



INAOE

**Métodos Analíticos para Corregir la
Aberración Esférica y la Aberración de
Coma Usando Superficies No Esféricas**

por

Omar García Liévanos

M.C., INAOE

Tesis sometida como requisito parcial
para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica**
Enero 2008
Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

Dr. Sergio Vázquez y Montiel
Investigador Titular del INAOE

©INAOE 2008

Derechos Reservados

**El autor otorga al INAOE el permiso de reproducir
y distribuir copias de esta tesis en su totalidad o en
partes.**



RESUMEN

En este trabajo proponemos, dos métodos analíticos para diseñar sistemas libres de aberración esférica. Esto lo conseguimos cambiando la última superficie del sistema, por una superficie asférica polinomial o por grabar en ella una superficie difractiva. El método presentado es sencillo, exacto y no necesita de una rutina de optimización posterior. El valor de los coeficientes de asfericidad o de difracción de la fase se calcula trazando el rayo por el sistema y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Con estos métodos podemos decidir el número y la localización de los puntos de corrección en la pupila de entrada, sin importar la posición del objeto y la imagen, el número- f o el número de superficies del sistema. Para el caso de las superficies asféricas además, presentamos un algoritmo para hacer la simulación de ronchigramas para espejos asféricos polinomiales.

También proponemos, dos métodos analíticos para diseñar sistemas híbridos aplanáticos, el primer método uso solo superficies esféricas y difractivas. El segundo método usa superficies asféricas y difractivas. Los puntos de corrección dependen solo de la corrección que queramos y del número- f del sistema. Las coordenadas de la superficie que curva el plano principal se encuentran resolviendo una ecuación lineal y los coeficientes de asfericidad se calculan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. Los métodos para diseñar lentes híbridas aplanáticas, no requieren un proceso de optimización posterior para la corrección de la aberración esférica y de coma.

ABSTRACT

In this work we propose two analytic methods to design free systems of spherical aberration. We change the last surface of the optical system by an aspherical surface or by a diffractive surface. This method is easy, fast and the optimization process is not required. The aspherical and diffractive coefficients value are computed using exact ray tracing and by solve an equations system of first degree. With this method we can decide the height ray in the entrance pupil that we will be to correct and the number of rays, for any object and image position, any f-number or any number of surfaces. In the aspherical case we show the ronchigrams simulation for aspherical surfaces.

Also, we propose two different methods to design aplanatic hybrid system. The first method only uses spherical and diffractive surfaces. The second method uses aspherical and diffractive surfaces. The correction depends of the f-numbers and the number of ray heights that will be corrected. The coordinates of the aspherical surfaces are computed by solve an equation of first degree. The aspherical coefficients value are computed using exact ray tracing and by solve an equations system of first degree. In these methods the optimization process is not required for the coma and spherical aberration.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Sergio Vázquez y Montiel, por sus enseñanzas, consejos, tiempo y apoyo económico, para la realización de esta tesis.

A mi esposa Ana Lourdes Campos Rodríguez, hijos Mara García campos y Omar Saith García Campos y hermano Jimmy García Liévanos, por su paciencia y apoyo incondicional que me demostraron durante la realización de esta tesis.

A mis compañeros de generación: Rubén Grajales, Héctor Hugo Sánchez, Mario Espinosa, Maria Luisa, y a todos los que en este momento no recuerdo, por su amistad, apoyo y comentarios acertados en la realización de esta tesis. Especialmente para mi compañero y amigo Juan Alberto Hernández.

A mis profesores de posgrado del INAOE: Alejandro cornejo, Fermín Granados, Jorge Castro, por su amistad, comentarios y apoyo en la realización de esta tesis estudios de posgrado.

A todos mis compañeros de trabajo de la carrera de optometría del CICS-UST, por su apoyo en la realización de mis estudios de posgrado.

Al CONACYT e INAOE por su apoyo económico para la realización de esta tesis y de mis estudios de posgrado.

DEDICATORIA

A la memoria de mi
Madre



Para mi esposa e hijos
Ana, Mara y Omar Saith

ÍNDICE

Resumen.....	i
Abstract.....	ii
Agradecimientos.....	iii
Dedicatoria.....	iv

Índice

Capítulo 1

1 Introducción.....	1
---------------------	---

Capítulo 2

2 Aberración esférica.....	6
2.1 Teoría de las aberraciones.....	6
2.1.1 Aberración esférica del rayo.....	9
2.2.2 Aberración esférica del frente de onda.....	9
2.2 Aberración esférica de tercer orden.....	11
2.2.1 Superficie esférica refractora.....	11
2.2.2 Superficie plana refractora.....	15
2.2.3 Superficie esférica reflectora.....	15
2.2.4 Superficie asférica refractora.....	16
2.2.5 Lente Delgada.....	18
2.3 Elementos ópticos difractivos.....	21
2.3.1 Función de fase.....	22
2.3.2 Aberración esférica de tercer orden para una lente difractiva modelo de Sweatt.....	26
2.4 Conclusiones.....	26

Capítulo 3

3	Optimización.....	28
3.1	Introducción.....	28
3.2	Definición de variables.....	29
3.2.1	Selección de variables.....	29
3.3	Función de mérito.....	31
3.3.1	Función de mérito y las aberraciones.....	32
3.4	Métodos de optimización.....	33
3.4.1	Métodos de optimización locales.....	37
3.4.1.1	Mínimos cuadrados.....	38
3.4.1.2	Mínimos cuadrados amortiguados.....	39
3.4.1.3	Multiplicadores de Lagrange.....	42
3.4.2	Métodos de optimización globales.....	44
3.4.2.1	Algoritmos genéticos.....	44
3.4.2.2	Una visión general del algoritmo genético....	46
3.4.2.3	Diferencias entre los algoritmos genéticos y los métodos tradicionales de optimización...	48
3.4.2.4	Teorema fundamental de los algoritmos genéticos.....	49
3.4.2.5	Anatomía y ejemplo de un algoritmo genético.....	55
3.4.2.5.1	Representación.....	56
3.4.2.5.2	Población inicial.....	58
3.4.2.5.3	Generador de números binarios aleatorios.....	58
3.4.2.5.4	Estructura de datos.....	58
3.4.2.5.5	Evaluación de la función.....	59
3.4.2.5.6	Selección de cromosomas.....	60
3.4.2.5.7	Cruza de cromosomas.....	62
3.4.2.5.8	Mutación de cromosomas.....	65
3.4.2.5.9	Resultados.....	67

3.5 Conclusiones.....	68
 Capítulo 4	
4 Corrección de la aberración esférica.....	69
4.1 Casos	69
especiales.....	69
4.1.1 Superficies esféricas.....	69
4.1.2 Superficie cónica refractora.....	71
4.1.3 Superficie cónica reflectora.....	73
4.1.4 Lente delgada con superficies esféricas.....	75
4.1.5 Lente con una superficie esférica y una asférica.....	79
4.1.6 Lente con superficies asféricas.....	85
4.1.7 Sistema de dos espejos uno esférico y otro asférico...	87
4.1.8 Sistema de dos espejos asféricos.....	89
4.1.9 Sistemas con la última superficie asférica.....	90
4.1.10 Lente difractiva sobre un sustrato plano.....	92
4.2 Conclusiones.....	95
 Capítulo 5	
5 Diseño de sistemas libres de aberración esférica.....	96
5.1 Superficies	96
Asféricas.....	96
5.1.1 Ejemplos.....	100
5.1.1.1 Telescopio Gregoriano.....	100
5.1.1.1.1 Diseño de primer orden.....	101
5.1.1.1.2 Diseño Exacto.....	102
5.1.1.1.3 Un coeficiente.....	104
5.1.1.1.4 Dos coeficientes.....	105
5.1.1.1.5 Tres coeficientes.....	106
5.1.1.1.6 Cuatro coeficientes.....	107

5.1.1.1.7	Cinco coeficientes.....	109
5.1.1.2	Telescopio Cassegrain.....	111
5.1.1.3	Lente f/l	113
5.1.1.4	Doblete Cementado.....	114
5.1.2	Ronchigramas para espejos esféricos polinomiales...	115
5.1.2.1	Trazo de rayos por superficies esféricas polinomiales.....	116
5.1.2.2	Algoritmo para ronchigramas.....	119
5.1.2.3	Simulación de Ronchigramas.....	120
5.2	Lentes difractivas.....	125
5.2.1	Lente difractiva sobre un sustrato plano.....	125
5.2.1.1	Ejemplos.....	130
5.2.1.1.1	Lente difractiva con el objeto a una distancia finita.....	130
5.2.1.1.2	Lente difractiva con el objeto en el infinito.....	133
5.2.2	Lente difractiva sobre un sustrato curvo.....	134
5.2.2.1	Ejemplos.....	138
5.2.2.1.1	Lente difractiva sobre un sustrato esférico con el objeto a una distancia finita.....	138
5.2.2.1.2	Lente difractiva sobre un sustrato cónico con el objeto a una distancia finita.....	140
5.3	Conclusiones.....	142
 Capítulo 6		
6	Diseño de lentes híbridas aplanáticas.....	144
6.1	Introducción.....	144
6.2	Superficies esféricas y superficies difractivas.....	145

6.2.1	Ejemplos.....	146
6.2.1.1	Lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.....	147
6.2.1.2	Lente híbrida aplanática con el objeto a una distancia finita.....	148
6.3	Superficies esféricas y superficies difractivas.....	151
6.3.1	Ejemplos.....	156
6.3.1.1	Lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.....	156
6.4	Conclusiones.....	165
Capítulo 7		
7	Conclusiones.....	167
Apéndice 1.....		
		171
Apéndice 2.....		
		184
Lista de figuras y tablas.....		
		187
Bibliografía.....		
		194
Resumen en extenso (ingles).....		
		199

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, los diseñadores ópticos buscan que los sistemas ópticos formadores de imágenes, sean compactos, ligeros y menos costosos. Además la imagen debe ser de buena calidad y cumplir con las tolerancias permitidas para su aplicación.

Los principales problemas de la imagen son las aberraciones, tales como la aberración cromática, aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión. Una buena corrección de todas las aberraciones hace que los sistemas ópticos formen una imagen de buena calidad para su aplicación. Sin embargo, para tener una buena corrección de las aberraciones por lo general se utilizan muchas componentes ópticas y esto hace que los sistemas ópticos aumenten su tamaño, peso y precio. Otra manera de solucionar este problema es usar óptica adaptiva [1], materiales con índice de gradiente [2], hologramas [3], óptica difractiva [4] o superficies esféricas [5]. Hoy en día la mejora en los procesos de fabricación de superficies esféricas y elementos ópticos difractivos han incrementado su uso [6][7][8][9][10].

El uso de las superficies esféricas para corregir la aberración esférica es un hecho bien conocido. Descartes [11], hace cuatro siglos intento determinar la forma de la superficie que corrige la aberración esférica para cualquier posición del objeto. Conrady [12], hace un siglo demostró que existen tres casos en los cuales no hay aberración esférica para una superficie esférica. Kingslake [13], encontró la solución analítica para corregir la aberración esférica en los espejos si se conoce la posición del objeto y de la imagen; el también analizó dos casos refractivos. Hecht [14], empleó el principio de Fermat para calcular la excentricidad de las superficies esféricas refractivas que corrigen la aberración esférica.

Castro et. al. [5] y Chávez [15] proponen un método para corregir la aberración esférica usando una superficie cónica, pero esta solución corrige solo un punto en la pupila. A. Lerner y M. Sasian [16] proponen usar superficies esféricas definidas parametricamente con esto ellos lograron una mejor corrección de la aberración esférica que los programas comerciales de diseño. Los principales problemas de usar superficies esféricas son decidir cual superficie del sistema deberá ser esférica [17] y encontrar el valor de los coeficientes esféricos que corrigen la aberración esférica del sistema, para esto podemos usar la teoría de tercer [18], quinto y séptimo orden o usar alguna rutina de optimización [19].

Al igual que las superficies esféricas las superficies difractivas han sido usados para la corrección de las diferentes aberraciones, por ejemplo, al combinarlos con una lente refractiva pueden disminuir los efectos de la aberración cromática con buenos resultados [20][21], pero en sistemas con más de una superficie, al igual que con las superficies esféricas, debemos seleccionar la superficie sobre la cual será grabada la superficie difractiva y encontrar la fase del elemento difractivo que corrija las diferentes aberraciones, para esto una superficie difractiva puede considerarse como una lente delgada con un índice de refracción extremadamente alto (10001) [22][23]. Aplicando esto podemos usar las rutinas tradicionales de trazo de rayos y optimizar la fase de las lentes difractivas [19] o utilizar la teoría de tercer orden [24] para diseñarlas.

Tanto para las superficies esféricas como para las superficies difractivas, el análisis a tercer, quinto o séptimo orden es complicado, limitado y no es exacto, además al usar las rutinas de optimización locales o globales no tenemos control de los puntos en la pupila, donde se lleva a cabo la corrección de la aberración esférica.

Por todo lo anterior en esta tesis proponemos un método para corregir la aberración esférica usando superficies esféricas y superficies difractivas que es sencillo, exacto y que no necesita de una rutina de optimización posterior.

Con este método podemos decidir el número y la localización de los puntos de corrección en la pupila, sin importar la posición del objeto y de la imagen, el número- f o el número de superficies del sistema. Nosotros proponemos usar la última superficie del sistema para hacerla esférica o para grabar la superficie difractiva.

Una vez corregida la aberración esférica, decidimos corregir también la aberración de coma, para obtener sistemas aplanáticos, y encontramos dos maneras diferentes de tener sistemas aplanáticos con resultados satisfactorios, usando sistemas híbridos (refractivos-difractivos).

La tesis está constituida por siete capítulos. El capítulo uno, es una introducción general del problema y el capítulo siete son las conclusiones del trabajo.

En el capítulo dos, definiremos la aberración esférica del rayo y del frente de onda, encontraremos las expresiones analíticas para calcularla a tercer orden en superficies esféricas, esféricas, planas, refractivas y reflectivas, además deduciremos la expresión de la aberración esférica para una lente delgada, con superficies esféricas y esféricas. Finalmente explicaremos de manera general la función de fase de la superficie difractiva y como calcular los coeficientes de esta para corregir la aberración esférica a tercer orden.

En el capítulo tres, se analizarán los métodos de mínimos cuadrados y mínimos cuadrados amortiguados. Se mostrarán sus principales deficiencias y adicionalmente, explicaremos por que estos métodos

necesitan un punto inicial a partir del cual comienzan la búsqueda del óptimo.

También se explicará en que consisten los algoritmos genéticos, como funcionan sus rutinas más importantes y por que se dice que son métodos de optimización global. Se indicarán las ventajas que estos algoritmos tienen sobre los métodos tradicionales de optimización.

Finalmente, se ilustrará el funcionamiento de los algoritmos genéticos buscando el óptimo de una función con múltiples máximos y mínimos, encontrándose efectivamente el óptimo global en el intervalo establecido.

En el capítulo cuatro, se explicarán las ventajas y desventajas de todos los métodos encontrados en la literatura para corregir la aberración esférica con superficies esféricas, asféricas y difractivas, desde una sola superficie hasta combinaciones de dos superficies refractivas o reflectivas usado para esto, una o dos superficies asféricas, se explicará como se sacrifican los grados de libertad del diseño para lograrlo, como en otros condicionan la posición del objeto, la forma de la lente o los puntos de corrección no son suficientes para el número- f del sistema.

En el capítulo cinco, explicaremos el procedimiento mediante el cual proponemos hacer la corrección de la aberración esférica, cambiando la última superficie del sistema por una superficie asférica o para grabar en ella una superficie difractiva.

También se explicará como hacer la simulación de ronchigramas para espejos asféricos polinomiales, usando el trazo de rayos exacto. Para las lentes difractivas, no se trata el problema de la fabricación, ya que la tesis esta enfocada principalmente al diseño, para mayor detalle acerca de los procedimientos de fabricación el lector puede revisar la siguiente referencia J. Castro-Ramos, et. al. [25].

En el capítulo seis, explicaremos el procedimiento que proponemos para diseñar lentes aplanáticas, combinando superficies esféricas y difractivas, y superficies asféricas y difractivas para lograrlo. Graficaremos las superficies principales reales que obtenemos con diferentes factores de forma y las compararemos con las superficies principales ideales, para escoger el mejor factor de forma, cuándo el objeto se encuentra en el infinito.

CAPÍTULO 2

ABERRACIÓN ESFÉRICA

2.1 TEORÍA DE LAS ABERRACIONES

Las aberraciones del frente de onda (W) son las diferencias de un frente de onda gaussiano o ideal (FOG), con el frente de onda Real (FOR), medidas en la pupila de salida, figura (2.1).

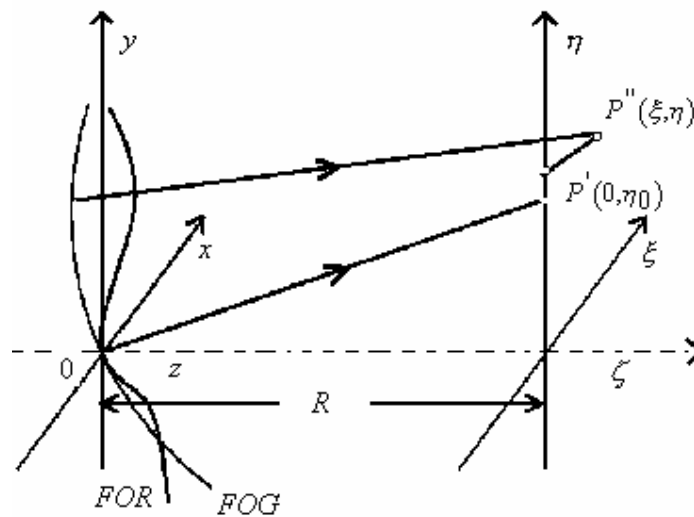


Figura (2.1). Aberración del frente de onda (W).

W es una función de cuatro variables x , y son las coordenadas en la pupila de salida y ξ , η son las coordenadas del punto objeto, ver figura (2.1). Restringiremos el caso a sistemas ópticos con simetría de revolución, y que su eje de revolución coincida con el eje óptico, por lo cual, W debe ser una función de combinaciones de x, y, ξ, η invariantes a rotaciones [26]. Tales combinaciones son:

$$x^2 + y^2, \quad x\xi + y\eta, \quad \xi^2 + \eta^2. \quad (2.1)$$

Como tenemos un sistema con simetría de revolución sólo necesitamos considerar puntos a largo del eje η , por lo tanto $\xi = 0$ y W se puede escribir como una función de $x^2 + y^2, y\eta, \eta^2$. Finalmente nosotros asumimos que W puede ser expandida en una serie de potencias en esas variables y la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 W(x, y, \eta) &\equiv W(x^2 + y^2, y\eta, \eta^2) & (2.2) \\
 &= a_1(x^2 + y^2) + a_2y\eta + a_3\eta^2 + b_1(x^2 + y^2)^2 + b_2y\eta(x^2 + y^2) + \\
 & b_3y^2\eta^2 + b_4\eta^2(x^2 + y^2) + b_5y\eta^3 + b_6\eta^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Los términos constantes son omitidos, por que en la definición de la aberración del frente de onda se asume que ambos el frente de onda real y el frente de onda ideal son escogidos de tal manera que ambos pasen por el centro de la pupila de salida, así que W debe ser cero en el origen de x, y , además los coeficientes a_3, b_6 , etc. correspondientes a η^2, η^4 , etc. y términos de alto orden deben ser cero.

Los dos primeros términos del polinomio tienen un significado especial, el primer término es la contribución del cambio longitudinal del centro de la esfera de referencia a la aberración, así que la presencia del primer término indica que la esfera de referencia no está correctamente centrada en el plano imagen gaussiano. Similarmente, el segundo término es un cambio transversal del centro de la esfera de referencia. Los términos anteriores no representan propiamente aberraciones.

Los cinco términos de segundo grado con coeficientes b_1 a b_5 forman el primer grupo de términos de aberración formado por la aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión respectivamente. Estos términos son también llamados aberraciones de

tercer orden si son expresados como aberraciones transversales del rayo o aberraciones de Seidel. En el primer término, $b_1(x^2 + y^2)^2$ la variable de campo η no aparece, por esa razón su efecto es constante sobre todo el campo de visión del sistema.

Para conocer los coeficientes de las aberraciones primarias de un sistema óptico es conveniente ponerlos en términos de los parámetros de construcción y de los datos de dos rayos paraxiales, un rayo de un punto objeto axial que pase por el borde de la pupila y un rayo principal de un punto en el extremo del campo que pase por el centro del diafragma de abertura. Utilizando las sumas de Seidel la aberración del frente de onda se pueden escribir como [27]

$$W(x, y, \eta) = \frac{1}{8} SI \frac{(x^2 + y^2)^2}{h_p^4} + \frac{1}{2} SII \frac{y(x^2 + y^2)}{h_p^3} \frac{\eta}{\eta_{\max}} + \frac{1}{2} SIII \frac{y^2}{h_p^2} \frac{\eta^2}{\eta_{\max}^2} + \frac{1}{4} (SIII + SIV) \frac{(x^2 + y^2)}{h_p^2} \frac{\eta^2}{\eta_{\max}^2} + \frac{1}{2} SV \frac{y}{h_p} \frac{\eta^3}{\eta_{\max}^3} \quad (2.3)$$

Donde, x, y son coordenadas de cualquier punto en la pupila de salida, h_p es la altura de incidencia en la pupila de salida del rayo paraxial axial, η_{\max} es el tamaño máximo de la imagen y η es cualquier otra altura del objeto. SI es la suma de Seidel para la aberración esférica, SII es la suma de Seidel para la coma, $SIII$ es la suma de Seidel para el astigmatismo, $SIII + SIV$ es la suma de Seidel para la curvatura de campo y SV es la suma de Seidel para la distorsión. En la siguiente sección explicaremos como calcular SI para diferentes tipos de superficies.

2.1.1 Aberración Esférica del Rayo

La aberración esférica del rayo ocurre cuando la luz proveniente de un objeto que este sobre el eje óptico y que se refracte en las componentes del sistema óptico se enfoca en diferentes puntos sobre este eje. Esto significa que los rayos marginales que emerge de la zona periférica del lente; figura (2.2), se van a enfocar antes que el rayo que emerge de una altura menor a este, y estos a su vez se enfoca antes que los rayos que emergen cercanos al eje óptico (rayos paraxiales), los cuales definen el plano focal. La distancia $LA'R$ medida a lo largo del eje óptico se le conoce como aberración esférica longitudinal, la distancia AC medida en el plano imagen se le llama aberración esférica transversal.

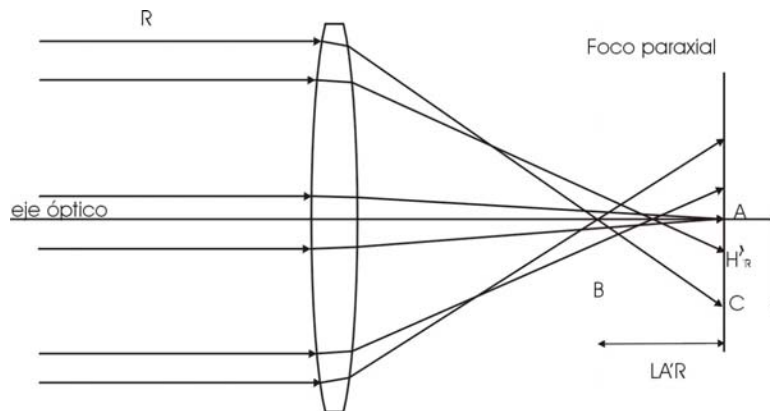


Figura (2.2). Figura explicativa de la aberración esférica.

De la figura (2.2), podemos ver que la corrección de la aberración esférica ocurrirá cuando los rayos que llegan a cualquier altura converjan en el mismo punto que los rayos paraxiales.

2.1.2 Aberración Esférica del Frente Onda

Como ya mencionamos anteriormente la aberración esférica es la única aberración que tiene efecto aun en las imágenes formadas sobre el eje óptico. Usando lo anterior podemos conocer los efectos de la aberración

del frente de onda provocados únicamente por la aberración esférica, al hacer la diferencia de camino óptico (W) entre un rayo paraxial y uno marginal, ecuación (2.4) y (2.5). El análisis presentado solo se hace en dos dimensiones aprovechando la simetría de revolución. De la figura (2.3), tenemos

$$W = (n'L' - nL) - [OBO'], \quad (2.4)$$

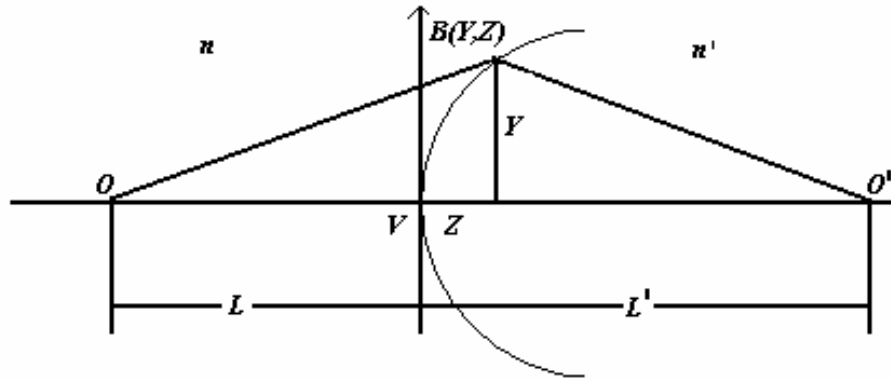


Figura (2.3). Diagrama para conocer la aberración esférica de una superficie.

La ecuación (2.4) se puede reescribir como

$$W = (n'L' - nL) - \left[n' \sqrt{Y^2 + (L' - Z)^2} + n \sqrt{Y^2 + (Z - L)^2} \right]. \quad (2.5)$$

W es la suma de los efectos de la aberración esférica de tercer, quinto, séptimo,... orden, es decir, es la aberración esférica total de una superficie. Este tratamiento puede ser aplicado a cualquier sistema óptico con cualquier número de superficies haciendo los cambios apropiados en la ecuación (2.5).

2.2 ABERRACIÓN ESFÉRICA DE TERCER ORDEN

2.2.1 Superficie Esférica Refractora

La ecuación (2.5), nos da la aberración esférica total del frente de onda para objetos sobre eje, para el caso de una superficie esférica las coordenadas Z y Y están racionadas de la siguiente manera

$$Z = r - \sqrt{r^2 - Y^2}, \quad (2.6)$$

donde r es el radio de curvatura de la superficie.

Usando la expansión binomial, podemos expresar la ecuación (2.6), como una serie de potencias en Y ,

$$Z = \frac{Y^2}{2r} + \frac{Y^4}{8r^3} + \dots \quad (2.7)$$

Sustituyendo la ecuación (2.7) en la ecuación (2.5), usando la expansión binomial en las raíces de la ecuación (2.5) y omitiendo los términos de orden mayor a Y^4 tenemos

$$W = -\frac{Y^2}{2} \left[\frac{n'}{L'} - \frac{n}{L} - \frac{(n' - n)}{r} \right] - \frac{Y^4}{8r^2} \left[\frac{n'}{L'} - \frac{n}{L} - \frac{(n' - n)}{r} \right] + \frac{Y^4}{8} \left[\frac{n'}{L'} \left(\frac{1}{L'} - \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{n}{L} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{r} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

Los dos primeros términos son cero por la relación que existe entre los conjugados y la potencia de una superficie

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{(n' - n)}{r}, \quad (2.9)$$

por lo que la aberración esférica de tercer orden se reduce a

$$W = w_4 Y^4. \quad (2.10)$$

Donde w_4 es

$$w_4 = \frac{1}{8} \left[\frac{n'}{L'} \left(\frac{1}{L'} - \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{n}{L} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

Si nosotros hubiéramos decidido incluir los términos de orden mayor a Y^4 , encontraríamos que la aberración del frente de onda toma la forma de

$$W = w_4 Y^4 + w_6 Y^6 + w_8 Y^8 + \dots, \quad (2.12)$$

donde w_6 y w_8 son los coeficientes de la aberración esférica de alto orden.

