^2 \vec{E}_x(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_x(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.3.1)$$

$$\nabla^2 \vec{E}_y(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_y(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.3.2)$$

donde $\vec{E}_x(\vec{r}, t)$ y $\vec{E}_y(\vec{r}, t)$ son las componentes del campo óptico, \vec{r} es el radio vector de un punto medido desde el origen de un sistema de coordenadas, t es el tiempo, v es la velocidad de la onda y ∇^2 es el operador Laplaciano. Las dos componentes del campo y la dirección \vec{k} forman un sistema ortogonal como se muestra en la figura 2.3.

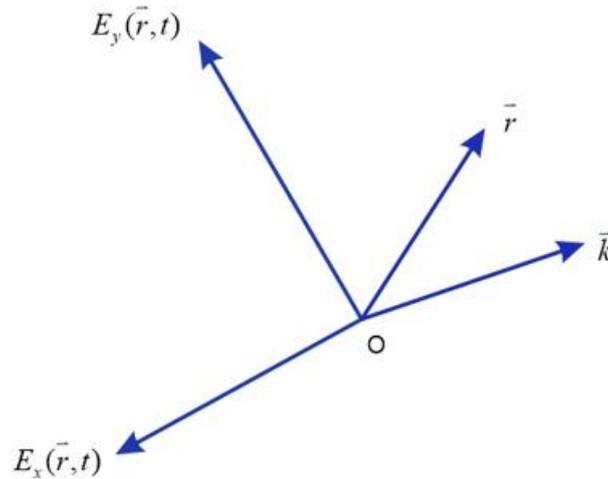


Figura 2.1. Sistema ortogonal de las componentes del campo eléctrico. \vec{E}_y , \vec{E}_x , \vec{r} y \vec{k} .

La solución de esas ecuaciones de onda es:

$$\vec{E}_x = E_{0x} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_x), \quad (2.3.3)$$

$$\vec{E}_y = E_{0y} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varepsilon_y), \quad (2.3.4)$$

donde \vec{k} es conocido como el vector que describe la dirección de propagación de la onda, el cual es perpendicular a las componentes oscilantes del campo eléctrico. El vector \vec{r} determina la ubicación de algún punto en el campo, y los parámetros ε_x y ε_y indican la fase inicial de las respectivas ondas, introducidas debido a la importancia que presentan para distinguir los diferentes estados de polarización de la luz, tal como se detallará más adelante.

Como hemos asumido anteriormente, si el campo solo viaja en la dirección z , las ecs. (2.4.3) y (2.4.4) se reescriben de la siguiente manera:

$$\vec{E}_x = \hat{i}E_{0x}\cos(kz - \omega t + \varepsilon_x), \quad (2.3.5)$$

$$\vec{E}_y = \hat{j}E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varepsilon_y), \quad (2.3.6)$$

donde la propagación de estas ondas se esquematiza en la figura 2.2; en la figura 2.2a) se muestra la propagación de las componentes del campo eléctrico y la figura 2.2b) muestra el campo resultante de ambas componentes. La componente \vec{E}_y se localiza en el plano de la hoja (llamado el plano de incidencia), además \vec{E}_y es nombrada la componente paralela de polarización. Similarmente, la componente \vec{E}_x oscila de manera perpendicular al plano de la hoja, y es llamada la componente perpendicular de polarización.

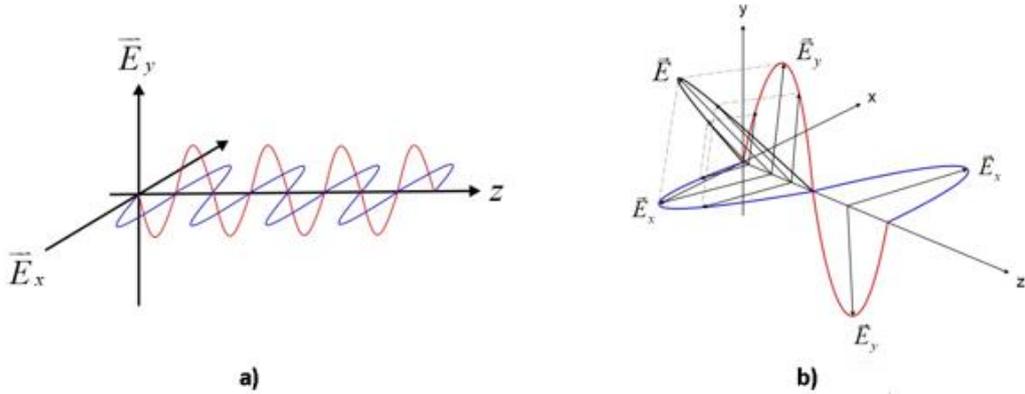


Figura 2.1 a) Propagación de las componentes del campo eléctrico. b) Campo resultante de ambas componentes.

2.3.1. Polarización lineal.

Consideremos dos ondas armónicas, ondas de luz linealmente polarizadas con la misma frecuencia, moviéndose a través de la misma región del espacio y en la misma dirección, como hemos establecido anteriormente, propagándose en la dirección z [20]. Ahora bien, representamos las dos ondas mediante respectivos campos eléctricos, como se muestran a continuación:

$$\vec{E}_x = \hat{i}E_{0x}\cos(kz - \omega t), \quad (2.3.7)$$

$$\vec{E}_y = \hat{j}E_{0y}\cos(kz - \omega t + \varepsilon), \quad (2.3.8)$$

con $\varepsilon = \varepsilon_y - \varepsilon_x$ como la diferencia de fase entre ellas, E_{0x} y E_{0y} son la amplitud máxima de las ondas respectivamente. La superposición de estas dos perturbaciones ópticas, dan como resultados una suma de vectores perteneciente a dos ondas perpendiculares entre sí,

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_x(z, t) + \vec{E}_y(z, t), \quad (2.3.9)$$

si ε es cero o un entero múltiplo de $\pm 2\pi$, se dice que la onda puede estar en fase. Así la ec.(2.4.9) se convierte en:

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{i}E_{0x} + \hat{j}E_{0y})\cos(kz - \omega t), \quad (2.3.10)$$

La onda resultante nos muestra una amplitud igual a $(iE_{0x} + jE_{0y})$, es decir, que esta también es linealmente polarizada. El campo E progresa a través de un ciclo oscilatorio conforme la onda avanza una longitud de onda sobre el eje z. Si las amplitudes E_{0x} y E_{0y} son iguales, con la condición para ε dada anteriormente, se dice que tenemos luz linealmente polarizada a $+45^\circ$ y se esquematiza en la figura 2.3 a).

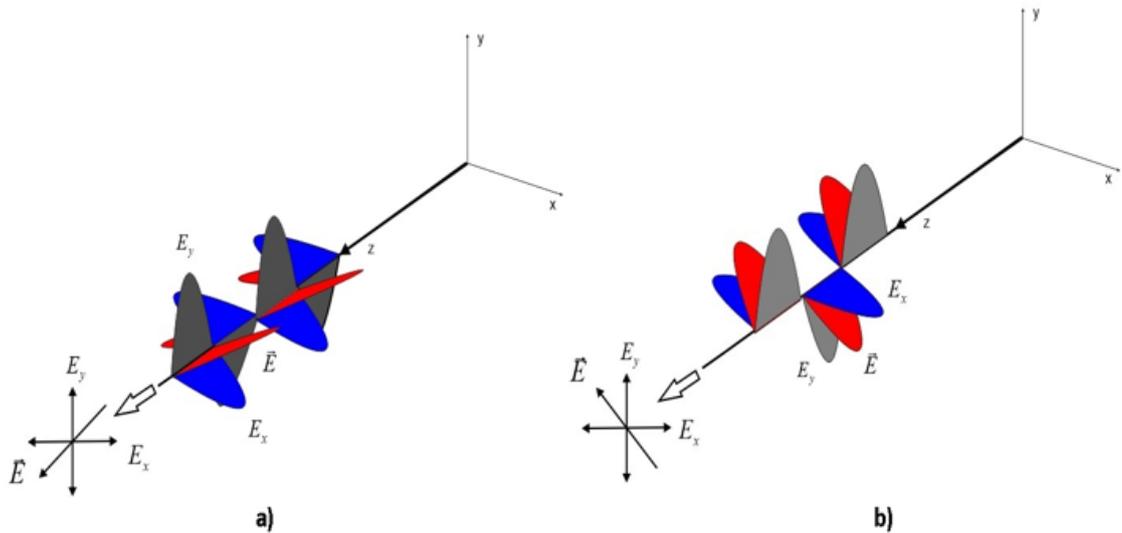


Figura 2.3 Polarización lineal. a) El campo eléctrico de la luz polarizada linealmente a $+45^\circ$. b) Luz linealmente polarizada a -45° . Azul: oscilación en el eje x, Negro: oscilación en el eje y y Rojo: oscilación del campo resultante.

Si ahora cambiamos el valor de ε a un entero impar múltiplo de $\pm\pi$, las dos ondas estarán desfasadas en 180° , y tendremos:

$$\vec{E}(z, t) = (\hat{i}E_{0x} - \hat{j}E_{0y})\cos(kz - \omega t), \quad (2.3.11)$$

igualmente, esta onda es linealmente polarizada pero el plano de vibración ha sido rotado, y en el caso particular donde las amplitudes E_{0x} y E_{0y} sean iguales, se dice que la luz es linealmente polarizada a -45° , como se esquematiza en la figura 2.5 b).

2.3.2. Polarización circular.

Cuando tenemos ondas expresadas como en las ecs.(2.4.7) y (2.4.8), pero ahora con iguales amplitudes $E_{0x} = E_{0y} = E_0$, y además su diferencia de fase es $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, obtenemos [20]

$$\vec{E}_x = \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t), \quad (2.3.12)$$

$$\vec{E}_y = \hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t), \quad (2.3.13)$$

consecuentemente el campo eléctrico queda definido:

$$\vec{E}(z, t) = E_0[\hat{i}\cos(kz - \omega t) + \hat{j}\sin(kz - \omega t)], \quad (2.3.14)$$

ahora, la magnitud de \vec{E} es una constante E_0 . La dirección del campo eléctrico varía con el tiempo, y no está restringida a un solo plano. El vector resultante del campo eléctrico está rotando en sentido de las manecillas del reloj, con una frecuencia angular ω . En la figura 2.4 se muestra como una onda lleva una polarización circular derecha.

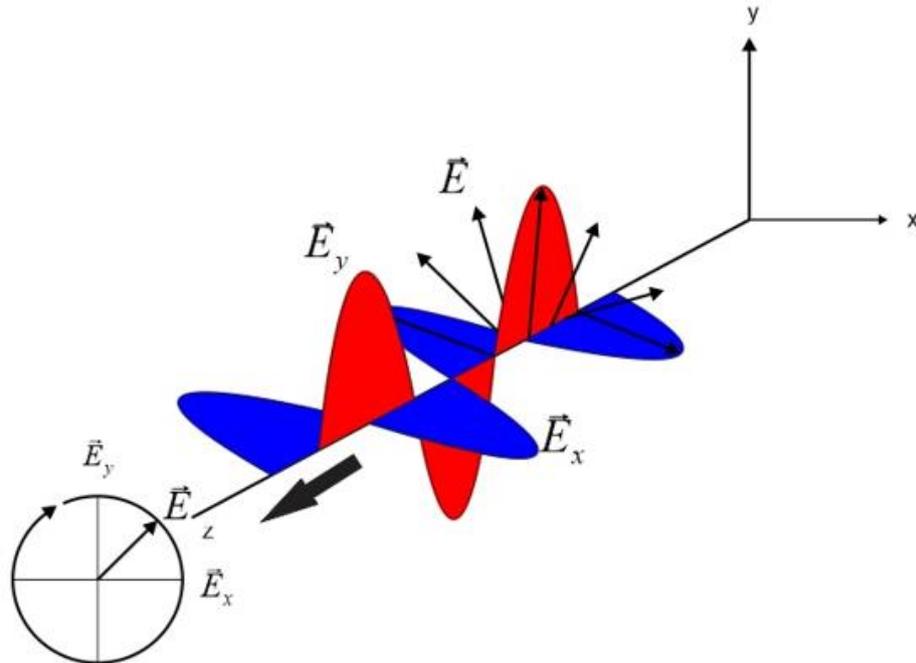


Figura 2.4 Polarización circular derecha. El campo eléctrico rotando en sentido horario con amplitudes constantes y oscilando a una misma frecuencia.

Si $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$ donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, entonces:

$$\vec{E}(z, t) = E_0[\hat{i}\cos(kz - \omega t) - \hat{j}\sin(kz - \omega t)], \quad (2.3.15)$$

la amplitud no es afectada, pero ahora \vec{E} gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, y se dice que la onda tiene polarización circular izquierda, y su forma de oscilación se esquematiza en la figura 2.5.

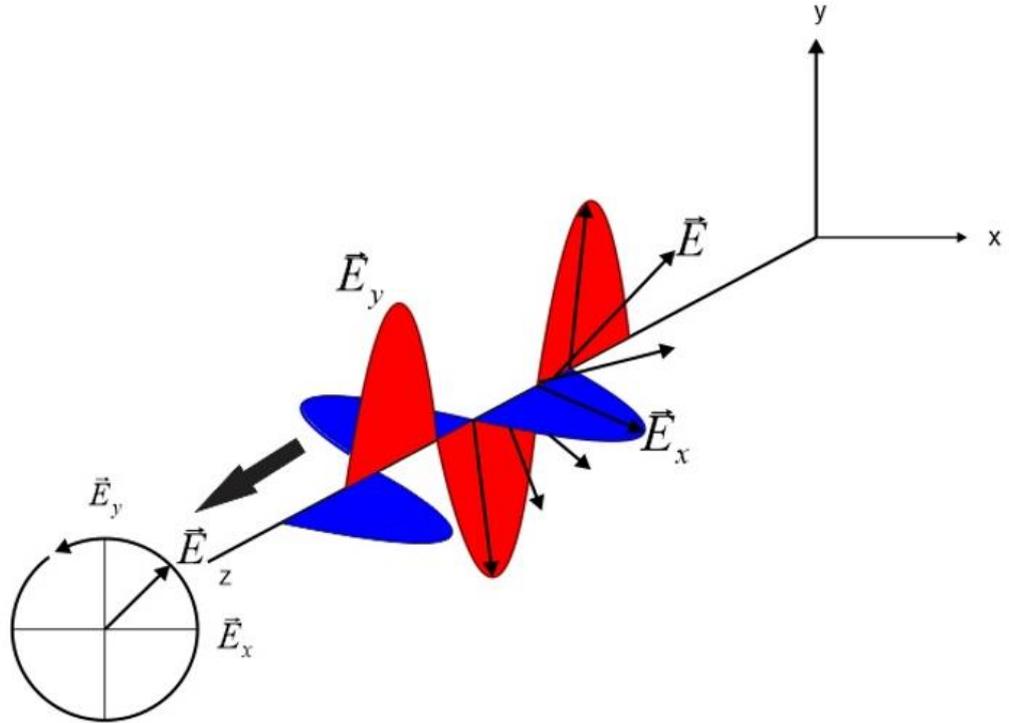


Figura 2.5 Polarización circular izquierda. El campo eléctrico rotando en sentido anti horario con amplitudes constantes y oscilando a una misma frecuencia.

2.3.3. Polarización elíptica.

Tanto la polarización lineal como circular pueden ser consideradas casos especiales de la luz polarizada elípticamente. En general, el vector resultante del campo eléctrico \vec{E} rotará y cambiará su magnitud; en tal caso el vector trazará una elipse en un espacio fijo, perpendicular a \vec{k} .

Tomando la ec.(2.3.8), dividiendo E_y entre la amplitud E_{0y} y distribuyendo el argumento del *coseno* obtenemos:

$$\frac{\vec{E}_y}{E_{0y}} = \cos(kz - \omega t)\cos\epsilon - \sin(kz - \omega t)\sin\epsilon. \quad (2.3.16)$$

De la ec.(2.3.7) vemos que $\cos(kz - \omega t) = \vec{E}_x/E_{0x}$, y sustituyendo esto en la ec.(2.3.16) obtenemos

$$\frac{\vec{E}_y}{E_{0y}} - \frac{\vec{E}_x}{E_{0x}}\cos\epsilon = -\sin(kz - \omega t)\sin\epsilon, \quad (2.3.17)$$

además,

$$1 = \cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t) = \frac{\vec{E}_x^2}{E_{0x}^2} + \sin^2(kz - \omega t), \quad (2.3.18)$$

$$\sin(kz - \omega t) = \left[1 - \frac{\vec{E}_x^2}{E_{0x}^2}\right]^{1/2}, \quad (2.3.19)$$

reescribiendo la ec.(2.3.17), obtenemos:

$$\left(\frac{\vec{E}_y}{E_{0y}} - \frac{\vec{E}_x}{E_{0x}} \cos \varepsilon \right)^2 = \left(1 - \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} \right) \sin^2 \varepsilon, \quad (2.3.20)$$

distribuyendo valores en esta última expresión llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{\vec{E}_x(z, t)^2}{E_{0x}^2} + \frac{\vec{E}_y(z, t)^2}{E_{0y}^2} - \frac{2\vec{E}_x(z, t)\vec{E}_y(z, t)}{E_{0x}E_{0y}} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon. \quad (2.3.21)$$

La ec.(2.3.21) describe una elipse en su forma no estándar, y es llamada la ecuación de la polarización elíptica.

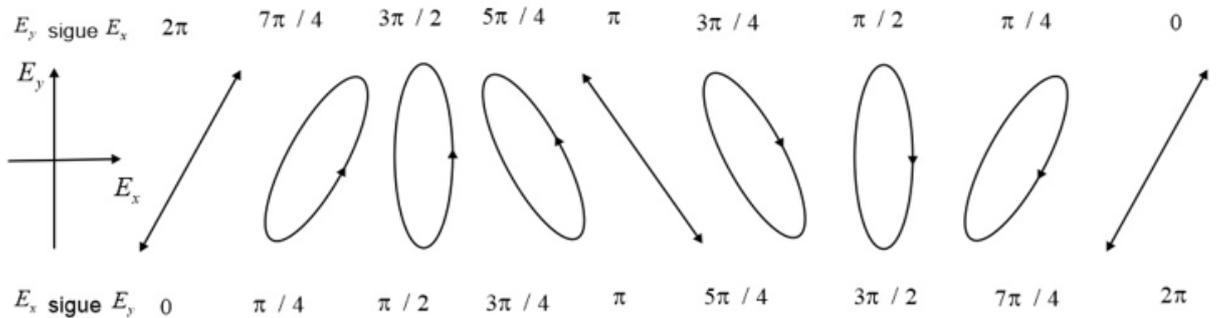


Figura 2.6 Distintas configuraciones de la polarización.

La figura 2.6, resume mediante un diagrama los estados de polarización, de acuerdo al desfase ε entre las ondas. Se dice que E_x precede a E_y en $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \dots$, donde estos son los valores positivos de ε que hay que utilizar en las ecs.(2.3.7) y (2.3.8). Se dará la misma serie de curvas si E_y precede a E_x en $2\pi, 7\pi/4, 3\pi/2, 5\pi/4, \dots$, y esto ocurre cuando ε equivale a $-2\pi, -7\pi/4, -3\pi/2, -5\pi/4, \dots$ etc.

La polarización de elipse puede ser expresada en términos de dos parámetros angulares, el primero de ellos es el ángulo de orientación de la elipse $\Psi (0 \leq \Psi \leq \pi)$, y se muestra en la figura 2.7. Donde el ángulo Ψ se ubica en un sistema de coordenadas sobre el eje mayor de una elipse.

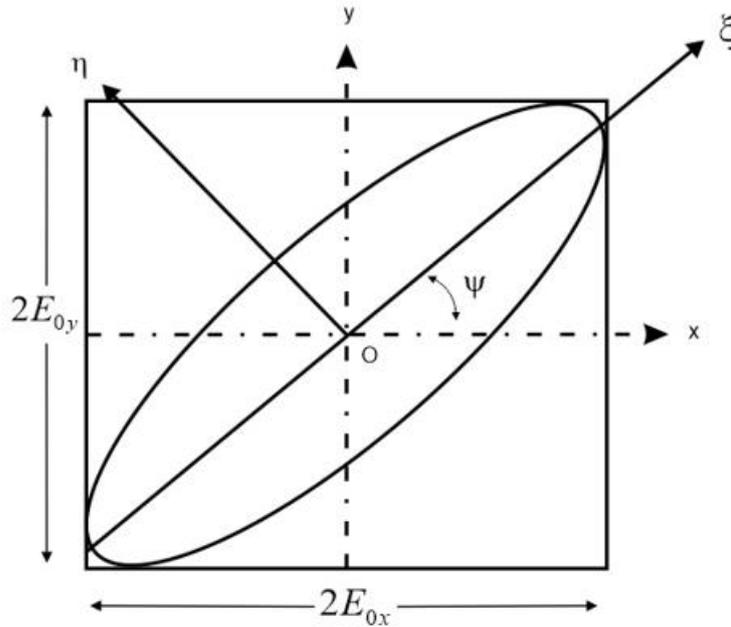


Figura 2.7 Rotación del sistema en coordenadas $\zeta - \eta$

La expresión matemática para obtener el valor del ángulo de orientación es:

$$\tan 2\Psi = \frac{2E_{0x}E_{0y}}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \cos \epsilon, \quad 0 \leq \Psi \leq \pi, \quad (2.3.22)$$

se puede reescribir la ec.(2.3.22) en términos de otra expresión trigonométrica, al introducir un valor conocido como el ángulo auxiliar α definido como:

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2, \quad (2.3.23)$$

así obtenemos

$$\tan 2\Psi = (\tan 2\alpha) \cos \sigma. \quad (2.3.24)$$

2.3.4. Vectores de Jones

Como se mencionó en la sección anterior, el estado de polarización de una onda plana monocromática que se propaga en un medio está completamente determinado si se conocen las magnitudes y fases de las componentes horizontal y vertical. Un enfoque matricial es particularmente útil en la óptica; un enfoque que permite la descripción de los estados de polarización de la luz, dado que las componentes de salida de un campo eléctrico que pasa a través de un dispositivo óptico están linealmente relacionadas con las componentes que ingresan al elemento óptico [21]. De manera que en este apartado se presenta el cálculo matricial de Jones.