De la ecuación (2.10), podemos ver que la aberración esférica depende de la altura del rayo a la cuarta potencia, que esta depende de la posición de los conjugados y que no depende linealmente con el radio de curvatura de la superficie.

Una manera quizás mas conocida de la ecuación (2.10), es poniéndola como la primer suma de Seidel (SI). Para esto cambiaremos la L' por l' , L por l y a Y por y . Además necesitamos el invariante de refracción definido como $A = ni = n'i'$, para saber el valor i usaremos la figura (2.4).

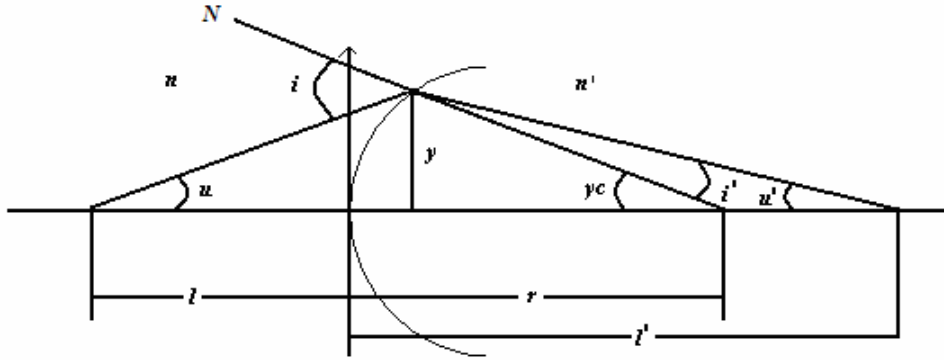


Figura (2.4). Diagrama para conocer el invariante de refracción de una superficie.

De la figura anterior, podemos ver que

$$i = yc + u \quad \text{e} \quad i' = yc + u', \quad (2.13)$$

donde c es el inverso del radio de curvatura r . Además también podemos calcular el valor de u y de u' con ayuda de la figura (2.4),

$$u = \frac{y}{-l} \quad \text{y} \quad -u' = \frac{y}{l}, \quad (2.14)$$

por lo tanto el invariante de refracción es

$$A = n(yc + u) = n'(yc + u'), \quad (2.15)$$

Sustituyendo la ecuación (2.14) en la (2.13), y factorizando a y tenemos

$$A = ny \left(c - \frac{1}{l} \right) = n'y \left(c - \frac{1}{l'} \right). \quad (2.16)$$

El siguiente paso es sustituir la ecuación (2.16) en la ecuación (2.11), además debemos hacer los cambios de literales explicados en los párrafos anteriores, para obtener la primera suma de Seidel

$$W = \frac{y^4}{8} \left[\frac{n'}{l'} \left(\frac{A}{n'y} \right)^2 - \frac{n}{l} \left(\frac{A}{ny} \right)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Arreglando los términos y usando la ecuación (2.14), tenemos

$$W = \frac{y^2}{8} \left[\left(\frac{A^2}{n'l} \right) - \left(\frac{A^2}{nl} \right) \right], \quad (2.18)$$

$$W = \frac{A^2 y}{8} \left[\left(\frac{y}{n'l} \right) - \left(\frac{y}{nl} \right) \right], \quad (2.19)$$

$$W = \frac{1}{8} A^2 y \left[\left(\frac{u}{n} \right) - \left(\frac{u'}{n'} \right) \right], \quad (2.20)$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{n=i} SI = - \sum_{n=1}^{n=i} A^2 y \left[\left(\frac{u'}{n'} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right], \quad (2.21)$$

Podemos ver de la ecuación (2.3), que si consideramos únicamente la aberración esférica de tercer orden, la aberración del frente de onda queda expresada como

$$W = \frac{SI}{8} \frac{(x^2 + y^2)^2}{h_p^4}, \quad (2.22)$$

donde SI puede calcularse con la ecuación (2.21).

La ecuación (2.22), representa la aberración del frente de onda debida a la aberración esférica de una superficie esférica refractora, si tenemos

mas de una superficie esférica se debe sumar la contribución de cada superficie hasta la *i-esima* superficie del sistema.

2.2.2 Superficie Plana Refractora

Considerando en la ecuación (2.11), que el radio de curvatura tiende a infinito esta se reduce a

$$W = \frac{y^4}{8} \left[\frac{n'^2}{l'^3} - \frac{n}{l^3} \right]. \quad (2.23)$$

Usando la ecuación de conjugados con una potencia igual a cero obtenemos

$$W = \frac{y^4}{8} \frac{n}{l^3} \left[\frac{n^2 - n'^2}{n'^2} \right] \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24), expresa la aberración esférica de tercer orden de una superficie refractora plana.

2.2.3 Superficie Esférica Refractora

Para cambiar de una superficie refractora a una reflectora se debe considerar que el índice de refracción $n' = -1$ [28]. Considerando esto en la primera suma de Seidel, obtenemos

$$SI = A^2 y [u' + u] \quad (2.25)$$

Usando la ecuación de reflexión para una superficie esférica

$$-u' = u + 2yc, \quad (2.26)$$

$$u' + u = -2yc. \quad (2.27)$$

Sustituyendo la ecuación (2.27), en la ecuación (2.25)

$$SI = -2A^2 y^2 c \quad (2.28)$$

Finalmente con ayuda de la ecuación (2.22), calculamos la aberración del frente de onda debida a la aberración esférica ocasionada por un espejo esférico.

2.2.4 Superficie Asférica Refractora

Una superficie asférica con simetría de revolución se define como

$$Z_{asferico} = Z_{conico} + a_1 y^4 + a_2 y^6 + a_3 y^8 + \dots, \quad (2.29)$$

donde a_1, a_2, a_3, \dots son los coeficientes de asfericidad que deforman a la esfera y Z_{conico} se calcula como

$$Z_{conico} = \frac{cy^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2 y^2}}, \quad (2.30)$$

donde k es la constante conicidad y c es el inverso del radio de curvatura de la superficie. Haciendo la expansión binomial en la raíz de la ecuación (2.30) tenemos

$$Z_{conico} = \frac{y^2}{2r} + \frac{y^4 k}{8r^3} + \dots \quad (2.31)$$

Para considerar la contribución a la aberración esférica de tercer orden debido al efecto de asferización, debemos agregar el siguiente término a la primera suma de Seidel

$$SI_{asferico} = 8(n' - n)Gy^4, \quad (2.32)$$

donde G se define al agrupar los términos que dependen a la misma potencia en y y como la aberración esférica de tercer orden, de las ecuaciones (2.29) y (2.31). Los términos de una potencia mayor no son considerados ya que solo queremos encontrar la contribución de tercer orden

$$G = \frac{k}{8r^3} + a_1. \quad (2.33)$$

Podemos ver de la ecuación (2.33), que para eliminar los efectos de asferización, el primer coeficiente de la superficie esférica polinomial debe ser cero y la constante de conicidad también debe serlo.

La ecuación (2.33) considera los efectos de la constante de conicidad y del primer coeficiente de la superficie esférica polinomial, ecuación (2.29), pero eso no significa que ambos deban tener algún valor diferente de cero, ya que este puede considerar solo los efectos de la constante de conicidad o del coeficiente de asfericidad, simplemente al considerar alguno de los dos igual con cero.

Finalmente la primera suma de Seidel para una superficie esférica nos quede de la siguiente manera

$$SI = SI_{esferico} + SI_{asferico}, \quad (2.34)$$

o explícitamente como

$$SI = A^2 y \left[\left(\frac{u'}{n'} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right] + (n' - n) y^4 \left[\frac{k}{r^3} + 8a_1 \right]. \quad (2.35)$$

Con ayuda de la ecuación (2.22), podemos calcular la aberración del frente de onda debida a la aberración esférica ocasionada por una superficie esférica. El término $SI_{asferico}$ se le debe agregar solo a las superficies que sean esféricas en el sistema.

2.2.5 Lente Delgada

La ecuación (2.21), nos da la aberración esférica de una superficie esférica refractora, considerando que una lente delgada tiene dos superficies, la ecuación (2.21) queda como

$$\sum_{n=1}^{n=2} SI = - \sum_{n=1}^{n=2} A^2 y \left[\left(\frac{u'}{n'} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right], \quad (2.36)$$

o mas explícitamente

$$SI = - \left[A_1^2 y_1 \left[\left(\frac{u'}{n'} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right]_1 + A_2^2 y_2 \left[\left(\frac{u'}{n'} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right]_2 \right]. \quad (2.37)$$

Como es una lente delgada rodeada por aire, haremos los siguientes cambios en la ecuación (2.37), $y_1 = y_2 = y$ y para la primera superficie $n=1$ y para la segunda $n'=1$, además diremos que n' de la primera superficie es igual n de la segunda superficie, para que nos quede la ecuación (2.37) de la siguiente manera

$$SI = - \left[A_1^2 y \left[\left(\frac{u'}{n} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right]_1 + A_2^2 y \left[\left(\frac{u'}{n} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right]_2 \right], \quad (2.38)$$

para continuar necesitamos definir el factor de conjugados ecuación (2.39), el factor de forma ecuación (2.40), la potencia de una lente delgada ecuación (2.41) y la ecuación de refracción de una lente delgada (2.42), como

$$C = \frac{u + u'}{u - u'}, \quad (2.39)$$

donde u es el ángulo de incidencia del rayo en la lente y u' es el ángulo de refracción a la salida de la lente.

$$B = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2}, \quad (2.40)$$

donde c_1 y c_2 son las curvaturas de la primer y segunda superficie respectivamente.

$$K = (n - 1)(c_1 - c_2), \quad (2.41)$$

donde K es la potencia de la lente delgada.

$$u' = u - yK, \quad (2.42)$$

donde y es la altura del rayo en la lente.

Resolviendo la ecuación (2.40) y (2.41), como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas podemos conocer las curvaturas de la lente en términos del factor de forma, la potencia total de la lente delgada y la altura del rayo en la primera superficie,

$$c_1 = \frac{yK}{2(n-1)}(B+1) \text{ y } c_2 = \frac{yK}{2(n-1)}(B-1). \quad (2.43)$$

De igual manera resolviendo la ecuación (2.39) y (2.42), podemos conocer el ángulo de incidencia y de refracción en una lente delgada, en términos del factor de conjugados, la potencia total de la lente delgada y la altura del rayo en la primera superficie,

$$u = \frac{yK}{2}(C+1) \text{ y } u' = \frac{yK}{2}(C-1). \quad (2.44)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.43) y (2.44) en la ecuación (2.38) y haciendo un poco de algebra, tenemos las siguientes ecuaciones

$$SI = - \left\{ \left[\frac{yK}{2} \left[\left(\frac{B}{n-1} + C \right) + \frac{n}{n-1} \right] \right]^2 y \left[- \frac{yK}{2n^2} [B + C(n^2 - 1) + n^2] \right] + \right. \\ \left. \left[\frac{yK}{2} \left[\left(\frac{B}{n-1} + C \right) - \frac{n}{n-1} \right] \right]^2 y \left[- \frac{yK}{2n^2} [-B - C(n^2 - 1) + n^2] \right] \right\}, \quad (2.45)$$

$$SI = \frac{y^4 K^3}{4n^2} \left\{ \left[\left(\frac{B}{n-1} + C \right) + \frac{n}{n-1} \right]^2 [B + C(n^2 - 1) + n^2] + \right. \\ \left. \left[\left(\frac{B}{n-1} + C \right) - \frac{n}{n-1} \right]^2 [-B - C(n^2 - 1) + n^2] \right\}. \quad (2.46)$$

Arreglando términos finalmente tenemos

$$SI = \frac{y^4 k^3}{4} \left[\left(\frac{n}{n-1} \right)^2 + \frac{n+2}{n(n-1)^2} \left(B + \frac{2(n^2-1)}{n+2} C \right)^2 - \frac{n}{n+2} C^2 \right], \quad (2.47)$$

de la ecuación anterior podemos ver que la aberración esférica de una lente delgada, depende de la potencia de la lente al cubo, de la altura de incidencia del rayo en la lente a la cuarta potencia, al cuadrado con el factor de conjugados y de forma, y que no depende linealmente del índice de refracción de la lente. Si alguna de las superficies de la lente delgada fuera esférica, tendríamos que sumarle la ecuación (2.32), a la ecuación (2.47), para considerar los efectos de esa superficie esférica y hay que hacer el cálculo de la aberración esférica del frente onda, con la ecuación (2.22).

2.3 ELEMENTOS ÓPTICOS DIFRACTIVOS

En la teoría de difracción escalar, un Elemento Óptico Difractivo (EOD) con un perfil de fase $\Psi(x, y)$ es modelado como una pantalla de fase delgada con una ecuación de transmitancia compleja

$$t(x, y) = \exp[i\Psi(x, y)] \quad (2.48)$$

El elemento óptico difractivo retarda el frente de onda incidente y la propagación del nuevo frente de onda es modelado por la apropiada formulación escalar. Note que esta es una diferencia entre el perfil de la fase $\Psi(x, y)$ de un elemento óptico difractivo y la fase $\Phi(x, y)$, la cual es generada en el primer (u otro) orden de difracción. La figura (2.5) muestra superficies difractivas con diferente perfil de fase $\Psi(x, y)$, pero todos ellos generan la misma función de fase $\Phi(x, y)$ en el primer orden, con diferente eficiencia de difracción. La propagación del frente de onda al primer orden de difracción puede ser modelado por remplazar $\Psi(x, y)$ con $\Phi(x, y)$ en la ecuación (2.48).

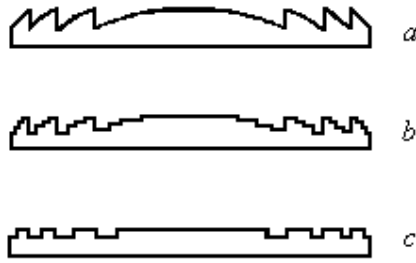


Figura (2.5). Superficie difractiva con (a) perfil continuo, (b) perfil multinivel y (c) perfil binario.

2.3.1 Función de Fase

Un elemento de fase delgado $\Phi(x, y)$ que es iluminado por una onda incidente $U_{inc}(x, y)$ con fase $\Phi(x, y)_{inc}$ genera una onda de salida $U_{sal}(x, y)$ con fase $\Phi(x, y)_{sal}$. La conversión del frente de onda es descrita por,

$$\Phi_{sal}(x, y) = \Phi_{inc}(x, y) + \Phi(x, y), \quad (2.49)$$

de la ecuación (2.49) podemos encontrar la función de fase $\Phi(x, y)$ del elemento de fase como:

$$\Phi(x, y) = \Phi_{sal}(x, y) - \Phi_{inc}(x, y) \quad (2.50)$$

Para la superficie difractiva mostrada en la figura (2.6), que conecta a un punto objeto (x_1, y_1, z_1) con un punto imagen (x_2, y_2, z_2) , las fases Φ_{sal} y Φ_{inc} son de la forma

$$\Phi_i(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z_i)^2}, \quad (2.51)$$

donde λ_0 es la longitud de onda del diseño e $i = 1, 2$.

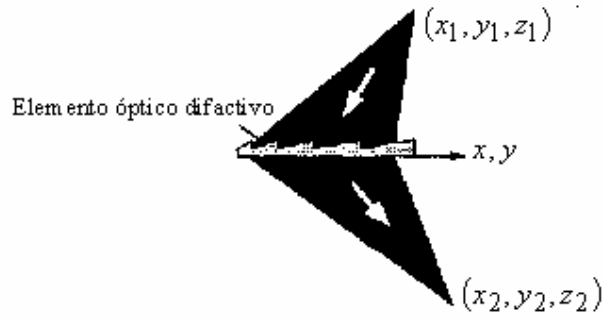


Figura (2.6). Superficie difractiva que conecta un punto objeto (x_1, y_1, z_1) con un punto imagen (x_2, y_2, z_2) .

En general la función de fase $\Phi(x, y)$ es típicamente descrita por un polinomio [29]

$$\Phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} m \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n. \quad (2.52)$$

La ecuación (2.52) puede simplificarse sin perder generalidad usando solo los términos que tienen simetría rotacional como una lente convencional,

$$\Phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} m \left(a_0 + a_2(x^2 + y^2) + a_4(x^2 + y^2)^2 + a_6(x^2 + y^2)^3 + \dots \right), \quad (2.53)$$

donde m es el orden difracción.

La potencia óptica de la superficie difractiva en el orden de difracción m puede calcularse como

$$k = 1/f_0 = -2a_2 m, \quad (2.54)$$

donde f_0 es la distancia focal del diseño.

La optimización de los coeficientes a_4, a_6, \dots se puede hacer mediante un trazo de rayos exacto con la ecuación de la rejilla [30], utilizando como frecuencia espacial

$$\frac{1}{L_x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \quad \frac{1}{L_y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}, \quad (2.55)$$

normalmente los programas de diseño óptico utilizan este método, ellos trazan rayos de manera exacta para calcular la función de merito e ir cuantificando los cambios producidos por los diferentes valores en los coeficientes de la fase, hasta lograr que la función de merito, tenga el valor deseado.

Un método alternativo para optimizar los coeficientes de la fase es el modelo de Sweatt [22][23], en este una superficie difractiva puede verse como una lente refractiva delgada con un índice de refracción extremadamente alto ($n_{Sweatt} = 10001$), permitiendo el trazo de rayos refractivo en el diseño de lentes difractivas. Quizás lo más importante de este modelo, es que permite derivar las expresiones para los coeficientes de las aberraciones de tercer orden para una lente difractiva directamente de las ecuaciones de lentes delgadas convencionales, ecuación (2.47). El índice de refracción para las propiedades cromáticas se puede describir como una función de la longitud de onda

$$n_s(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0} [n_s(\lambda_0) - 1] + 1. \quad (2.56)$$

Donde el subíndice s se refiere al modelo "Sweatt", y la longitud de onda λ_0 es la longitud de onda del diseño. Las curvaturas requeridas para la lente con potencia óptica k_0 están dadas por

$$c_{1,2} = c_s \pm \frac{k_0}{2[n_s(\lambda_0) - 1]}, \quad (2.57)$$

donde c_s es la curvatura del sustrato donde se graba la lente difractiva. En la práctica las curvaturas son usadas como variables en el proceso de optimización.

Turunen y Frank Wyrowski [31], proponen que la optimización de los coeficientes a_4, a_6, \dots se obtengan a partir del diseño de una superficie esférica de manera convencional. El espesor introducido por los coeficientes esféricos puede ser fácilmente convertidos a valores de los coeficientes de la fase difractiva, asumiendo que la ságit de la superficie se puede describir como

$$z(r) = \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - c^2(x^2 + y^2)}} + a_1(x^2 + y^2)^2 + a_2(x^2 + y^2)^3 + \dots, \quad (2.58)$$

donde a_1, a_2, \dots son constantes, la diferencia de camino óptico introducida esta dada por $-\Delta n z(r)$, donde $\Delta n = \pm[n_s(\lambda) - 1]$ es el cambio de índice de refracción en la primera y segunda superficie respectivamente (\pm). Expandiendo el primer término en una serie de Taylor y agrupándolos con los términos de la misma potencia, los coeficientes de la lente difractiva pueden ser reescritos como

$$a_4 = [n_s(\lambda) - 1] \left(\frac{c^3}{8} + d \right) \quad (2.59)$$

$$a_6 = [n_s(\lambda) - 1] \left(\frac{c^5}{16} + e \right)$$

2.3.2 Aberración Esférica de Tercer Orden Para una Lente Difractiva Modelo de Sweatt

Los coeficientes para las aberraciones de Seidel de una superficie difractiva se pueden obtener directamente de las aberraciones de Seidel para lentes delgadas, ecuación (2.3). Considerando que el índice de refracción tiende a infinito y agregando un coeficiente esférico de cuarto orden a la aberración esférica en la ecuación (2.47) obtenemos

$$SI = \frac{y^4 k^3}{4} [1 + B^2 + 4BC + 3C^2] - 8a_1 y^4 m \lambda_0. \quad (2.60)$$

Donde k es la potencia del lente, y es la altura de incidencia del rayo, C es el factor de conjugados, ecuación (2.39), B es el factor de conjugados ecuación, (2.40), λ_0 es la longitud de onda del diseño, m es el orden de difracción. Dado que el índice tiende a infinito, c_1 y c_2 deben tender a la curvatura del sustrato para compensar c_s . Nosotros necesitamos redefinir el factor de forma B para que no quede indeterminado.

$$B = \frac{c_1 + c_2}{(n-1)(c_1 - c_2)} = \frac{c_1 + c_2}{k} = \frac{2c_s}{k} \quad (2.61)$$

Finalmente con ayuda de la ecuación (2.22), podemos calcular la aberración esférica del frente de onda ocasionada por una lente difractiva.

2.4 CONCLUSIONES

En este capítulo definimos la aberración esférica del rayo y del frente de onda, a partir de esta encontramos las expresiones analíticas para calcularla a tercer orden en superficies esféricas, esféricas, planas, refractivas y reflectivas, además deducimos la expresión de la aberración esférica para una lente delgada, con superficies esféricas y esféricas.

Finalmente explicamos de manera general la función de fase de la superficie difractiva y como calcular los coeficientes de esta para corregir la aberración esférica de tercer orden.

CAPÍTULO 3

OPTIMIZACIÓN

3.1 INTRODUCCIÓN

El termino optimización en el diseño óptico se refiere al mejoramiento del funcionamiento de cualquier sistema óptico. Típicamente esto se logra al cambiar los parámetros de construcción (variables) del sistema, por ejemplo: las curvaturas de las superficies, el tipo de elementos, separaciones entre los elementos, espesores, materiales, ángulos de inclinación, etc. El funcionamiento del sistema se mide usando una función de error o función de mérito, la cual es definida comúnmente como la diferencia al cuadrado entre la aberración real del sistema y la aberración que queremos que tenga el sistema, esta también puede incluir propiedades no ópticas.

La optimización es un proceso iterativo y numérico, debido a que las funciones que conforman la función de mérito son altamente no lineales. En este proceso el diseñador debe escoger valores iniciales para las variables (Punto de inicio) y un método de optimización, este es aplicado repetitivamente tratando de encontrar nuevos valores para las variables que nos den un menor valor en la función de mérito, si este fuera el caso.

Existen básicamente dos tipos de métodos de optimización, los métodos locales y los globales, en los primeros el punto de inicio es una parte fundamental, ya que pueden encontrar el mínimo más cercano al punto de inicio rápidamente, pero una vez encontrado no puede salir y buscar otra solución en el espacio de diseño. En los métodos globales no es tan relevante el punto de inicio, por que estos buscan la mejor solución en todo el espacio de diseño, la dificultad de usar este tipo de métodos radica en el uso de una apropiada función de mérito, para obtener el funcionamiento del sistema que queremos.

3.2 DEFINICION DE VARIABLES

El punto de inicio del diseño usualmente tiene un número de superficies, separaciones, vidrios, etc., previamente escogidos. Estos son obtenidos de las consideraciones iniciales del diseño de primer orden del sistema. En algunos casos el punto de inicio puede ser un diseño ya existente que es modificado para que obtengamos los nuevos requerimientos.

3.2.1 Selección de Variables

Cualquier parámetro que describa el sistema puede ser usado como una variable. Normalmente solamente un subgrupo de las variables disponibles es usado, esto nos permite mantener algún control en las propiedades de primer orden y configuración del sistema.

Las variables más importantes son las curvaturas de la superficie, ya que determinan la distancia focal efectiva y el camino que sigue cada rayo a través del sistema. Además de ser una cantidad física fácil de visualizar. La limitación física que tiene estas variables es que el radio de curvatura no puede ser menor que el semidiámetro del elemento y esto debe ser considerado en el proceso de optimización.

Otras variables que pueden estar disponibles en cada superficie para solucionar problemas particulares, son las superficies esféricas polinomiales. Las más simples de estas son las que tienen simetría de rotación, las cuales pueden cambiar la forma de la superficie cambiando así las aberraciones, pero manteniendo la potencia paraxial de cada superficie y por lo tanto del sistema.

Las superficies esféricas son efectivas solamente si los términos apropiados de aberración son usados en la función de mérito. Por lo

tanto, la especificación de las variables deberá ser hecha pensando en el propósito de adicionar variables a la superficie.

Otras variables pueden ser adicionadas a la superficie para modificar las aberraciones, por ejemplo: las rejillas de difracción pueden la reflexión o transmisión del frente de onda. Existen muchos tipos de estructuras ópticas difractivas u holográficas que pueden ser adicionadas a las superficies, para control de las aberraciones o para que el sistema realice funciones que con solo superficies refractivas o reflectivas no se pueden lograr. La adición de estos elementos debe asegurar el propósito y funcionamiento del sistema.

El siguiente tipo de variables es la separación entre las superficies ópticas, ya sea el espesor del elemento o el espacio entre los elementos. Normalmente las aberraciones cambian ligeramente con los cambios en el espesor del elemento, así que este puede ser usado o no como variables. La separación entre los elementos es una variable efectiva, ya que las aberraciones cambian marcadamente con la separación de los elementos respecto al diafragma de abertura. Es necesario introducir condiciones limitantes para el tamaño del sistema y el espesor de los elementos.

Las propiedades ópticas de los materiales usados en la lente pueden ser obviamente variables. Para aplicaciones apocromáticas especiales, la selección del vidrio puede ser dictada por los parámetros físicos básicos. El vidrio o el material refractivo tienen tres variables básicas, el índice de refracción, el número de Abbe o la dispersión y la dispersión parcial. Como sabemos solo las primeras dos son usadas como variables. Las propiedades físicas del vidrio óptico requieren que estas variables cambien solamente dentro de las condiciones permisibles, como lo indican los mapas de propiedades de los vidrios, y que solo existe un número finito de vidrios ópticos.

Análogo a las superficies esféricas existen materiales con índice de refracción de gradiente. Un vidrio puede ser representado por un conjunto de variables del índice que dependen de su posición. Al igual que las superficies esféricas o las estructuras difractivas estas, deben tener un propósito específico en el sistema.

3.3 FUNCION DE MERITO

En la teoría de optimización automática de los sistemas ópticos, una premisa fundamental es que la calidad de los sistemas ópticos puede especificarse con un solo número real dado por la función de mérito, ϕ . Por tanto, puede decirse que el diseño automático de sistemas ópticos consiste en encontrar el extremo de una función (Máximo o mínimo dependiendo de la forma exacta de la definición de ϕ) seleccionada adecuadamente y sujeta a restricciones para evitar la generación de sistemas ópticos poco prácticos.

Hay dos etapas en el proceso de diseño que podrían dar lugar a dos funciones de mérito. En una primera etapa, se necesita a una función que guíe a un sistema inicialmente no corregido hacia una región factible en el espacio de diseño. En este caso la función no necesariamente está conectada de forma muy directa con la calidad de la imagen. Después, en la segunda etapa se necesita una función de mérito que si este directamente relacionada con la calidad de la imagen producida por el sistema, de tal manera que se obtenga un balance de aberraciones óptimo.

En la práctica, la elección de la función de mérito depende de múltiples factores tales como el tipo de sistema óptico, las condiciones en que va a ser usado en términos de la apertura, el tamaño del campo, las variables seleccionadas, el detector que se va a usar con el sistema óptico, el estado de corrección que se busca etc.

La función de mérito no está restringida a incluir únicamente las aberraciones del sistema óptico, esta puede incluir cantidades como el peso, costo y cualquier otra cantidad no óptica que se desee optimizar.

3.3.1 Función de Mérito y las Aberraciones

Del capítulo anterior, sabemos que existen las aberraciones del frente de onda y las aberraciones del rayo, el uso de alguna de estas en la función de mérito, está directamente relacionado con la preferencia del diseñador.

Las funciones de mérito más comúnmente usadas están basadas en las aberraciones del rayo, ya sean transversales o longitudinales. Lo típico es tener una distribución uniforme de puntos en la pupila de entrada y trazar rayos que pasen por tales puntos. La selección de los rayos trazados es importante pues influye en gran medida en el resultado final, por lo que debe tenerse el suficiente cuidado al hacer la selección del patrón de rayos. La distribución de los rayos en la pupila de entrada debe ser capaz de tomar en cuenta las variaciones de las aberraciones sobre la pupila y sobre el campo.

La distribución de rayos debe variar con el tipo de sistema óptico. Se puede hacer un análisis detallado de la variación de las aberraciones del sistema inicial, para seleccionar una buena distribución de rayos y repetir el proceso fundamentalmente durante la optimización. Sin embargo, esto consume una cantidad enorme de tiempo, el proceso puede minimizarse usando las reglas propuestas por King [32], quien da un algoritmo para seleccionar una distribución de rayos razonablemente eficiente.

Para controlar la forma de la corrección en la etapa de optimización es necesario, por tanto, pesar de forma diferente las aberraciones asignadas a cada rayo. Lo común es que los pesos se asignen de acuerdo a la

posición del rayo en la pupila de entrada, sin embargo, es más lógico asignar pesos de acuerdo a la posición del rayo en la imagen. Como estas posiciones varían en cada iteración, es necesario cambiar los pesos en cada iteración. O'Brian [33], Propone una función de tipo gaussiana, como mecanismo para asignar el peso adecuado a cada rayo.

3.4 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

Desde el punto de vista matemático es bueno que la función de mérito sea continua y diferenciable en las variables de diseño, comúnmente se define como [34]

$$\varphi = \sum_{i=1}^M f_i^2. \quad (3.1)$$

Donde las funciones f_i dependen primordialmente, pero no exclusivamente, de las aberraciones del sistema óptico. Como lo mencionamos anteriormente podemos incluir peso, costos y cualquier otra cantidad no óptica.

Las funciones f_i miden las aberraciones del sistema óptico y tienen la forma general

$$f_i = \omega_i(e_i - t_i), \quad (3.2)$$

Donde e_i es el valor de la aberración real o actual del sistema, ω_i es la función de peso y t_i es el valor de la aberración que queremos. Los valores de las aberraciones e_i son funciones de todos los parámetros de construcción del sistema óptico, de los cuales un conjunto $x_j = (j = 1, 2, \dots, N)$ son variables de diseño.

La calidad óptica debe describirse en términos de la suma de los cuadrados de las aberraciones, como en la ecuación (3.1), por que el efecto de una aberración positiva o negativa es igualmente nocivo para la calidad de la imagen.

Por otro lado, un criterio muy conocido de la calidad de la imagen es la razón de Strehl [35], que para pequeñas aberraciones depende de la varianza de la aberración del frente de onda [36][37], y aunque esto no es lo mismo que la suma de los cuadrados de las aberraciones del frente de onda, esencialmente depende del cuadrado de las aberraciones y no del valor absoluto de las mismas.

En otros sistemas ópticos un criterio mas realista es la MTF (Modulation transfer function) que depende de los cuadrados de un conjunto de términos que están estrechamente relacionados con las aberraciones. Específicamente Gostick, Kidger y Benham [38] demostraron que en la aproximación de la óptica geométrica la MTF puede aproximarse por

$$L_r(v) \propto \sum [1 - 2\text{sen}^2(\pi v \partial \xi)], \quad (3.3)$$

donde $L_r(v)$ es la parte real de la MTF sagital geométrica, v es la frecuencia espacial y $\partial \xi$ es la componente x de la aberración transversal. Una expresión similar existe para la parte tangencial de la MTF.

En la ecuación (3.3), al minimizar la $\sum [1 - 2\text{sen}^2(\pi v \partial \xi)]$, se maximiza la MTF en la aproximación de la óptica geométrica. Expresiones similares pero más complejas se derivan para la MTF basada en la difracción, pero no se analizan en este trabajo.

Por lo anterior la suma de los cuadrados de un conjunto de términos relacionados con las aberraciones es una forma lógica y quizás la única

forma lógica, para una función de mérito para los problemas de optimización de los sistemas ópticos.

Si las aberraciones fueran lineales en las variables de diseño, el diseño óptico sería relativamente simple. Sin embargo, las aberraciones son funciones altamente no lineales de las variables de diseño, esto tiene un gran impacto en los métodos necesarios para la optimización y en la efectividad de los programas de optimización.

Como ejemplo muy simple consideraremos la aberración esférica de Seidel para una sola superficie expresada como

$$SI = -A^2 y \left[\left(\frac{u'}{n'} \right) - \left(\frac{u}{n} \right) \right], \quad (2.21)$$

donde “A”, es el invariante de refracción, “y” es la altura de incidencia del rayo marginal paraxial, u y u' son los ángulos de convergencia y n y n' son los índices de refracción antes y después de la refracción en la superficie, respectivamente.

Simplificando aun mas, consideraremos que $u=0$ y $y=1$, tenemos

$$SI = \frac{(n' - n)}{n'^2} c^3, \quad (3.4)$$

donde c es la curvatura de la superficie.

De la ecuación (3.4), es claro que SI es una función cúbica de c . La relación entre la aberración de quinto orden y la curvatura es aun más compleja. Adicionalmente la aberración introducida por una superficie, es afectada por las aberraciones introducidas en las superficies previas. Por

lo tanto, como se describe en el ejemplo, no hay relaciones simples entre las aberraciones y las variables de diseño.

La función de mérito φ definida en la ecuación (3.1), puede reescribirse en forma matricial como

$$\varphi = F^T F, \quad (3.5)$$

donde F es un vector columna cuyas componentes son las f_i y F^T es su transpuesto.

Si hacemos un desarrollo de cada función f_i , en una serie de Taylor, y cortamos la serie después de los términos con primeras derivadas, entonces

$$\varphi = \sum_{i=1}^M \left[f_{0i} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (x_j - x_{0j}) \right]^2, \quad (3.6)$$

donde f_{0i} es el valor de f_i en X_0 . X_0 es un punto en el espacio de diseño formado por los valores x_{0j} que representan el punto de partida o el diseño inicial al comenzar el proceso de optimización.

Desarrollando el binomio al cuadrado de la ecuación (3.6), tenemos

$$\varphi = \sum_{i=1}^M f_{0i}^2 + 2 \sum_{i=1}^M \left[\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_{0j}) \right] + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_{ij} a_{ik} (x_j - x_{0j})(x_k - x_{0k}), \quad (3.7)$$

donde

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \quad (3.8)$$

En la ecuación (3.7), el primer término es constante y puede despreciarse por que no influye en la topografía del espacio del diseño. El segundo y tercer término pueden combinarse cambiando el origen de x_j y haciendo una rotación de ejes de tal forma que φ pueda expresarse como una forma cuadrática definida positiva [39] ($a_{ij}^2 \geq 0$ para todo i, j). En notación matricial tenemos

$$\varphi = (X - X_0)^T A^T A (X - X_0), \quad (3.9)$$

Donde A es una matriz de $M \times N$ con los elementos a_{ij} .

En la siguiente sección explicaremos los diferentes métodos que se utilizan para optimizar a un sistema óptico. Estos los hemos clasificado en dos tipos: locales y globales. Para los métodos locales explicaremos ampliamente solo el método más usado por los programas de diseño óptico, conocido como mínimos cuadrados amortiguados, con sus diferentes variantes que lo han hecho el preferido. Para los métodos globales explicaremos también solo un método, algoritmos genéticos ya que consideramos que es el mejor método de este tipo.

3.4.1 Métodos de Optimización Locales

Todos estos métodos se fundamentan en el cálculo diferencial para establecer estrategias eficientes con el objetivo de mejorar sistemas a partir de un sistema inicial.

Todos estos utilizan solamente las primeras derivadas, por que el trabajo involucrado y el tiempo de cómputo prohíben el cálculo de las derivadas de alto orden.

De la ecuación (3.6) tenemos

$$f_i = f_{0i} + \sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j - x_{0j}); \quad (3.10)$$

o bien en notación matricial

$$F = F_0 + A(X - X_0) \quad (3.11)$$

Si se considera a $f_i = 0$ para todo i , se tiene un sistema de ecuaciones lineales simultaneas en $x_j - x_{0j}$, y al resolverlo se obtienen los cambios en las N variables que dan origen a un sistema óptico con aberraciones igual a cero. Es decir, se obtiene la ecuación

$$A(X - X_0) = -F_0. \quad (3.12)$$

El método anterior tiene la desventaja que la matriz A debe ser cuadrada. Es decir, que debe haber tantas variables como aberraciones, lo cual frecuentemente no sucede en el diseño óptico. Además, como la matriz A es casi singulares [40], las ecuaciones de la ecuación (3.10), son muy grandes en magnitud y por tanto las no linealidades de F afectan seriamente la solución que en muchos casos resulta ser peor respecto al anterior.

3.4.1.1 Mínimos Cuadrados

Una propuesta diferente a la de la sección anterior, pero más real, es minimizar los valores de las f_i en lugar de igualarlas a cero. Para esto, derivando a φ con respecto a x_j tenemos de las ecuaciones (3.1) y (3.8)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^M 2f_i a_{ik}; \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.13)$$

sustituyendo f_i de la ecuación (3.10) e igualando a cero, se obtiene las siguientes N ecuaciones en $x_j - x_{0j}$

$$\sum_{i=1}^M a_{ik} f_{0i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij} a_{ik} (x_j - x_{0j}) = 0, \quad (3.14)$$

o en notación matricial,

$$A^T A (X - X_0) + A^T F_0 = 0. \quad (3.15)$$

Las dos ecuaciones anteriores (3.14) y (3.15) son las ecuaciones clásicas de los mínimos cuadrados, estas no necesitan que el número de aberraciones sea igual al de las variables.

La solución de la ecuación (3.15) es

$$X - X_0 = -(A^T A)^{-1} A^T F_0, \quad (3.16)$$

de donde es claro que pequeños errores en el cálculo de las derivadas o los errores de redondeo al resolver las ecuaciones tendrán un efecto importante sobre la solución que se obtenga, pero aunque la exactitud sea infinita, la no linealidad de F hace que la solución dada de la ecuación (3.16) sea un óptimo solo en el caso lineal, y por lo tanto, es frecuente que la solución conduzca a un sistema peor que el inicial.

3.4.1.2 Mínimos Cuadrados Amortiguados

Una forma de resolver las dificultades antes mencionadas es limitar los cambios en los parámetros de tal forma que se mantenga una aceptable correlación entre los mejoramientos pronosticados y los mejoramientos reales.

Para implementar lo antes mencionado, Wynne [41] reemplazo la función de mérito por

$$\varphi + p^2 \sum_{j=1}^N (x_j - x_{0j})^2, \quad (3.17)$$

De tal forma que las ecuaciones (3.14) y (3.15) se transforman en

$$\sum_{i=1}^M a_{ik} f_{0i} + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [a_{ij} a_{ik} (x_j - x_{0j}) + p^2 (x_j - x_{0j})] = 0, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N \quad (3.18)$$

y en

$$(A^T A + p^2 I)(X - X_0) = -A^T F_0, \quad (3.19)$$

donde I es la matriz unitaria de orden N y p es un escalar que determina el tamaño de paso. En la práctica el tamaño de p está determinado por la no linealidad del sistema óptico. Por ejemplo, si la discrepancia entre los valores reales de las f_i y los valores pronosticados es grande, entonces p se incrementa hasta que algún nivel de coincidencia se alcance. Alternativamente, los valores de φ pueden calcularse para distintos valores de p y ajustando una curva se puede encontrar el valor óptimo de p .

El anterior procedimiento de amortiguamiento es incorrecto, por que trata a todas las variables de la misma manera, siendo que la sensibilidad de la

solución a errores de redondeo o a errores en las derivadas es diferente de variable en variable.

Al procedimiento mencionado se le conoce como amortiguamiento aditivo y una generalización de este se obtiene cuando se usa como función de mérito a

$$\varphi + p^2 \sum_{j=1}^N q_j^2 (x_j - x_{0j})^2 \quad (3.20)$$

De acuerdo con Meiron [42] los factores q_j se calculan como

$$q_j^2 = \sum_{i=1}^M a_{ij}^2, \quad (3.21)$$

de tal forma que las variables que ocasionan un mayor cambio en φ son altamente amortiguadas. Las ecuaciones (3.19) se convierten en

$$(A^T A + p^2 Q)(X - X_0) = -A^T F_0, \quad (3.22)$$

donde Q es una matriz diagonal cuyos elementos son q_j^2 , y como los elementos de la diagonal de $A^T A$ son iguales a $\sum_{i=1}^M a_{ij}^2$, entonces las ecuaciones amortiguadas se obtienen de las de mínimos cuadrados simplemente multiplicando los términos de la diagonal por $1 + p^2$, dando lugar a lo que se conoce como amortiguamiento multiplicativo.

Este último procedimiento tiene poca justificación teórica. El factor q_j debe ser determinado por la magnitud de las segundas derivadas y no hay ninguna razón para suponer que una primera derivada con valor grande implique una segunda derivada también con valor grande. Sin embargo, a

pesar de la falta de sustento teórico ambos amortiguamientos, el aditivo y el multiplicativo, se han usado con considerable éxito en el diseño óptico.

3.4.1.3 Multiplicadores de Lagrange

En el procedimiento de optimización mencionado anteriormente minimiza la ecuación (3.1). Sin embargo, en muchos casos no es suficiente tener una minimización sin restricciones, ya que puede desearse que el sistema óptico posea algunas propiedades preasignadas. Es decir, se trata de que algunas ecuaciones se resuelvan exactamente al mismo tiempo que la función de mérito es minimizada. Para esto agregamos la condición de que la siguiente ecuación se debe satisfacer exactamente

$$B^T(X - X_0) + D = 0, \quad (3.23)$$

donde B es una matriz de dimensiones $P \times N$ con elementos

$$b_{kj} = \frac{dq_k}{dx_j}, \quad (3.24)$$

donde q_k son un conjunto de funciones que tienen valores definidos c_k y que definen las propiedades preasignadas, en q_k y en c_k , $k = 1, \dots, p$ con $P < N$.

Cada una de las restricciones representa un plano N -dimensional, cuyo vector normal es

$$V_k = \begin{bmatrix} b_{k1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{kn} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

La intersección de todos los planos es una superficie $(N - P)$ -dimensional sobre la cual debe encontrarse el mínimo de la función de merito que satisface las restricciones. Como el mínimo es un punto estacionario de φ , el gradiente de φ no tiene componente sobre esta superficie, así que puede escribirse como una combinación lineal de todos los vectores normales a la superficie.

$$\nabla \varphi = 2 \sum_{k=1}^P \lambda_k V_k, \quad (3.26)$$

donde las λ_k forman un conjunto de multiplicadores escalares. Considerando a Λ como un vector columna con elementos λ_k la ecuación (3.26), se puede escribir en notación matricial como

$$\nabla \varphi = 2B^T \Lambda. \quad (3.27)$$

T. H. Jamieson [43], nos dice que $\nabla \varphi = 2A^T F$, e igualando esta con la ecuación (3.27), tenemos

$$A^T F = 2B^T \Lambda, \quad (3.28)$$

de donde podemos ver que

$$A^T A(X - X_0) - B^T \Lambda = -A^T F, \quad (3.29)$$

donde los escalares λ_k son incógnitas en la ecuación y se conocen como los multiplicadores de Lagrange.

Las ecuaciones (3.23) y (3.29) forman un conjunto de $N+P$ ecuaciones, con $N+P$ incógnitas. Por tanto, considerar el conjunto de restricciones

significa resolver un conjunto aumentado de ecuaciones y como las λ_k , no nos interesan pueden permanecer desconocidas.

3.4.2 Métodos Globales

La mayoría de los esquemas de optimización dependen de la elección de un punto de inicio por el diseñador, seguido por la aplicación de un método de optimización para encontrar el mínimo más cercano al punto de inicio. Si el mínimo encontrado no satisface la calidad del sistema óptico requerido, debemos escoger un nuevo punto de inicio y repetir esto hasta que el mínimo encontrado sea satisfactorio. Los métodos de optimización globales son independientes del punto de inicio, ya que estos usan más de un punto de inicio simultáneamente, de tal manera que el mínimo encontrado, es el mínimo global.

3.4.2.1 Algoritmos Genéticos

Los organismos vivos poseen una destreza consumada en la resolución de problemas. Manifiestan una versatilidad capaz de avergonzar a los programas para computadora más sofisticados. Esta observación resulta un tanto molesta para quienes se dedican en la informática a la resolución de problemas y que han dedicado meses o años de esfuerzo intelectual a preparar un algoritmo o una solución, mientras los organismos obtienen sus habilidades a través de mecanismos como la evolución y la selección natural.

Más que envidiar estas cualidades de la evolución, hay que imitarla. En esto, están fundamentados los algoritmos genéticos que fueron inventados para imitar algunos de los procesos observados en la evolución natural. Los algoritmos genéticos, son algoritmos de búsqueda que permiten la exploración en un abanico mucho más amplio de posibles soluciones que los programas tradicionales.

Actualmente, los mecanismos que dirigen la evolución no están completamente entendidos, pero algunas de sus características si son conocidas. La evolución tiene lugar en los cromosomas, dispositivos orgánicos para codificar la estructura de los seres vivos. Un ser vivo creado, en parte, a través de un proceso de decodificación del cromosoma. Los procesos de codificado y decodificado del cromosoma son de los procesos que no están bien comprendidos, pero hay algunas características de la teoría de la evolución que son ampliamente aceptadas.

1.- La evolución es un proceso que opera sobre los cromosomas más que sobre los seres vivos.

2.- La selección natural es la conexión entre los cromosomas y la capacidad de sobrevivir de sus estructuras decodificadas. El proceso de selección natural conduce a que los cromosomas que codifican estructuras aptas, se reproduzcan con más frecuencia que los cromosomas que codifican estructuras poco aptas. La selección constituye un proceso sencillo: cuando un organismo falla en alguna prueba de idoneidad, simplemente perece.

3.- El proceso de reproducción es el punto en el cual la evolución tiene lugar, este garantiza la mezcla y recombinación de los genes entre la descendencia. En la fusión del ovulo y el espermatozoide los cromosomas homólogos se estiran y endosan uno al otro, y luego se entrecruzan en zonas intermedias, intercambiando material genético. Debido a esta mezcla y cruzamiento, los seres vivos evolucionan a velocidad mucho mayor que si cada descendiente contuviera una mera copia de los genes de un único progenitor modificado a veces por una simple mutación.

4.- La evolución biológica no tiene memoria. Todo lo que se conoce acerca de la creación de individuos que funcionan bien en su medio ambiente, esta contenido en el conjunto de cromosomas que portan los individuos y en la estructura de los decodificadores de cromosomas.

Estas características de la evolución natural intrigaron a Jhon Holland [44], al inicio de los setentas. Holland pensó que incorporando tales características de manera apropiada en un algoritmo para computadora, se podría obtener una técnica para resolver problemas difíciles por el mismo camino en que la naturaleza lo hacia, a través de la evolución. Así, el comenzó a trabajar en un algoritmo que manipulara cadenas de dígitos binarios (unos y ceros) a las que el llamo cromosomas. Los algoritmos de Holland simulaban la evolución de tales cromosomas. Como en la naturaleza sus algoritmos resolvían el problema de encontrar buenos cromosomas encontrando a ciegas el material de los mismos. Como en la naturaleza, ellos no sabían nada acerca del tipo de problema que deberían resolver. La única información que se les dio fue la evaluación que producía cada cromosoma, y tal evaluación se uso solo para predisponer la selección de cromosomas, de tal forma que aquellos con las mejores evaluaciones tenderían a reproducirse mas frecuentemente que los que tuvieran mala evaluación.

Cuando Holland comenzó a estudiar estos algoritmos, no tenían nombre. Como el campo empezó a demostrar su potencial fue necesario bautizarlos y en referencia a su origen en el estudio de la genética, Holland los llamo Algoritmos genéticos.

3.4.2.2 Una Visión General del Algoritmo Genético

Consideremos los mecanismos que ligan un algoritmo genético con el problema a resolver. Hay dos mecanismos, uno es la codificación del problema en un cromosoma y el otro es la función de evaluación que da

una medida del valor de los cromosomas en el contexto del problema. Este último es esencial en el proceso de optimización.

La técnica para codificar un problema puede variar de problema a problema y de algoritmo genético a algoritmo genético. En el trabajo de Holland la codificación se hace usando cadenas de bits, pero esta no es la única posibilidad. Probablemente, no haya una técnica de codificación que trabaje bien en todos los problemas, y una cierta cantidad de inspiración esta involucrada al seleccionar una buena técnica de codificación.

La función de evaluación es la conexión entre el algoritmo genético y el problema que se va a resolver. Una función de evaluación tiene como entrada a un cromosoma y como salida un número o una lista de números que es una medida del funcionamiento del cromosoma en el problema a ser resuelto. La función de evaluación juega el mismo papel en el algoritmo genético que el medio ambiente en la evaluación natural. La interacción de un individuo con su ambiente proporciona una medida de exactitud para sobrevivir, y la interacción de un cromosoma con la función de evaluación proporciona una medida de aptitud que el algoritmo genético usa cuando lleva a cabo la etapa de reproducción. La figura (3.1), contiene una descripción de un algoritmo genético.

Si todo va bien a través del proceso de simular la evolución, una población inicial de cromosomas no extraordinarios mejorara cuando los padres sean remplazados por mejores y mejores hijos. El mejor individuo en la población final puede ser una solución altamente evolucionada para el problema.

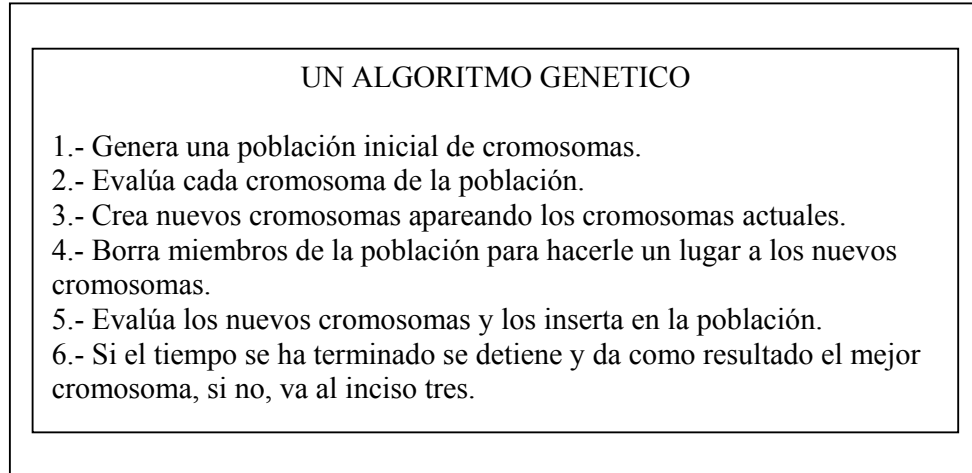


Figura (3.1). Descripción de un algoritmo genético.

3.4.2.3 Diferencias Entre los Algoritmos Genéticos y los Métodos Tradicionales de Optimización.

Los algoritmos genéticos difieren de los métodos tradicionales en:

- 1) Los algoritmos genéticos trabajan con un código de los parámetros, y no con los parámetros mismos. Requieren que los parámetros del problema a optimizar se codifiquen como cadenas de longitud finita sobre algún alfabeto finito.
- 2) Los algoritmos genéticos utilizan poblaciones de puntos y no puntos individuales. En los métodos de optimización tradicionales nos movemos en el espacio desde un solo punto a otro usando reglas de transición deterministas. Este método de punto a punto se usa por que es la forma perfecta de localizar óptimos falso en un espacio que contenga múltiples máximos y mínimos. En contraste, los algoritmos genéticos utilizan una rica base de datos de puntos simultáneamente, escalando muchas colinas en paralelo, de tal forma que la probabilidad de encontrar óptimos falsos se reduce enormemente.
- 3) Los algoritmos genéticos usan la información de la función de evaluación y no sus derivadas u otro conocimiento auxiliar. Las

técnicas de búsqueda tradicionales requieren mucha información auxiliar para trabajar apropiadamente. Por ejemplo, las técnicas del gradiente necesitan derivadas (Calculadas analítica o numéricamente) para ser capaces de encontrar los máximos o los mínimos. En cambio, los algoritmos genéticos no necesitan esa información auxiliar solo requieren los valores de la función de evaluación asociados con las cadenas individuales.

- 4) Los algoritmos genéticos usan reglas de transición probabilísticas en lugar de reglas deterministas. A las personas familiares con los métodos determinísticos lo anterior les parece extraño, pero el uso de probabilidades no significa que el método sea una búsqueda aleatoria simple, los algoritmos genéticos usan la aleatoriedad como una herramienta para guiar la búsqueda hacia regiones con mayor probabilidad de ser mejores.

3.4.2.4 Teorema Fundamental de los Algoritmos Genéticos.

En los algoritmos genéticos, la búsqueda de soluciones idóneas de un problema consiste en la búsqueda de determinadas cadenas binarias. El universo de todas las posibles cadenas puede ser concebido como un paisaje imaginario, en el que la ubicación de las cadenas esta señalada por cimas y valles; estos últimos albergan a las que corresponden a las soluciones menos buenas, mientras que el punto mas elevado lo ocupa la cadena óptima.

También podemos definir regiones del espacio de soluciones fijándonos en las cadenas que posean unos o ceros en lugares determinados, una especie de equivalencia binaria de las coordenadas de un mapa. El conjunto de todas las cadenas que empiecen con uno, constituyen una región en el espacio de posibilidades. Otro tanto sucede con todas las que empiecen con cero, o las que tengan un uno en la cuarta posición, etc.

Una técnica habitual para la exploración de tal paisaje es la escalada: se comienza en un punto elegido al azar; si una ligera modificación mejora la calidad de la solución, se prosigue en esa dirección; de no ser así, se toma la dirección contraria. Sin embargo, los problemas complejos originan paisajes con muchas cimas. Al aumentar el número de dimensiones del problema, el territorio puede contener túneles y puentes. El hallazgo de la cima adecuada, e incluso la sola determinación del sentido de ascenso, se torna cada vez más problemático. Adicionalmente, tales espacios de búsqueda son enormes.

Los algoritmos genéticos echan la red sobre este paisaje. La multitud de cadenas de la población sondea muchas regiones a la vez. Es notable que la tasa a que el algoritmo genético toma muestras en diferentes regiones se corresponda directamente con su elevación media, es decir, con la probabilidad de hallar una buena solución en ese entorno.

El algoritmo genético explota las regiones de más alto rendimiento del espacio de soluciones por que las sucesivas generaciones de reproducción y cruzamiento generan un número creciente de cadenas pertenecientes a ellas. De hecho, el número de cadenas de una región dada aumenta a ritmo proporcional a la estimación estadística de la idoneidad de esa región. Un estadístico tendría que evaluar docenas de muestras tomadas de millones de regiones para determinar la idoneidad media de cada región. El algoritmo genético alcanza el mismo resultado con muchísimas menos cadenas y prácticamente sin computo alguno.