Los vectores de Jones son una formulación matricial sobre la luz polarizada que consiste en vectores de 2×1 , los cuales describen las componentes del campo eléctrico, mientras que las matrices de Jones de 2×2 describen las componentes de los elementos polarizantes [19]. La matriz columna de Jones de 2×1 está dada como:

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (2.3.25)$$

donde E_{0x} y E_{0y} son las amplitudes, δ_x y δ_y son las fases, y en general, las componentes E_x y E_y son cantidades complejas.

Los vectores de Jones para los estados de polarización más comunes son:

$$E_{LHP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, E_{LVP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.26)$$

$$E_{L+45p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_{L-45p} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.27)$$

$$E_{RCP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, E_{LCP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}. \quad (2.3.28)$$

Las ecs. 2.3.26 se refieren a los estados de polarización lineal horizontal y vertical, las ecs. 2.3.27 a los estados de polarización lineal a +45 y -45, y, por último, las ecs. 2.3.28 la representación de los estados de polarización circular derecha y circular izquierda, respectivamente. Ahora bien, la superposición de dos vectores de Jones ortogonales da como resultado otro vector de Jones, por ejemplo:

$$E = E_{LHP} + E_{LVP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3.29)$$

omitiendo el factor de normalización $1/\sqrt{2}$, obtenemos polarización lineal a 45; de forma similar al superponer dos campos con polarizaciones circular derecha e izquierda obtenemos:

$$E = E_{RCP} + E_{LCP} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -i \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.30)$$

nuevamente haciendo caso omiso del factor de normalización, tenemos en la superposición un estado de polarización lineal horizontal. Finalmente, una representación general de los estados de polarización de la luz horizontal y vertical está dada como:

$$E_{LHP} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ 0 \end{bmatrix}, E_{LVP} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{bmatrix}, \quad (2.3.31)$$

y superponiendo ambos estados obtenemos:

$$E_{LHP} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ 0 \end{bmatrix}, E_{LVP} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y} e^{i\delta_y} \end{bmatrix}, \quad (2.3.32)$$

La ec. 2.3.32 muestra que dos oscilaciones ortogonales con amplitud y fases arbitrarias pueden generar luz elípticamente polarizada.

Un elemento polarizante es representado mediante una matriz de Jones de 2×2 como se muestra a continuación:

$$J = \begin{bmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{bmatrix}, \quad (2.3.33)$$

la cual se relaciona con los vectores de Jones de entrada y salida como $E' = J * E$. Para un polarizador lineal, la matriz de Jones está determinada como:

$$J = \begin{bmatrix} p_x & 0 \\ 0 & p_y \end{bmatrix}, 0 \leq p_x, p_y \leq 1, \quad (2.3.34)$$

para un polarizador lineal ideal tanto horizontal como vertical, su forma es:

$$J_{LHP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_{LVP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3.35)$$

La matriz de Jones para una placa de onda con un desfase de $\phi/2$ con respecto al eje rápido de la placa y $\phi/2$ sobre el eje lento es:

$$J_{WP} = \begin{bmatrix} e^{i(\phi/2)} & 0 \\ 0 & e^{-i(\phi/2)} \end{bmatrix}, \rightarrow J_{WP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.3.36)$$

La matriz de Jones para una placa de cuarto de onda $\phi = \pi/2$ y la placa de media onda $\phi = \pi$ respectivamente son:

$$J_{QWP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, J_{HWP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.3.37)$$

2.4. Superposición de ondas

El fenómeno óptico conocido como interferencia, se basa en la superposición de dos o más haces luminosos que satisfagan las condiciones de amplitud y fase, para obtener la detección de un patrón de interferencia. Este patrón consiste en regiones brillantes y oscuras, distribuidas de manera consecutiva sobre un plano de observación. Si esa área es brillante u oscura es determinada por la relación que exista, entre los valores de las fases relativas de las ondas superpuestas entre sí; esta región de interés constituida de bandas o franjas se le denomina patrón de franjas.

Actualmente, la luz es considerada como la propagación de una onda transversal electromagnética. Dada la ligadura entre el campo eléctrico y magnético, se opta por considerar únicamente el campo eléctrico, y se asume por simplicidad que es una onda plana linealmente polarizada, propagándose en el vacío en dirección z [22]. Como se deduce en la sección anterior, el campo eléctrico puede ser representado mediante una función sinusoidal de la distancia y tiempo:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz \pm \omega t), \quad (2.4.1)$$

con E_0 como la amplitud máxima de la onda, y podemos mostrar esto en la figura 2.8.

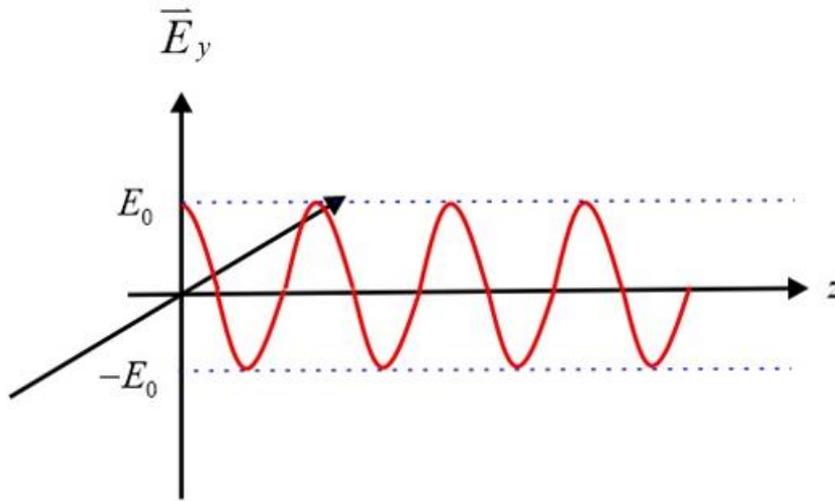


Figura 2.8. Propagación de la amplitud del campo eléctrico.

Ahora bien, si dos ondas monocromáticas propagándose en la misma dirección y polarizadas en el mismo plano, las cuales se superponen en un punto, el campo eléctrico en ese punto está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (2.4.2)$$

con \vec{E}_1 y \vec{E}_2 , respectivos campos eléctricos de las ondas superpuestas. Si las dos ondas tienen la misma frecuencia, la intensidad en ese punto es:

$$I = |A_1 + A_2|^2, \quad (2.4.3)$$

con $A_1 = a_1 \exp(-i\phi_1)$ y $A_2 = a_2 \exp(-i\phi_2)$ como las amplitudes complejas de las ondas y $\phi_i = 2\pi z_i / \lambda$, $i = 1, 2$ como las fases de las ondas, así obtenemos:

$$I = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2^* + A_1^* A_2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \phi, \quad (2.4.4)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \phi, \quad (2.4.5)$$

con I_1 e I_2 como las intensidades individuales de cada onda y $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ es la diferencia de fase entre las ondas. Ahora, en términos de la diferencia de camino óptico entre las ondas Δd , el orden de interferencia está dado como $N = \Delta d/\lambda$, de manera que el máximo valor de intensidad ocurre cuando:

$$N = m, \quad \Delta d = m\lambda, \quad \Delta\phi = 2m\pi, \quad (2.4.6)$$

con m un número entero, y el mínimo valor de la intensidad ocurre cuando:

$$N = (2m + 1)/2, \quad \Delta d = (2m + 1)\lambda/2, \quad \Delta\phi = (2m + 1)\pi, \quad (2.4.7)$$

En la figura 2.9 se esquematiza el perfil de los valores máximos y mínimos de intensidad en un patrón de interferencia.

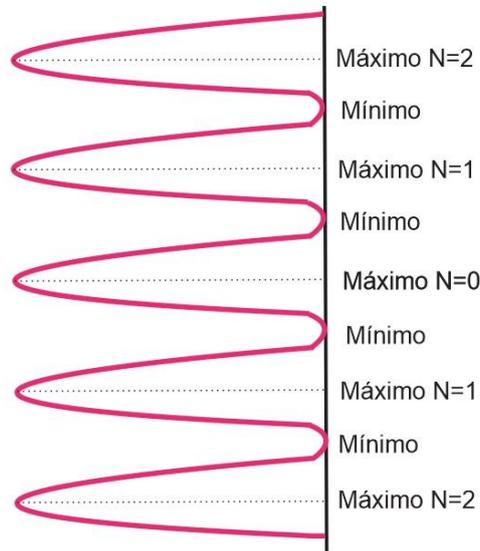


Figura 2.9 Máximos y mínimos de intensidad en un patrón de franjas de interferencia.

Por último, una medición del contraste en la visibilidad de las franjas de interferencia se define por la relación:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (2.4.8)$$

De la ec.(2.4.5) podemos obtener, el valor de la intensidad máxima y mínima de la interferencia, cuando la función *coseno* toma los valores 1 y -1 respectivamente. De la ec.(2.4.8) expresamos I_{\max} e I_{\min} de la siguiente forma:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad (2.4.9)$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}, \quad (2.4.10)$$

sustituyendo las ecs.(2.4.9) y (2.4.10) en la ec.(2.4.8), obtendremos una expresión para el contraste en términos de las intensidades individuales de las ondas:

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (2.4.11)$$

en particular, si $I_2 = I_1$ entonces la visibilidad se vuelve $V = 1$, es decir la intensidad individual de una de las ondas.

Capítulo 3

Anillos de Montgomery

3.1. Introducción

Talbot fue el primero en observar las características de la distribución de intensidad de luz sobre objetos periódicos, como lo puede ser un tipo de rejilla de difracción de amplitud. Rayleigh dedujo la expresión matemática para la distancia entre las imágenes difractadas de una rejilla lineal en el caso de un frente de onda plano cuasi monocromático. Desde el punto de vista de los parámetros de objeto, Cowley y Moodie fueron los primeros en considerar objetos periódicos bidimensionales de arreglos rectangulares o cuadrados. Winthrop y Worthington extendieron la clase de estructuras bidimensionales, al introducir objetos con formación de paralelogramos y arreglos hexagonales.

Montgomery fue el primero en preguntarse por las condiciones suficientes o necesarias sobre la periodicidad lateral de los objetos para que ocurriese el efecto Talbot. Su investigación se centró en establecer las propiedades del campo óptico que se repetía a lo largo de la dirección de propagación, conocido como el fenómeno de autoimagen. En este capítulo abriremos con una breve explicación sobre la forma matemática para un patrón de difracción en las llamadas región de Fresnel y Fraunhofer, posteriormente se da información relevante sobre el efecto Talbot, y por último, se realiza un desarrollo matemático para los mencionados anillos de Montgomery.

3.2. Transformada de Fourier y Difracción.

Observando la figura 3.1a) se tiene una distribución de campo sobre una pantalla, dicha distribución es llamada patrón de difracción. En esta sección se presenta una breve demostración para expresar matemáticamente al patrón de difracción mediante la Transformada de Fourier.

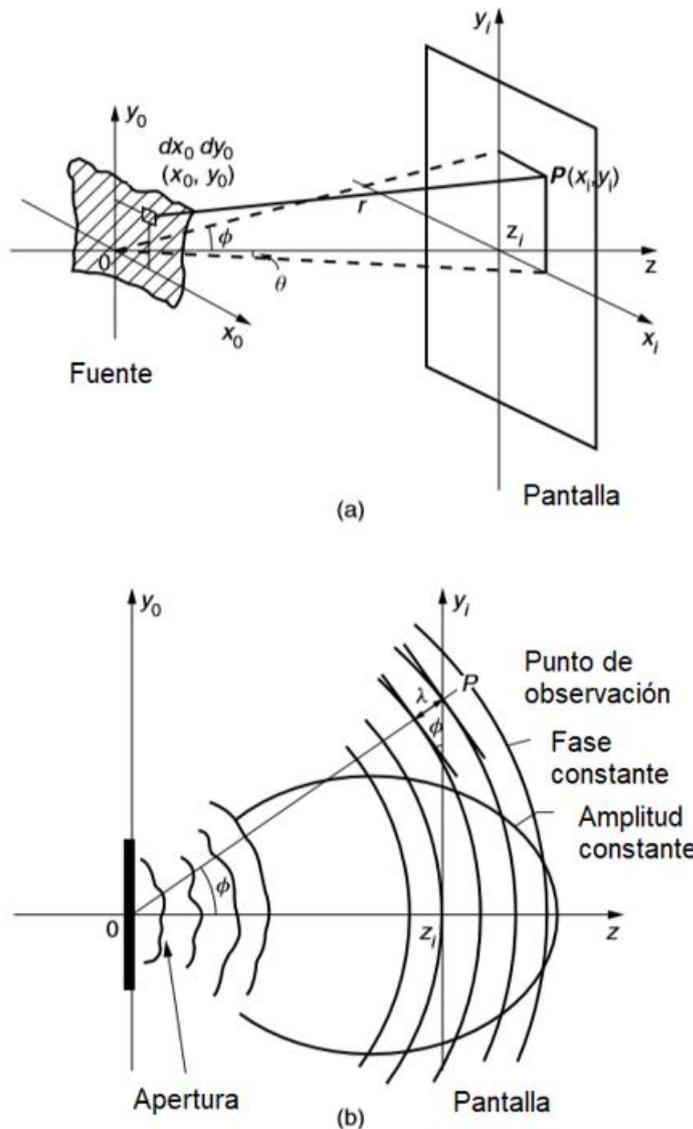


Figura 3.1. Distribución de campo sobre una pantalla desde una fuente. a) Geometría. b) Distribución del campo en el plano (x_i, y_i)

Sea $E(x_i, y_i)$ una representación del campo eléctrico en un punto P sobre la pantalla, a una distancia z_i desde el campo en un punto de la fuente $E(x_0, y_0)$. Sobre cada punto de la fuente emerge una onda esférica, mientras que el campo en el punto de observación P está compuesto por la contribución de todas las ondas provenientes desde las fuentes puntuales. La contribución de las fuentes puntuales localizadas en (x_0, y_0) sobre P ubicado en las coordenadas (x_i, y_i) está dada por la siguiente expresión[23]:

$$dE(x_i, y_i) = \frac{e^{jkr}}{r} E(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (3.2.1)$$

donde $E(x_0, y_0)$ es la magnitud de las fuentes puntuales localizadas en (x_0, y_0) , r es la distancia entre (x_0, y_0) y (x_i, y_i) , y $j = \sqrt{-1}$. La distancia r es expresada como:

$$r = \sqrt{z_i^2 + (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}, \quad (3.2.2)$$

de manera que la contribución total de todas las ondas esféricas desde todas las fuentes puntuales en $E(x_i, y_i)$ es:

$$E(x_i, y_i) = K \int \int \frac{e^{jkr}}{r} E(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (3.2.3)$$

la ecuación anterior es nombrada como la fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff. La amplitud del campo difractado es inversamente proporcional a la longitud de onda incluida en la constante $K = 1/j\lambda$.

Si el punto de observación está lo suficientemente lejos o cerca del eje z (aproximación paraxial), es decir:

$$z_i^2 \gg (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2, \quad (3.2.4)$$

entonces la distancia r puede simplificarse por la expresión binomial como:

$$r \doteq z_i \left(1 + \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{2z_i^2} \right), \quad (3.2.5)$$

que puedes reescribirse como:

$$r = z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i} - \frac{x_i x_0 + y_i y_0}{z_i} + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z_i}, \quad (3.2.6)$$

la región de z_i para la cual la aproximación de la ec.(3.2.6) es válida se llama la región de Fresnel o campo cercano. A medida que aumenta la distancia en la dirección z , el último término en la ec.(3.2.6) se vuelve insignificante para el tamaño finito de la fuente. En esta zona de z_i se le conoce como la región de Fraunhofer o de campo lejano, y aquí la aproximación para r se vuelve:

$$r = z_i + \frac{x_i^2 + y_i^2}{2z_i} - \frac{x_i x_0 + y_i y_0}{z_i}, \quad (3.2.7)$$

al sustituir la ec.(3.2.7) en el término exponencial de la ec.(3.2.3) de Fresnel-Kirchhoff, el campo de convierte en:

$$E(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \exp\{jk[z_i + (x_i + y_i)^2/2z_i]\} \int \int_{-\infty}^{\infty} E(x_0, y_0) \exp[-j2\pi(f_x x_0 + f_y y_0)] dx_0 dy_0, \quad (3.2.8)$$

con $f_x = x_i/\lambda z_i$ y $f_y = y_i/\lambda z_i$. Debemos notar que las integrales son una Transformada de Fourier bidimensional del campo en x y y con dominio de frecuencias f_x y f_y :

$$\mathfrak{F}\{g(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(f_x x + f_y y)] dx dy, \quad (3.2.9)$$

así, el patrón de difracción puede escribirse como:

$$E(x_i, y_i) = \frac{1}{j\lambda z_i} \exp\{jk[z_i + (x_i + y_i)^2/2z_i]\} \mathfrak{F}\{E(x_0, y_0)\}_{f_x=x_i/\lambda z_i, f_y=y_i/\lambda z_i}, \quad (3.2.10)$$

donde \mathfrak{F} denota la transformada de Fourier. En resumen, el patrón de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la fuente del campo.

3.3. Efecto Talbot

El efecto Talbot o de autoimagen es un fenómeno óptico que sucede cuando se ilumina un objeto periódico con una onda plana monocromática, las imágenes del objeto presentarán periodicidad a lo largo del eje de iluminación. Las autoimágenes de dicho campo periódico serán observadas a múltiplos de la distancia de Talbot Z_t dada por:

$$Z_t = \frac{2d^2}{\lambda}, \quad (3.3.1)$$

donde d es el periodo del objeto y λ la longitud de onda de la fuente de iluminación.

Un análisis que es de mucha utilidad para el arreglo experimental de este trabajo es el estudio de una rejilla de fase binaria. Una rejilla de fase es una colección de rendijas de fase separadas periódicamente por una distancia d . En la figura 3.2 se representa una rejilla de fase binaria $t(x,y)$ de periodo d .

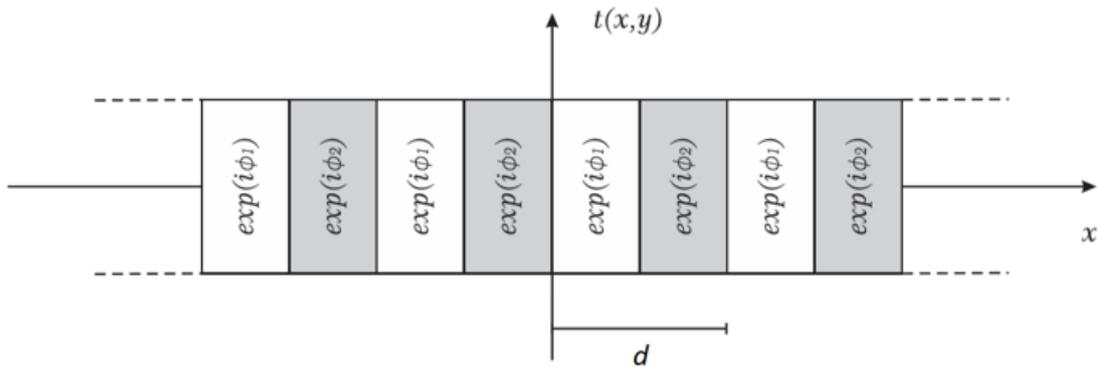


Figura 3.2 Representación de una rejilla de fase binaria de período d .