La clave de esta conducta sorprendente, reside en que cada cadena individual pertenece a todas las regiones de las cuales aparece uno cualquiera de sus bits. La cadena *11011001* es miembro de todas las regiones *11****** (donde * indica que es indiferente el valor del bit correspondiente), *1*****1*, ***()**()** y demás. A tales regiones se les llama bloques construidos o esquemas. Las regiones más amplias, las

que contienen muchos bits sin especificar, serán muestreadas por una fracción grande de todas las cadenas de la población. Así que, un algoritmo genético que manipule una población de unos cientos de cadenas está realmente tomando muestras de un número de regiones enormemente mayor. Tal paralelismo implícito proporciona al algoritmo genético su ventaja principal sobre otros procedimientos.

Para formalizar un poco lo anterior, y sin perder generalidad, consideremos que las cadenas están construidas sobre un alfabeto binario $V = \{0,1\}$, de aquí en adelante usaremos letras mayúsculas para representar cadenas y sus componentes los denotaremos con minúsculas. Por ejemplo una cadena de bits puede representarse como

$$A = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7, \quad (3.30)$$

Donde A es la cadena o cromosoma, los a_i son los genes y los valores que puede tomar a_i son los alelos.

Una población se denotara como $A(t)$ y estará formada por las cadenas A_j , $j=1, 2, \dots, n$, existentes en el tiempo t . Un esquema H esta definido sobre un alfabeto de tres símbolos $V_+ = \{0,1,*\}$. Por ejemplo, un esquema de longitud 7 puede ser $H=*11*0**$, note que la cadena $A=0111000$ pertenece al esquema H .

Es fácil notar que en una cadena binaria de longitud l hay 3^l esquemas. En general, para alfabetos de cardinalidad k existen $(k+1)^l$ esquemas. Además, en una población con n miembros existen a lo más $2^l n$ esquemas. Estas cantidades nos dan una idea de la magnitud de la información que es procesada por un algoritmo genético.

El orden de un esquema, denotado por $o(H)$, es el número de posiciones fijas. Por ejemplo, el esquema $H=*11*0**$ tiene un orden igual a 3, es decir, $o(H)=3$.

La longitud de un esquema, denotada por $\delta(H)$, es la distancia entre la primera y la última posición especificada por la cadena, en el ejemplo anterior $\delta(H)=3$.

El efecto de la reproducción sobre el número esperado de esquemas en una población es fácil de determinar. Suponga que en un tiempo dado t hay m ejemplos de un esquema particular H contenidos dentro de la población $A(t)$, esto lo denotaremos como $m=m(H,t)$.

Durante la reproducción una cadena es copiada de acuerdo a su evaluación. Es decir una cadena A_j es seleccionada con una probabilidad

$$p_j = \frac{f_j}{\sum f_j}, \quad (3.31)$$

donde f_j es la evaluación de A_j . Por lo tanto, en el tiempo $t + 1$

$$m(H, t+1) = m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}}, \quad (3.32)$$

donde $f(H)$ es la evaluación promedio de las cadenas que contienen al esquema H en el tiempo t , y

$$\bar{f} = \frac{\sum f_i}{n}. \quad (3.33)$$

La ecuación (3.32), nos indica que un esquema particular crece como el cociente de las evaluaciones promedio del esquema, a el promedio de las

evaluaciones de la población. Es decir, esquemas con evaluaciones por arriba del promedio de la población incrementan su número en la próxima generación, mientras que esquemas con evaluaciones por debajo del promedio de la población decrece en número. Este funcionamiento se lleva acabo con todos los esquemas contenidos en una población.

Suponiendo que un esquema H permanece por arriba del promedio en una cantidad $c \bar{f}$, donde c es una constante, entonces

$$m(H, t+1) = m(H, t) \frac{(\bar{f} + c \bar{f})}{\bar{f}}, \quad (3.34)$$

o bien

$$m(H, t+1) = (1+c)m(H, t). \quad (3.35)$$

Si el proceso se inicia en $t=0$ y se supone un valor estacionario de c , la ecuación anterior se convierte en

$$m(H, t) = m(H, 0)(1+c)^t. \quad (3.36)$$

Cabe aclarar que los hombres de negocios reconocen la ecuación (3.36), como la ecuación de interés compuesto y los matemáticos la reconocen como una progresión geométrica.

El efecto de la reproducción es ahora claro; la reproducción incrementa (disminuye) exponencialmente el número de cadenas que contienen a un esquema que este por encima (por debajo) del promedio.

Por otro lado, el cruzamiento de cadenas afecta a los esquemas de distinta manera, consideremos a una cadena con 7 genes y dos de sus esquemas

$$\begin{array}{r}
 A = \quad 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \\
 H1 = \quad * \ 1 \ * \ * \ * \ | \ * \ 0 \\
 H2 = \quad * \ * \ * \ 1 \ 0 \ | \ * \ *
 \end{array}$$

En el proceso de cruce se selecciona aleatoriamente un punto de cruce y después se intercambian las subcadenas. Supongamos que el punto de cruce es en el lugar 5 como se ilustra con una línea vertical, es claro que el procedimiento de cruce afecta de manera distinta a los esquemas, el esquema $H1$ es destruido, mientras que el esquema $H2$ sobrevive, nótese que la posibilidad de que un esquema sobreviva depende de la longitud del esquema. Para cuantificar el efecto obsérvese que $\delta(H1)=5$, si el lugar de cruce se selecciona aleatoriamente con una probabilidad

$$p_d = \frac{\delta(H1)}{l-1}, \quad (3.37)$$

Es decir $p_d = \frac{5}{6}$ y similarmente el esquema $H2$.

Si el proceso de cruzamiento se lleva a cabo con una selección aleatoria, digamos con la probabilidad p_c , entonces la probabilidad de que un esquema sobreviva estará dada como

$$p_s \geq 1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1}, \quad (3.38)$$

y suponiendo que los procesos de reproducción y cruce son independientes, tenemos

$$m(H, t + 1) \geq m(H, t) \frac{f(H)}{\bar{f}} \left[1 - p_c \frac{\delta(H)}{l-1} \right]. \quad (3.39)$$

De esta última ecuación se observa que el efecto de la reproducción y el cruzamiento es que un esquema crece o decrece de acuerdo a un factor multiplicativo, este factor depende de dos cosas: que el esquema esté por arriba o por abajo del promedio de la población y de la longitud relativamente corta o larga del esquema. Claramente, aquellos esquemas que estén por arriba del promedio y que tengan longitudes cortas se incrementarán exponencialmente. Esta conclusión es tan importante que se le conoce como el teorema de los esquemas o el teorema fundamental de los algoritmos genéticos [45].

3.4.2.5 Anatomía y Ejemplo de un Algoritmo Genético

La anatomía de un algoritmo genético es sorprendentemente simple, no involucra nada más complejo que copiar cadenas e intercambiar cadenas parcialmente.

Un algoritmo genético está compuesto por: un generador de números aleatorios, una base de datos, un módulo para reproducción, uno para cruza, uno para mutaciones, uno de evaluación y el módulo principal.

Para demostrarlo encontraremos el máximo de la siguiente función

$$f(x) = x \cdot \text{sen}(10 \cdot \pi \cdot x) + 1, \quad (3.40)$$

donde $-1 \leq x \leq 2$. La gráfica de la función $f(x)$ se muestra en la figura (3.2).

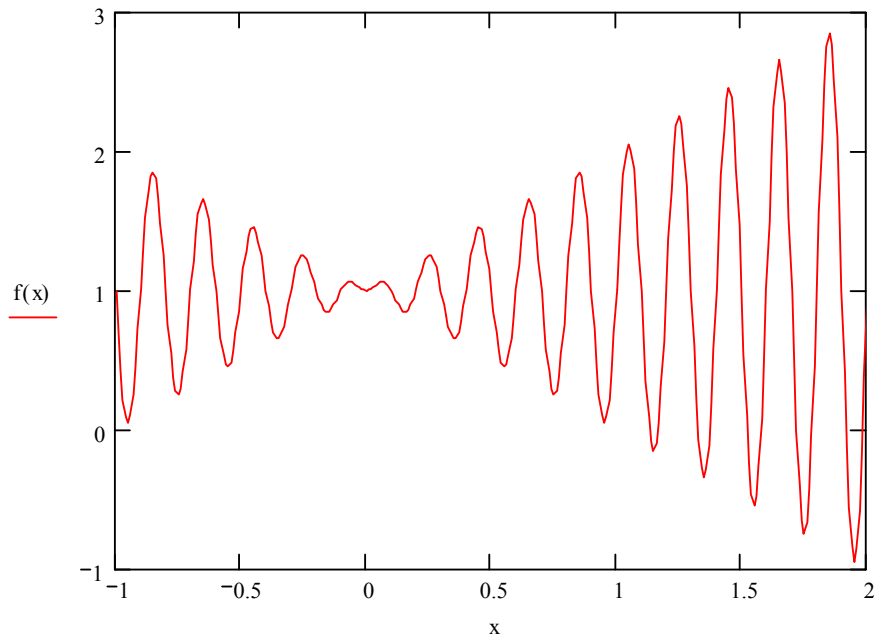


Figura (3.2). Gráfica de la función $f(x) = x \cdot \text{sen}(10 \cdot \pi \cdot x) + 1$.

3.4.2.5.1 Representación

Nosotros usamos un vector binario como un cromosoma para representar valores reales de la variable x . La longitud del vector depende de la precisión requerida, la cual, en este ejemplo, son seis lugares después del punto decimal.

El dominio de la variable x tiene una longitud de 3; los requerimientos de precisión implican que el rango $[-1$ a $2]$ debe ser dividido en al menos $(3)(1000000)$ rangos de igual tamaño. El número de bits puede ser calculado como

$$\frac{\ln(3000000)}{\ln(2)} = 21.51 \quad (3.41)$$

Esto significa que el número de bits requeridos como un vector binario (cromosoma) debe ser de 22.

representan los límites del intervalo, -1 y 2 , respectivamente.

3.4.2.5.2 Población Inicial

El proceso inicial es muy simple: creamos una población de cromosomas, donde cada cromosoma es un vector binario de 22 bits. Los 22 bits de cada cromosoma son puestos aleatoriamente.

3.4.2.5.3 Generador de Números Binarios Aleatorios

Los lenguajes de alto nivel generalmente proporcionan entre sus rutinas un generador de números aleatorios. En QUICK BASIC esta función es RND(X). Esta función da números aleatorios en el rango de 0 a 1. La distribución obtenida es uniforme por que cada número del rango tiene la misma probabilidad de ocurrir. Adicionalmente, la semilla con la que se inicia la función RND puede variarse usando la declaración RANDOMIZE TIMER que esta acoplada con el reloj de la computadora.

Usando la función RND(X) se define la función *flip*, que funciona de manera similar a cuando se lanza una moneda, esta función retorna un 1 o un 0. La figura (3.3) muestra la definición de dicha función.

3.4.2.5.4 Estructura de Datos

El algoritmo genético procesa poblaciones de cadenas. Por lo tanto, se construye la población como un arreglo de individuos, donde cada individuo contiene el fenotipo (los parámetros descodificados) y el genotipo (la cadena de bits).

Previamente se definen algunas constantes como el tamaño de la población, *tpoblación*, la longitud del cromosoma, *lcromosoma*, ver tema de representación, y el numero máximo de generaciones, *maxgen*.

```

FUNCTION flip (probabilidad)
  a = RND
  IF probabilidad = 1 THEN
    flip=1
  ELSEIF a<= probabilidad THEN
    flip=1
  ELSEIF a> probabilidad THEN
    flip=0
  END IF
END FUNCTION

```

Figura (3.3). Definición de la función *flip*.

La población inicial se genera con la función *flip* usando la subrutina que aparece en la figura (3.4).

```

SUB popinicial
  FOR i=1 TO tpoblación
    FOR j=1 TO lcromosoma
      Pob(i, j)=flip(.5)
    NEXT j
  NEXT i
END SUB

```

Figura (3.4). Subrutina para generar una población inicial.

Una vez que se tiene la población inicial se usa una subrutina de evaluación de cada una de las cadenas que forman la población inicial. Esta subrutina de evaluación depende de cada problema en particular.

3.4.2.5.5 Evaluación de la Función

La función de evaluación *eval* para vectores binarios v es equivalente a la función f , para nuestro ejemplo tenemos:

$$eval = f(x), \quad (3.41)$$

donde el cromosoma v representa el valor real de x .

Por ejemplo para los siguientes tres cromosomas:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1000101110110101000111) \\ v_2 &= (0000001110000000010000), \\ v_3 &= (1110000000111111000101) \end{aligned}$$

corresponden los valores $x_1 = 0.637197$, $x_2 = -0.958973$, $x_3 = 1.627888$, respectivamente. Consecuentemente la función de evaluación nos da lo siguiente:

$$\begin{aligned} eval(v_1) &= f(x_1) = 1.686345 \\ eval(v_2) &= f(x_2) = 0.078878 \\ eval(v_3) &= f(x_3) = 2.250650 \end{aligned}$$

Claramente el cromosoma v_3 es el mejor de los tres cromosomas, ya que su evaluación nos da el valor más alto.

3.4.2.5.6 Selección de Cromosomas

El siguiente paso en el proceso es seleccionar los cromosomas que se van a reproducir y posteriormente a cruzar para obtener los cromosomas que van a formar la siguiente generación.

El propósito de seleccionar algunas cadenas es para darles más oportunidades de reproducirse a los miembros de la población que son más aptos o que tienen mayores evaluaciones. Hay muchas maneras de

hacer la selección, nosotros explicaremos la técnica conocida como la rueda de la ruleta [46].

La ruleta se construye de la siguiente manera:

1. Calculamos el valor de su aptitud $eval(v_i)$ para cada cromosoma $v_i (i = 1, \dots, tpoblación)$.
2. Encontramos la aptitud total de la población $F = \sum_{i=1}^{tpoblación} eval(v_i)$
3. Calculamos la probabilidad de selección p_i para cada cromosoma $v_i (i = 1, \dots, tpoblación)$ como $p_i = \frac{eval(v_i)}{F}$.
4. Calculamos la probabilidad acumulada q_i para cada cromosoma $v_i (i = 1, \dots, tpoblación)$ como $q_i = \sum_{j=1}^i p_j$.

El proceso de la ruleta consiste en hacerla girar una cantidad de veces igual a $tpoblación$; cada vez que gira se selecciona un cromosoma para la nueva población de la siguiente manera.

1. Generamos un número aleatorio (r) entre 0 y 1.
2. Si $q_{i-1} < r < q_i$ entonces seleccionamos el cromosoma al cual le corresponda q_i .

El efecto de la selección con la ruleta es obtener una cadena seleccionada aleatoriamente. Aunque este procedimiento de selección es aleatorio, la oportunidad que tiene cada cadena de ser seleccionada es directamente proporcional a su evaluación. Al transcurrir las generaciones, este mecanismo elimina los miembros con menores evaluaciones y tiende a expandir el material genéticos los mejores evaluados. Por supuesto que es posible que el peor miembro de la población sea seleccionado cada vez que se use el procedimiento, pero la

probabilidad de que esto suceda en una población de cualquier tamaño es despreciable.

Este procedimiento de selección es llamado rueda de la ruleta por que es equivalente a asignarle una rebanada de un círculo a cada miembro de la población, de tal forma que el tamaño de la rebanada sea proporcional a su evaluación, después de esto se gira el círculo y se lanza un dardo, la cadena seleccionada es aquella donde cayó el dardo. En la figura (3.5), se muestra la función de selección, usada para programar la selección de cadenas con la técnica de la ruleta. En ella sf es la suma total de las evaluaciones y $f(i)$ es la evaluación de la cadena i .

```
FUNCTION selección
  sumpar = 0
  rand = RND*sf
  DO
    i = i + 1
    sumpar = sumpar + f(i)
  LOOP UNTIL sumpar >= rand OR i = tpoblación
  Selección = i
END FUNCTION
```

Figura (3.5). Subrutina para seleccionar cadenas con la rueda de la ruleta.

3.4.2.5.7 Cruza de Cromosomas

El verdadero motor de la evaluación es el intercambio de material genético entre los individuos de una población, estos se lleva acabo a través del apareamiento o cruza de dos individuos. En un algoritmo genético una cruza recombina el material genético de dos cromosomas para crear dos hijos o descendientes. Holland experimento con un operador de cruza que el llamo cruza en punto [47]. La cruza en un punto ocurre cuando partes de dos cromosomas seleccionados son

intercambiados después de que un punto de corte se selecciona aleatoriamente. La figura (3.6), muestra un ejemplo de la aplicación de este operador.

$$\begin{array}{l}
 \text{Padre 1} = (00000|01110000000010000) \\
 \text{Padre 2} = (11100|00000111111000101) \\
 \downarrow \\
 \text{Hijo 1} = (00000|00000111111000101) \\
 \text{Hijo 2} = (11100|01110000000010000)
 \end{array}$$

Figura (3.6). Ejemplo del operador de cruce en un punto.

Para la cruce debemos primero definir la probabilidad de cruce p_c en nuestro algoritmo. Conociendo esta y el tamaño de la población podemos conocer la cantidad de cromosomas que serán cruzados en esta etapa ($p_c \cdot \text{tpoblación} = \text{cantidad de cromosomas a cruzar}$).

El procedimiento es el siguiente:

1. Generar un número aleatorio (r) en el intervalo de $[0..1]$.
2. Si $r < p_c$ seleccionamos un cromosoma para la cruce, esto se hace dos veces para tener una pareja de padres.
3. Ahora se genera un número aleatorio en el rango de $[1..l_{\text{cromosoma}} - 1]$, para conocer el punto de cruce en el cromosoma, Como lo muestra la figura (3.6).

Una característica importante de este operador es que puede producir hijos que son radicalmente diferentes a sus padres, como en el ejemplo de la figura (3.6). Otra característica importante es que no introduce diferencias en un bit en una posición donde ambos padres tengan el mismo valor. Un caso extremo ocurre cuando ambos padres son idénticos, en este caso la cruce no introduce diversidad en los hijos.

La cruce es un componente extremadamente importante en un algoritmo genético, sin este operador los algoritmos genéticos no funcionan. Este

operador es la característica que distingue a los algoritmos genéticos de otros algoritmos.

En la figura (3.7), se muestra la subrutina que lleva a cabo la cruce de dos cromosomas.

```
SUB cruza (i1, conyuge1, conyuge2)
Jcruza = aleatorio (1, lcromosoma - 1)
ncruza = ncruza + 1
FOR = 1 TO Jcruza
Hijo1 (i1, j) = pob (conyuge1, j)
Hijo2 (i1, j) = pob (conyuge2, j)
NEXT j
IF jcruga < lcromosoma Then
FOR j = jcruga TO lcromosoma
Hijo1 (i1, j) = pob (conyuge2, j)
Hijo2 (i1, j) = pob (conyuge1, j)
NEXT j
END IF
END SUB
```

Figura (3.7). Subrutina para implementar el operador de cruce en un punto.

En la subrutina de la figura (3.7), aparece la función aleatorio, esta proporciona números aleatorios en un intervalo definido por dos números llamados mayor y menor. La función se muestra en la siguiente figura.

```
FUNCTION aleatorio (menor, mayor)
a = INT (RND * (mayor - menor + 1) + menor)
if a > mayor THEN a = mayor
if menor >= mayor THEN a = menor
aleatorio = a
END FUNCTION
```

Figura (3.8). Función para generar números aleatorios.

Para nuestro ejemplo tenemos que el hijo1 y el hijo 2, figura (3.6), producen respectivamente las siguientes evaluaciones:

$$\begin{aligned} f(\text{hijo1}) &= f(v'_2) = f(-0.998113) = 0.940865 \\ f(\text{hijo2}) &= f(v'_3) = f(1.666028) = 2.459245 \end{aligned}$$

Note que el segundo hijo tiene una mejor evaluación que ambos padres v_2 y v_3 (ver la sección evaluación de la función).

3.4.2.5.8 Mutación de Cromosomas

Una mutación impide que las poblaciones se vuelvan homogéneas y mantienen la diversidad, permitiendo así que el proceso de evolución continúe avanzando.

Una mutación consiste en seleccionar aleatoriamente un cromosoma de la población, a continuación se selecciona un gen del cromosoma y se cambia el valor de ese gen, es decir si es cero el valor del gen lo cambiamos por 1 y viceversa.

Para la mutación debemos primero definir la probabilidad de mutación p_m en nuestro algoritmo. Conociendo esta, el tamaño de la población y la longitud del cromosoma, podemos conocer la cantidad de bits que serán mutados en esta etapa ($p_m \cdot lcromosoma \cdot tpoblación = cantidad\ de\ bits\ a\ mutar$).

El procedimiento es el siguiente:

1. Generar un número aleatorio (r) en el intervalo de $[0..1]$.
2. Si $r < p_m$ seleccionamos un cromosoma para la mutación.
3. Ahora se genera un número aleatorio en el rango de $[1..(lcromosoma) - 1]$, para conocer el bit que será mutado.

Este procedimiento se implementa cuando la evaluación de los miembros de la población es muy similar en todos ellos. En la figura (3.9), se muestra la subrutina para las mutaciones.

```

SUB mutación (población())
  10 imuta = selección
  IF imuta = valmax THEN GOTO 10
  Jmuta = aleatorio(1, lcromosoma)
  IF población (imuta, jmuta) = 1 THEN
    población (imuta, jmuta) = 0
  ELSEIF población (imuta, jmuta) = 0 THEN
    población (imuta, jmuta) = 1
  END IF
END SUB

```

Figura (3.9). Subrutina para mutaciones en la población.

Para nuestro ejemplo tenemos que el cromosoma v_3 es el cromosoma que se va mutar en el quinto bit y en el décimo bit, por lo tanto el cromosoma cambia a

$$v'_3 = (1110100000111111000101)$$

$$v''_3 = (1110000001111111000101)'$$

que nos producen respectivamente las siguientes evaluaciones:

$$f(v'_3) = f(1.721638) = -0.082257$$

$$f(v''_3) = f(1.630818) = 2.343555 \quad ,$$

Note que la segunda mutación tiene una mejor evaluación que el cromosoma v_3 (ver la sección evaluación de la función) antes de ser mutado y la primera mutación tiene peor evaluación.

3.4.2.5.9 Resultados

Para este problema en particular hemos usado los siguientes parámetros: $tpoblación = 50$, $p_c = 0.25$, $p_m = 0.01$ y $maxgen = 150$. En la tabla 3.1, mostramos el número de generaciones en el cual hubo una mejora en la evaluación de la función, junto con el valor de la función. El mejor cromosoma después de 150 generaciones fue

$$v_{\max} = 1111001101000100000101,$$

Al cual le corresponde un valor de $x = 1.850773$, con una evaluación $f(x) = 2.850227$.

Número de generaciones	Evaluación de la función
1	1.441942
6	2.250003
8	2.250283
9	2.250284
10	2.250363
12	2.328077
39	2.344251
40	2.345087
51	2.738930
99	2.849246
137	2.850217
145	2.850227

Tabla (3.1). Resultado de 150 generaciones.

3.5 CONCLUSIONES

Se analizaron los métodos de mínimos cuadrados y mínimos cuadrados amortiguados. Se mostró que sus deficiencias al trabajar con funciones no lineales se deben al hecho de no incluir derivadas de orden superior.

Adicionalmente, estos métodos necesitan un punto inicial a partir del cual comienzan la búsqueda del óptimo, lo cual conduce irremediablemente a óptimos locales y a una fuerte dependencia del punto inicial.

Se explicó en que consisten los algoritmos genéticos y como funcionan sus rutinas más importantes. Se indicaron las ventajas que estos algoritmos tienen sobre los métodos tradicionales de optimización.

Se planteó el resultado más importante de los algoritmos genéticos que es el teorema fundamental de los algoritmos genéticos, en el cual se indica por que estos algoritmos funcionan con un paralelismo implícito.

Finalmente, se ilustró el funcionamiento de los algoritmos genéticos buscando el óptimo de una función con múltiples máximos y mínimos, encontrándose efectivamente el óptimo global en el intervalo establecido.

CAPÍTULO 4

CORRECCIÓN DE LA ABERRACIÓN ESFÉRICA

4.1 CASOS ESPECIALES

En la literatura existen diferentes métodos de corrección para la aberración esférica, principalmente por el uso de superficies esféricas, pero como veremos en las siguientes secciones existen casos en los cuales la aberración esférica pueda corregirse con una superficie esférica o con una lente que tiene dos superficies esféricas.

4.1.1 Superficie Esférica

Conrady [12], analizó la ecuación exacta para la aberración esférica y encontró que para una superficie esférica refractora existen tres casos, libres de aberración esférica:

1. Cuando el punto objeto e imagen coinciden con el vértice de la superficie esférica refractora.
2. Cuando el punto objeto e imagen coinciden con el centro de curvatura de la superficie esférica refractora.
3. Cuando el punto objeto e imagen no coinciden, pero ambos están del lado cóncavo de la superficie refractora y satisfacen las siguientes condiciones,

$$l = r \frac{n' + n}{n}, \quad l' = r \frac{n' + n}{n'}, \quad (4.1)$$

donde l y l' son la distancia objeto e imagen respectivamente, r es el radio de curvatura de la superficie, n y n' son los índices de refracción antes y después de la refracción.

Estos mismos casos se fueron encontrados por Welford [48], usando la primer suma de Seidel. De la ecuación (2.21), podemos ver que S/l es cero si

$$\frac{u'}{n'} = \frac{u}{n}, \quad (4.2)$$

o dicho de otra manera

$$n'l' = nl, \quad (4.3)$$

combinando la ecuación (4.3) con la ecuación (2.9), obtenemos los mismos resultados que Conrady [12], encontró en la ecuación (4.1) o la condición numero tres.

De la ecuación (4.3), podemos ver que si $l = l' = 0$, la primer condición de Conrady se cumple y por lo tanto la imagen no tendrá aberración esférica.

De la ecuación (2.15), podemos ver que el invariante de refracción (A) es cero cuando el objeto y la imagen se encuentran en el centro de curvatura de la superficie, condición dos de Conrady, por lo tanto la imagen no tendrá aberración esférica.

Finalmente la aberración esférica es cero si $y = 0$, este caso se reduce a la condición uno, ya que de otra manera no tendría aplicación.

Para el caso de los espejos esféricos aplican los mismos casos, sustituyendo en la ecuación (4.1) el hecho de que $n' = -1$ [28], se reduce a $l = l' = 0$.

La corrección de la aberración esférica es hecha para cualquier rayo que cumpla con las condiciones anteriores, el problema es que solo hay tres

casos especiales en superficies esféricas, por lo tanto su uso es restringido.

4.1.2 Superficie Cónica Refractora

La ecuación (2.5) no se puede reducir a una ecuación de segundo grado, a menos que $n' = -n$ [28] o para algunos casos refractivos. Los casos esféricos se vieron en la sección anterior, en esta sección se verán los casos cónicos. Las curvas que describe la ecuación (2.5), son conocidas como el ovalo cartesiano u ovoide de Descartes, ya que el fue el primero en buscar una superficie asférica refractora con simetría de revolución libre de aberración esférica para cualquier distancia objeto [11].

Sin embargo si uno de los conjugados esta en el infinito ya sea el objeto o la imagen el ovalo cartesiano se transforma en una elipse o en una hipérbola como lo veremos enseguida.

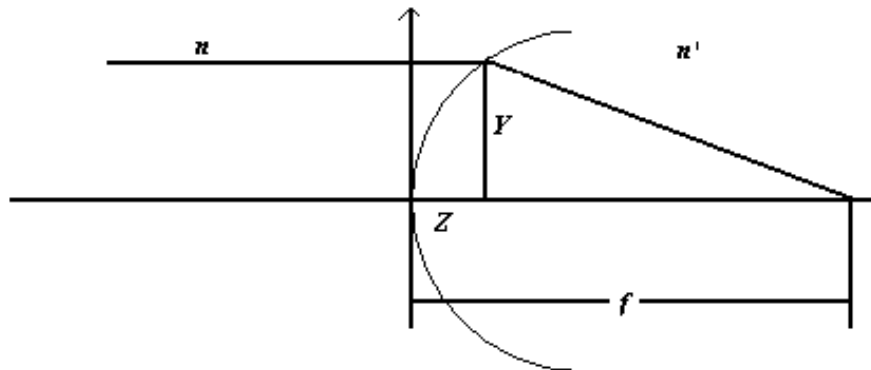


Figura (4.1). Diagrama para conocer la aberración esférica de una superficie con un conjugado en el infinito.

R. Kingslake [13] y G. Smith con D.A. Atchison [49], encontraron de la figura (4.1) que la aberración esférica es igual a cero cuando

$$nZ + n'\sqrt{Y^2 + (f - Z)^2} = n'f . \quad (4.4)$$

Elevando al cuadrado la raíz y haciendo un poco de algebra tenemos

$$Y^2 + Z^2 \left(1 - \frac{n^2}{n'^2}\right) - 2Z \frac{f(n' - n)}{n'} = 0 , \quad (4.5)$$

al comparar la ecuación (4.5), con la ecuación general de las cónicas, ecuación (4.6)

$$(X^2 + Y^2) + Z^2(1 + k) - 2Zr = 0 , \quad (4.6)$$

donde k es la constante de conicidad y r es el radio de curvatura de la superficie. Podemos identificar fácilmente de las dos ecuaciones anteriores, que la constante de conicidad y el radio de curvatura se calculan como

$$k = -\frac{n^2}{n'^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{f(n' - n)}{n'} . \quad (4.7)$$

De la ecuación (4.7), si $n < n'$, entonces la cónica que corrige la aberración esférica debe ser una elipse y si $n' < n$, entonces debe ser una hipérbola.

La corrección de la aberración esférica es hecha para cualquier rayo paralelo al eje óptico, su uso esta restringido por que el objeto o la imagen deben estar en el infinito, lo cual puede obtenerse cuando se combina con más superficies que hagan que se cumpla la restricción anterior.

4.1.3 Superficie Cónica Reflectora

El caso de los espejos cónicos corregidos de aberración esférica, es muy utilizado para el diseño de telescopios, esto se logra igualando la ecuación (2.5), a cero y considerando que $n' = -n$ [28]. Además no debemos olvidar que en un espejo regularmente la distancia objeto e imagen tienen el mismo signo, finalmente nosotros hacemos el mismo cambio de literales que en la primera suma de Seidel ecuación (2.21), tenemos

$$-(l' + l) - \left[-\sqrt{Y^2 + (Z - l')^2} + \sqrt{Y^2 + (Z - l)^2} \right] = 0. \quad (4.8)$$

Elevando al cuadrado las raíces y haciendo un poco de algebra llegamos a la siguiente ecuación

$$Y^2 + Z^2 \left[\frac{4l'l}{(l' + l)^2} \right] - 2Z \left(\frac{2l'l}{(l' + l)} \right) = 0 \quad (4.9)$$

Comparando la ecuación (4.9), con la ecuación (4.6), podemos identificar que la constante de conicidad y el radio de curvatura pueden calcularse como

$$k = \frac{4l'l}{(l' + l)^2} - 1 \quad \text{y} \quad r = \frac{2l'l}{(l' + l)}, \quad (4.10)$$

de la ecuación (4.10), podemos ver que cuando el objeto y la imagen son reales o cuando l y l' tienen el mismo signo, $k + 1$ debe ser positivo y por lo tanto k debe ser mayor que -1, lo que significa que la superficie deber una elipse. Si l y l' son de signo contrario, k debe ser menor que -1, lo que significa que la superficie correctora es una hipérbola. Si $l = l'$

podemos ver que k debe ser igual a cero y la superficie debe ser una esfera.

Las ecuaciones anteriores están restringidas al caso cuando el objeto y la imagen están a una distancia finita, por lo tanto un caso especial es cuando el objeto esta muy lejos (∞), la demostración de la superficie cónica para este caso, la haremos utilizando la primer suma de Seidel para espejos, ecuación (2.28), pero esta superficie también puede encontrarse de manera exacta, en la ecuación (2.28) sustuiremos $u = 0$ en el invariante de refracción y le agregaremos la ecuación (2.32), para considerar los efectos de asfericidad provocados por la cónica, además todo debe ser igual a cero, así tenemos

$$SI = -2[n(y^2c + u = 0)]^2 y^2c + (n' - n)y^4 \left[\frac{k}{r^3} + 8a_1 \right] = 0. \quad (4.11)$$

En el término de asfericidad consideraremos que $n' = -1$ y $n = 1$, además el coeficiente a_1 será igual a cero

$$SI = -2y^4c^3 - 2y^4c^3k = 0, \quad (4.12)$$

despejando la constante de conicidad, tenemos que

$$k = -1, \quad (4.13)$$

la ecuación (4.13) nos dice, que la superficie que corrige la aberración esférica cuando el objeto esta en el infinito, debe ser una parábola. Este mismo resultado se puede obtener haciendo un tratamiento similar al que hicimos cuando consideramos que el objeto y la imagen estaban a una distancia finita, ecuación (4.8) y (4.9).

La corrección de la aberración esférica se logra para cualquier rayo en cualquier posición objeto y cualquier posición imagen, si se calcula la constante de conicidad adecuada.

4.1.4 Lente Delgada con Superficies Esféricas

O. García, S. Vázquez y et. Al.[50] resolvieron la ecuación (2.47), para tener aberración esférica igual con cero. La solución para el factor de conjugados queda en términos del índice de refracción y del factor de forma, ecuación (4.14) y la solución para el factor de forma queda en términos del factor de conjugados y del índice de refracción, ecuación (4.15)

$$C = \frac{1}{3n+2} \left[\frac{-2B(n+1) \pm \sqrt{(Bn)^2 - 3n^4 - 2n^3}}{n-1} \right], \quad (4.14)$$

$$B = \frac{1}{n+2} \left[2C(1-n^2) \pm \sqrt{C^2(n^4 - 2n^3 + n^2) - n^4 - 2n^3} \right], \quad (4.15)$$

donde n es el índice de refracción de la lente, B es el factor de forma y C es el factor de conjugados. La solución esta restringida a ciertos casos como se puede ver en la figura (4.2).

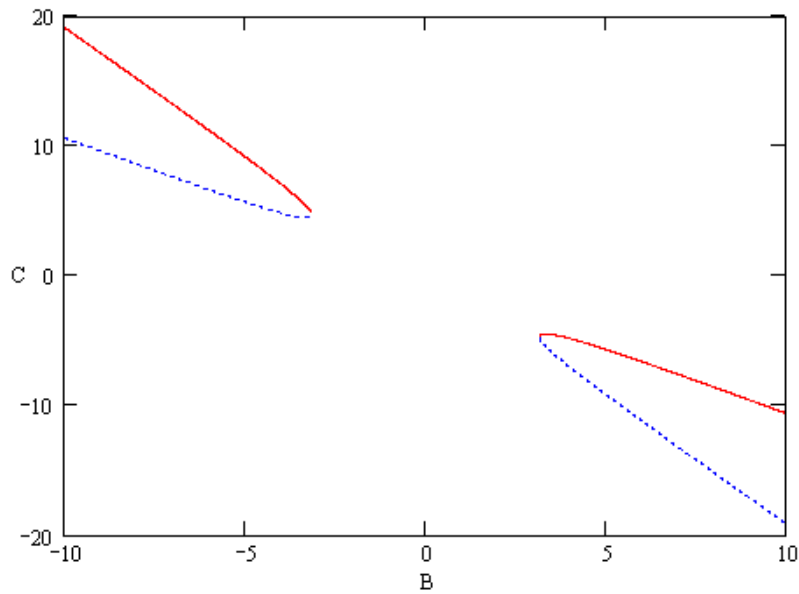


Figura (4.2). Gráfica de las soluciones para la aberración esférica a tercer orden ($n = 1.5168$).

La gráfica anterior nos dice que existe soluciones al combinar el factor de forma y el factor de conjugados, el inconveniente principal es que las soluciones encontradas, solo se satisfacen para cuando el objeto es real y la imagen es virtual o cuando el objeto es virtual y la imagen es real, la forma de la lente es un menisco convergente o divergente según sea el caso. También podemos ver que para cuando el objeto y la imagen son reales o cuando el objeto y la imagen son virtuales no existe solución, para estos casos el tratamiento que se realiza es la minimización de los efectos de la aberración esférica, derivando e igualando a cero la ecuación (2.47), para obtener el factor de forma que nos da la aberración esférica mínima,

$$B = -\frac{2(n^2 - 1)}{n + 2}C, \quad (4.16)$$

como podemos ver la forma de la lente que nos da la aberración esférica mínima, depende del índice de refracción y del factor de conjugados, como las soluciones encontradas, ecuaciones (4.14) y (4.15).

Welford [48], propuso usar el segundo y el tercer caso encontrados por Conrady [12], para tener una lente aplanática, figura (4.3). La solución solo se puede aplicar si el objeto es virtual y la imagen es real, como las soluciones encontradas por O. García, S. Vázquez y et. Al.[50], figura (4.2). Como ejemplo usaremos una lente $f/5$, rodeada por aire y construida con BK-7, el objeto se encuentra situado a +130.068 mm de la lente y un ángulo de campo de 0.5 grados, el ángulo de campo es únicamente para mostrar que aparte de corregir la aberración esférica, este ejemplo también tiene corregida la coma (lente aplanática), los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.1) y los resultados se muestran en la figura (4.3).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		+130.068		Aire
1	51.680	7.000	26.734	BK-7
2	78.751	78.751	26.734	Aire

Tabla (4.1). Parámetros de primer orden, propuesta de Welford.

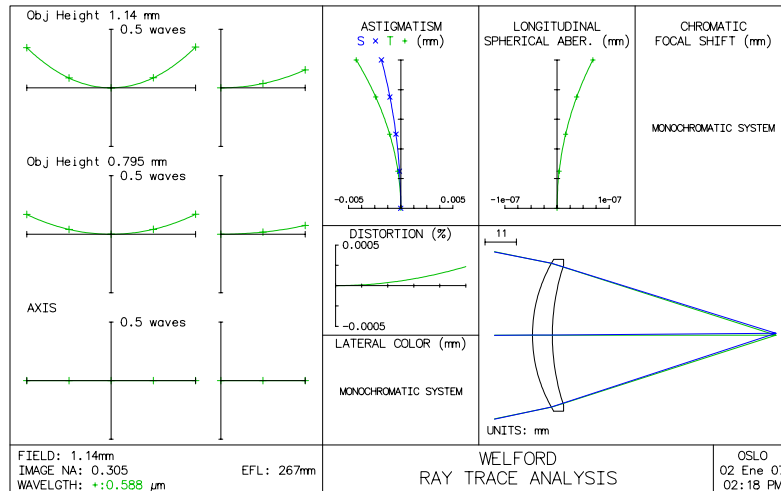


Figura (4.3). Gráficas de la diferencia de camino óptico (DCO) de una lente aplanática con incidencia normal en la segunda superficie.

La corrección de la aberración esférica para una lente con dos superficies esféricas, no se puede realizar cuando el objeto es real y la imagen es real o cuando el objeto es virtual y la imagen es virtual, como lo muestra la figura (4.2), en estos casos solo se pueden minimizar sus efectos, ecuación (4.16).

Cuando el objeto es real y la imagen es virtual o cuando el objeto es virtual y la imagen es real si existe solución, como la propuesta por Welford [48] y las soluciones encontradas por O. García, S. Vázquez y et. Al.[50], la solución corrige cualquier rayo que provenga de la distancia objeto establecida. El problema es que su aplicación es restringida debido a la posición del objeto y la imagen.

De la figura (4.3), vemos que la aberración esférica longitudinal está corregida por que tiene una escala de 1×10^{-7} mm, para los objetos fuera de eje se puede ver que las graficas indican solo presencia de astigmatismo y curvatura de campo, ya que las curvas características de la coma son de tercer grado, por lo tanto, la lente diseñada es aplanática.

4.1.5 Lente con Una Superficie Esférica y Una Asférica

R. Kingslake [13], determina de manera analítica la cónica de revolución, para corregir la aberración esférica, para una lente plano-convexa, con el objeto en el infinito, haciendo la diferencia de camino óptico entre un rayo marginal y uno paraxial sea igual a cero, ecuación (4.17).

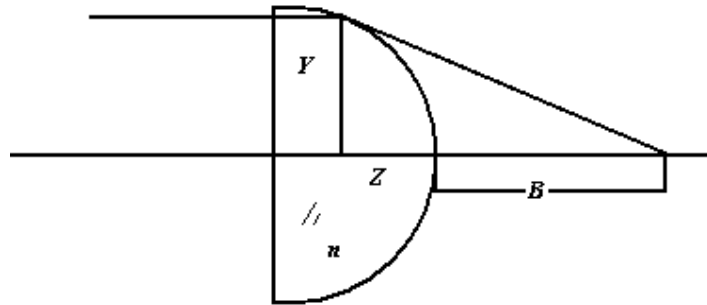


Figura (4.4). Diagrama esquemático para la diferencia de camino óptico, Kingslake [13].

$$B + nX = \sqrt{(B + X)^2 + Y^2} \quad (4.17)$$

Encontrando que la constante de conicidad de la superficie se calcula con la ecuación (4.7), con el uso adecuado de los índices de refracción. Como ejemplo usaremos una lente $f/2.5$, rodeada por aire y construida con BK-7, por lo tanto, la constante conicidad de la segunda superficie es -2.3, los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.2) y los resultados se muestran en la figura (4.5).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		-1×10^{20}		Aire
1	∞	7.000	20	BK-7
2	51.68	100	20	Aire

Tabla (4.2). Parámetros de primer orden, propuesta de Kingslake [13].

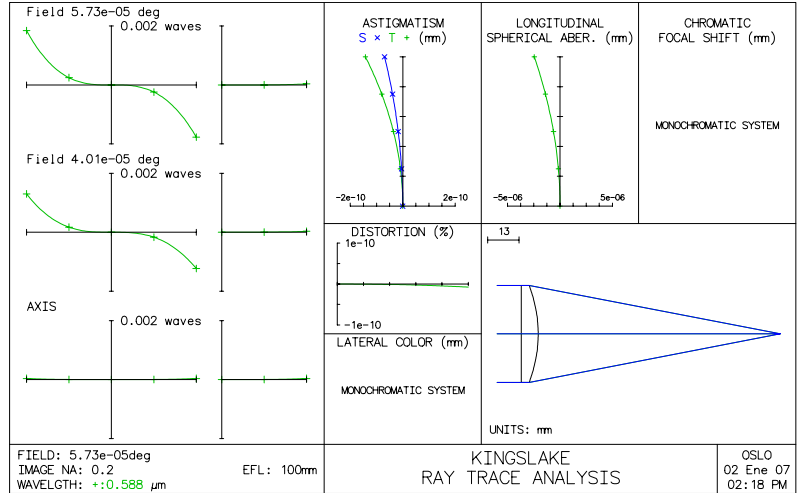


Figura (4.5). Gráfica de la DCO, propuesta de Kingslake [13].

La figura (4.5), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre para todos los rayos que llegan paralelos a eje óptico a cualquier altura. La solución esta restringida a la forma de la lente y a la posición del objeto. Para los objetos fuera de eje podemos ver que aunque el ángulo de campo sea de 5.73×10^{-5} , la aberración principal es la coma ya que las curvas presentes son características de esta.

Una propuesta original de este trabajo para la corrección de la aberración esférica es la siguiente, si usamos la ecuación (4.7), para la primera superficie de una lente y la segunda condición de Conrady [12], para la segunda superficie, podemos tener una lente corregida de aberración esférica. Como ejemplo usaremos una lente $f/2.5$, rodeada por aire y construida con BK-7, por lo tanto la constante conicidad de la primera superficie es -0.434, los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.3) y los resultados se muestran en la figura (4.6).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		-1×10^{20}		Aire
1	34.071	7.000	20	BK-7
2	93	92.999	20	Aire

Tabla (4.3). Parámetros de primer orden, propuesta de Tesis.

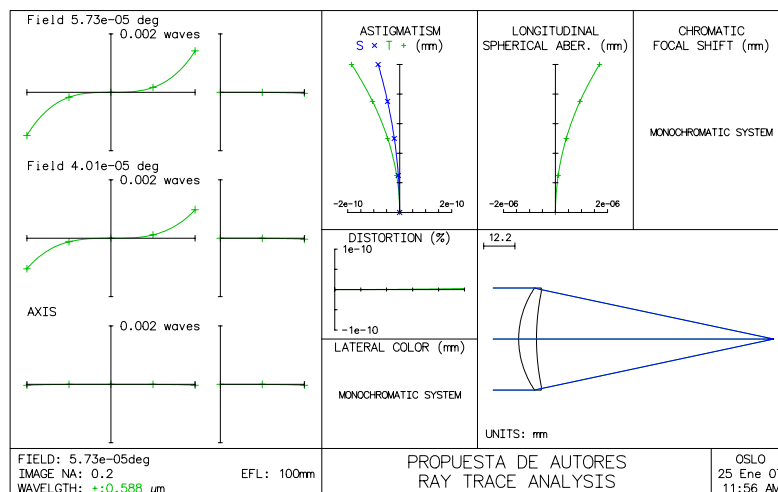


Figura (4.6). Gráfica de la DCO, propuesta de la Tesis.

La figura (4.6), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre para todos los rayos que llegan paralelos a eje óptico a cualquier altura, la diferencia entre este y el caso propuesto por Kingslake es el valor en la constante de conicidad es menor para este caso y por lo tanto es mas fácil de construir. Esta solución también esta restringida a la forma de la lente y a la distancia objeto. Para los objetos fuera de eje podemos ver que aunque el ángulo de campo sea de 5.73×10^{-5} , la aberración principal es la coma ya que las curvas presentes son características de esta y es de signo contrario al ejemplo anterior.

J. Castro y M.T. Chávez [15], proponen una manera de corregir la aberración esférica usando como grado de libertad la constante de conicidad de la segunda superficie en una lente sin importar la posición del objeto ni la forma de la lente.

Esto lo hacen al igualar el camino óptico de un rayo marginal y uno paraxial que pasan por una lente figura (4.7), de la siguiente manera

$$D_0 + nD_1 + D_2 = d_0 + nd_1 + d_2. \quad (4.18)$$

Resolviendo la ecuación (4.18), se encuentra una ecuación de segundo grado para D_1 ,

$$aD_1^2 + bD_1 + c = 0, \quad (4.19)$$

donde las constantes de la ecuación (4.19), para un objeto cercano, se calculan como:

$$a = (1 - n^2), \quad (4.20a)$$

$$b = 2[y_1 M_1 - N_1(d_2 - z_1 + d_1) + n(d_0 + nd_1 + d_2 - D_0)], \quad (4.20b)$$

$$c = [y_1^2 + (d_2 - z_1 + d_1)^2 - (d_0 + nd_1 + d_2 - D_0)^2], \quad (4.20c)$$

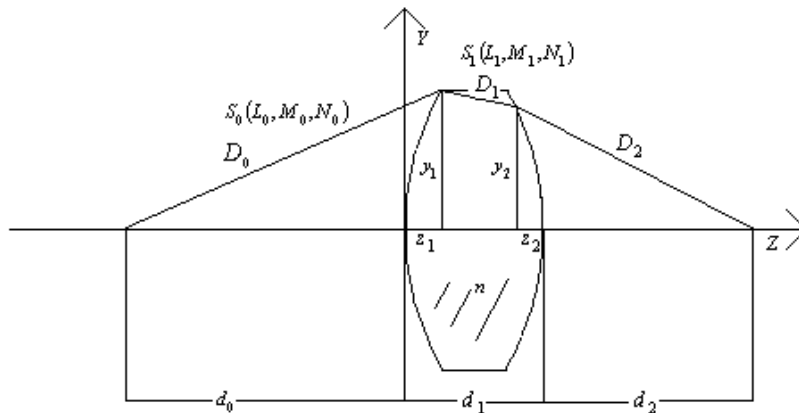


Figura (4.7). Diagrama esquemático para la diferencia de camino óptico, Chávez y Castro.

y para un objeto lejano

$$a = (1 - n^2), \quad (4.21a)$$

$$b = 2[y_1 M_1 - N_1(d_2 - z_1 + d_1) + n(nd_1 + d_2 - z_1)], \quad (4.21b)$$

$$c = [y_1^2 + (d_2 - z_1 + d_1)^2 - (nd_1 + d_2 - z_1)^2], \quad (4.21c)$$

donde n es el índice de refracción del material de la lente, M_1 y N_1 son los cósenos directores del rayo después de refractarse en la primer superficie, y_1 es la altura del rayo en la primer superficie, d_0 es la distancia objeto, d_1 es el espesor en el centro de la lente, d_2 es la distancia imagen, z_1 es la ságitas en la primer superficies y D_0 es la distancia medida a lo largo del rayo desde el objeto hasta que llega a la primer superficie, figura (4.7).

Con D_1 , pueden conocer las coordenadas en la segunda superficie, que igualan la diferencia de camino óptico a cero con las siguientes ecuaciones

$$y_2 = y_1 + D_1 M_1 \quad y \quad z_2 = z_1 - d_1 + N_1 D_1. \quad (4.22)$$

Finalmente con estas coordenadas, J. Castro y M.T. Chávez [15], calculan la constante de conicidad de la segunda superficie, para corregir la aberración esférica

$$k_2 = \frac{2z_2 - c_2(y_2^2 + z_2^2)}{c_2 z_2^2}. \quad (4.23)$$

Como ejemplo usaremos una lente $f/2.5$, rodeada por aire y construida con BK-7, con el objeto al infinito y factor de forma igual con cero. Usando el método de J. Castro y M.T. Chávez [15], la constante conicidad de la segunda superficie es -7.282, los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.4) y los resultados se muestran en la figura (4.8).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		-1×10^{20}		Aire
1	102.343	5.906	20	BK-7
2	-102.343	98.033	20	Aire

Tabla (4.4). Parámetros de primer orden, propuesta de J. Castro y M.T. Chávez.

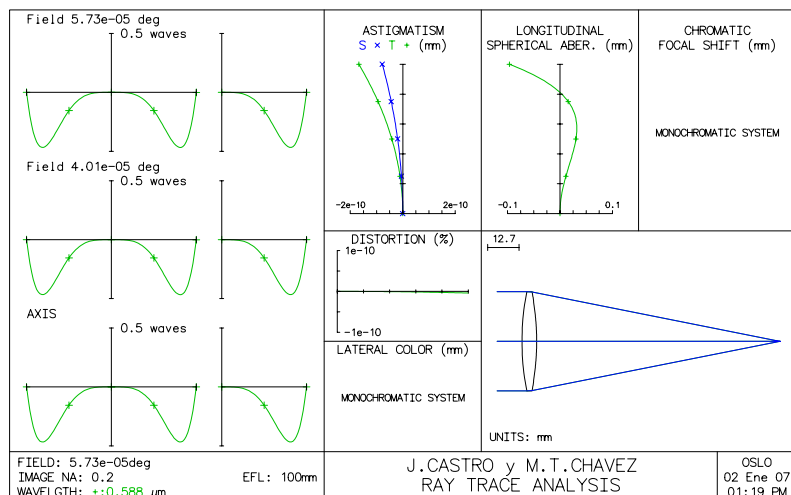


Figura (4.8). Gráfica de la DCO, propuesta de J. Castro y M.T. Chávez [15].

La figura (4.8), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre solo para la altura del rayo que se elige, en este caso se escogió el rayo que pasa por el borde de la lente, la diferencia entre este y los casos anteriores es que este método no depende ni de la forma de la lente ni de la posición del objeto. La solución esta restringida solo al número- f de la lente, por que al corregir solo un punto, la aberración esférica residual incrementa conforme el número- f disminuye.

4.1.6 Lente con Superficies Asféricas

Podemos usar la ecuación (4.7), para las dos superficies de una lente y obtener una lente libre de aberración esférica, sin importar la posición del objeto inicial y la posición de la imagen final, pero se tiene que sacrificar al factor de forma, por que tenemos que hacer que el objeto o la imagen para la primer y segunda superficie estén en el infinito. Esto se logra haciendo que la distancia focal de la primer superficie sea igual en magnitud a la distancia objeto inicial y la distancia focal de la segunda superficie sea igual en magnitud a la distancia imagen final.

Como ejemplo usaremos una lente $f/1$, rodeada por aire y construida con BK-7, con el objeto situado a -200 mm de la lente, la constante de conicidad para ambas superficies es -2.300. Los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.5) y los resultados se muestran en la figura (4.9).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		-200		Aire
1	103.36	27	50	BK-7
2	-103.36	199.99	50	Aire

Tabla (4.5). Parámetros de primer orden usando dos constantes de conicidad en las superficies refractoras.

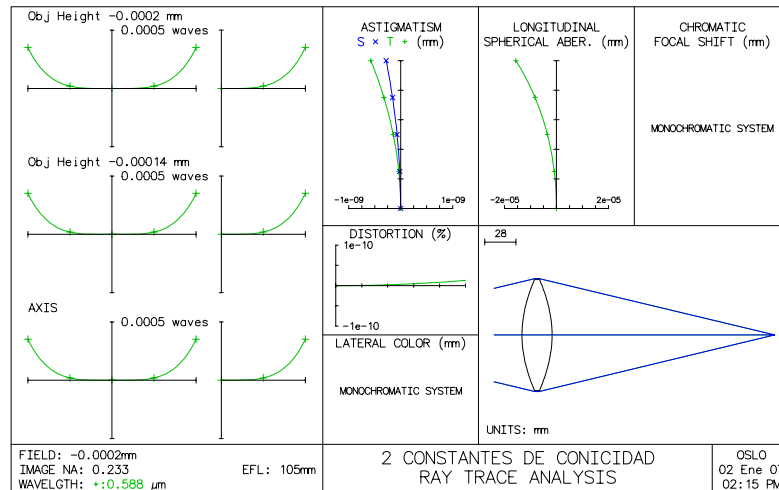


Figura (4.9). Gráficas de la DCO usando dos constantes de conicidad en las superficies refractoras.

La figura (4.9), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre para todos los rayos que provienen de la distancia objeto establecida y que llegan a cualquier altura de la lente. Esta solución esta

solo restringida a la forma de la lente por que depende de la posición objeto inicial y de la posición imagen final. Cuando el objeto esta en el infinito la primer superficie debe ser plana y se obtiene la solución propuesta por Kingslake [13].

Para los objetos fuera de eje se puede ver que no presenta coma, ya que las curvas características de esta son de tercer grado, por lo tanto, la lente diseñada es aplanatica, debido al principio de simetría. Cuando el objeto y la imagen no están a la misma distancia de la lente, este método presenta coma.