Guiándonos por la figura 3.3, al tener una rejilla de fase que es iluminada por una onda plana que se propaga a lo largo del eje z , el campo detrás de la rejilla es igual a su transmitancia, dada como [24]:

$$t(x, y) = \exp[i\phi(x)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(i2\pi mx/d), \quad (3.3.2)$$

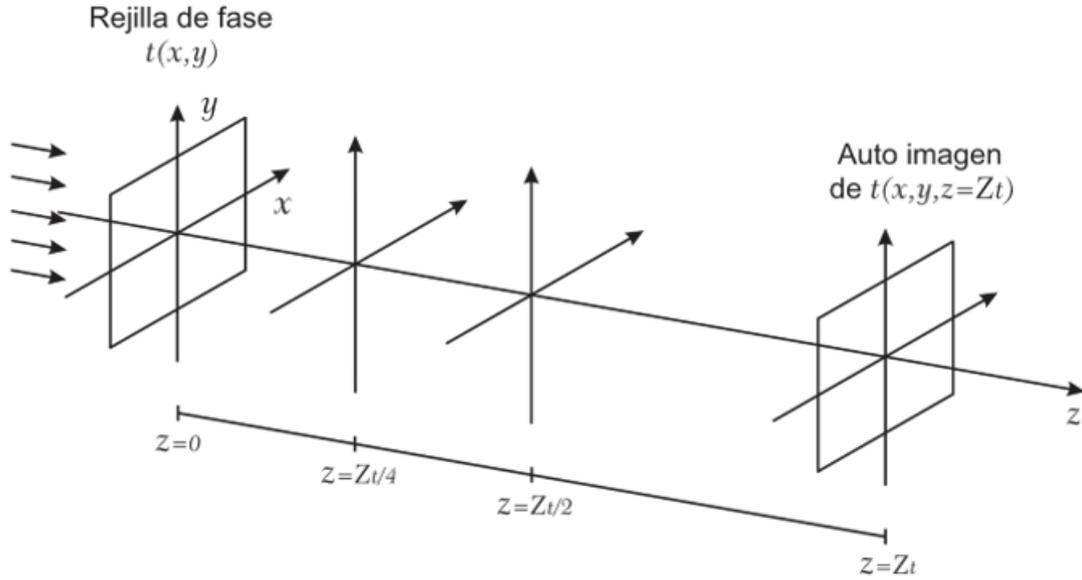


Figura 3.3 Esquema de una rejilla de fase $t(x,y)$ iluminada por una onda plana. Donde se observa la autoimagen de la rejilla a la distancia de Talbot Z_t .

donde $\phi(x)$ es el perfil de fase, d es el período fundamental de la rejilla de fase, m un número entero y a partir de aquí el número complejo $\sqrt{-1}$ es representado como i . El campo óptico propagado del objeto periódico a una distancia $z > 0$ está dado por:

$$u(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m F(m, z) \exp(i2\pi mx/d), \quad (3.3.3)$$

donde $F(m, z)$ es el factor de propagación del campo periódico, denotado en términos de la distancia de Talbot como:

$$F(m, z) = \exp[i2\pi(z/Z_t)m^2]. \quad (3.3.4)$$

Si z es un múltiplo entero de la distancia de Talbot, el argumento en la exponencial del factor de propagación se vuelve un múltiplo de 2π y $F(m, z)$ se vuelve la unidad, permitiendo reescribir la ec.(3.3.3) como:

$$u(x, y, z = Z_t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(i2\pi mx/d) = t(x, y), \quad (3.3.5)$$

es decir, el campo del objeto periódico se repite a múltiplos enteros de la distancia de Talbot.

En particular, en el plano fraccional de Talbot $z = Z_t/4$, el factor de propagación de la ec.(3.3.4), puede tomar dos valores diferentes[25],

$$F(m, z = Z_t/4) = \begin{cases} 1, & \text{si } m \text{ es par,} \\ -i, & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

sustituyendo los valores de la ec.(3.3.6) en la ec.(3.3.3) obtenemos:

$$u(x, y, z = Z_t/4) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{2m} \exp[i2\pi(2m/d)x] - i \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{2m+1} \exp[i2\pi((2m+1)/d)x], \quad (3.3.7)$$

la ec.(3.3.7) puede reescribirse en términos de la función de transmitancia $t(x,y)$ como:

$$u(x, y, z = Z_t/4) = \frac{1}{2} [t(x, y)(1 - i) + t(x - d/2, y)(1 + i)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[-i(\pi/4)] [t(x, y) + it(x - d/2, y)] \quad (3.3.8)$$

La ec.(3.3.8) muestra que $u(x, y, z = Z/4)$ es igual a la superposición de dos campos iguales $t(x, y)$, uno de ellos desplazado por un factor de $d/2$ y multiplicado por una fase $\exp[i(\pi/2)]$. Tomando el módulo al cuadrado de la ecuación mencionada anteriormente, y recordando que $t(x, y) = \exp(i\phi/2)$ de la ec.(3.3.2), tenemos:

$$I(x, y, z = Z_t/4) = 1 - \text{sen}(S(x)), \quad (3.3.9)$$

donde $S(x) = \phi(x) - \phi(x - d/2)$.

Para finalizar con esta sección, se presenta un breve análisis del contraste o visibilidad de franjas del campo en $z = Z_t/4$ de una rejilla de fase binaria, esquematizada en la figura 3.4. De acuerdo a la ec.(3.3.8), si consideramos la transmitancia $t(x, y)$ con fases arbitrarias ϕ_1 y ϕ_2 , el campo resultante en cada franja es:

$$u_1(x, y, z = Z_t/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[-i(\pi/4)] [\exp(i\phi_1) + i \exp(i\phi_2)], \quad (3.3.10)$$

$$u_2(x, y, z = Z_t/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp[-i(\pi/4)] [\exp(i\phi_2) + i \exp(i\phi_1)], \quad (3.3.11)$$

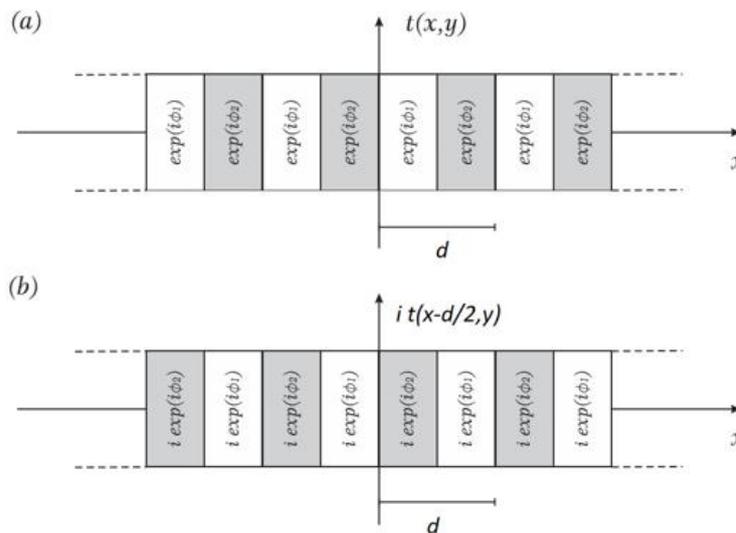


Figura 3.4 Representación de una rejilla de fase binaria de período d .

calculando el módulo al cuadrado de las ecs.(3.3.10) y (3.3.11), se obtienen los valores de intensidad de cada franja, dadas como:

$$I_1 = 1 + \text{sen}(\phi) \quad \text{e} \quad I_2 = 1 - \text{sen}(\phi), \quad (3.3.12)$$

donde $\phi = \phi_1 - \phi_2$, dada la definición de visibilidad de franjas en la ec.(2.4.8) como:

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}, \quad (3.3.13)$$

sustituyendo los valores de intensidad de la ec.(3.3.12) en la ec(3.3.13), se obtiene:

$$V = \text{Sen}(\phi), \quad (3.3.14)$$

es decir, la fase ϕ de un objeto periódico de fase binaria puede ser analizado por el $\text{Sen}^{-1}(V)$ en el plano de Talbot $z = Z_t/4$.

3.4. Solución a los Anillos de Montgomery

Bajo el entendimiento de la teoría de difracción escalar, la ecuación de onda puede reducirse a la siguiente expresión:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (3.4.1)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ y u designa las tres dimensiones de la función de onda. Si $u(x,y,z)$ es periódica a lo largo del eje z con periodo Δz , la función se puede describir mediante una serie de Fourier

$$u(x, y, z) = \sum_m v_m(x, y) \exp(i2\pi m z / \Delta z), \quad (3.4.2)$$

con la condición de:

$$u(x, y, 0) = \sum_m v_m(x, y) = f(x, y), \quad (3.4.3)$$

donde $f(x,y)$ es la transmitancia del objeto. Cuando el campo $u(x,y,z)$ se introduce en la ec.(3.4.1), esta se convierte en una ecuación diferencial de dos dimensiones que debe satisfacerse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} + k^2 [1 - (m\lambda/\Delta z)^2] v_m = 0, \quad (3.4.4)$$

considerando sólo el caso correspondiente a la condición

$$1 - \left(\frac{m\lambda}{\Delta z}\right)^2 > 0 \quad \text{o} \quad \frac{\Delta z}{\lambda} > m, \quad (3.4.5)$$

Ahora bien, si tomamos el espectro de Fourier de v_m :

$$\widetilde{v}_m(\zeta, \eta) = \mathfrak{F}\{v_m(x, y)\},$$

Y representando a v_m en términos de su transformada de Fourier inversa, obtenemos:

$$v_m(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_m(\zeta, \eta) \exp[i2\pi(x\zeta + y\eta)] d\zeta d\eta, \quad (3.4.6)$$

entonces podemos representar la ecuación diferencial para $v_m(x, y)$ en el dominio del espacio de frecuencias como :

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}_m(\zeta, \eta) \left\{ -(2\pi)^2(\zeta^2 + \eta^2) + k^2 \left[1 - \left(\frac{m\lambda}{\Delta z} \right)^2 \right] \right\} \exp[i2\pi(x\zeta + y\eta)] d\zeta d\eta = 0, \quad (3.4.7)$$

la ec.(3.4.7) se satisface si $V_m = 0$, si el término entre paréntesis es 0 o si ambas se cumplen simultáneamente. Si el término entre paréntesis es cero, se cumple:

$$\zeta^2 + \eta^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{m^2}{\Delta z^2} = \rho_m^2, \quad (3.4.8)$$

lo cual quiere decir, que la función de transmitancia de los objetos que producen auto-imágenes debe ser discreta y localizada en anillos de radio ρ . Esta última expresión describe a los llamados Anillos de Montgomery. El número entero m está limitado como $0 \leq m \leq m_{max} \leq \Delta z$, donde la desigualdad inferior permite ignorar las ondas evanescentes (auto-imágenes débiles) y en la desigualdad superior corresponde a la condición para ρ_m^2 .

Se puede probar que anillos equidistantes en el plano de frecuencia que son característicos de aperturas circulares, o de puntos equidistantes que son característicos de rejillas de difracción lineales, corresponden a anillos de Montgomery con valores $n = 0, 1, 4, 9, \dots, m^2$. Por lo tanto, los objetos con periodicidad lateral representan un subconjunto de todos los objetos capaces de generar auto-imágenes. En otras palabras, la periodicidad lateral del objeto es suficiente pero no necesaria para obtener auto-imágenes.

En el trabajo de Szwaykowski, él a partir de los resultados de Montgomery, logró deducir una forma general para la función que describe a las auto-imágenes en coordenadas polares [26]. Bajo la condición débil de auto-imagen [27], se establece la condición acerca del espectro de Fourier del objeto, el cual deberá tomar valores distintos de cero exclusivamente en un conjunto de anillos concéntricos, cuyos radios varían con la raíz cuadrada de los números naturales y su valor estará dado como

$$\rho_m = \left(\frac{2|m|}{\lambda \Delta z} \right)^{1/2}, \quad (3.4.9)$$

como cada $v_m(\zeta, \eta)$ debe ser nulo excepto en un anillo particular m de radio ρ_m tendrá una expresión en coordenadas polares del tipo:

$$v_m(\zeta, \eta) = v_m(\rho, \theta) = C_m \delta(\rho - \rho_m) \Phi_m(\theta), \quad (3.4.10)$$

donde $\rho_m = \sqrt{\zeta^2 + \eta^2}$ y $\theta = \text{arcTan}(\zeta/\eta)$, o $\zeta = \rho \cos\theta$ y $\eta = \rho \sin\theta$, y $\phi_m(\theta)$ es una función de modulación angular. Reemplazando esto en la ec.(3.4.6) se obtiene[28]:

$$v_m(x, y) = C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \exp[i2\pi\rho(x\cos\theta + y\sin\theta)] d\theta, \quad (3.4.11)$$

utilizando coordenadas cilíndricas se obtiene:

$$v_m(x, y) = v_m(r, \varphi) = C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \exp[i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] d\theta, \quad (3.4.12)$$

con la expresión anterior, la función periódica de la ec.(3.4.2) puede representarse como:

$$v_m(x, y, z) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\theta) \exp[i2\pi[\rho r \cos(\theta - \varphi) + mz/\Delta z]] d\theta, \quad (3.4.13)$$

finalmente, todos los objetos capaces de generar auto-imágenes tendrán una función de transmitancia de la forma:

$$f(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{m_{\max}} C_m \rho_m \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(\theta) \exp[i2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] d\theta. \quad (3.4.14)$$

Los anillos de Montgomery son importantes y necesarios para esta tesis, sin embargo, es necesario aclarar que su generación no es el propósito principal de este trabajo, ni tampoco la verificación de su replicación en la dirección de iluminación. Los anillos de Montgomery son parte del proceso para llegar al objetivo, se originan para este trabajo debido a las circunstancias del tipo de holografía que se ha empleado, y son parte relevante para la generación de campos ópticos con polarización inhomogénea, por eso se consideró necesario introducir información analítica acerca de los anillos de Montgomery (y del fenómeno de autoimagen), la indagación de estos temas no es el peso central del trabajo, sino el que se mostrará en el siguiente capítulo junto a la implementación experimental.

Capítulo 4

Generación de campos ópticos periódicos mediante holografía sintética.

4.1. Campos ópticos adifraccionales

Los campos ópticos adifraccionales (NDOFs, non-diffractive optical fields) son aquellos que conservan su perfil transversal a lo largo de su propagación. Una gran variedad de NDOFs pueden ser obtenidos mediante la superposición de ondas planas cuyos vectores de propagación tienen una componente común respecto al eje de propagación [29]. En particular, si las proyecciones transversales en los vectores de propagación de las ondas tienen ángulos azimutales uniformemente distribuidos se obtiene un NDOF periódico o cuasiperiódico.

Un NDOF puede ser expresado como la superposición de ondas planas de igual amplitud, cuyos vectores de propagación tienen proyección común k_z respecto al eje z . El módulo de la componente transversal de los vectores de propagación k_t es una constante dada por la identidad:

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2, \quad (4.1.1)$$

donde $k = 2\pi\lambda$, correspondiente al número de onda. Para el caso particular de los NDOFs periódicos, los vectores de propagación de las ondas que interfieren tienen una proyección común sobre el eje z , y las proyecciones transversales de esos vectores tienen ángulos azimutales uniformemente distribuidos en el plano $x - y$. Los NDOFs periódicos formados por la superposición de Q ondas planas en el plano $z = 0$, son expresadas en coordenadas polares (r, θ) como[30]:

$$s(r, \theta) = C \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(iPn\Delta\theta) \exp[i2\pi\rho_0 r \cos(\theta - n\Delta\theta)], \quad (4.1.2)$$

donde $Pn\Delta\theta$ es el corrimiento de fase de la n -ésima onda plana con $\Delta\theta = 2\pi/Q$, p es un número entero, $2\pi\rho_0$ es el módulo de las componentes transversales de los vectores de

propagación y C es una constante de normalización que hace que el máximo de $|s(r, \theta)|$ sea igual a 1. En particular si $p = 0$, entonces $C = 1/Q$.

En la figura 4.1 se muestran las amplitudes y las fases de casos específicos de NDOFs con parámetros $Q = 5, P = 1$; $Q = 7, P = 2$ y $Q = 8, P = 0$; construidos mediante la simulación en MATLAB.

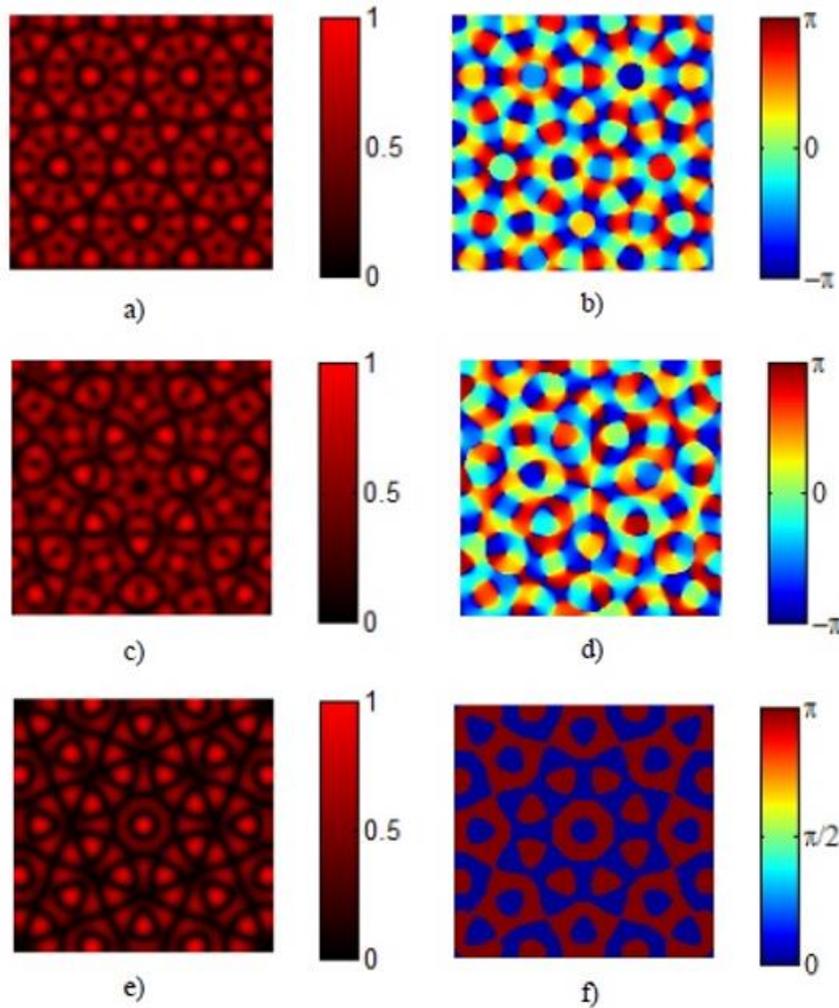


Figura 4.1 En a) y b) se muestran la amplitud y fase de un NDOF con parámetros $Q=5$ y $P=1$. En c) y d) se ilustra un NDOF con parámetros $Q=7$ y $P=2$. Por último, en e) y f) se observa un NDOF para valores de $Q=8$ y $P=0$.

4.2. Holografía Sintética

La holografía sintética es un área que permite la reconstrucción de imágenes mediante la codificación de campos ópticos descritos por una entidad matemática. A diferencia de la holografía óptica convencional, en la cual se requiere de un proceso interferométrico entre una onda de referencia y una onda objeto con la información de campo a codificar, en la holografía sintética se logra ahorrar este proceso mediante la codificación matemática del campo deseado para después ser desplegado en un SLM (Modulador Espacial de Luz), el cual es iluminado con una onda de referencia para generar el campo deseado.

La calidad y la eficiencia de la construcción de campos ópticos utilizando un SLM depende en gran medida del método de codificación que se esté empleando en la generación de hologramas sintéticos. La ventaja de trabajar con el SLM es que permite cambiar fácilmente los hologramas implementados sin alterar el arreglo experimental, lo cual se hace simplemente cambiando los parámetros del campo óptico desde el código utilizado para la generación del holograma.

De acuerdo con el tipo de modulación del holograma, es posible distinguir de dos tipos de hologramas: de amplitud y de fase. Los primeros son los que mediante una función únicamente de amplitud codifica los valores de una función o campo complejo. De manera similar, un holograma sintético de fase (SPH) tiene función de transmitancia únicamente de fase que permite codificar la función compleja. Los hologramas de amplitud absorben parte de la luz incidente, mientras que los de fase transmiten toda la luz incidente sin presentar absorción.

4.2.1. Generación de campos ópticos usando SPHs.

El propósito de un SPH(holograma sintético de fase) es generar un campo óptico complejo arbitrario. Este campo complejo puede ser expresado como[31]:

$$s(x, y) = a(x, y)\exp(i\phi(x, y)), \quad (4.2.1)$$

donde la amplitud $a(x, y)$ y la fase $\phi(x, y)$ dependen de las coordenadas espaciales (x, y) y toman valores en los intervalos $[0, 1]$ y $[-\pi, \pi]$, respectivamente. Considerando esta representación, el propósito general de los hologramas sintéticos de fase, es implementar una función $h(x, y)$ del tipo:

$$h(x, y) = \exp[i\psi(x, y)], \quad (4.2.2)$$

que contenga de alguna manera la información del campo, es decir, una forma funcional que dependa de su amplitud y su fase, dada por:

$$h(x, y) = \exp[i\psi[a(x, y), \phi(x, y)]], \quad (4.2.3)$$

que cumpla con la condición:

$$h(x, y) = Bs(x, y)\exp[i\phi_L(x, y)] + \epsilon(x, y), \quad (4.2.4)$$

que relaciona a la función compleja deseada (multiplicada en general por una constante B y por una función de fase lineal), con un cierto campo complementario considerado como una función de error $\epsilon(x, y)$, donde la fase lineal tiene la forma $\phi_L = 2\pi(u_0x + v_0y)$ en que u_0 y v_0 son las frecuencias espaciales.