4.1.7 Sistema de Dos Espejos Uno Esférico y el Otro Asférico

J. Castro [5], A. Cordero y S. Vázquez [51], proponen la solución para superficies reflectoras, de las ecuaciones (4.20) y (4.21) podemos ver que si $n = -1$, el coeficiente a es igual a cero y la ecuación (4.19), se reduce a una ecuación de de primer grado para D_1 ,

$$D_1 = \frac{-c}{b}. \quad (4.24)$$

Para el objeto en posición finita, las constantes se calculan como

$$c = \left[y_1^2 + (d_2 - z_1 + d_1)^2 - (d_0 + d_1 + d_2 - D_0)^2 \right], \quad (4.25a)$$

$$b = 2[y_1 M_1 - N_1(d_2 - z_1 + d_1) + (d_0 + d_1 + d_2 - D_0)], \quad (4.25b)$$

y para un objeto lejano

$$c = \left[y_1^2 + (d_2 - z_1 + d_1)^2 - (d_1 + d_2 - z_1)^2 \right], \quad (4.26a)$$

$$b = 2[y_1 M_1 - N_1(d_2 - z_1 + d_1) + (d_1 + d_2 - z_1)], \quad (4.27b)$$

donde M_l y N_l son los cósenos directores del rayo después de reflejarse en la primer superficie, y_l es la altura del rayo en la primer superficie, d_o es la distancia objeto, d_l es la separación entre los espejos, d_2 es la distancia imagen, z_l es la sagita en la primer superficies y D_0 es la distancia medida a lo largo del rayo desde el objeto hasta que llega a la primer superficie.

Para ejemplificar la solución diseñamos un telescopio con el espejo primario esférico y el espejo secundario cónico. Para el espejo secundario usaremos el tratamiento de J. Castro [5]. La constante de conicidad del espejo secundario es de 1.952. Los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.6) y los resultados se muestran en la figura (4.10).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		-1×10^{20}		Aire
1	-1008	-558.791	280	Espejo
2	100.534	608.792	45	Espejo
Imagen				Aire

Tabla (4.6). Parámetros de primer orden, propuesta de J. Castro [5].

La figura (4.10), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre solo para la altura del rayo que se elige, en este caso se escogió el rayo que pasa por el borde del sistema. La solución no es buena para este sistema, un solo punto de corrección es insuficiente.

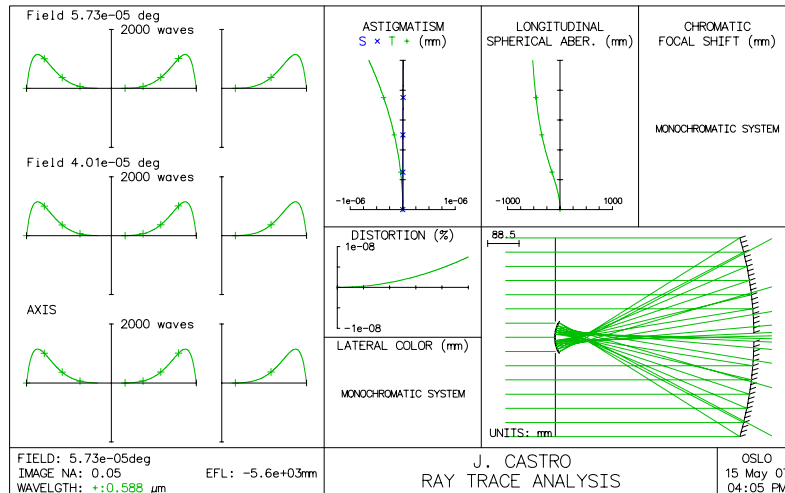


Figura (4.10). Gráfica de la DCO, propuesta de J. Castro [5].

4.1.8 Sistema de Dos Espejos Asféricos

Para ejemplificar esta solución, usaremos el mismo telescopio del ejemplo anterior. Como encontramos en las secciones anteriores, la constante de conicidad del espejo primario es $k_1 = -1$, por que el objeto esta en el infinito, y para el espejo secundario usaremos la ecuación (4.10) ya que podemos conocer la posición de los conjugados, por lo tanto, $k_2 = -0.696$. Los parámetros de primer orden se muestran en la tabla (4.7) y los resultados se muestran en la figura (4.11).

Superficie	Radios de curvatura (mm)	Espesor (mm)	Semidiámetro de las superficies (mm)	Material
Objeto		-1×10^{20}		Aire
1	-1008	-558.791	280	Espejo
2	100.534	608.792	45	Espejo
Imagen				Aire

Tabla (4.7). Parámetros de primer orden, telescopio con una constante de conicidad en cada espejo.

La figura (4.11), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre para todos los rayos que llegan a cualquier altura en el espejo primario. Esta solución esta solo restringida por que ya no podemos corregir otra aberración, ya que usamos las constantes de conicidad de cada espejo para corregir la aberración esférica y nos quedamos sin grados de libertad en el diseño.

Para los objetos fuera de eje podemos ver que aunque el ángulo de campo sea de 5.73×10^{-5} , la aberración principal es la coma ya que las curvas presentes son características de esta, curvas de tercer grado.

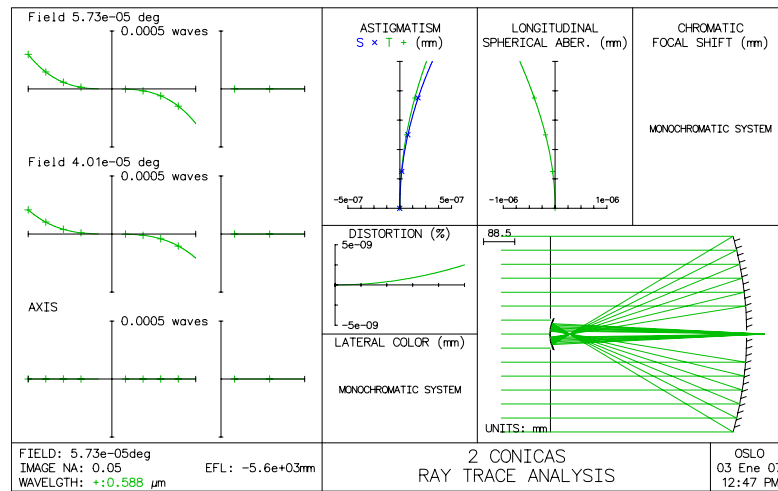


Figura (4.11). Gráficas de la DCO del telescopio con una constante de conicidad en cada espejo.

4.1.9 Sistemas con la Última Superficie Asférica

E. Wolf [52], nos dicen que es posible deformar cualquier superficie del sistema de tal manera que corrija la aberración esférica de todo el sistema para todos los rayos que llegan al sistema óptico. Si la superficie que se va a deformar es una de las superficies intermedias el método requiere de la evaluación de ecuaciones diferenciales de primer orden. Aquí solo analizaremos en detalle el caso cuando la superficie que se va a deformar

es la última superficie del sistema, por que el cálculo de esta se simplifica y es muy parecido a la propuesta de la tesis.

Las coordenadas de esta última superficie quedan en función de la altura de incidencia del rayo en la primera superficie o del ángulo de incidencia del rayo en la misma estas se calculan como

$$Z = \frac{\cos U}{A} \left[-B \pm \sqrt{B^2 - AC} \right], \quad (4.28)$$

$$Y = H - Z \tan U. \quad (4.29)$$

Donde U es el ángulo de incidencia del rayo en la última superficie, H es la altura del rayo en el plano tangente al vértice de la última superficie y los coeficientes de la ecuación (4.28), se pueden calcular de la siguiente manera

$$A = n'^2 - n^2, \quad (4.30a)$$

$$B = n^2 \int_0^t \text{sen} U \frac{dH}{dt} dt - n'^2 (L' \cos U + H \text{sen} U) + nn'L', \quad (4.30b)$$

$$C = n'^2 H^2 - \left(n \int_0^t \text{sen} U \frac{dH}{dt} dt \right) \left(n \int_0^t \text{sen} U \frac{dH}{dt} dt + 2n'L' \right). \quad (4.30c)$$

Donde n es el índice de refracción antes de la refracción en la última superficie, n' es el índice de refracción después de la refracción en la última superficie, L' es la distancia imagen ideal y t es el semidiámetro de la primera superficie.

E. Wolf [52] dice que la integral en los coeficientes puede evaluarse de diferentes maneras:

- Usar una expansión polinomial, pero cuantos términos debemos tomar para tener una exactitud adecuada en el cálculo. Al no usar todos los términos del polinomio nuestros resultados no son exactos.
- Si un número suficiente de rayos es trazado desde el espacio objeto hasta el espacio que precede a la superficie correctora, la integral puede cambiarse por su valor numérico, pero no dice cuantos rayos son suficientes para esto.

Finalmente combinando las ecuaciones (4.28) y (4.29), obtenemos una ecuación paramétrica exacta de la superficie esférica que corrige la aberración esférica en términos del parámetro libre t , ecuación (4.31)

$$Z + iY = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} e^{-iU} + iH. \quad (4.31)$$

El artículo no muestra ningún ejemplo con el método, solo dice que podría ser aplicado para el diseño de la cámara Schmidt, sistema de proyección Schmidt, sistemas Menisco-Schmidt, telescopio Cassegrain modificado y para Microscopios reflectores semi-aplanáticos.

4.1.10 Lente Difractiva Sobre un Sustrato Plano

Otra contribución de la tesis es la siguiente, encontramos que para una superficie difractiva que esta grabada sobre un sustrato plano, es posible conocer el valor de los coeficientes de la fase difractiva, ecuación (2.53), de manera analítica, solo si el objeto se encuentra en el infinito. Esto se logra al hacer la diferencia de camino óptico (DCO) entre un rayo marginal y uno paraxial sea igual a cero, figura (4.12).

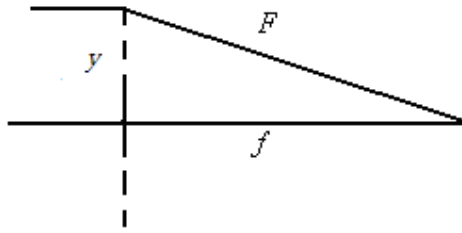


Figura (4.12). Lente difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto en el infinito.

La diferencia de camino óptico de los rayos antes mencionados queda expresada como

$$DCO = f - F$$

$$DCO = f - \left(f^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.32)$$

donde f es la distancia focal efectiva de la lente difractiva y y es el semidiámetro de la lente. Haciendo la expansión binomial a la raíz cuadrada tenemos

$$DCO = -\frac{y^2}{2f} + \frac{y^4}{8f^3} - \frac{y^6}{16f^5} + \frac{5y^8}{128f^7} - \frac{7y^{10}}{256f^9} \dots \quad (4.33)$$

Comparando la ecuación (4.33) con la ecuación (2.53) y considerando el primer orden de difracción tenemos que los coeficientes se calculan de la siguiente manera

$$a_2 = -\frac{1}{2f},$$

$$a_4 = \frac{1}{8f^3},$$

$$a_6 = -\frac{y^6}{16f^5},$$

$$a_8 = \frac{5y^8}{128f^7}, \dots \quad (4.34)$$

Como ejemplo usaremos una lente $f/2$, con el objeto en el infinito, el sustrato sobre el cual será grabada la superficie difractiva tiene ambas caras planas. Los resultados se muestran en la figura (4.13). El valor de los coeficientes se muestra en la siguiente tabla.

Coefficientes	Diámetro	Valor
a_2	20 mm.	-0.0125
a_4		1.953125×10^{-06}
a_6		$-6.103516 \times 10^{-10}$
a_8		$2.384185791 \times 10^{-13}$

Tabla (4.8). Valor de los coeficientes de la fase difractiva.

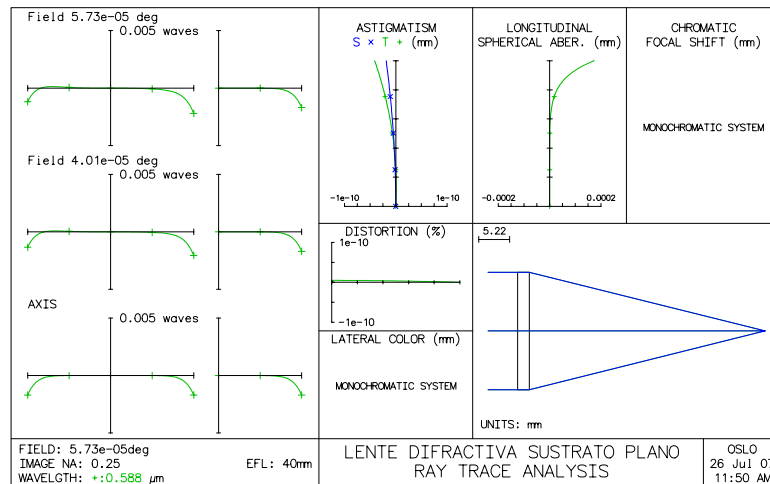


Figura (4.13). Gráficas de la DCO para una lente difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto en el infinito.

La figura (4.13), nos muestra que la corrección de la aberración esférica ocurre para todos los rayos. Esta solución está restringida a la forma de la lente y a la posición del objeto.

4.2 CONCLUSIONES

Se explicaron las ventajas y desventajas de todos los métodos analíticos encontrados en la literatura para corregir la aberración esférica con superficies esféricas, asféricas y difractivas de manera analítica, desde una sola superficie hasta combinaciones de dos superficies refractivas o reflectivas, usado para esto ninguna, una o dos superficies asféricas. Algunos métodos sacrifican los grados de libertad del diseño para lograrlo, en otros se condiciona la posición del objeto, la forma de la lente o los puntos de corrección no son suficientes para el número- f del sistema. En general estos métodos pueden tener aplicación en casos muy particulares, pero no se encontró un método en el cual no existieran restricciones. El último método que utiliza superficies asféricas, es más general y demuestran que es posible tener una superficie al final del sistema que corrija la aberración esférica de todo el sistema para todas las alturas posibles del rayo, sin embargo, no explica el método de ajuste para esa superficie o del número de coeficientes asféricos que se debe usar para esto, además explica algunas maneras diferentes de hacer la integral que aparece en sus ecuaciones pero, ninguna de ellas de manera concreta.

CAPÍTULO 5

DISEÑO DE SISTEMAS LIBRES DE ABERRACIÓN ESFÉRICA

5.1 SUPERFICIES ASFÉRICAS

El método propuesto por J. Castro [5] y M.T. Chávez [15] se puede generalizar para utilizarlo en cualquier sistema óptico formado por k superficies, figura (5.1), Para hacer esto se deben igualar los caminos ópticos de un rayo marginal y uno paraxial, ecuación (5.1)

$$n_0 D_0 + n_1 D_1 + \dots + n_{k-1} D_{k-1} + n_k D_k = d_0 + n d_1 + \dots + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k \quad (5.1)$$

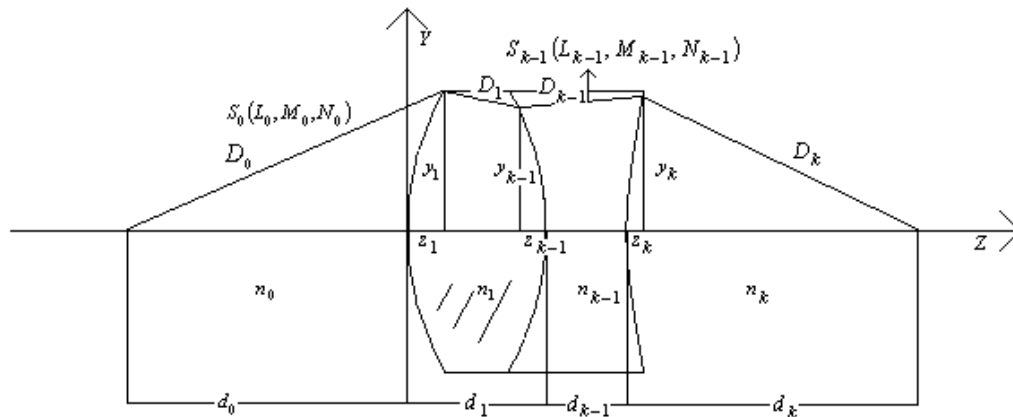


Figura (5.1). Diagrama esquemático para la generalización del método.

El análisis presentado se hará en una sola dimensión sin perder generalidad, aprovechando la simetría de revolución de la mayoría de los sistemas. De la figura (5.1) podemos ver que D_k se puede calcular como

$$D_k = \sqrt{(y_k)^2 + (d_k - z_k)^2}, \quad (5.2)$$

donde las coordenadas de la ultima superficie para el rayo marginal son

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + D_{k-1}M_{k-1} \\ z_k &= z_{k-1} - d_{k-1} + N_{k-1}D_{k-1} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sustituyendo la ecuación (5.3) en la ecuación (5.4) tenemos

$$D_k = \sqrt{(y_{k-1} + M_{k-1}D_{k-1})^2 + (d_k - z_{k-1} + d_{k-1} - N_{k-1}D_{k-1})^2} \quad (5.4)$$

Nuevamente sustituyendo la ecuación (5.4) en (5.1) y resolviendo para D_{k-1} , tenemos una ecuación cuadrática,

$$aD_{k-1}^2 + bD_{k-1} + c = 0. \quad (5.5)$$

Para un objeto a una distancia finita, las constantes se calculan como

$$a = (n_k^2 - n_{k-1}^2), \quad (5.6a)$$

$$b = 2 \left[n_k^2 y_{k-1} M_{k-1} - n_k^2 N_{k-1} (d_k - z_{k-1} + d_{k-1}) + n_{k-1} (n_0 d_0 + n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 D_0 - n_1 D_1) \right], \quad (5.6b)$$

$$c = \left[n_k^2 y_{k-1}^2 + n_k^2 (d_k - z_{k-1} + d_{k-1})^2 - (n_0 d_0 + n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 D_0 - n_1 D_1)^2 \right]. \quad (5.6c)$$

Para un objeto que se encuentra muy lejano (infinito), las constantes se calculan como

$$a = (n_k^2 - n_{k-1}^2), \quad (5.7a)$$

$$b = 2 \left[n_k^2 y_{k-1} M_{k-1} - n_k^2 N_{k-1} (d_k - z_{k-1} + d_{k-1}) + n_{k-1} (n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 z_1 - n_1 D_1) \right], \quad (5.7b)$$

$$c = \left[\begin{array}{l} n_k^2 y_{k-1}^2 + n_k^2 (d_k - z_{k-1} + d_{k-1})^2 \\ -(n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 z_1 - n_1 D_1)^2 \end{array} \right]. \quad (5.7c)$$

En ambos casos cuando la última superficie es un espejo la ecuación (5.5), se transforma en una ecuación de primer grado para D_{k-1} .

De la figura (5.1), podemos ver que $D_0, D_1, D_{k-2}, d_0, d_1, d_{k-1}, d_k, y_1, y_{k-1}$ y z_{k-1} son parámetros paraxiales y parámetros que podemos conocer haciendo un trazo de rayos exacto. M_{k-1} y N_{k-1} son los cósenos directores del rayo marginal, n_k y n_{k-1} son los índices de refracción antes y después de la refracción en la última superficie. Empleando estos parámetros en las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7) podemos conocer a D_{k-1} , para que con ayuda de la ecuación (5.3), calculemos las coordenadas de la superficie y_k y z_k que corrigen la aberración esférica de todo el sistema.

J. Castro [5] y M.T. Chávez [15] con estas coordenadas calculan la constante de conicidad que les da un sistema de dos superficies libres de aberración esférica, ecuación (4.23). Como dijimos en el capítulo anterior con esto solo logran corregir un punto en la pupila, ya que solo tienen un grado de libertad que es la constante de conicidad de la última superficie.

Nosotros aparte de la generalización del método, proponemos hacer la corrección de la aberración esférica con una superficie asférica polinomial, donde cada coeficiente de asfericidad es un grado de libertad, por lo tanto la cantidad de puntos de corrección depende del número de coeficientes de la superficie asférica polinomial que requiramos.

Definiremos la superficie asférica polinomial como

$$z_{asferica} = z_{esferica} + a_1 (x_k^2 + y_k^2)^2 + a_2 (x_k^2 + y_k^2)^3 + a_3 (x_k^2 + y_k^2)^4 + \dots \quad (5.8)$$

Donde $z_k = z_{asferica}$ que junto con x_k y y_k son las coordenadas en la ultima superficie que corrigen la aberración esférica, ecuación (5.3), y $z_{esferica}$ es calculada usando la curvatura c_k de la ultima superficie y las coordenadas que corrigen la aberración esférica x_k y y_k como sigue

$$z_{esferica} = \frac{c_k(x_k^2 + y_k^2)}{1 + \sqrt{1 - c_k^2(x_k^2 + y_k^2)}}, \quad (5.9)$$

Una vez más usando la simetría de revolución para simplificar el análisis y resolviendo la ecuación (5.8) para calcular a a_1 tenemos

$$a_1 = \frac{z_{asferica} - z_{esferica}}{y_k^4}. \quad (5.10)$$

La ecuación (5.10) nos asegura que la posición en la pupila de entrada por donde se trazo el rayo marginal, estará corregida de aberración esférica. Si nosotros queremos dos puntos de corrección, debemos trazar dos rayos con diferentes posiciones en la pupila de entrada y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$z_{asferica(edge)} = z_{esferica(borde)} + a_1(y_{k(borde)})^4 + a_2(y_{k(borde)})^6 \quad (5.11)$$

$$z_{asferica(0.7)} = z_{esferica(0.7)} + a_1(y_{k(0.7)})^4 + a_2(y_{k(0.7)})^6$$

En general, si nosotros queremos corregir en mas de dos posiciones en la pupila de entrada la aberración esférica, es mas conveniente usar la notación matricial, así tenemos

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & b_{51} & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & b_{52} & b_{n2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} & b_{53} & b_{n3} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} & b_{54} & b_{n4} \\ b_{15} & b_{25} & b_{35} & b_{45} & b_{55} & b_{n5} \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & b_{4n} & b_{5n} & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

Donde $c_{1,2,3, n}$ son las diferencias entre $z_{asférica}$ y $z_{esférica}$, $b_{1,2,3,n}$ son las coordenadas en la última superficie que corrigen la aberración esférica a la cuarta, sexta, octava, ... potencia y $a_{1,2,3,n}$ son los coeficientes de la superficie asférica polinomial. Resolviendo el sistema de ecuaciones (5.12), podemos conocer los coeficientes de asfericidad de la superficie que corrigen la aberración esférica para n posiciones en la pupila de entrada. Las posiciones de corrección corresponden a los lugares por donde se trazan los rayos de manera exacta.

5.1.1 Ejemplos

En los siguientes ejemplos mostraremos el procedimiento para diseñar diferentes tipos de sistemas ópticos usando la metodología propuesta.

5.1.1.1 Telescopio Gregoriano

El primer ejemplo es un telescopio Gregoriano no clásico $f/10$ (ya que el espejo primario es una esfera y no una parábola y el espejo secundario es asférico polinomial y no una elipse), el espejo primario es $f/1$, con una aberración esférica de 321.36 longitudes de onda. El espejo secundario lo haremos asférico y lo usaremos para corregir la aberración esférica del espejo primario. El espejo primario tiene un diámetro de 100 mm. y la distancia del vértice del espejo primario al foco Gregoriano es de 50 mm., figura (5.2).

5.1.1.1.1 Diseño de primer orden

Para hacer el diseño de primer orden, usamos las ecuaciones encontradas por D. Malacara [53]. Primero calculamos la distancia focal efectiva del telescopio y del espejo primario con la siguiente ecuación

$$F = D_1 f_{\# \text{telescopio}} \text{ y } f_1 = D_1 f_{\#1}, \quad (5.13)$$

donde D_1 es el diámetro del espejo primario, $f_{\# \text{telescopio}}$ es el número- f del telescopio y $f_{\#1}$ es el número- f del espejo primario. La separación entre los espejos se calcula con la ecuación (5.14)

$$l = \frac{f_1(F - s)}{f_1 + F}, \quad (5.14)$$

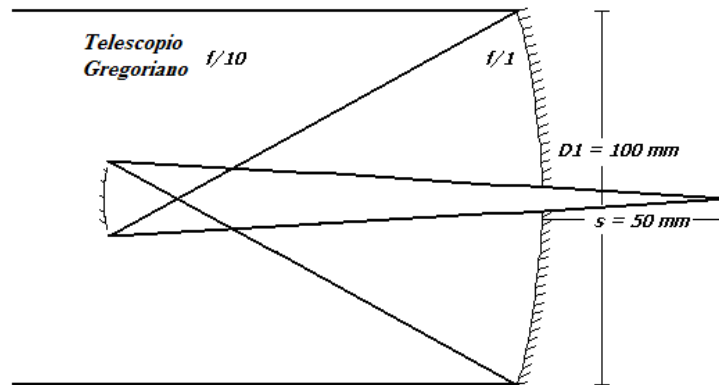


Figura (5.2). Parámetros iniciales para diseñar un Telescopio Gregoriano.

donde s es la distancia del vértice del espejo primario al foco Gregoriano. La distancia focal efectiva del espejo secundario se calcula como

$$f_2 = F \left(\frac{f_1[f_1 + s]}{f_1^2 - F^2} \right), \quad (5.15)$$

y el diámetro del espejo secundario se calcula con la ecuación (5.16)

$$D_2 = \frac{(f_1 - l)D_1}{f_1}, \quad (5.16)$$

Para que finalmente calculemos los radios de curvatura de los dos espejos con la siguiente ecuación

$$r_1 = -2f_1 \quad \text{y} \quad r_2 = 2f_2. \quad (5.17)$$

Los parámetros de primer orden calculados para nuestro ejemplo se muestran en la tabla (5.1).

Superficie	Distancia focal efectiva	Radios de curvatura	Diámetro	Separación
1	-100 mm.	-200 mm.	100 mm.	116.666
2	15.1515 mm.	30.303 mm.	16.667 mm.	166.666

Tabla (5.1). Parámetros paraxiales del telescopio Gregoriano.

5.1.1.1.2 Diseño Exacto

Para hacer el diseño exacto del Telescopio Gregoriano nosotros debemos trazar rayos por diferentes posiciones en la pupila de entrada hasta la penúltima superficie. En este ejemplo solo trazamos cinco rayos, este procedimiento se muestra en la tabla (5.2).

Parámetros del trazo de rayos	Posiciones en la pupila de entrada normalizadas				
	1	0.93	0.88	0.7	0.5
M_0	0	0	0	0	0
N_0	1	1	1	1	1
Y_1	50	46.5	44	35	25
Z_1	-6.350833	-5.480721	-4.900026	-3.086313	-1.568652
M_1	-0.484123	-0.452257	-0.42922	-0.344599	-0.248039
N_1	-0.875	-0.891887	-0.9032	-0.93875	-0.968750

Tabla (5.2). Parámetros del trazo de rayos del Telescopio Gregoriano

Donde M_0 , N_0 , M_1 , y N_1 son los cósenos directores del rayo. Y_1 y Z_1 son las coordenadas en el espejo primario. El siguiente paso es aplicar las ecuaciones (5.5) y (5.7) para conocer D_{k-1} . Después, calculamos las coordenadas que corrigen la aberración esférica en la última superficie con la ecuación (5.3), mostramos las coordenadas en la tabla (5.3).

Coordenadas que corrigen la aberración esférica	Posiciones en la pupila de entrada normalizadas				
	1	0.93	0.88	0.7	0.5
D_{k-1}	124.277	123.197	122.483	120.287	118.489
Y_2	-10.165	-9.217	-8.572	-6.451	-4.389
$Z_2=Z_{asférica}$	1.572	1.307	1.139	0.660	0.311
$Z_{esférica}$	1.756	1.435	1.237	0.694	0.319

Tabla (5.3). Coordenadas en la última superficie que corrigen la aberración esférica.

Finalmente mostramos el sistema de ecuaciones a resolver para uno, dos, tres, cuatro y cinco coeficientes, además podemos visualizar los cambios que provocan cada uno de estos en las gráficas de la diferencia de camino óptico.

5.1.1.1.3 Un Coeficiente

Como solo tenemos un coeficiente en este caso, nosotros escogeremos el borde de la pupila de entrada para hacer la corrección de la aberración esférica. Esto se logra al resolver la ecuación (5.10), con las coordenadas de la tabla (5.3) de la siguiente manera

$$a_1 = \frac{1.572863 - 1.756004}{(-10.165674)^4} = -(1.714910)^{-5}$$

Para notar la corrección que se obtiene con este coeficiente la figura (5.3) muestra la diferencia de camino óptico (DCO) para el Telescopio Gregoriano sin ningún coeficiente de asfericidad, es decir solo usando dos espejos esféricos; como se puede ver la aberración esférica es de aproximadamente 400 longitudes de onda.

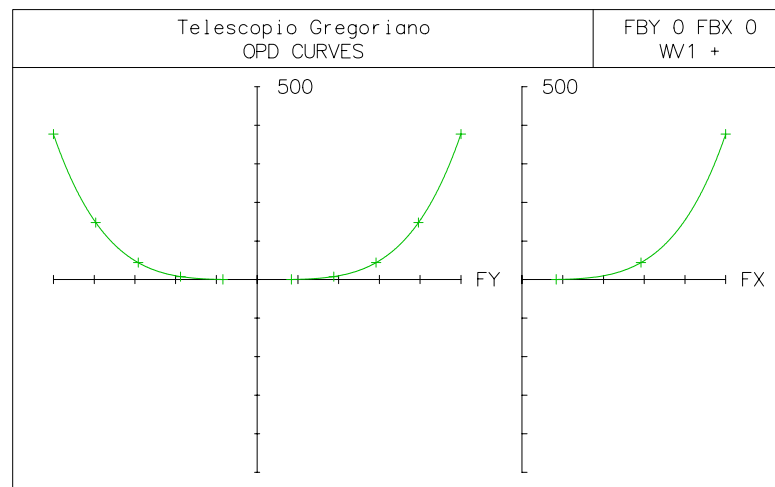


Figura (5.3). DCO del telescopio sin coeficientes de asfericidad.

La figura (5.4), muestra la DCO del telescopio con un coeficiente de asfericidad, como podemos ver hay una posición en la pupila donde la aberración esférica es cero, en el borde como fue escogido.

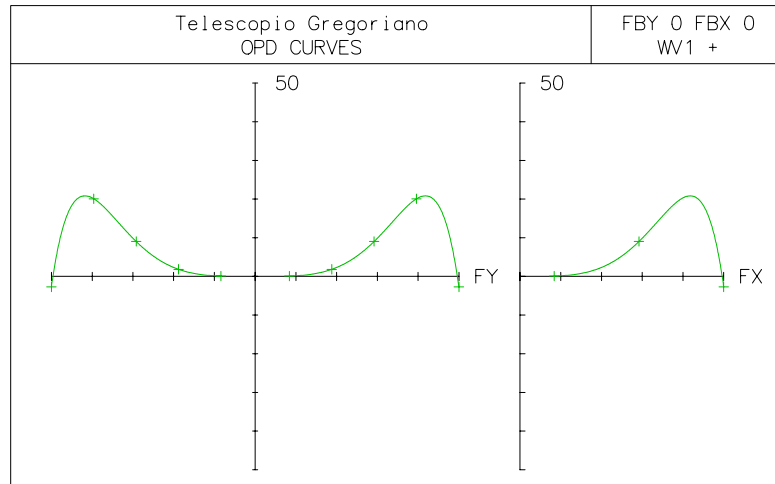


Figura (5.4). DCO del telescopio con un coeficiente de asfericidad.

Los cambios provocados por un solo coeficiente de asfericidad son significativos pero la corrección no esta completa, en la siguiente sección agregaremos otro coeficiente de asfericidad para corregir la zona de mayor aberración esférica residual.

5.1.1.1.4 Dos Coeficientes

Con dos coeficientes nosotros debemos seleccionar dos posiciones en la pupila de entrada donde la aberración esférica será cero, para este caso nosotros escogeremos el borde de la pupila y 0.7 del diámetro total de la pupila. Sustituyendo las coordenadas de la tabla (5.3) en la ecuación (5.11) tenemos

$$1.572863 - 1.756004 = a_1(-10.165674)^4 + a_2(-10.165674)^6$$

$$0.66015 - 0.694629 = a_1(-6.451061)^4 + a_2(-6.451061)^6$$

Las soluciones son $a_1 = -2.176739 \times 10^{-5}$ y $a_2 = 4.468982 \times 10^{-8}$. En la figura (5.5) mostramos la DCO del telescopio con dos coeficientes de asfericidad, como se puede ver hay dos posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden con los lugares seleccionados.

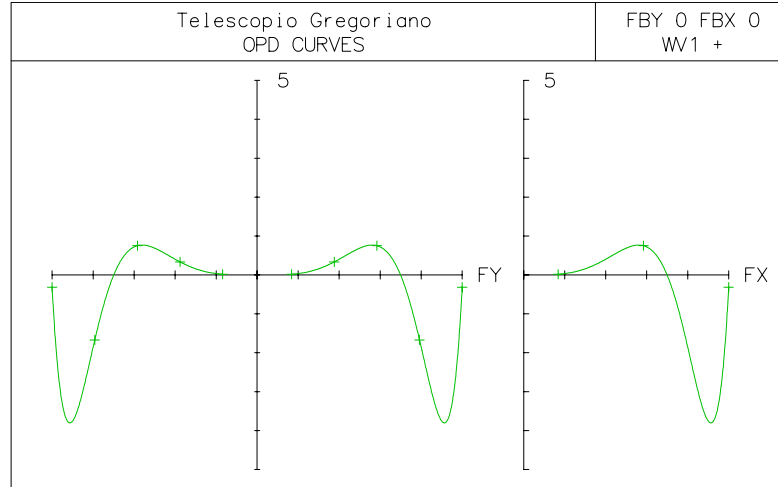


Figura (5.5). DCO del telescopio con dos coeficientes de asfericidad.

Usando dos coeficientes la corrección se mejora, pero no esta completa aun, necesitamos usar más coeficientes seleccionando otras posiciones en la pupila guiándonos con la figura (5.5).

5.1.1.1.5 Tres Coeficientes

Nosotros ahora debemos seleccionar tres posiciones en la pupila de entrada donde queramos que la aberración esférica sea cero, para este caso nosotros escogeremos 1, 0.88 y 0.7 de diámetro total de la pupila de entrada. Sustituyendo las coordenadas de la tabla (5.3) en la ecuación (5.12) tenemos

$$\begin{aligned}
 1.572863 - 1.756004 &= a_1(-10.165674)^4 + a_2(-10.165674)^6 + a_3(-10.165674)^8 \\
 1.139116 - 1.237848 &= a_1(-8.572564)^4 + a_2(-8.572564)^6 + a_3(-8.572564)^8 \\
 0.66015 - 0.694629 &= a_1(-6.451061)^4 + a_2(-6.451061)^6 + a_3(-6.451061)^8
 \end{aligned}$$

Las soluciones son $a_1 = -2.267818 \times 10^{-5}$, $a_2 = 7.538870 \times 10^{-8}$ y $a_3 = -2.117790 \times 10^{-10}$. En la figura (5.6) mostramos la DCO del telescopio con tres coeficientes de asfericidad, como se puede ver hay tres posiciones en la

pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a lugares seleccionados.

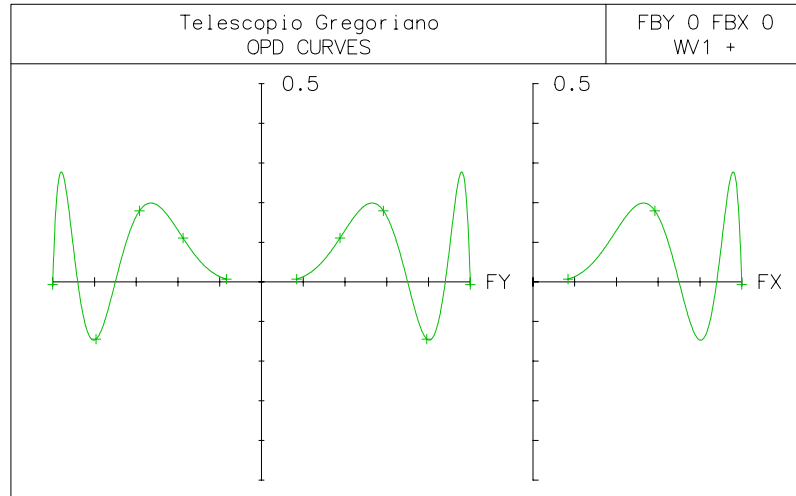


Figura (5.6). DCO del telescopio con tres coeficientes de asfericidad.

La corrección que obtenemos con tres coeficientes esta casi completa, pero necesitamos usar otro coeficiente seleccionando otra posición en la pupila de entrada, podemos guiarnos con la figura (5.6).

5.1.1.1.6 Cuatro Coeficientes

Las posiciones seleccionadas en la pupila de entrada donde la aberración esférica será cero, serán para este caso 1, 0.93, 0.88 y 0.7 de diámetro total de la pupila. Sustituyendo las coordenadas de la tabla (5.3) en la ecuación (5.12) tenemos

$$\begin{aligned}
1.572863 - 1.756004 &= a_1(-10.165674)^4 + a_2(-10.165674)^6 + \\
&\quad a_3(-10.165674)^8 + a_4(-10.165674)^{10} \\
1.307240 - 1.435793 &= a_1(-9.217172)^4 + a_2(-9.217172)^6 + \\
&\quad a_3(-9.217172)^8 + a_4(-9.217172)^{10} \\
1.139116 - 1.237848 &= a_1(-8.572564)^4 + a_2(-8.572564)^6 + \\
&\quad a_3(-8.572564)^8 + a_4(-8.572564)^{10} \\
0.66015 - 0.694629 &= a_1(-6.451061)^4 + a_2(-6.451061)^6 + \\
&\quad a_3(-6.451061)^8 + a_4(-6.451061)^{10}
\end{aligned}$$

Las soluciones son $a_1 = -2.299409 \times 10^{-5}$, $a_2 = 9.033522 \times 10^{-8}$, $a_3 = -4.301246 \times 10^{-10}$ y $a_4 = 9.995402 \times 10^{-13}$. En la figura (5.7) mostramos la DCO del telescopio con cuatro coeficientes de asfericidad, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a lugares seleccionados.

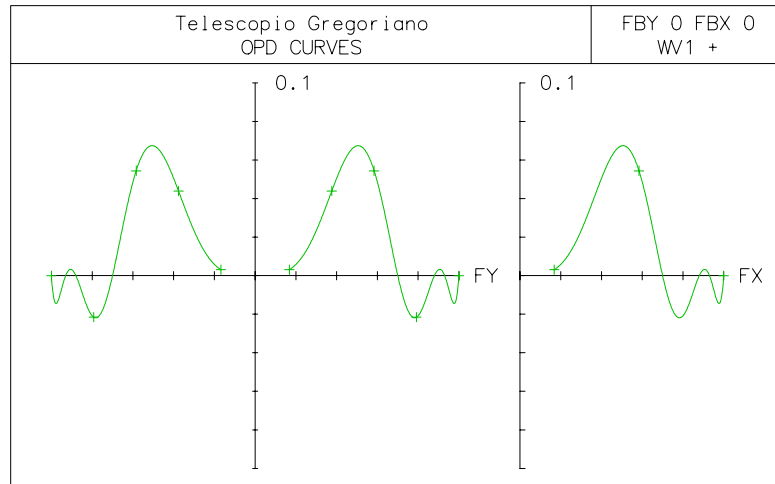


Figura (5.7). DCO del telescopio con cuatro coeficientes de asfericidad.

La corrección con cuatro coeficientes es adecuada por que la razón de Strehl del telescopio es mayor que 0.8 y por lo tanto esta limitado por difracción, figura (5.8). Existe un punto en la pupila de entrada donde, la aberración esférica residual es mayor que en cualquier otro lugar, agregaremos un coeficiente más para arreglar esto, observando la figura

(5.7), podemos ver que este punto corresponde a 0.5 del diámetro total de la pupila.

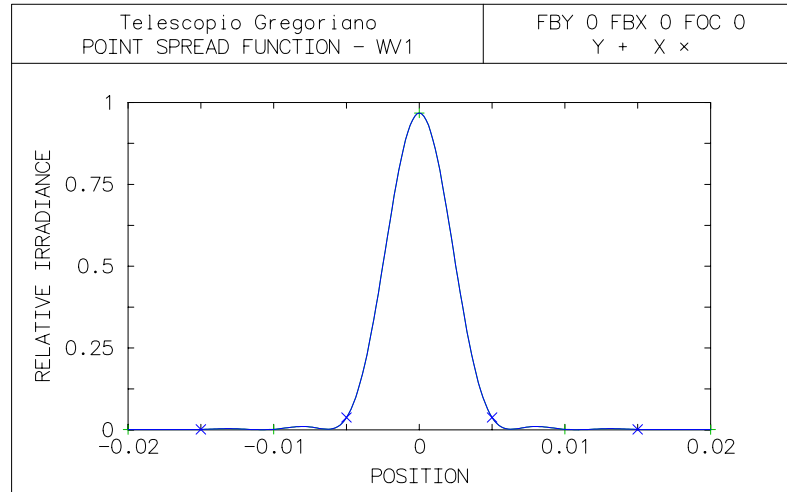


Figura (5.8). PSF del telescopio con cuatro coeficientes de asfericidad (Razón de Strehl 0.9678).

5.1.1.1.7 Cinco Coeficientes

Las posiciones seleccionadas en la pupila de entrada donde la aberración esférica será cero, serán para este caso 1, 0.93, 0.88, 0.7 y 0.5 de diámetro total de la pupila. Sustituyendo las coordenadas de la tabla (5.3) en la ecuación (5.12) tenemos

$$\begin{aligned}
1.57286 - 1.75600 &= a_1(-10.16567)^4 + a_2(-10.16567)^6 + \\
&\quad a_3(-10.16567)^8 + a_4(-10.16567)^{10} + a_5(-10.16567)^{12} \\
1.30724 - 1.43579 &= a_1(-9.21717)^4 + a_2(-9.21717)^6 + \\
&\quad a_3(-9.21717)^8 + a_4(-9.21717)^{10} + a_5(-9.21717)^{12} \\
1.13911 - 1.23784 &= a_1(-8.57256)^4 + a_2(-8.57256)^6 + \\
&\quad a_3(-8.57256)^8 + a_4(-8.57256)^{10} + a_5(-8.57256)^{12} \\
0.66015 - 0.69462 &= a_1(-6.45106)^4 + a_2(-6.45106)^6 + \\
&\quad a_3(-6.45106)^8 + a_4(-6.45106)^{10} + a_5(-6.45106)^{12} \\
0.31169 - 0.31966 &= a_1(-4.38994)^4 + a_2(-4.38994)^6 + \\
&\quad a_3(-4.38994)^8 + a_4(-4.38994)^{10} + a_5(-4.38994)^{12}
\end{aligned}$$

Las soluciones son $a_1 = -2.321123 \times 10^{-5}$, $a_2 = 1.031650 \times 10^{-7}$, $a_3 = -7.011418 \times 10^{-10}$, $a_4 = 3.453224 \times 10^{-12}$ y $a_5 = -8.087233 \times 10^{-15}$. En la figura (5.9) mostramos la DCO del telescopio con cinco coeficientes de asfericidad, como se puede ver hay cinco posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a lugares seleccionados. La corrección con cinco coeficientes es mejor que la anterior como era de esperarse, para este caso la razón de Strehl es de 0.999, figura (5.10).

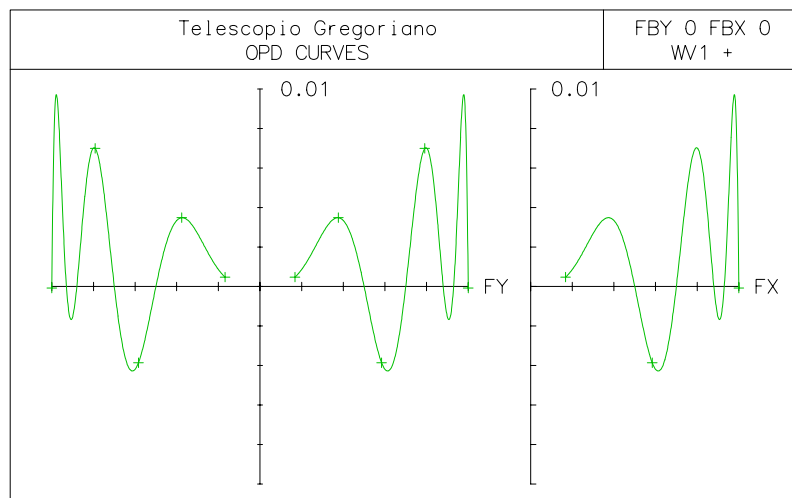


Figura (5.9). DCO del telescopio con cinco coeficientes de asfericidad.

En todos los casos la corrección de la aberración esférica corresponden con la posición seleccionada en la pupila de entrada del sistema, esto nos permite seleccionar la cantidad y posición de puntos de corrección, por lo tanto la corrección dependerá del número de coeficientes esféricos que utilicemos y del lugar de corrección.

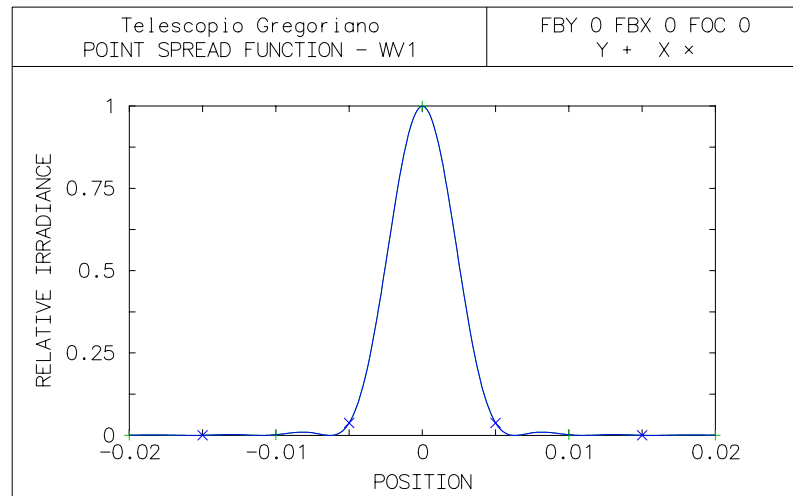


Figura (5.10). PSF del telescopio con cinco coeficientes de asfericidad (Razón de Strehl 0.999).

5.1.1.2 Telescopio Cassegrain

El segundo ejemplo es un telescopio Cassegrain no clásico $f/5.35$ (ya que el espejo primario es una esfera y no una parábola y el espejo secundario es esférico polinomial y no una hipérbola), el espejo primario es $f/0.71$ con una aberración esférica 5966.860 longitudes de onda, el espejo secundario lo haremos esférico y lo usaremos para corregir la aberración esférica del espejo primario. El espejo primario tiene un diámetro de 700 mm. y la distancia del vértice del espejo primario al foco Cassegrain es de 700 mm.

Los parámetros de primer orden se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Distancia focal efectiva	Radios de curvatura	Diámetro	Separación
1	-1000 mm.	-2000 mm.	700 mm.	800
2	-230.76 mm.	-461.53 mm.	140 mm.	1500

Tabla (5.4). Parámetros paraxiales del telescopio Cassegrain.

En este caso usamos trece coeficientes y como se puede ver en la figura (5.11), hay trece posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero. En la tabla (5.5) mostramos el valor de los coeficientes de asfericidad y las posiciones normalizadas en la pupila de entrada.

Coeficientes	Posiciones en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_1	1	-1.150100×10^{-8}
a_2	0.97	1.335713×10^{-11}
a_3	0.92	$-1.975211 \times 10^{-14}$
a_4	0.86	1.599721×10^{-17}
a_5	0.78	$-8.151429 \times 10^{-21}$
a_6	0.73	2.778913×10^{-24}
a_7	0.68	$-6.553853 \times 10^{-28}$
a_8	0.6	1.084832×10^{-31}
a_9	0.55	$-1.257925 \times 10^{-35}$
a_{10}	0.45	1.001208×10^{-39}
a_{11}	0.37	$-5.212465 \times 10^{-44}$
a_{12}	0.28	1.599059×10^{-48}
a_{13}	0.22	$-2.192244 \times 10^{-53}$

Tabla (5.5). Coeficientes calculados para corregir el telescopio Cassegrain.

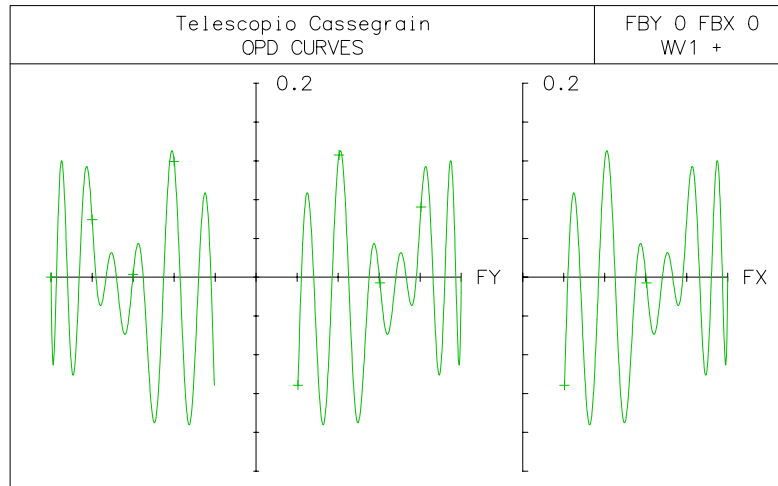


Figura (5.11). DCO del telescopio Cassegrain con trece coeficientes de asfericidad.

5.1.1.3 Lente $f/1$

El siguiente ejemplo es una lente $f/1$, con 100 mm de distancia focal efectiva y con el objeto a 400 mm de la lente. La primera superficie es esférica y la segunda superficie la haremos asférica para corregir la aberración esférica de toda la lente. En este caso usamos cinco coeficientes y como se puede ver en la figura (5.12), hay cinco posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero. En la tabla (5.6), mostramos el valor de los coeficientes de asfericidad y las posiciones normalizadas en la pupila de entrada.

Coeficientes	Posiciones en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_1	1	7.538529×10^{-7}
a_2	0.95	$-5.556488 \times 10^{-11}$
a_3	0.88	9.062669×10^{-15}
a_4	0.70	$-1.338032 \times 10^{-18}$
a_5	0.5	1.044944×10^{-22}

Tabla (5.6). Coeficientes calculados para corregir la aberración esférica de la lente $f/1$.

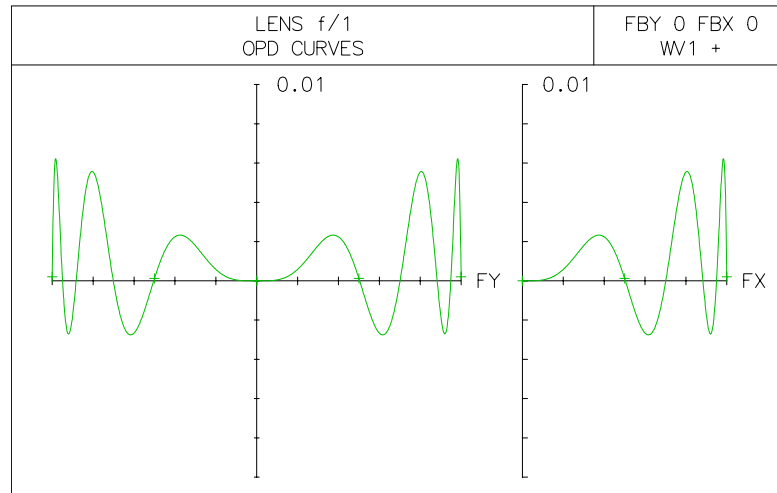


Figura (5.12). DCO de la lente $f/1$ con el objeto en posición finita.

5.1.1.4 Doblete Cementado $f/2$

El ejemplo final es un doblete cementado $f/2$, con 100 mm de distancia focal efectiva y con el objeto en el infinito, la primera y segunda superficie son esféricas, y la tercera superficie la haremos asférica para corregir la aberración esférica de todo el doblete. En este caso usamos solo tres coeficientes y como se puede ver en la figura (5.13), existen tres posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero. En la tabla (5.7), mostramos el valor de los coeficientes de asfericidad y las posiciones normalizadas en la pupila de entrada.

Coeficientes	Posiciones en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_1	1	1.830066×10^{-7}
a_2	0.88	$-2.955372 \times 10^{-10}$
a_3	0.7	$-1.919597 \times 10^{-13}$

Tabla (5.7). Coeficientes calculados para corregir la aberración esférica del doblete cementado $f/2$.

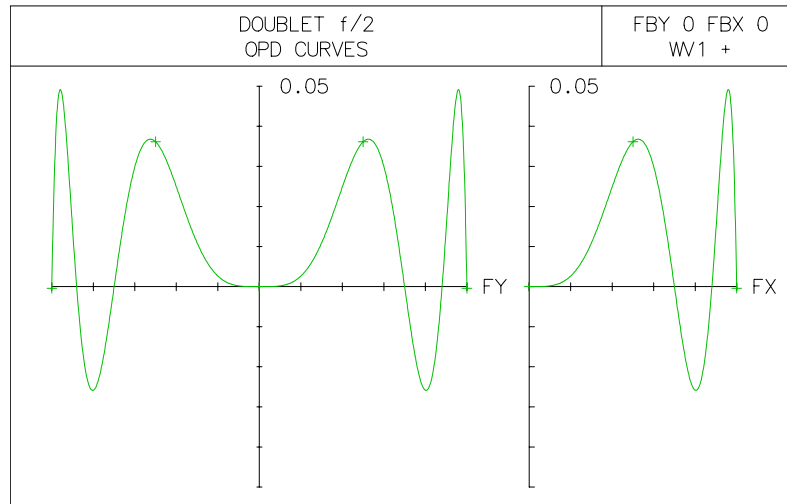


Figura (5.13). DCO del doblete cementado $f/2$ con el objeto en el infinito.

5.1.2 Ronchigramas para Espejos Asféricos Polinomiales

La tesis aborda de manera parcial el problema de la construcción de superficies asféricas, para esto proponemos usar la prueba de Ronchi, por que es una prueba simple y poderosa para evaluar los sistemas ópticos, puede ser cualitativa, cuando se compara el ronchigrama ideal con el ronchigrama real o cuantitativa, cuando determinamos la cantidad de aberración del sistema óptico [54].

Malacara [55], desarrollo un algoritmo para la simulación de ronchigramas de un espejo cónico con la fuente sobre eje. Cordero et. al.[56] y Zarate et. al.[57], desarrollaron algoritmos para simular ronchigramas de espejos cónicos o secciones de estos espejos con la fuente en cualquier posición.

Cordero et. al.[58], presento un algoritmo con el cual es posible simular ronchigramas de cualquier sistema óptico, por medio de un trazo de rayos exacto, también hace una generalización de coordenadas y usa diferentes rejillas.

Tomando como base el trabajo de Cordero et. al. [58], nosotros hicimos un algoritmo para la simulación de ronchigramas de superficies esféricas polinomiales con simetría rotacional, en este se pueden usar hasta 10 coeficientes de asfericidad, para rejillas convencionales o cuadradas.

5.1.2.1 Trazo de Rayos por Superficies Asféricas polinomiales

La función $F(x, y, z)$, que define a las superficies esféricas polinomiales queda expresada en la ecuación (5.18).

$$F = z - \frac{c(x^2 + y^2)}{1 + \sqrt{1 - c^2(x^2 + y^2)}} + a_1(x^2 + y^2)^2 + a_2(x^2 + y^2)^3 + a_3(x^2 + y^2)^4 + \dots \quad (5.18)$$

donde c es la curvatura de la superficie, x y y son las coordenadas en la superficie y a_1, a_2, a_3, \dots son los coeficientes de asfericidad de la superficie.