Cuando la relación planteada en la Ec (4.2.4) se satisface, se dice que $h(x, y)$ es un holograma que codifica a $s(x, y)$. Aunque es claro que puede haber un número infinito de

funciones h que satisfacen la Ec(4.2.4), la función de error puede tener diferentes estructuras de modo que resulte imposible separar ambos términos y recuperar a $s(x,y)$ (llamado término de señal) con la calidad adecuada. Este hecho hace que sea necesario imponer ciertas restricciones al holograma, relacionadas con la capacidad de aislamiento de dicho término de señal.

Considerando entonces que cualquier código holográfico que represente a una función $s(x,y)$ mediante un holograma $h(x,y)$ consiste en dos términos generales: uno correspondiente a la señal y otro al campo complementario, error o ruido. El espectro de Fourier de dicho holograma es:

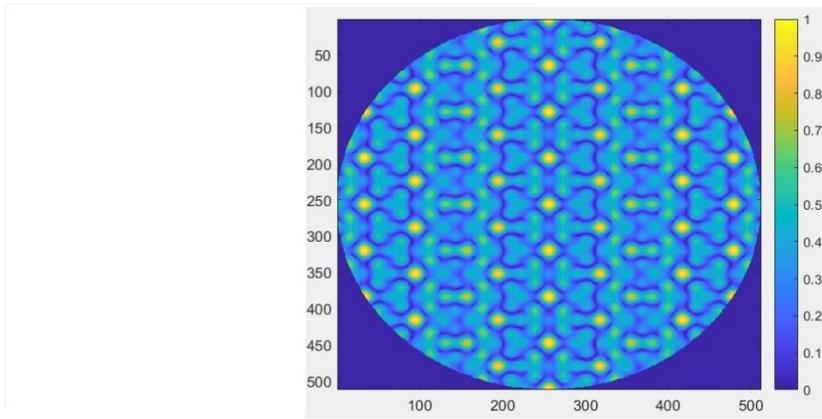
$$H(u, v) = BS(u - u_0, v - v_0) + E(u, v), \quad (4.2.5)$$

donde $S(u,v)$ es el espectro de la señal (localizado en la posición determinada por las frecuencias espaciales u_0 y v_0 de la fase lineal ϕ_L) y $E(u,v)$ es el espectro del error. Es aquí, en el plano de Fourier del holograma, en donde mediante el filtraje espacial se aísla el término de señal y donde puede determinarse la influencia del ruido, la cual será menor en cuanto más disjuntos sean los conjuntos de que se descomponen sus respectivos espectros.

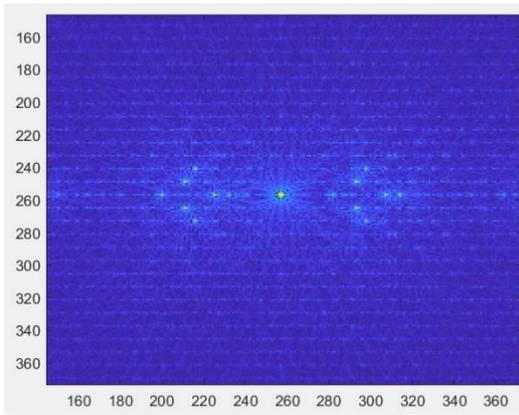
4.2.2. Holograma Kinoform.

Un holograma sintético de fase construido a partir de su propia fase es denominado kinoform. Un kinoform es la reconstrucción de un frente de onda generado por computadora, que proporciona sobre una pantalla una imagen tridimensional, sin embargo, el kinoform iluminado produce un único orden de difracción, e idealmente, toda la luz incidente se utiliza para reconstruir esta imagen. Del mismo modo, todo el contenido de la frecuencia espacial del dispositivo está disponible para una imagen individual.

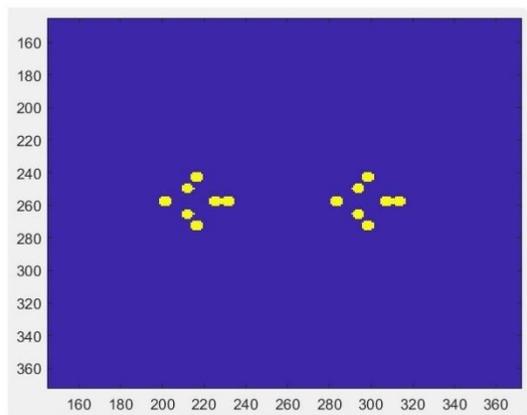
Un kinoform opera sólo en la fase de una onda incidente, basado en el supuesto de que sólo la información del frente de onda es requerida para la construcción de una imagen del objeto. La amplitud del frente de onda en el plano del kinoform se asume como constante. Por lo tanto, el kinoform puede considerarse como una lente compleja que transforma el frente de onda incidente, el cual es conocido, en el frente de onda necesario para formar la imagen deseada. A continuación, se presentan algunos ejemplos de kinoform, realizados mediante la simulación en MATLAB:



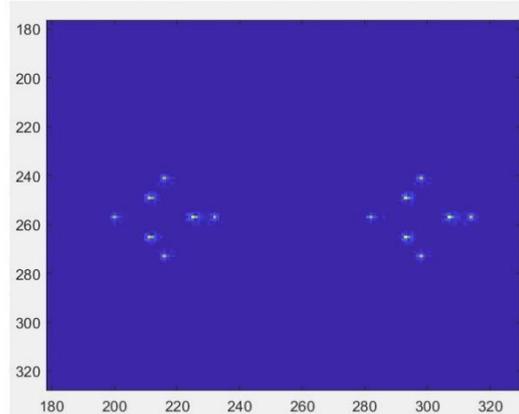
a)



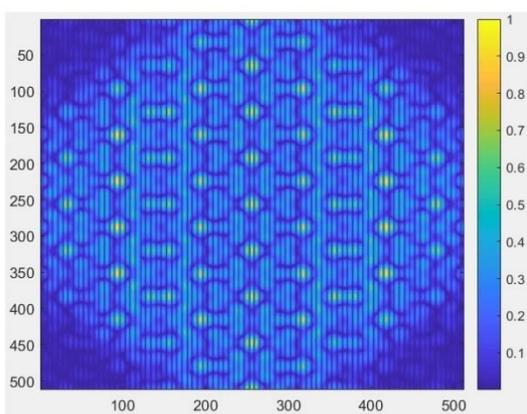
b)



c)



d)



e)

Figura 4.2 Anillos de Montgomery discretos 3 y 4 spots a) Simulación del campo ideal. b) Espacio frecuencial. c)Filtro d) Filtraje de los anillos. e) Simulación de la reconstrucción de la amplitud del campo.

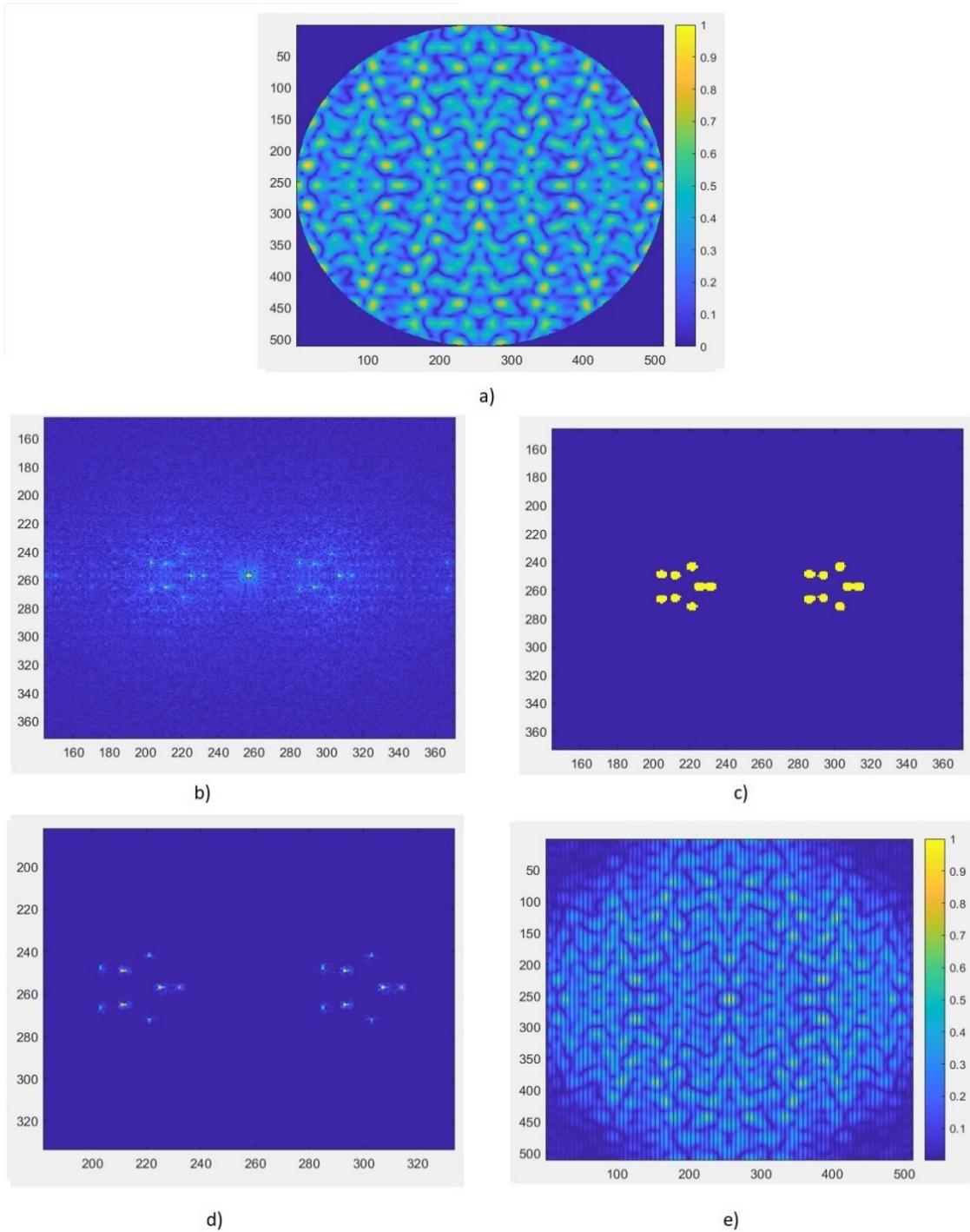


Figura 4.3 Anillos de Montgomery discretos 3 y 5 spots a) Simulación del campo ideal. b) Espacio frecuencial. c)Filtro d) Filtraje de los anillos. e) Simulación de la reconstrucción de la amplitud del campo.

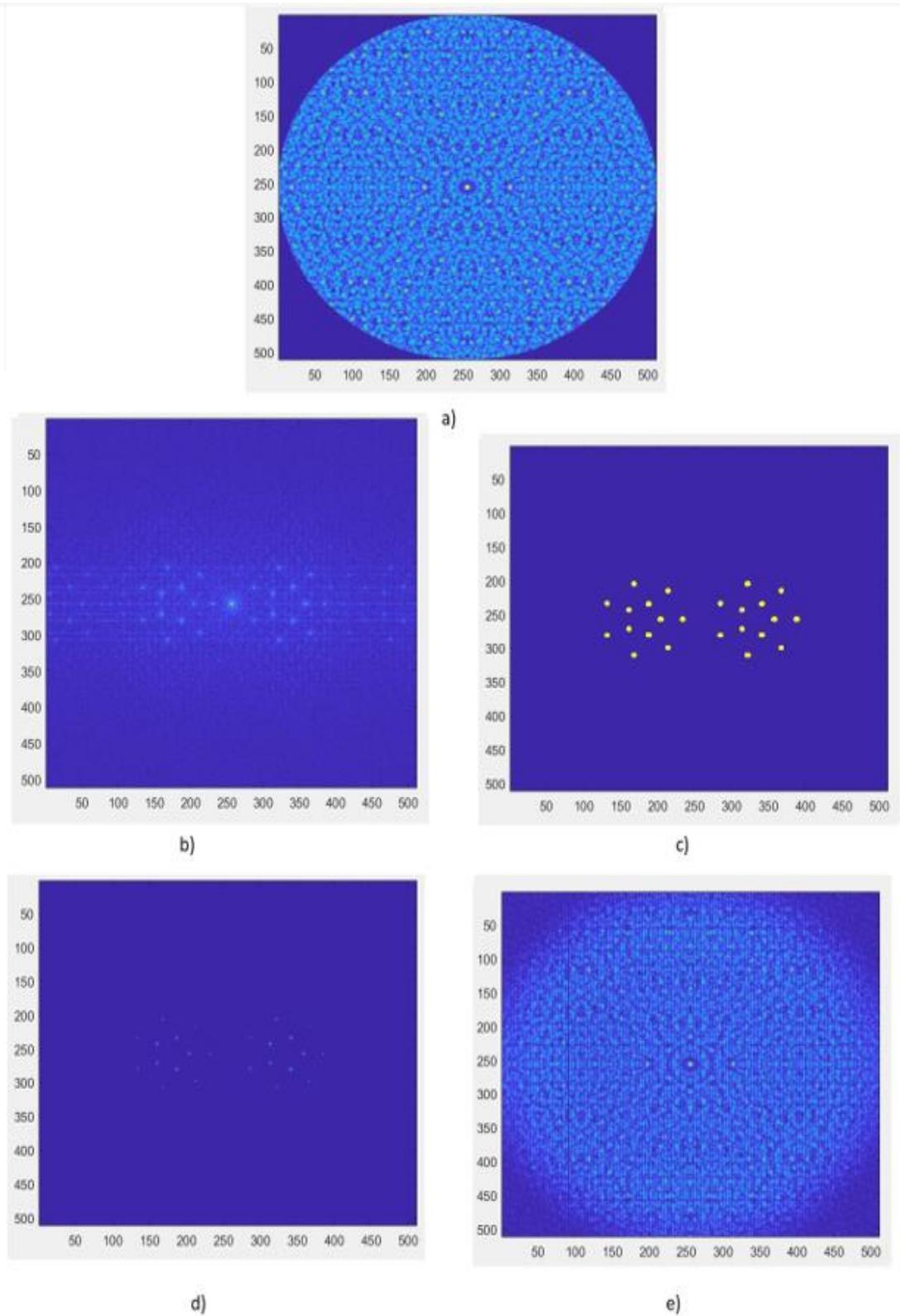


Figura 4.4 Anillos de Montgomery discretos 5 y 7 spots a) Simulación del campo ideal. b) Espacio frecuencial. c)Filtro d) Filtraje de los anillos. e) Simulación de la Reconstrucción de la amplitud del campo.

Las figuras mostradas (4.2, 4.3 y 4.4) primero se muestra en a) la amplitud de un campo generado mediante la suma de ondas descrita por la Ec. (4.1.2):

$$s(r, \theta) = C \sum_{n=0}^{Q-1} \exp(iPn\Delta\theta) \exp[i2\pi\rho_0 r \cos(\theta - n\Delta\theta)], \quad (4.2.6)$$

posteriormente en b) se toma la fase de este campo, se aplica una transformada de Fourier donde observamos los anillos de Montgomery discretos en el espacio de frecuencias. Debido al ruido que se presenta cercano a los anillos es necesario de realizar un filtraje como se muestra en c), para sólo dejar pasar la luz de los spots como se puede apreciar en d). Por último, se aplica otra transformada de Fourier con la cual se podrá reconstruir la amplitud del campo.

En la práctica, generamos un campo mediante la simulación de MATLAB, tomando su fase para desplegarla en un modulador espacial de luz (del cual hablaremos en la siguiente sección), se realiza una transformada de Fourier mediante una lente, separada a su distancia focal del modulador espacial, se realiza un filtraje posterior a la lente y luego del filtrado se realiza la segunda transformada de Fourier con una segunda lente (formando un sistema 4F), de tal forma que tenemos la reconstrucción de la amplitud de las suma de ondas deseadas, más adelante se mostrara en este trabajo la descripción esquemática y gráfica de este arreglo en mejor detalle.

Capítulo 5

Resultados y análisis experimental.

5.1. Introducción

La polarización es una de las propiedades más importantes de la luz. Esta naturaleza vectorial de la luz y su interacción con la materia hacen que tenga gran relevancia en la ciencia actual debido a sus múltiples aplicaciones en campos como metrología, tecnología de despliegue, almacenamiento de datos, comunicaciones ópticas, ciencias de los materiales, entre otras. La óptica moderna es uno de los campos donde esta importante propiedad juega un papel muy relevante [32]. Cuando el estado de polarización es controlado en la construcción de campos ópticos, se dice que se están generando campos ópticos vectoriales.

Un campo óptico vectorial es referido en este trabajo como haz vectorial y su distribución de polarización puede ser homogénea o inhomogénea. En la distribución homogénea el estado de polarización no depende de la localización espacial en la sección transversal del haz y esta distribución corresponde a estados de polarización lineal, circular y elíptica. La distribución inhomogénea contraria a la distribución homogénea, si depende de la localización espacial en la sección transversal del haz haciendo que la polarización sea espacialmente variable.

En este capítulo se da inicio con la información de un elemento esencial para la realización de este trabajo, mostrando la caracterización del modulador de luz espacial. En segunda parte del capítulo nos enfocamos en la realización experimental del trabajo, la generación de campos ópticos con polarización inhomogénea a partir de la información de los anillos discretos de Montgomery.

5.2. Caracterización del Modulador espacial de luz.

Un elemento de gran importancia que se utilizó en el arreglo experimental es el modulador espacial de luz, comúnmente nombrado como SLM (siglas en inglés: Spatial Light Modulator); este es un dispositivo que permite controlar la intensidad, la fase o la polarización de la luz que incide sobre dicho dispositivo. De acuerdo al fenómeno físico empleado en la fabricación los moduladores espaciales se dividen en: electro-ópticos, magneto-ópticos, acusto-ópticos, y de cristal líquido. El utilizado en este trabajo es un SLM de cristal líquido [33].

Cualquiera que sea el tipo de modulador seleccionado a utilizar, es necesario conocer su respuesta, es decir, la modulación de fase correspondiente a los diferentes niveles de voltaje que pueden aplicarse a cada pixel. Por tal motivo, en este capítulo damos inicio con un breve análisis numérico para la caracterización de un SLM de cristal líquido (LC-SLM) que opera en fase. De manera experimental, a través de una CCD se capturan imágenes de intensidad del campo de Fresnel, a un cuarto de la distancia de Talbot de rejillas de fase binaria desplegadas en el LC-SLM. Posteriormente, se realiza un análisis y recopilación de valores de intensidad de las imágenes capturas, para obtener una curva de fase en zonas del dispositivo con respecto a un nivel de gris g aplicado en la pantalla de cristal líquido del LC-SLM.

La caracterización de una LC-SLM de fase, se realiza de manera experimental al obtener las intensidades de campos de Fresnel de rejillas binarias en escala de gris desplegadas sobre la pantalla de cristal líquido. Un nivel de gris representa en cada píxel de la LC-SLM un voltaje, el cual rota las moléculas de la pantalla de cristal líquido y produce un cambio de fase.

El arreglo a utilizar se muestra en la figura 5.1, se utilizó un láser He-Ne (633nm de longitud de onda), a la salida se coloca una placa retardadora (Q) $\lambda/2$ y un polarizador lineal (P) para asegurar luz polarizada horizontalmente. Siguiendo la trayectoria del haz de luz, se extiende el tamaño del spot mediante un objetivo de microscopio (O) y justo a la salida se hace un filtraje con un pinhole (Ph). Con una lente positiva (L) se realiza el colimado del haz, ubicando la lente después del pinhole a la distancia focal. Posterior a la lente, la luz incide en la pantalla del modulador espacial LC - SLM.

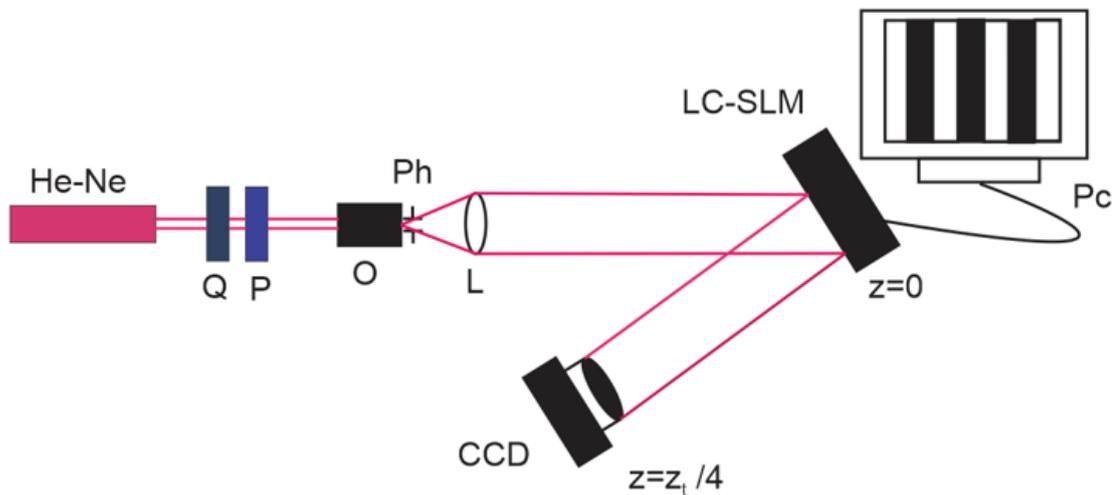


Figura 5.1 Arreglo experimental para la caracterización del modulador espacial de luz.

Por medio de una computadora (Pc) se envían rejillas binarias de fase en escala de grises, que son desplegadas en el LC-SLM de manera que se modifica la fase del campo incidente. Por último, el campo reflejado por el LC-SLM se visualiza con una cámara CCD colocada a un cuarto de la distancia de Talbot [29]. Las imágenes de las rejillas binarias desplegadas se generaron con un periodo $p = 60$ píxeles y con dos niveles de gris g_1 y g_2 , el nivel g_1 se mantiene constante a un valor cero, mientras que g_2 en la caracterización de la LC-SLM de este trabajo vario de 0 a 180 en saltos de 5. En la figura 5.2 se muestra el ejemplo de una rejilla con $g_1 = 0$ y $g_2 = 255$ (el máximo valor de escala de gris para la rejilla).

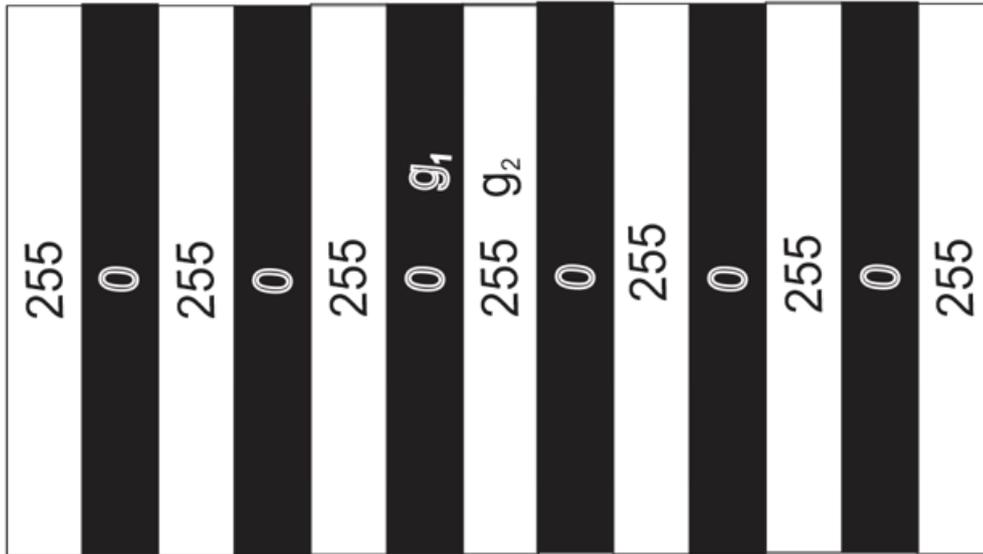


Figura 5.2 Rejilla binaria: g_1 se mantiene constante a un valor de escala de grises de 0 y g_2 varía en saltos de 5, desde 0 a 255.

Para obtener la curva de modulación de fase del LC-SLM, hay que recurrir a la ec.(3.3.14), que como se observa relaciona la visibilidad de las franjas con la fase.

$$V = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \text{Sen}(\phi), \quad (5.2.1)$$

Sobre las imágenes capturas, se obtiene el valor de I_1 e I_2 al promediar el valor de intensidades en dos franjas adyacentes mediante el análisis en MATLAB. Debido a las fluctuaciones posibles, no se calcula el promedio de intensidad de toda la franja, sólo se toma una pequeña región de píxeles de las franjas, dicha región debe ser la misma en cada una de las imágenes capturadas. En la figura 5.3 se presentan algunas de las imágenes obtenidas para la caracterización del modular en determinados valores en la escala de gris de la rejilla binaria.

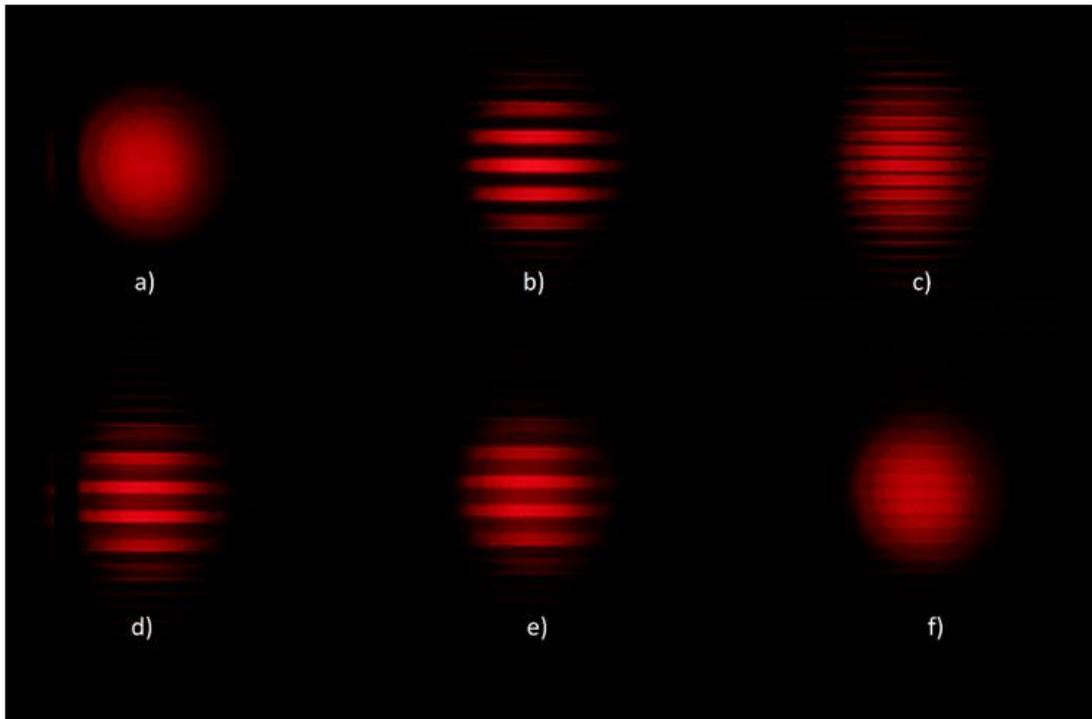


Figura 5.3. Imágenes capturadas con las CCD para valores de: a)0, b)35, c)70, d)110, e)140 y f)180.

Debido a la función *seno* de la ec. (5.1.1) se tienen puntos críticos ahí donde la visibilidad se vuelve cero, máxima o mínima de la función, para valores $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. En tales puntos como $\phi = 0$ y $\phi = \pi$, la visibilidad se vuelve cero ya sea porque las franjas tienen la misma iluminación uniforme mínima o máxima. Para $\phi = \pi/2$ se tiene la visibilidad máxima igual a 1 ($I_1 = 1$ e $I_2 = 0$), mientras que en $\phi = 3\pi/2$ la visibilidad es -1 denotando una inversión de contraste en las franjas ($I_1 = 0$ e $I_2 = 1$), finalmente en $\phi = 2\pi$ la visibilidad volverá a ser nula. Tras el análisis numérico en MATLAB se encontró que los niveles de gris correspondientes a los puntos críticos son: 0, 35, 70, 125 y 180. Mediante la interpolación de los datos de fase y nivel de gris se obtuvo la curva de fase de modulación del LC-SLM, la cual se observa en la siguiente figura.

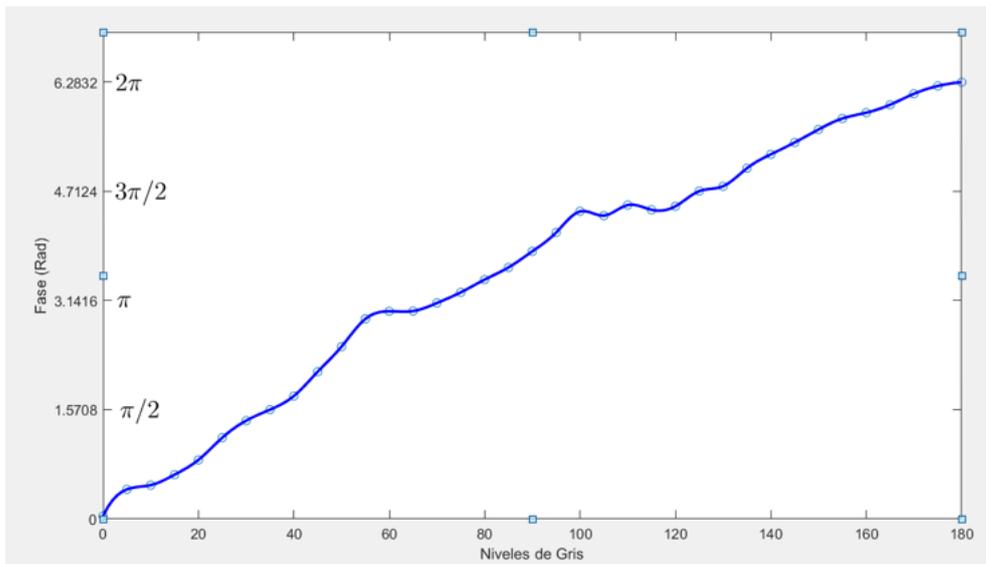


Figura 5.4 Curva de modulación del LC-SLM.

5.3. Arreglo Experimental.

En la figura 5.5 se muestra el arreglo experimental utilizado para el propósito de esta tesis. Se utilizó un láser He-Ne ($\lambda = 632,8nm$) el cual es horizontalmente polarizado mediante una placa $\lambda/2$ ($Q1$) y un polarizador lineal ($P1$), el haz ingresa en un objetivo de microscopio (O siendo inmediatamente filtrado con un pinhole (Ph) expandiendo la luz, y a unos centímetros es colimada por una lente (Lc). Después se colocó un sistema óptico $4F$ con lentes ($L1$ y $L2$) de distancia focal de $40cm$ ($f1$), y así, el haz llega a la pantalla de cristal líquido del LC-SLM, como el área del spot de luz supera el área de la pantalla, se colocó un diafragma ($D1$) entre la lente Lc y el sistema $4f$ para seleccionar una pequeña región de luz que incide en la pantalla del LC-SLM.

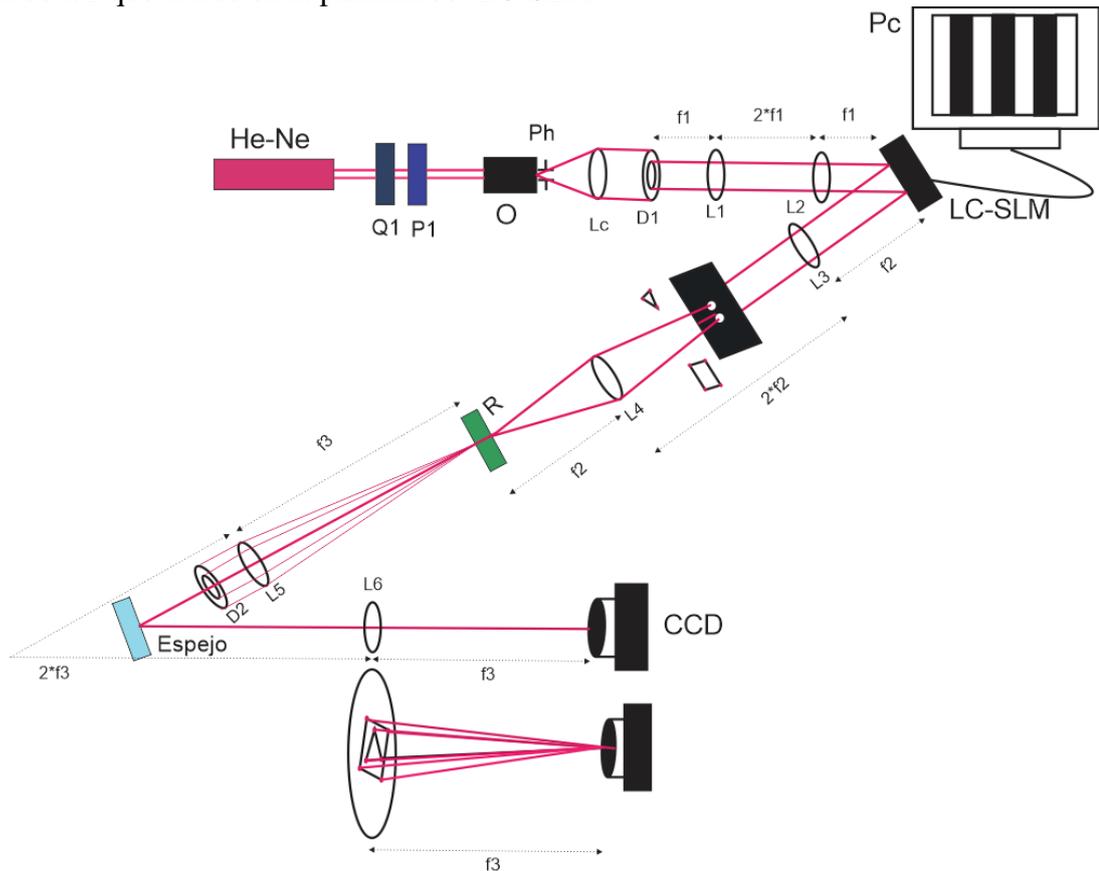


Figura 5.5 Esquema del arreglo experimental.

Posteriormente, la luz se refleja en la pantalla de cristal líquido, pero ahora lleva la información codificada de un campo óptico, desplegada por una computadora en el LC-SLM mediante un holograma de fase. Se ubicó un nuevo sistema óptico $4f$ con lentes ($L3$ y $L4$) de distancia focal de $75cm$ ($f2$) al cual llega el haz con la información del holograma, la primera lente ($L3$) se encarga de realizar una transformada de Fourier y a $75cm$ de esta lente se ubicó un filtro espacial encargado de seleccionar los anillos discretos de Montgomery (spots de luz). En el holograma de fase se envió la información de dos conjuntos de anillos de Montgomery, como se quería combinar los anillos para formar un solo campo, se ubicó una rejilla de difracción (R) a la salida del sistema $4f$, ahí los órdenes de difracción 1 o -1 salen perpendiculares a la rejilla uniendo así los anillos de Montgomery, se muestra descripción geométrica amplificada en la figura 5.6. Para observar el campo resultante se necesita que todos los spots se unan en uno solo [29], en decir enfocarlos en un solo punto, por lo cual fue necesario hacer uso de un último sistema

$4f$ con lentes ($L5$ y $L6$) de $1m(f3)$ de distancia focal; en ultima trayectoria del haz es necesario posicionar un diafragma ($D2$) posterior a la lente $L5$ para eliminar los órdenes de difracción de la rejilla no deseados, finalmente a la distancia focal de la lente $L6$ se situó la cámara CCD.

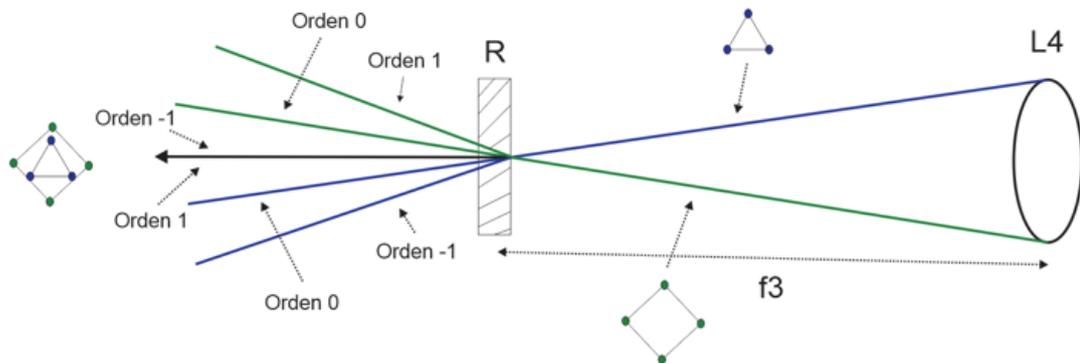


Figura 5.6 Esquema de la dispersión de rayos en la rejilla de difracción. Los anillos discretos llegan a la rejilla y se dispersan en sus diferentes órdenes de difracción, el orden cero de respectivos haces pasan sin cambio alguno a la dirección original del haz, pero los órdenes -1 y 1 salen perpendiculares a la rejilla superponiendo los anillos.

5.3.1. Análisis de la generación de los anillos de Montgomery mediante un Kinorform

En el capítulo 4 sección 4.2 se hace una breve explicación de la generación del campo óptico mediante el uso de un kinoform, aquí se realiza nuevamente una explicación de acuerdo a los fenómenos que van sucediendo en el arreglo experimental mostrado en la figura 5.5, a modo de ejemplo se presentan simulaciones de MATLAB de acuerdo a lo que se debe ver en ciertas secciones del experimento.

Desde la Pc se introduce un holograma de fase en el LC-SLM, en el cual va la información de fase de dos campos construidos en MATLAB con la ec.(4.2.6), un campo para la propagación de tres ondas planas E_1 y un campo con la propagación de cuatro ondas planas, generando así un campo total $E_T = E_1 + E_2$. Esta información es la que lleva el haz de luz luego de ser reflejado por la pantalla de cristal líquido, al pasar por la lente $L3$ se realiza una transformada de Fourier de la cual obtenemos un arreglo de anillos discretos de Montgomery, 3 spots en el centro (provenientes de las tres ondas) y 4 spots externos (provenientes de las 4 ondas), mediante la multiplicación del campo E_T con una función exponencial portadora son separados los conjuntos de anillos al realizarse la transformada de Fourier, esto con la finalidad de, más adelante, poder cambiar la polarización de un conjunto de anillos respecto del otro y al final obtener un campo con polarización inhomogénea. Después de la lente $L3$ se colocó un filtro espacial que permite seleccionar los spots y evitar el ruido que se mantiene a su alrededor. Al realizar la segunda transformada de Fourier en la lente $L4$ ya tenemos información de amplitud de los campos, como se busca superponer nuevamente los anillos, se colocó una rejilla de difracción (ver figura 5.6) y de esta forma reconstruir la amplitud del campo que ha sido codificado por el holograma de fase, siendo necesario previo a la reconstrucción instalar un último sistema $4f$.

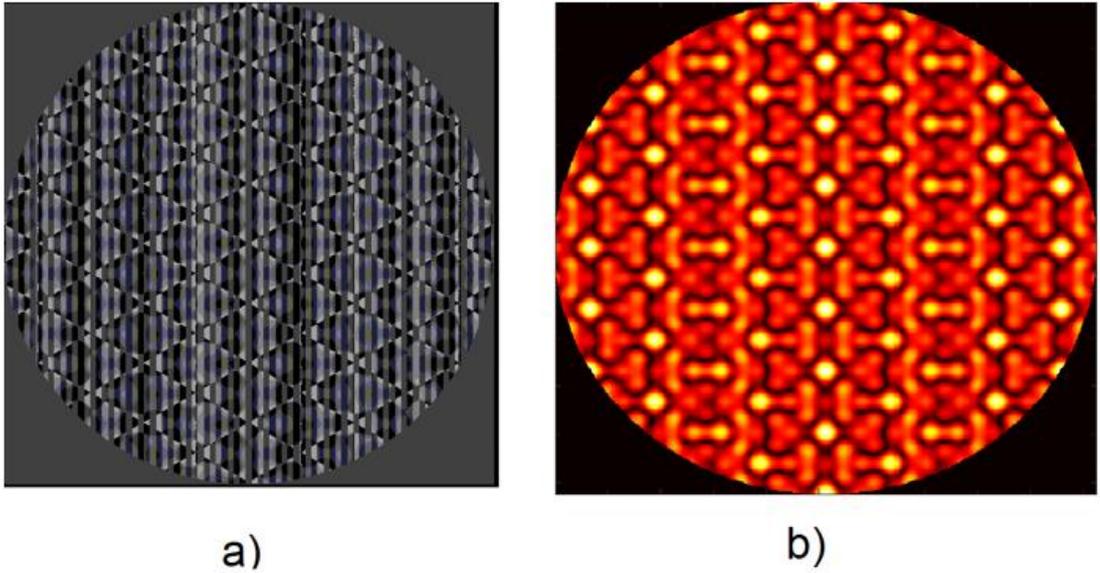


Figura 5.7 a) Holograma de fase codificado enviado desde la Pc al LC-SLM. b) Simulación de un campo óptico generado por la combinación de tres y cuatro ondas planas propagándose.

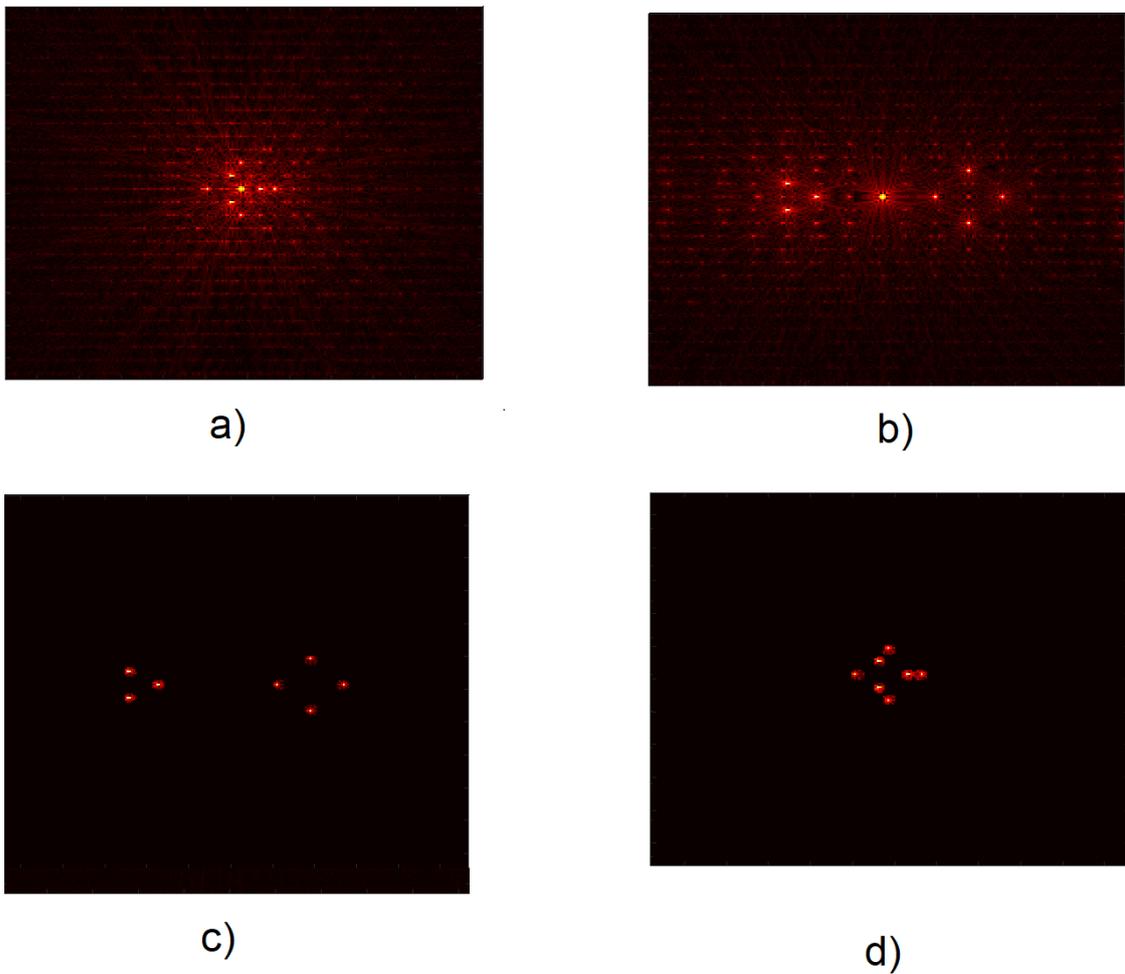


Figura 5.8 a) Anillos de Montgomery discretos generados por el campo total E_T , tres en el centro y cuatro en el exterior. b) Anillos de Montgomery separados mediante exponenciales portadoras en E_1 y E_2 . c) Anillos discretos después de ser filtrados. d) Recombinación de los anillos al pasar por la rejilla de difracción.

5.4. Resultados experimentales.

5.4.1. Generación experimental de campos ópticos con polarización inhomogénea mediante anillos discretos de Montgomery

En esta sección se presentan las imágenes de las amplitudes de los campos ópticos reconstruidos experimentalmente, los cuales fueron generados mediante hologramas de fase por la superposición de ondas planas en coordenadas polares definidas por las ecuaciones:

$$s_1(r, \theta) = C_1 \sum_{n_1=0}^{Q_1-1} \exp(iP_1 n_1 \Delta\theta_1) \exp[i2\pi\rho_1 r \cos(\theta - n_1 \Delta\theta_1)], \quad (5.4.1)$$

$$s_2(r, \theta) = C_2 \sum_{n_2=0}^{Q_2-1} \exp(iP_2 n_2 \Delta\theta_2) \exp[i2\pi\rho_2 r \cos(\theta - n_2 \Delta\theta_2)], \quad (5.4.2)$$

donde S_1 genera los anillos de Montgomery interiores y S_2 los anillos de Montgomery exteriores; el número de spots de los anillos es determinado en la sumatoria por el valor Q_j ($j = 1, 2$), $\rho_1 = \Delta u/55$ y $\rho_2 = \Delta u/33$ siendo Δu el ancho de banda del modulador espacial igual a $1/8\mu m$. Los radios de los anillos (los spots son equidistantes) están dados como $R_1 = \lambda f 2\rho_1$ y $R_2 = \lambda f 2\rho_2$. Por último, P_1 y P_2 son corrimientos de fase que permiten modificar la forma del campo, de tal manera que para diferentes valores se obtendrán diferentes estructuras en los campos aun para el mismo arreglo de anillos.

A continuación se muestran algunos ejemplos de campos ópticos numéricos y experimentales, generados por anillos discretos de Montgomery con la misma polarización (horizontal) con 2-4 spots, 3-4 spots, y 3-6 spots (con una un corrimiento de fase dado por el cambio en el valor de P).

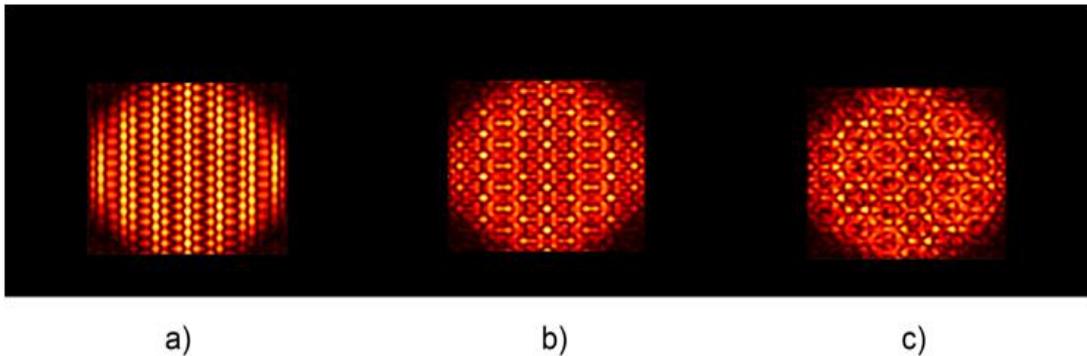


Figura 5.9. Amplitud de los campos simulados generados por los anillos discretos de Montgomery. a) Campo con parámetros ($Q_1 = 2$, $Q_2 = 4$) y ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$). b) Campo con parámetros ($Q_1 = 3$, $Q_2 = 4$) y ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$). c) Campo con parámetros ($Q_1 = 3$, $Q_2 = 6$) y ($P_1 = 1$, $P_2 = 3$).

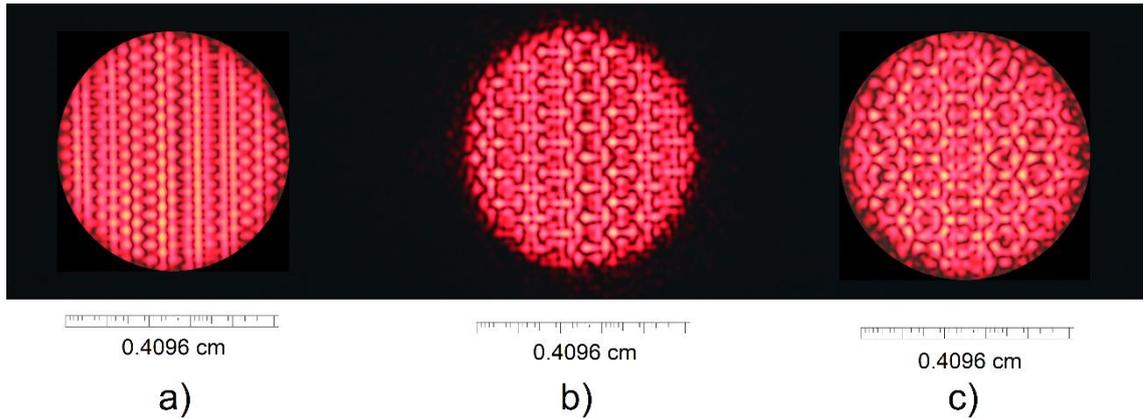


Figura 5.10. Amplitud de los campos experimentales generados por los anillos discretos de Montgomery. a) Campo con parámetros $(Q_1 = 2, Q_2 = 4)$ y $(P_1 = 0, P_2 = 0)$. b) Campo con parámetros $(Q_1 = 3, Q_2 = 4)$ y $(P_1 = 0, P_2 = 0)$. c) Campo con parámetros $(Q_1 = 3, Q_2 = 6)$ y $(P_1 = 1, P_2 = 3)$.

Para cambiar la polarización de los campos de homogénea a inhomogénea, se optó por colocar una placa retardadora $\lambda/2(Q_2)$ (ver figura 5.11) para obtener polarización lineal distinta entre los anillos internos y externos, de igual manera mediante la introducción de una placa retardadora $\lambda/4(Q_3)$ (ver figura 5.12) se logró modificar de polarizaciones lineales a polarizaciones circulares, teniendo dos versiones de campos con polarizaciones inhomogéneas para analizar en diversas configuraciones de anillos.

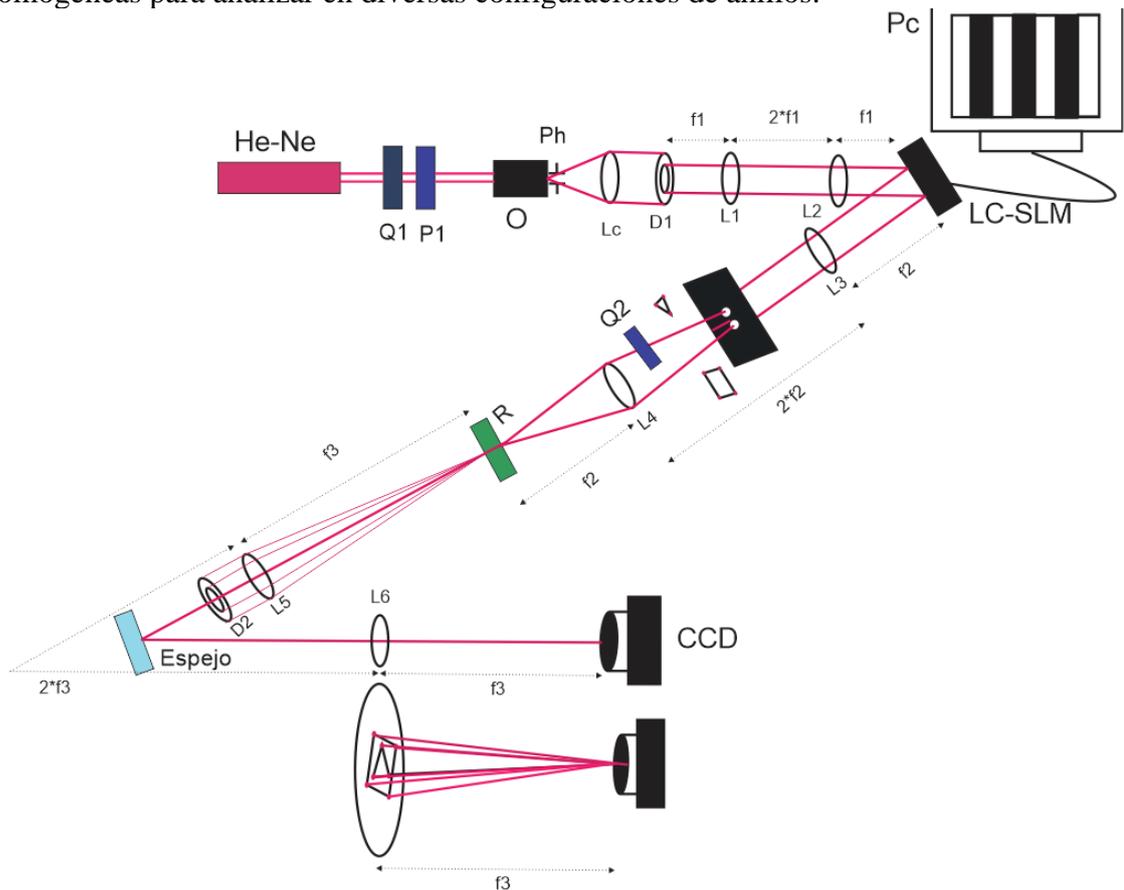


Figura 5.11 Esquema del arreglo experimental con una placa retardadora $\lambda/2$ (Q_2) para cambiar la polarización lineal de uno de los anillos de Montgomery.

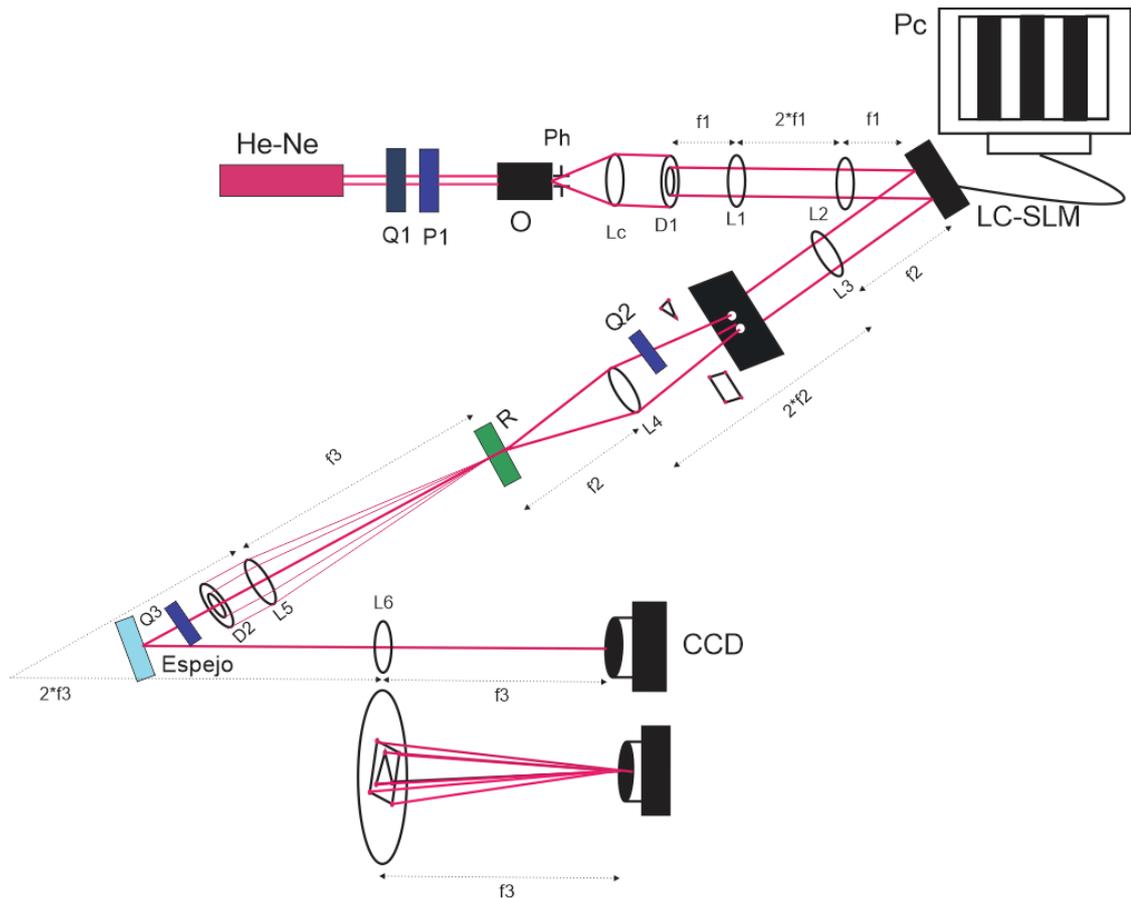


Figura 5.12 Esquema del arreglo experimental con una placa retardadora $\lambda/2$ (Q2) y $\lambda/4$ (Q3) para generar polarización circular en los anillos de Montgomery.

Primero se presentan los resultados de la generación de campos con polarización inhomogénea, mediante la suma de dos conjuntos de anillos de Montgomery con polarizaciones lineales ortogonales entre sí, es decir, unos anillos con polarización lineal vertical y otros con polarización lineal horizontal. Se muestran imágenes para el campo resultante mediante la simulación y el campo generado experimentalmente, para arreglos de 2-4 anillos ($P_1 = 2, P_2 = 0$), 2-4 anillos ($P_1 = 0, P_2 = 2$) y 3-6 anillos ($P_1 = 1, P_2 = 3$).

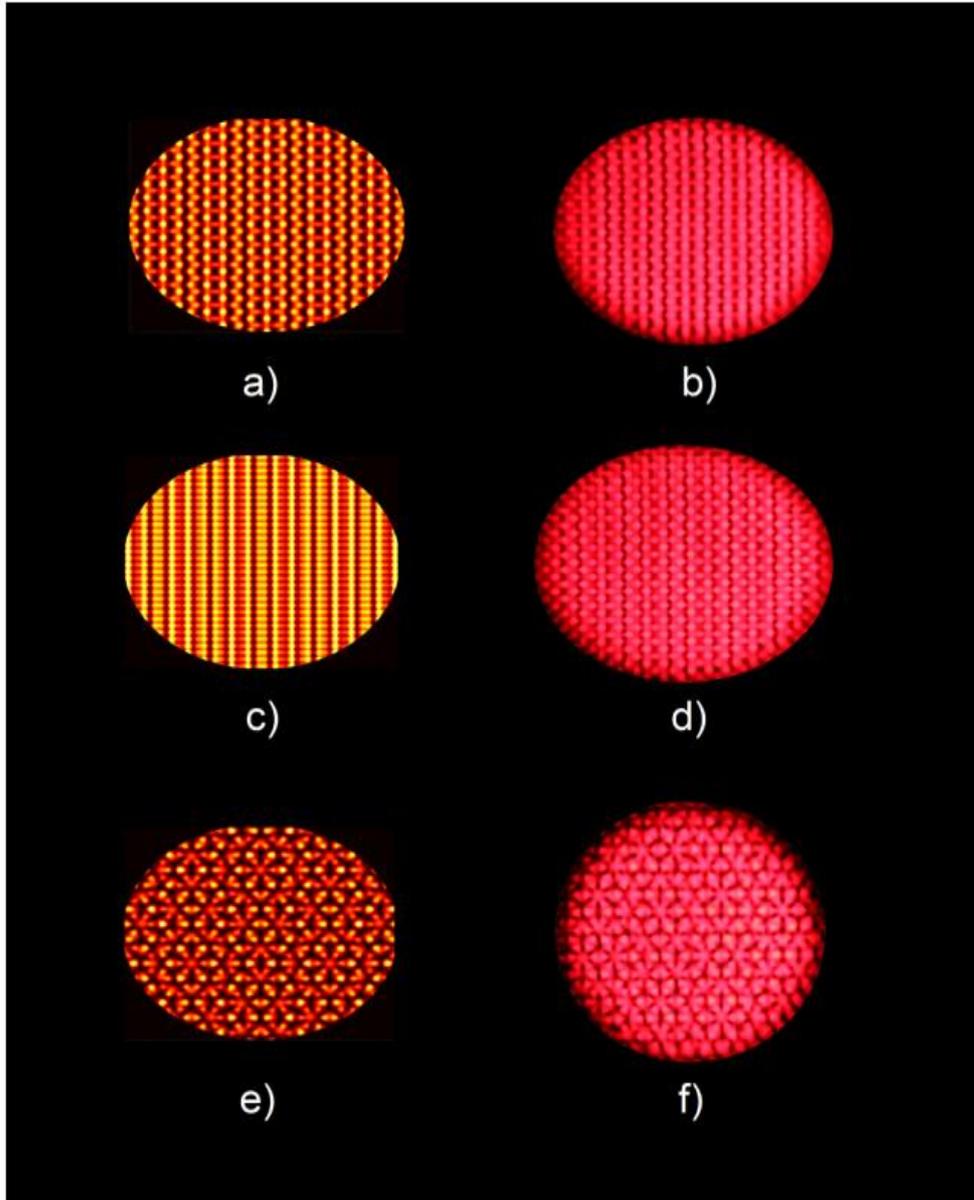


Figura 5.13. La columna izquierda presenta las simulaciones numéricas y la columna derecha la generación experimental. a) Campo numérico para 2-4 anillos ($P_1 = 2, P_2 = 0$). b) Campo experimental para 2-4 anillos ($P_1 = 2, P_2 = 0$). c) Campo numérico para 2-4 anillos ($P_1 = 0, P_2 = 1$). d) Campo experimental para 2-4 anillos ($P_1 = 0, P_2 = 1$). e) Campo numérico para 3-6 anillos ($P_1 = 1, P_2 = 3$). f) Campo experimental para 3-6 anillos ($P_1 = 1, P_2 = 3$).

Previo a ingresar la luz en la cámara CCD, se colocó un polarizador lineal para realizar una función de analizador a ángulos de 0° , 45° y 90° respecto al eje vertical, con la finalidad de omitir componentes de polarización en los campos generados. A 0° se eliminó la componente horizontal de polarización, dejando sólo el campo con polarización vertical, mientras que a 90° se pierde la componente vertical y sólo queda la componente de polarización horizontal y para 45° se mantiene parte de ambas polarizaciones. En las figuras 5.14, 5.15 y 5.16 se presenta la captura de imágenes generadas experimentalmente y la simulación numérica de estos campos para los arreglos mostrados en la figura 5.13.

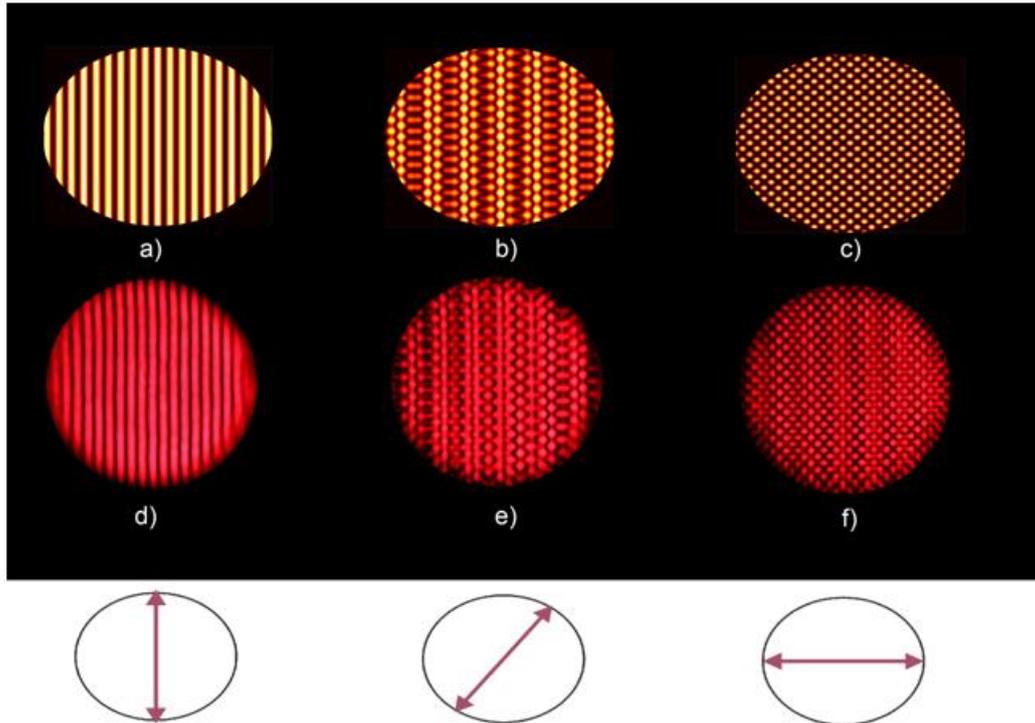


Figura 5.14. Análisis de las componentes de polarización del arreglo 2-4 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 0$). Simulaciones: a) 0° , b) 45° y c) 90° . Generación experimental: d) 0° , e) 45° y f) 90° .

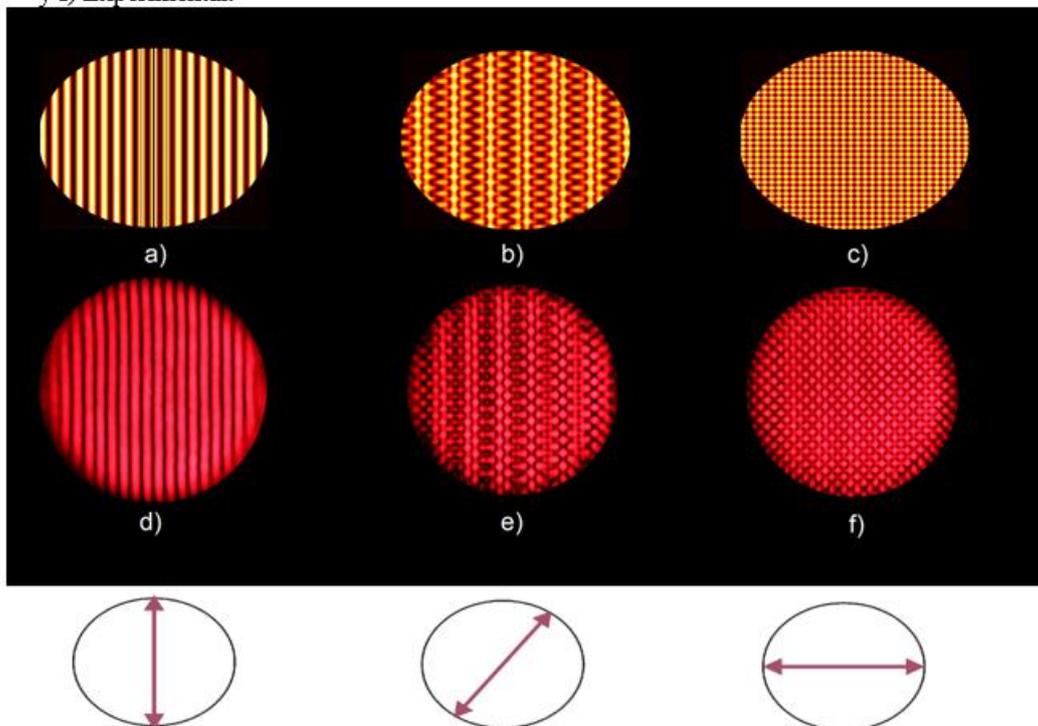


Figura 5.15. Análisis de las componentes de polarización del arreglo 2-4 anillos ($P_1 = 0$, $P_2 = 1$). Simulaciones: a) 0° , b) 45° y c) 90° . Generación experimental: d) 0° , e) 45° y f) 90° .

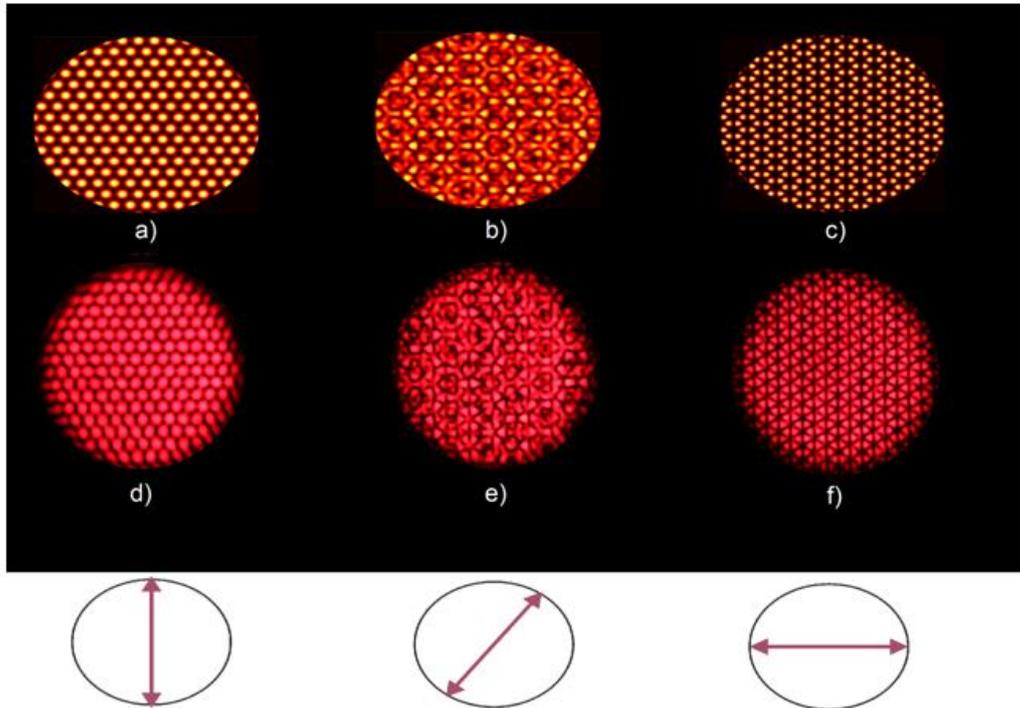


Figura 5.16. Análisis de las componentes de polarización del arreglo 3-6 anillos ($P_1 = 1$, $P_2 = 3$), 0° . Simulaciones: a) 0° , b) 45° y c) 90° . Generación experimental: d) 0° , e) 45° y f) 90° .

En el análisis de los campos obtenidos bajo las rotaciones del polarizador analizador, en particular, para los casos de 0° y 90° se elimina una componente de polarización, de manera que el restante muestra un campo óptico producto de un solo conjunto de anillos, es decir tomando como ejemplo el arreglo de 3-6 anillos, a 0° se elimina la componente horizontal dejando únicamente la componente vertical, que es equivalente a tener un campo óptico generado por los anillos $S1(3 \text{ spots})$. Por otro lado, a 90° se elimina la componente vertical, dejando llegar a la CCD solamente la componente horizontal, equivalente a tener sólo el campo óptico de los anillos $S3$, de tal manera que los resultados obtenidos mediante el arreglo de la figura 5.11, nos da un campo con polarización inhomogénea formado por la combinación de polarizaciones lineales ortogonales entre sí.

Para el otro caso de polarización inhomogénea se colocó una placa $\lambda/4$ a 45° (figura 5.12) obteniendo a la salida polarizaciones circulares opuestas entre dos conjuntos de anillos discretos, la polarización vertical se vuelve circular derecha y la polarización horizontal se convierte en circular izquierda. Para esta parte se muestran resultados de dos arreglos: 2-4 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 0$) y 2-5 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 2$) en la figura 5.17.

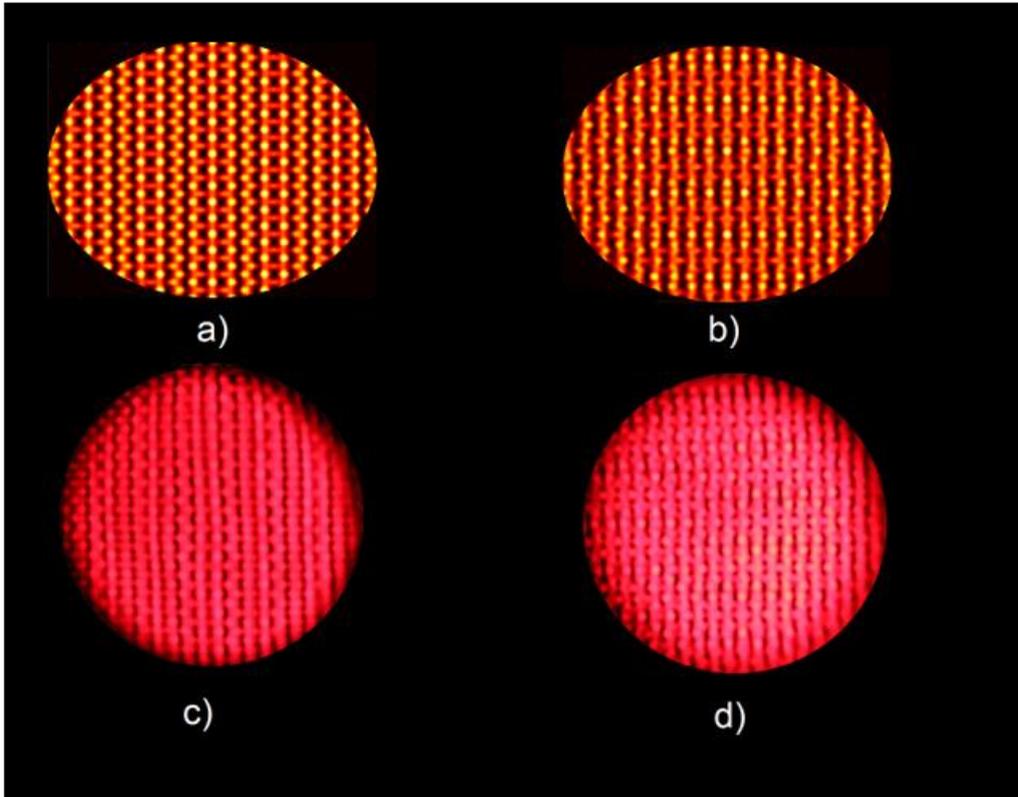


Figura 5.17. a) Campo numérico para 2-4 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 0$). b) Campo experimental para 2-4 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 0$). c) Campo numérico para 2-5 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 2$). d) Campo experimental para 2-5 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 2$).

Similar al caso de las polarizaciones lineales, antes de la cámara CCD se colocó un polarizador lineal para analizar las componentes de campo a 0° , 45° y 90° respecto al eje vertical. Para el polarizador lineal rotado a 0° y 90° , los campos obtenidos solo se diferencian por el número complejo i , que físicamente significa un desfase entre los campos resultantes. Por último, para el caso de la rotación a 45° se tienen tanto las componentes reales e imaginarias de los campos con polarizaciones circulares opuestas entre sí. (en el apéndice C se hace el desarrollo matricial de los cambios de polarización a través del analizador). En las figuras 5.18 y 5.19 se muestran los resultados experimentales, así como sus respectivas simulaciones numéricas.

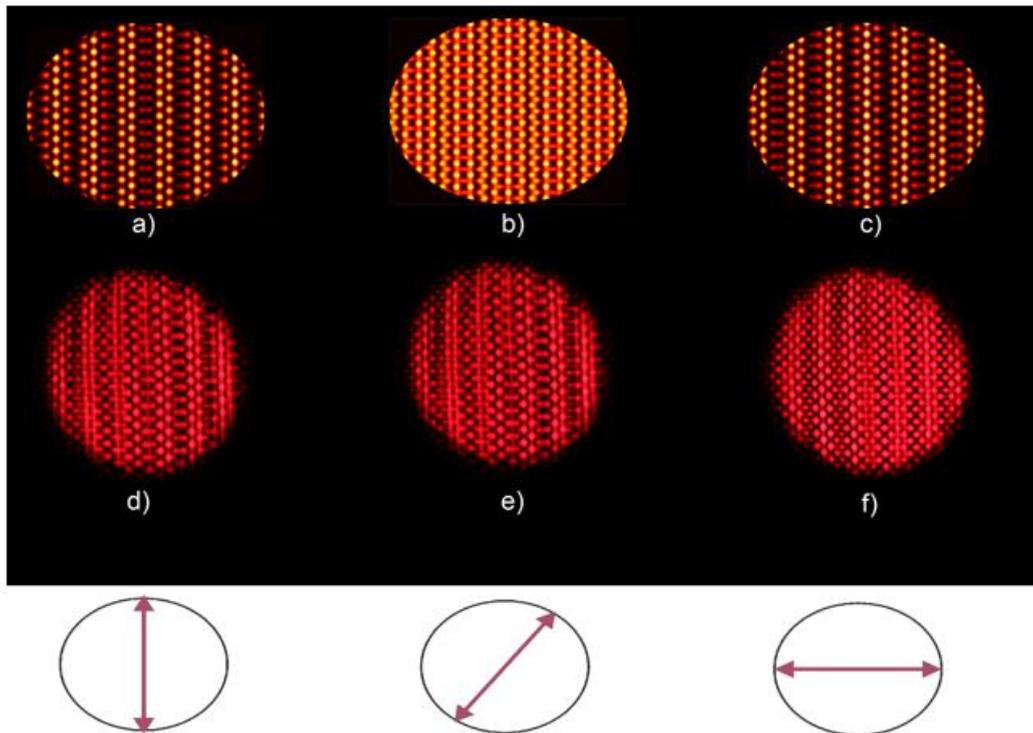


Figura 5.18. Análisis de las componentes de polarización del arreglo 2-4 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 0$). Simulaciones: a) 0° , b) 45° y c) 90° . Generación experimental: d) 0° , e) 45° y f) 90° .

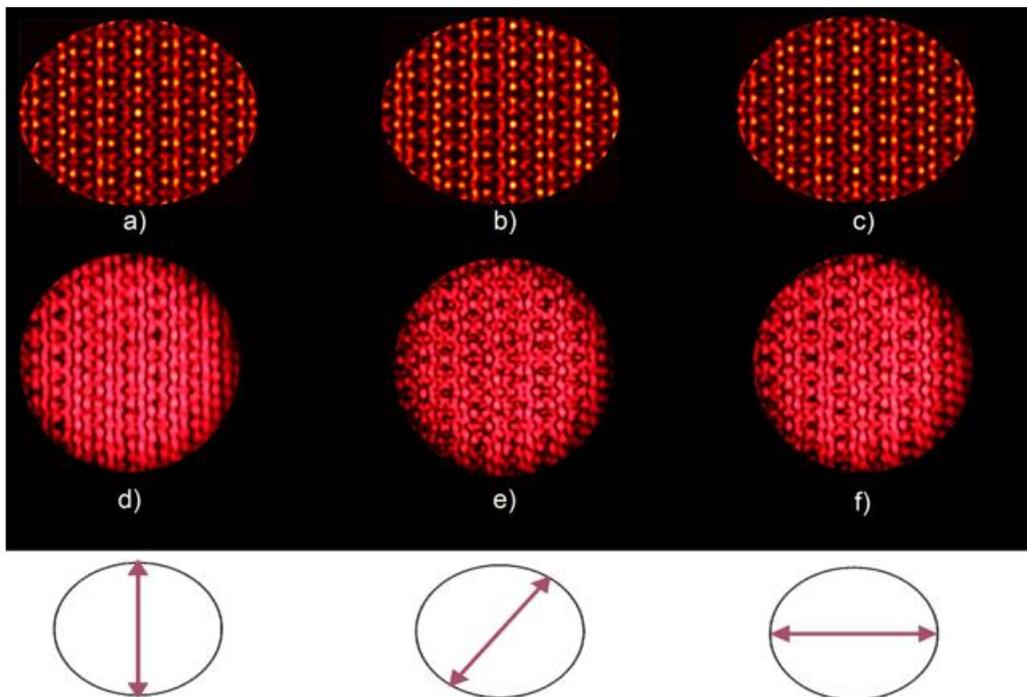


Figura 5.18. Análisis de las componentes de polarización del arreglo 2-5 anillos ($P_1 = 2$, $P_2 = 2$). Simulaciones: a) 0° , b) 45° y c) 90° . Generación experimental: d) 0° , e) 45° y f) 90° .

En general, las imágenes experimentales presentan varios defectos de intensidad y deformidades geométricas comparadas a las simulaciones numéricas, las cuales presentan

estructuras bastante claras y bien definidas, estas disparidades visuales entre los campos experimentales y simulados se deben a varios factores a considerar. El primero de ellos tiene que ver con la intensidad de los anillos (spots), en la simulación todos los spots se realizan con la misma intensidad, mientras que al ser desplegada la información por el LC-SLM los anillos exteriores pierden intensidad con respecto a los interiores. El filtraje es de gran importancia, por un lado se desea que no se adjunte ruido y se busca una apertura pequeña para que solo atraviesen los spots, pero de igual manera los spots no deben verse difractados u obstruidos por las orillas de las perforaciones de la tarjeta, haciendo que las aperturas sean las más pequeñas posibles para que no pase ruido pero suficientemente grandes para que los anillos no se obstruyan con las orillas, lo cual lleva a pérdida de información en el resultado final. Por último, la alineación de las lentes también es un factor importante a tener en cuenta, el hecho de que la luz no incida sobre el centro de la lente y de manera perpendicular a ella seguramente introduce cambios de fase, haciendo que las ondas no lleguen de manera correcta a la CCD y produciendo ciertos cambios de intensidad no deseados, lo que nos lleva a que muchas regiones no se muestren tan oscuras o brillantes como presenta la simulación numérica. A pesar de estos inconvenientes y errores sistemáticos, se logró la construcción de campos ópticos con polarización inhomogénea gracias a la generación de anillos de Montgomery discretos mediante la modificación de la polarización de estos.

Propagación de los anillos de Montgomery más allá del plano de observación.

Si en el arreglo de la figura 5.5 se desplaza la cámara CCD a una distancia $2f_3$ desde la lente L_5 , se observó como en esa localización se genera nuevamente el patrón de anillos de Montgomery discretos. En la figura 5.20 se muestra la reconstrucción de los anillos de Montgomery discretos para cierto número de anillos.



Figura 5.19. Desplazamiento de la cámara CCD para observar la reconstrucción de los anillos de Montgomery a una distancia f_3 desde donde se generó el campo de polarización inhomogénea.

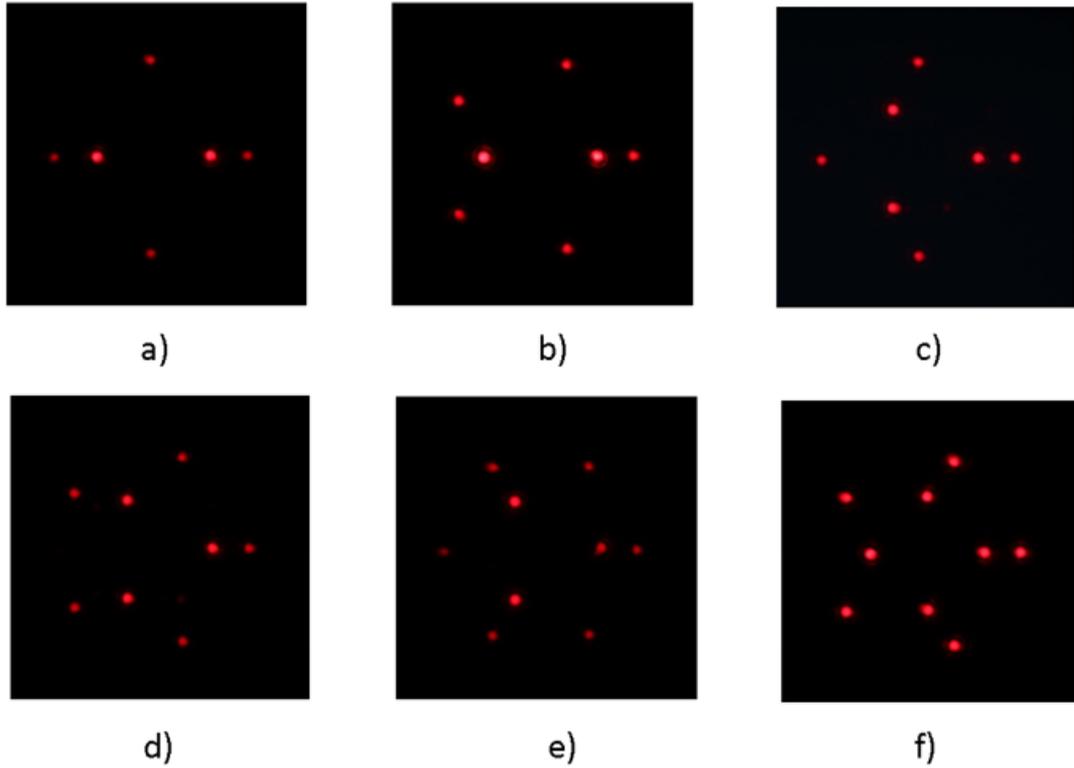


Figura 5.20. Reconstrucción de los anillos de Montgomery discretos. a) $Q_1 = 2$ y $Q_2 = 4$, b) $Q_1 = 2$ y $Q_2 = 5$, c) $Q_1 = 3$ y $Q_2 = 4$, d) $Q_1 = 3$ y $Q_2 = 5$ e) $Q_1 = 3$ y $Q_2 = 6$ y f) $Q_1 = 4$ y $Q_2 = 5$.

En la figuras 5.20 además de poder observar la formación de los anillos de Montgomery discretos de manera experimental, podemos notar esos defectos mencionados en el análisis de los resultandos, aspectos como la desigualdad de intensidad entre los spots interiores con los spots exteriores, e incluso desigualdad entre los mismos spots pertenecientes al mismo anillo, posiblemente debido a la obstrucción del filtro sobre ese spot, deteriorando así la forma del campo ideal construido con la simulación numérica.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se da inicio a partir de las Ecuaciones de Maxwell para la teoría electromagnética, de las cuales se deduce la Ecuación de Onda para el campo electromagnético, y particularmente, siendo la luz una onda electromagnética esta cumple con la Ecuación de Onda. La luz al ser considerada como un fenómeno ondulatorio, cumple con el principio de superposición; de tal manera que al encontrarse dos o más ondas en un lugar determinado en el espacio, bajo ciertas condiciones se produce un fenómeno conocido como interferencia. Una de esas condiciones tiene que ver especialmente con el estado de polarización de la luz, tal y como se explica en detalle en el capítulo 2.

Una generalización más profunda en la interferencia de ondas es el análisis del concepto de difracción, tal concepto permite conocer la forma de un campo a una distancia z_i desde una fuente emisora de luz, matemáticamente se realizó una breve deducción para la difracción de Fresnel y de Fraunhofer. Teóricamente, el tema principal de este trabajo es acerca del efecto Talbot y la réplica de autoimágenes, donde se abordó esencialmente la descripción matemática de los anillos discretos de Montgomery en el capítulo 3.

Gracias a la holografía sintética nos fue posible producir campos ópticos, codificados mediante un Kinoform, de tal manera que se logró la generación de arreglos de anillos discretos de Montgomery con la finalidad de reconstruir campos ópticos con polarización inhomogénea. Este proceso consistió en un arreglo de anillos discretos concéntricos, que pueden ser separados para cambiar el estado de polarización de uno respecto al otro, y así, volver a recombinarlos en algún lugar del espacio para observar la generación de un campo ópticos. Se experimentó con dos tipos de generación de campos inhomogéneos, con polarizaciones lineales ortogonales entre sí y con polarizaciones circulares opuestas entre ellos, realizando una comparación cualitativa entre el campo simulado numéricamente y el experimental, observando algunas disparidades de intensidad y estructura entre lo numérico y experimental debido a imperfecciones adheridas por falta de intensidad, inexactitud en el filtraje o la alineación de ciertos elementos ópticos. Pese a estos inconvenientes, podemos destacar que se han generado con éxito campos con polarización inhomogénea mediante el uso de anillos discretos de Montgomery, y finalmente mencionar que para posibles futuros trabajos mejorar en estos detalles desfavorables para obtener una mayor calidad visual en los campos ópticos.

Apéndice A

Apéndice A. Series de Fourier

Una función periódica se puede definir como una función para la cual se cumple:

$$f(t) = f(t + T), \quad (\text{A.0.1})$$

para todo valor de t . La constante mínima T que satisface la Ec.(A.0.1) se llama período de la función. Mediante la repetición de la expresión anterior se obtiene:

$$f(t) = f(t = nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (\text{A.0.2})$$

Sea la función $f(t)$ una función periódica de período T , la cual se puede representar por la serie trigonométrica:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sen \omega_0 t + b_2 \sen 2\omega_0 t + \dots \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sen n\omega_0 t), \end{aligned} \quad (\text{A.0.3})$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. La serie representada por la ec.(A.0.3) es conocida como la serie trigonométrica de Fourier.

Propiedades de las funciones Seno y Coseno: Funciones Ortogonales.

Un conjunto de funciones $\phi_n(t)$ es ortogonal en un intervalo $a < t < b$ si para dos funciones cualesquiera $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ pertenecientes al conjunto ϕ_n , cumple:

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases} \quad (\text{A.0.4})$$

Considérese, por ejemplo, un conjunto de funciones sinusoidales, mediante el cálculo elemental se puede demostrar que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para } m \neq 0, \quad (\text{A.0.5})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sen(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m, \quad (\text{A.0.6})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.0.7})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/2, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.0.8})$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de } m \text{ y } n, \quad (\text{A.0.9})$$

Evaluación de los coeficientes de Fourier.

Utilizando las relaciones de ortogonalidad mostradas anteriormente, se pueden evaluar los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier de la Ec.(A.0.3), multiplicando ambos lados por $\cos(m\omega_0 t)$ e integrando entre $[-T/2, T/2]$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(n\omega_0 t) \right] \cos(m\omega_0 t) dt, \end{aligned} \quad (\text{A.0.10})$$

intercambiando el orden de los signos de integración y sumatoria se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t)dt \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)dt
\end{aligned} \tag{A.0.11}$$

Aplicando la reglas de ortogonalidad, se tiene:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt = \frac{T}{2} a_m, \tag{A.0.12}$$

de donde,

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(m\omega_0 t)dt. \tag{A.0.13}$$

Si se integra directamente la Ec.(A.0.3) entre $[-T/2, T/2]$ y se usan las reglas de ortogonalidad, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \text{sen} n\omega_0 t) \right] dt \\
&= \frac{1}{2}a_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} a_n \cos(n\omega_0 t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-T/2}^{T/2} b_n \text{sen}(n\omega_0 t)dt \\
&= \frac{1}{2}a_0 T,
\end{aligned} \tag{A.0.14}$$

de donde:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt. \tag{A.0.15}$$

Se debe notar que $a_0/2$ es el valor promedio de $f(t)$ durante un período. Análogamente si la Ec.(A.0.3) se multiplica por $\text{sen}(n\omega t)$ y se integra término por término entre los límites $[-T/2, T/2]$, se obtendrá:

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt. \quad (\text{A.0.16})$$

Finalmente sustituyendo m por n , las ecs.(A.0.13) y (A.0.16) se pueden expresar como:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.0.17})$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \text{sen}(m\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (\text{A.0.18})$$

Apéndice B

Apéndice B. Transformada de Fourier

Una herramienta matemática de gran utilidad en el análisis tanto de fenómenos lineales como no lineales es el análisis de Fourier. En particular, la conocida Transformada de Fourier nos representa la descomposición de una función en el dominio frecuencial. Sea $f(x,y)$ una función integrable definida en el campo complejo, su Transformada de Fourier en dos dimensiones se define mediante:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} = F(u,v) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy. \quad (\text{B.0.1})$$

La Transformada Inversa de Fourier se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(x,y)\} = f(x,y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{i2\pi(ux+vy)} du dv. \quad (\text{B.0.2})$$

La definición básica de la Transformada de Fourier conduce a una fuerte estructura matemática asociada con la operación de transformación. Ahora consideremos algunas de las propiedades básicas de la transformada:

Linealidad.

Sean a y b constantes, $g(x,y)$ una función integrable definida en el campo complejo, con Transformada de Fourier $G(u,v)$, tenemos:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = aF(u,v) + bG(u,v). \quad (\text{B.0.3})$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{af(x,y) + bg(x,y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} [af(x,y) + bg(x,y)] e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{B.0.4})$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} af(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy + \int \int_{-\infty}^{\infty} bg(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{B.0.5})$$

$$= a \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy + b \int \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{B.0.6})$$

$$= aF(u,v) + bG(u,v). \quad (\text{B.0.7})$$

Desplazamiento espacial.

$$\mathcal{F}\{f(x - a, y - b)\} = e^{-i2\pi(ua+vb)}F(u, v). \quad (\text{B.0.8})$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{f(x - a, y - b)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a, y - b) e^{-i2\pi[ux+vy]} dx dy \quad (\text{B.0.9})$$

$$\alpha = x - a, \beta = y - b \quad (\text{B.0.10})$$

$$\mathcal{F}\{f(x - a, y - b)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) e^{-i2\pi[u(\alpha+a)+v(\beta+b)]} d\alpha d\beta \quad (\text{B.0.11})$$

$$= e^{-i2\pi(ua+vb)} \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) e^{-i2\pi[u\alpha+v\beta]} d\alpha d\beta \quad (\text{B.0.12})$$

$$= e^{-i2\pi(ua+vb)} F(u, v). \quad (\text{B.0.13})$$

Desplazamiento de frecuencia.

$$\mathcal{F}\{e^{i2\pi(u_0x+v_0y)}f(x, y)\} = F(u - u_0, v - v_0). \quad (\text{B.0.14})$$

Demostración:

$$\mathcal{F}\{e^{i2\pi(u_0x+v_0y)}f(x, y)\} = \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi(u_0x+v_0y)} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (\text{B.0.15})$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi[(u-u_0)x+(v-v_0)y]} dx dy \quad (\text{B.0.16})$$

$$= F(u - u_0, v - v_0). \quad (\text{B.0.17})$$

Cambio de escala.

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right). \quad (\text{B.0.18})$$

Teorema de la Convolución.

$$\mathcal{F}\{f(x, y) \otimes g(x, y)\} = F(u, v)G(u, v). \quad (\text{B.0.19})$$

donde:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)g(x - \alpha, y - \beta)d\alpha d\beta. \quad (\text{B.0.20})$$

Producto.

$$\mathcal{F}\{f(x, y)g(x, y)\} = F(u, v) \otimes G(u, v). \quad (\text{B.0.21})$$

Teorema de Parseval.

$$\int \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \int \int_{-\infty}^{\infty} |F(u, v)|^2 du dv. \quad (\text{B.0.22})$$

Apéndice C

Apéndice C. Análisis matricial de los estados de polarización de los campos generados.

Para la realización del experimento se trabajó con dos conjuntos de anillos de Montgomery: S_1 los anillos de radio más pequeño y S_2 para los anillos de radio más grande. Para realizar las simulaciones de los cambios de polarización y respectivas componentes, se requiere del análisis matricial de las componentes horizontal y vertical del campo eléctrico, de acuerdo a la convención y asignación de las direcciones otorgadas. En general, el campo eléctrico puede descomponerse en sus componentes horizontal y vertical expresado como:

$$E = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.1})$$

donde E_x es la componente horizontal y E_y la componente vertical. Sea E_2 el campo asignado a los anillos S_2 , cuya polarización mantiene la del láser (horizontal) y E_1 asignado a los anillos S_1 con polarización lineal vertical debido a la placa $\lambda/2$, de tal forma que se tienen dos estados de polarización lineal expresados como:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{1y} \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} E_{2x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.2})$$

a la salida se colocó un polarizador lineal para analizar las componentes que constituyen al campo inicial $\vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Dicho analizador se utilizó a ángulos de 0° , 45° y 90° , para tales valores corresponden respectivas matrices de polarización lineal dadas como:

$$P(0^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(45^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P(90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.3})$$

con el polarizador rotado a 0° el cálculo matricial para el campo final E es:

$$E(0^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{1y} \end{bmatrix} = E_1 \quad (\text{C.0.4})$$

Por tanto, con el analizador rotado a 0° solo se observará la información de campo correspondiente a los anillos S_1 . Por otro lado, con el polarizador rotado a 90° tenemos el cálculo matricial para el campo final E dado como:

$$E(90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{2y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} = E_2 \quad (\text{C.0.5})$$

De tal rotación a 90° solo se obtiene la información de los anillos S_2 . Por último, para el analizador rotado a 45° , el cálculo matricial está dado por:

$$E(45^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1x} \\ E_{2y} \end{bmatrix} = E_1 + E_2 \quad (\text{C.0.6})$$

Mostrando matemáticamente que el campo está conformado por polarizaciones lineales tanto vertical como horizontal.

Para el segundo arreglo se colocó una placa retardadora $\lambda/4$ a 45° respecto al eje rápido de transmisión. Cambiando así las polarizaciones de los campos E_1 y E_2 de lineales a circulares:

$$E_1 = \begin{bmatrix} E_x \\ iE_y \end{bmatrix} \quad \text{Circular derecha,} \quad (\text{C.0.7})$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} E_x \\ -iE_y \end{bmatrix} \quad \text{Circular izquierda,} \quad (\text{C.0.8})$$

Realizando un cálculo análogo con el analizador a 0° , 45° y 90° , se obtiene:

$$E(0^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ iE_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ -iE_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i(E_{1y} - E_{2y}) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.9})$$

$$E(90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ iE_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ -iE_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1x} + E_{2x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.10})$$

$$E(45^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1x} \\ iE_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{2x} \\ -iE_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1x} + E_{2x} \\ i(E_{1y} - E_{2y}) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.0.11})$$

Así, para el polarizador lineal rotado a 0° y 90° , los campos obtenidos solo se diferencian por el número complejo i , que físicamente significa un desfase entre los campos resultantes. Por último, para el caso de la rotación a 45° se tienen tanto las componentes reales e imaginarias de los campos con polarizaciones circulares opuestas entre sí. Debe notarse que todo se ha explicado en términos de las componente horizontal y vertical de respectivos campos eléctricos, sin embargo, en la práctica lo que se observa es el valor de intensidad del campo dado por $I = |E_x|^2 + |E_y|^2$.

Bibliografía

- [1] J. Jhans, H. Knuppertz, W. Lohmann. "Montgomery self-imaging effect using computer-generate diffractive optical element", *Opt. Commun.* 225, 13-17, (2003).
- [2] H. F. Talbot. "Facts relating to optical science No.IV", *Philos. Mag.* 9, 401-407, (1836).
- [3] Lord Rayleigh, "On copying diffraction grating and on some phenomenon connected therewith". *Philos. Mag.* 11, 196-205, (1881).
- [4] K. Patorski, "The self-imaging phenomenon and its applications". *Prog. Opt.* 27, 1-108, (1989).
- [5] A. Winkelmann, *Ann. Phys.* 27, 905. (1908).
- [6] H. Weisel, *Ann. Phys.* 33, 995, (1910).
- [7] M. Wolfke, *Ann. Phys.* 34,277. (1911).
- [8] J. Cowley, A. Moodie, "Fourier images IV: the phase grating", *Proc. Phys. Soc. Londres* 76, 378-384, (1960).
- [9] G. L. Rogers, "Interesting paradox in Fourier images", *J. Opt. Soc. Am.* 62, 917-918, (1972).
- [10] J. T. Winthrop, C. R. Worthington, "Theory Fresnel images. Plane periodic objects in monochromatic light", *J. Opt. Soc. Am.* 55, 373-381, (1965).
- [11] W. d. Montgomery, "Self-imaging objects of infinite aperture", *J. Opt. Soc. Am.* 57, 772-778, (1960).
- [12] A. W. Lohmann, D. E. Silva, *Opt. Commun.*, 413, (1971).
- [13] O. Bryngdahl, *J. Opt. Soc. Am.* 63, 416, (1973).
- [14] R. Ulrich, T. Kamiya, *J. Opt. Soc. Am.* 68, 583, (1978).
- [15] A. W. Lohmann, *Optik* 79, pp.41, (1988).
- [16] S. F. Helfert, B. Huneke, J. Jahns, "Self-imaging effect in multimode waveguides with longitudinal periodicity"., *Journal the European Opt. Soc.* 4, (2009).
- [17] B. P. S. Ahluwalia, X-C. Yuan, S. H. Tao, "Generation Self-imaged optical bottle beams"., *Opt. Commun.* 238, 177-184, (2004).
- [18] J. Reitz, F. Milford, R. Christy, "Cap.16 Ecuaciones de Maxwell", *Fundamentos de la teoría electromagnética, cuarta edición*, Addison-Wesley Iberoamericana.
- [19] E. Collet, *Field Guide to Polarization*, John E. Greinvenkamp Series Editor, pp.6-11, (2005).
- [20] E. Hetch, "Cap.8 Polarization", *Optics, Cuarta edición*, Addison Wesley, (2002).
- [21] K.K. Sharma, *Cap. Polarization of Light Waves, Optics Principles and Applications*, ELSEVIER, p.p. 129, (2006).
- [22] P. Hariharan, "Cap.1 Interference: A primer", *Basic of Interferometry, Segunda edición*, ELSEVIER, (2007).
- [23] K. Lizuka, "Fourier Optics: Concepts and applications", *Elements of Photonics, Volume 1: In free space and special media*, John Wiley and Sons, Inc. (2002).
- [24] V. Arrizón, J. Ojeda-Castañeda, "Phase grating: Analytical Formulas for the Near Field", *Microwave and Optical Technology Letters.* 5:483-486, (1992).
- [25] G. Mellado Villaseñor, *Caracterización de una pantalla de cristal líquido de fase*"Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en

- Ciencias con especialidad en óptica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp. 9-13, (2013).
- [26] P. Szwaykowski, "Self-imaging in polar coordinates", JOSA A, Vol. 5, No. 2, pp. 185-191, (1988).
- [27] W. D. Montgomery, "Self-imaging objects of infinite aperture", JOSA, Vol. 57, No. 6, pp. 772 – 778, (1967).
- [28] A. S. Cruz Félix, Representación Modal de Campos Ópticos de Auto-imágenes", Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en óptica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp. 11-13, (2008).
- [29] M. C. Alonso Casimiro, "Generación de haces vectoriales bidimensionales periódicos", Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en óptica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp. 22,23,44-49, (2018).
- [30] V. Arrizon, D. Sanchez de la LLave, G. Mendez, U. Ruíz, "Efficiente generation of periodic and cuasi-periodic non-diffractive optical fields with phase holograms", Opt. Express 19, 10553-10562, (2011).
- [31] R. Carrada Legaria, "Generación de campos estructurados mediante moduladores de cristal líquido", Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ciencias con especialidad en óptica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp.29-31, (2011).
- [32] M. G. Méndez. "Generación y síntesis de campos luminosos escalares y vectoriales empleando hologramas sintéticos de fase". Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de Doctorado en Ciencias con especialidad en óptica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp. 10, (2013).
- [33] J. P. Cuanalo Fernández, Exploración de cuasi partículas elásticas de cristal líquido inducidas por campo en movimiento". Tesis sometida como requisito parcial para obtener el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en óptica en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, pp. 4-6, (2019).