Para poder trazar un rayo por estas superficies, es necesario conocer la intersección del rayo con la superficie. Una manera de solucionar este problema es resolver un sistema de ecuaciones, del mismo grado que la potencia del término que multiplica el coeficiente de asfericidad. Otra manera de solucionarlo es emplear un método iterativo [59], este consiste en aproximarse poco a poco a la intersección del rayo y el plano tangente a la superficie, como lo muestra la figura (5.14).

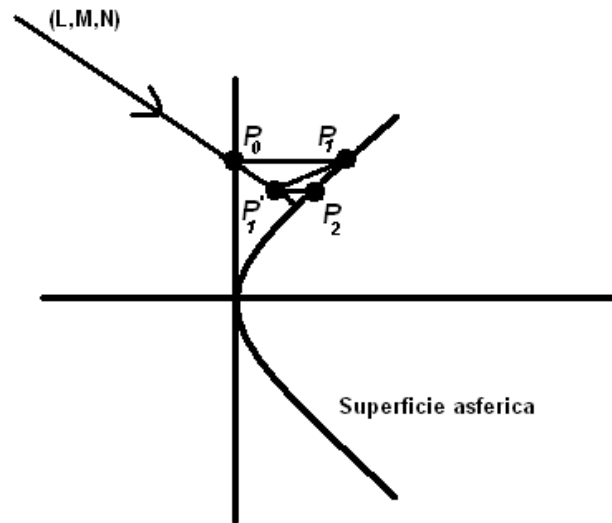


Figura (5.14). Método iterativo para encontrar la intersección del rayo y la superficie asférica

Las coordenadas del punto $P_0 (x_0, y_0, 0)$ se pueden calcular con los cosenos directores del rayo (L, M, N) y la distancia a la que esta colocado el objeto o fuente. Con esas mismas coordenadas $(y_0 = y_1, x_0 = x_1)$ y la ecuación (5.18), encontramos las coordenadas del punto $P_1 (x_1, y_1, z_1)$. El siguiente paso es encontrar la intersección entre el rayo y el plano tangente en P_1 o las coordenadas del P'_1 , con ayuda de las siguientes ecuaciones

$$z'_1 = \frac{N\gamma_1 z_1}{\alpha_1 L + \beta_1 M + \gamma_1 N}$$

$$y'_1 = \frac{L}{N} z'_1 + x_0 \quad , \quad (5.19)$$

$$x'_1 = \frac{M}{N} z'_1 + y_0$$

donde (L, M, N) son los cosenos directores del rayo y $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ son los cosenos directores de la normal a la superficie en el punto P_1 , ecuación (5.20). Con esas mismas coordenadas $(y'_1 = y_2, x'_1 = x_2)$ y la ecuación

(5.18), encontramos las coordenadas del punto $\mathbf{P}_2 (x_2, y_2, z_2)$ y esto completa un ciclo de iteración.

$$\alpha, \beta, \gamma = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)}{\left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.20)$$

Para el siguiente ciclo, debemos calcular primero los cósenos directores de la normal a la superficie $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ en el punto \mathbf{P}_2 , después tenemos que encontrar la intersección entre el rayo y el plano tangente en \mathbf{P}_2 o las coordenadas del \mathbf{P}'_2 , con las ecuaciones (5.21)

$$\begin{aligned} z'_2 &= \frac{N(\alpha_2(x_2 - x_0) + \beta_2(y_2 - y_0) + \gamma_2 z_2)}{\alpha_2 L + \beta_2 M + \gamma_2 N} \\ y'_2 &= \frac{L}{N} z'_2 + x_0 = y_3 \\ x'_2 &= \frac{M}{N} z'_2 + y_0 = x_3 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Con esas mismas coordenadas $(y'_2 = y_3, x'_2 = x_3)$ y la ecuación (5.18), encontramos las coordenadas del punto $\mathbf{P}_3 (x_3, y_3, z_3)$ y esto completa un segundo ciclo de iteración. Las ecuaciones son las mismas para los siguientes ciclos, el único cambio que hay que hacer es en los índices el 2 por el 3. El proceso se continúa hasta lograr la precisión requerida.

Con los valores finales calculamos $\cos I$ como

$$\cos I = \alpha_n L + \beta_n M + \gamma_n N, \quad (5.22)$$

y después calculamos $\cos I'$ con la ecuación (5.23)

$$n' \cos I' = \sqrt{n'^2 - n^2 (1 - \cos^2 I)}. \quad (5.23)$$

Finalmente con la ecuación (5.24), calculemos los cósenos directores del rayo reflejado o refractado

$$\begin{aligned} n'L' - nL &= (n' \cos I' - n \cos I) \alpha_n \\ n'M' - nM &= (n' \cos I' - n \cos I) \beta_n \\ n'N' - nN &= (n' \cos I' - n \cos I) \gamma_n \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.1.2.2 Algoritmo para Ronchigramas

En nuestro algoritmo lo primero que hacemos es determinar la cantidad de píxeles que llenan la pupila de entrada del sistema, para convertir el número de píxeles a coordenadas físicas, figura (5.15) y definimos la distancia a la cual estará la fuente. Con estos datos podemos calcular los cósenos directores de los rayos que pasaran a través de la pupila de entrada.

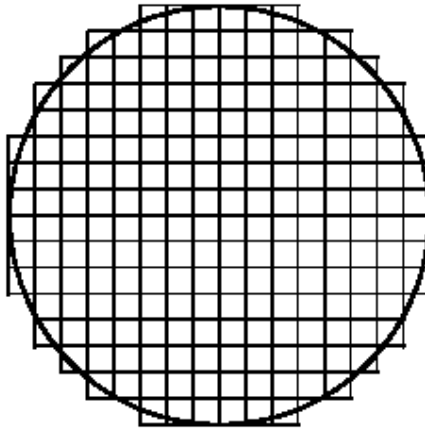


Figura (5.15). Píxeles en la pupila de entrada.

Después con los cósenos directores y la sección anterior, trazamos el rayo a través del sistema. Para saber si el rayo pasa por una banda clara

o una oscura, ocupamos parte del algoritmo propuesto por Cordero et. al. [58], donde el calcula

$$H = \text{int}\left(\frac{T_y}{d}\right), \quad (5.25)$$

T_y son las coordenadas del rayo en el plano de la rejilla y d es el periodo de la rejilla. Necesitamos saber si H es par o impar por que eso determinara por donde pasa el rayo, si por una banda clara o una por una banda oscura, para eso tenemos

$$D = \text{int}\left(\frac{H}{2}\right) - \frac{H}{2}. \quad (5.26)$$

Si D es cero, H es impar y el rayo cruza por una banda oscura y si D es diferente de cero, H es par y el rayo pasa por una banda clara y por lo tanto debemos guardar las coordenadas en píxeles del rayo. Si repetimos las ecuaciones (5.25) y (5.26), pero ahora para T_x , podemos simular ronchigramas con una rejilla cuadrada.

5.1.2.3 Simulación de Ronchigramas

Se simularon los ronchigramas, para un espejo $f/0.5$, con un radio de curvatura de -20 cm. y con la fuente a 40 cm. del espejo.

Para la primera simulación, utilizamos un coeficiente de asfericidad con la corrección de la aberración esférica en el borde de la pupila de entrada. El valor del coeficiente es $a_1 = 5.734178 \times 10^{-9}$. La gráfica de la aberración transversal para este espejo se muestra en la figura (5.16).

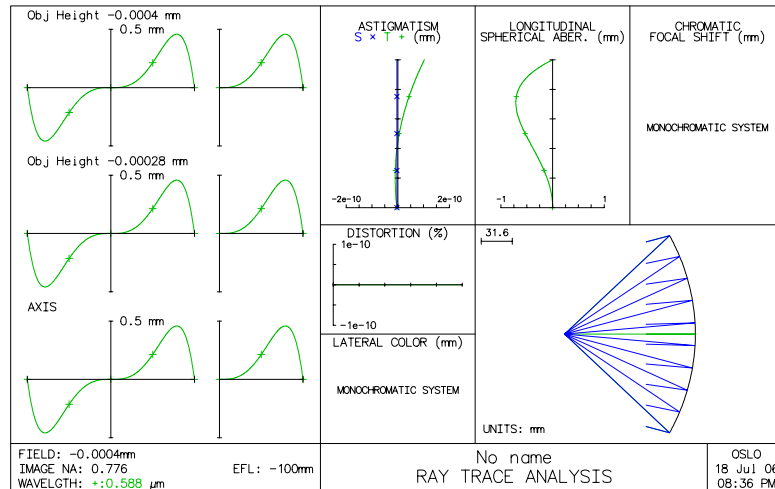


Figura (5.16). Gráfica de la aberración transversal para espejo esférico corregido con un coeficiente.

Para este ronchigrama la rejilla tenía 50 líneas/pulgada y se puso a la distancia imagen ideal 13.333 cm. Los resultados se muestran, en la figura (5.17).

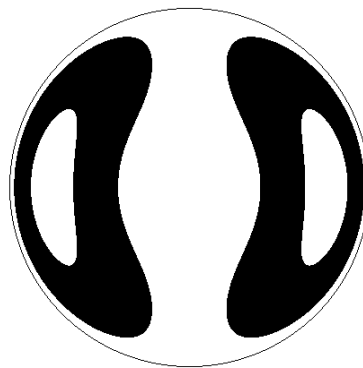


Figura (5.17). Ronchigrama para espejo esférico corregido con un coeficiente.

Para la segunda simulación, utilizamos dos coeficientes de asfericidad con la corrección de la aberración esférica, en el borde y a 0.7 del diámetro total de la pupila de entrada. El valor de los coeficientes es $a_1 = 3.621685 \times 10^{-9}$ y $a_2 = 1.361066 \times 10^{-13}$. La gráfica de la aberración transversal para este espejo se muestra en la figura (5.18).

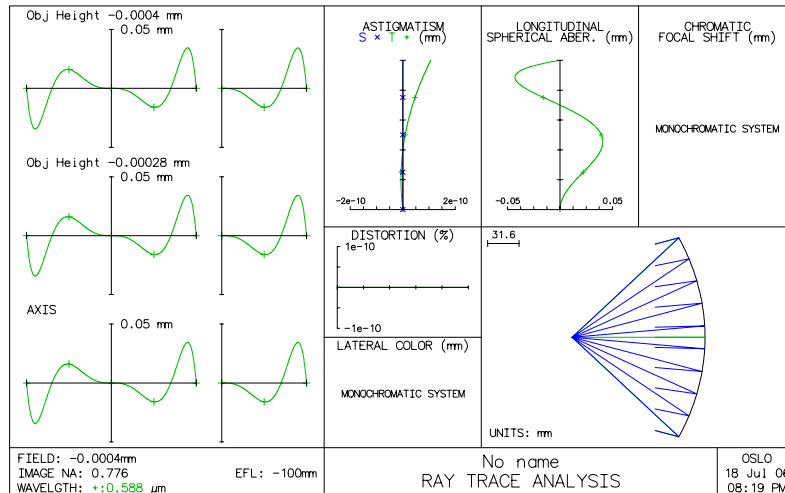


Figura (5.18). Gráfica de la aberración transversal para espejo esférico corregido con dos coeficientes.

Para este ronchigrama la rejilla tenía 1000 líneas/pulgada y se puso a la distancia imagen ideal 13.333 cm. Los resultados se muestran, en la figura (5.19).

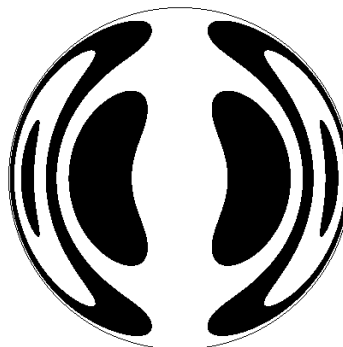


Figura (5.19). Ronchigrama para espejo esférico corregido con dos coeficientes.

Para la tercer simulación, utilizamos cuatro coeficientes de asfericidad con la corrección de la aberración esférica en el borde, 0.88, 0.7 y 0.45 del diámetro total de la pupila de entrada. El valor de los coeficientes es $a_1 = 3.900199 \times 10^{-9}$, $a_2 = 8.852303 \times 10^{-14}$, $a_3 = 1.208339 \times 10^{-18}$ y $a_4 = 7.712310 \times 10^{-23}$. La grafica de la aberración transversal para este espejo se muestra en la figura (5.20).

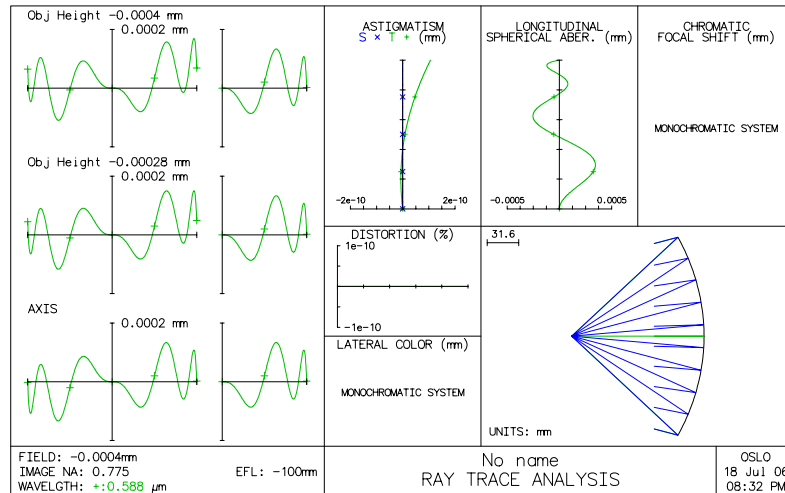


Figura (5.20). Gráfica de la aberración transversal para espejo esférico corregido con cuatro coeficientes.

Para este espejo se generaron dos ronchigramas, para el primero la rejilla tenía 500000 líneas/pulgada y se puso a la distancia imagen ideal 13.333 cm. Los resultados se muestran, en la figura (5.21).



Figura (5.21). Ronchigrama para espejo esférico corregido con cuatro coeficientes.

Para el segundo ronchigrama simulado con este mismo espejo la rejilla tenía 50 líneas/pulgada y se puso a la distancia de 13.2 cm. Los resultados se muestran, en la figura (5.22).

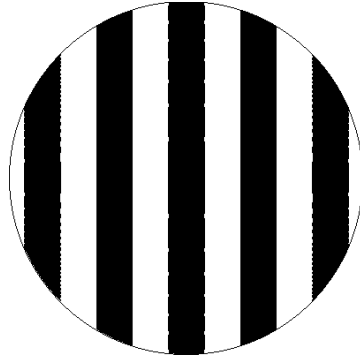


Figura (5.22). Ronchigrama para espejo esférico corregido con cuatro coeficientes, con la rejilla dentro de foco.

Finalmente hicimos una comparación entre la simulación anterior y una simulación para un espejo cónico ($k=-0.25$), que sería el espejo ideal, para las posiciones objeto e imagen que se manejaron en los espejos esféricos. La rejilla tenía 50 líneas/pulgada y se puso a la distancia de 13.2 cm. igual que en el caso anterior. Los resultados se muestran, en la figura (5.23).

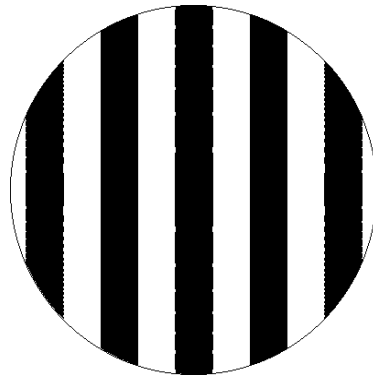


Figura (5.23). Ronchigrama para espejo cónico ($k=-0.25$), con la rejilla dentro de foco.

Más detalles sobre el algoritmo para la simulación de ronchigramas de superficies esféricas polinomiales revisar el apéndice 1.

5.2 LENTES DIFRACTIVAS

5.2.1 Lente Difractiva Sobre un Sustrato Plano

Como dijimos en el capítulo 2, la función de fase $\Phi(x, y)$ de una superficie difractiva se define por un polinomio [29], ecuación (2.52). Este polinomio puede simplificarse considerando solo los términos que tienen simetría rotacional como una lente convencional, ecuación (2.53)

$$\Phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} m \left(a_0 + a_2(x^2 + y^2) + a_4(x^2 + y^2)^2 + a_6(x^2 + y^2)^3 + \dots \right). \quad (2.53)$$

En la ecuación (2.53), λ_0 es la longitud de onda del diseño. El coeficiente a_0 es un retraso de fase constante y el coeficiente a_2 contiene los parámetros paraxiales, en particular el poder óptico de la lente difractiva, este puede calcularse como

$$k = 1/f_0 = -2a_2m, \quad (2.54)$$

donde m es el orden de difracción y f_0 es la distancia focal del diseño.

Los coeficientes a_4, a_6, a_8, \dots los calcularemos con el procedimiento que a continuación se describe. Primero explicaremos este procedimiento para cuando la superficie difractiva es grabada sobre un sustrato plano, ver figura (5.24).

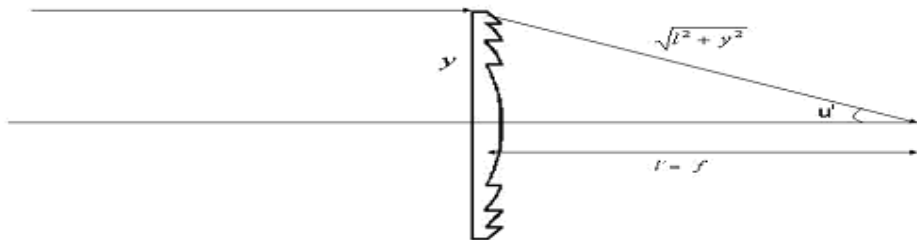


Figura (5.24). Superficie difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto en el infinito.

La figura (5.25), nos muestra una vista de frente de la superficie difractiva, esta puede verse como una rejilla de periodo variable, también se puede ver como el periodo disminuye conforme nos acercamos a la orilla.

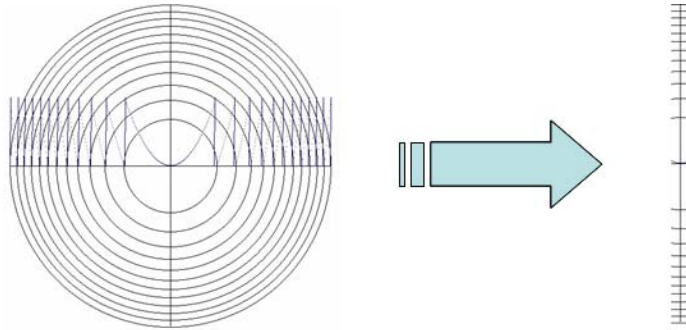


Figura (5.25). Vista de frente de una superficie difractiva, con periodo variable.

El periodo variable de la superficie difractiva esta determinado por los coeficientes de la fase difractiva, entonces el problema de encontrarlos se reduce a encontrar el periodo para cada zona de la lente. Nosotros calculamos el periodo de la zona donde llega el rayo a la superficie difractiva para que este converja a la distancia imagen ideal, utilizando la ecuación de la rejilla

$$n'\text{sen}(I') - n\text{sen}(I) = m\lambda f_{x,y}, \quad (5.27)$$

donde I y I' son los ángulos de incidencia y difracción respectivamente, n y n' son los índices de refracción antes y después de la difracción, f_x es la frecuencia de la rejilla a lo largo del eje x y f_y es la frecuencia de la rejilla a lo largo del eje y y se calculan como

$$f_{x,y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial x, \partial y}. \quad (5.28)$$

Para encontrar el primer coeficiente de la función de fase, el cual está relacionado con los parámetros paraxiales, debemos trazar el rayo a través de la superficie difractiva, y para ello debemos encontrar la frecuencia f_y . El análisis se hará solo en una dimensión aprovechando la simetría de revolución de la fase, por lo tanto la frecuencia de la rejilla para la función de fase que define la ecuación (2.53) se calcula como

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} 2a_2 y \right) = \frac{2a_2 y}{\lambda_0}$$
(5.29)

La ecuación de la rejilla se transforma cuando el objeto esta en el infinito como

$$n' \text{sen}(u') - n \text{sen}(u) = m \lambda f_{x,y}.$$
(5.30)

Recordando que el ángulo u y u' se miden con respecto al eje óptico. Además recordemos que el $\text{sen}(u) = 0$ y la ecuación (5.30) se transforma en

$$n' \text{sen}(u') = m \lambda f_{x,y}.$$
(5.31)

Desde el punto de vista paraxial la $\tan(u') \approx \text{sen}(u') \approx u'$, por lo tanto

$$n' \text{sen}(u') \approx u' \approx \lambda f_y.$$
(5.32)

De la figura (5.24), podemos ver

$$u' = -\frac{y}{f}.$$
(5.33)

Sustituyendo la ecuación (5.33) y (5.29) en la ecuación (5.32) y considerando el primer orden de difracción tenemos que a_2 se calcula como

$$a_2 = -\frac{1}{2f} \quad (5.34)$$

El resultado encontrado esta de acuerdo con la ecuación (2.54). Para encontrar los siguientes coeficientes se prosigue de una manera similar.

De la figura (5.24), podemos ver que el

$$\text{sen}(u') = -\frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}}. \quad (5.35)$$

La frecuencia de la fase usando los primeros dos coeficientes se calcula como

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda_0} (2a_2 y + 4a_4 y^3) \quad (5.36)$$

$$f_y = \frac{1}{\lambda_0} (2a_2 y + 4a_4 y^3)$$

Sustituyendo la ecuación (5.34) en la ecuación (5.36), tenemos que la frecuencia se calcula de la siguiente manera

$$f_y = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{y}{f} + 4a_4 y^3 \right) \quad (5.37)$$

Nuevamente sustituyendo las ecuaciones (5.37) y (5.35) en la ecuación (5.31), tenemos que a_4 se puede calcular como

$$a_4 = \frac{-\frac{y}{\sqrt{l^2 + y^2}} + \frac{y}{f}}{4y^3} \quad (5.38)$$

De la ecuación anterior podemos ver que el coeficiente a_4 , se puede calcular si conocemos la distancia imagen ideal l , la altura del rayo y en la segunda superficie y la distancia focal efectiva de la superficie difractiva.

Para el caso cuando se tiene un objeto a una distancia finita, se realiza un trazo de rayos exacto por la primera superficie, para conocer la altura a la que llega el rayo en la segunda superficie y su ángulo de incidencia.

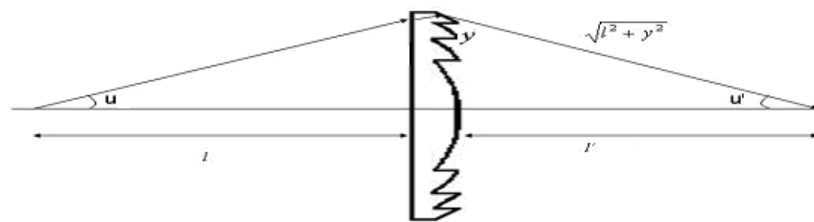


Figura (5.26). Superficie difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto a una distancia finita.

Encontrar los otros coeficientes $a_{2(i+1)}$ de la función de fase, se reduce a trazar los rayos en diferentes posiciones en la pupila de entrada. Considerando que la función de fase de la superficie difractiva, ecuación (2.53), al igual que con las superficies esféricas necesita tantos coeficientes como ceros queramos tener en la aberración transversal del rayo, para esto la ecuación (5.38) se transforma en un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & b_{51} & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & b_{52} & b_{n2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} & b_{53} & b_{n3} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} & b_{54} & b_{n4} \\ b_{15} & b_{25} & b_{35} & b_{45} & b_{55} & b_{n5} \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & b_{4n} & b_{5n} & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2f} \\ a_4 \\ a_6 \\ a_8 \\ a_{10} \\ a_{2n} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Los coeficientes $c_{1,2,3,n}$ son la diferencia entre el ángulo de incidencia y el ángulo de difracción de la superficie difractiva $n'\text{sen}(u') - n\text{sen}(u)$ para cada posición en la pupila de entrada, $a_{2,4,6,2n}$ son los coeficientes de la función de fase y $b_{11,n1,1n,nn}$ son las derivadas de las diferentes alturas del rayo en la segunda superficie y_2 a las diferentes potencias $2y, 4y^3, 6y^5, 8y^7, 10y^9, \dots$

5.2.1.1 Ejemplos

En los siguientes ejemplos mostraremos el procedimiento para diseñar superficies difractivas sobre un sustrato plano con el objeto a una distancia finita y con el objeto en el infinito usando la metodología propuesta. En todos los ejemplos se considero solo el primer orden de difracción.

5.2.1.1.1 Lente Difractivo con el Objeto a Una Distancia Finita

Mostramos los parámetros paraxiales de una lente difractiva $f/0.5$, que esta sobre una placa de caras plano paralelas, con el objeto a una distancia finita y distancia focal de 100 mm, en la tabla (5.8).

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		200		Aire
2	∞	2	100	BK7
3	*	∞	100	Aire

Tabla (5.8). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva, con el objeto a una distancia finita (El * nos indica la superficie sobre la cual estará grabada la superficie difractiva).

Para hacer el diseño exacto de la superficie difractiva debemos trazar rayos por diferentes posiciones en la pupila de entrada hasta la última superficie. En este ejemplo solo trazamos cuatro rayos, este procedimiento se muestra en la tabla (5.9).

Parámetros del trazo de rayos	Posiciones en la pupila normalizadas			
	1	0.88	0.7	0.45
M_0	0.447214	0.402739	0.33035	0.219512
N_0	0.894427	0.915315	0.943858	0.97561
Y_1	100	88	70	45
Z_1	0	0	0	0
M_1	0.29484	0.265519	0.217794	0.144721
N_1	0.955547	0.964106	0.975995	0.989473
Y_2	100.617113	88.550808	70.446302	46.268645

Tabla (5.9). Parámetros del Trazo de rayos por una superficie difractiva, con el objeto a una distancia finita.

Sustituyendo las coordenadas de la tabla (5.8) en la ecuación (5.39) y calculando la diferencia entre los ángulos de incidencia y difracción, recordando que el ángulo de difracción es el ideal, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
-0.898975 &= -\frac{100.617113}{100} + 4a_4(100.617113)^3 + 6a_6(100.617113)^5 + \\
&\quad 8a_8(100.617113)^7 + 10a_{10}(100.617113)^9 \\
-0.809799 &= -\frac{100.617113}{100} + 4a_4(88.550808)^3 + 6a_6(88.550808)^5 + \\
&\quad 8a_8(88.550808)^7 + 10a_{10}(88.550808)^9 \\
-0.664508 &= -\frac{100.617113}{100} + 4a_4(70.446302)^3 + 6a_6(70.446302)^5 + \\
&\quad 8a_8(70.446302)^7 + 10a_{10}(70.446302)^9 \\
-0.450799 &= -\frac{100.617113}{100} + 4a_4(46.268645)^3 + 6a_6(46.268645)^5 + \\
&\quad 8a_8(46.268645)^7 + 10a_{10}(46.268645)^9
\end{aligned}$$

Las soluciones son $a_2 = -0.005$, $a_4 = 3.119433 \times 10^{-8}$, $a_6 = -3.871919 \times 10^{-13}$, $a_8 = 5.649823 \times 10^{-18}$ y $a_{10} = -6.31412 \times 10^{-23}$. En la figura (5.27), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la superficie difractiva de este ejemplo, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a los lugares seleccionados.

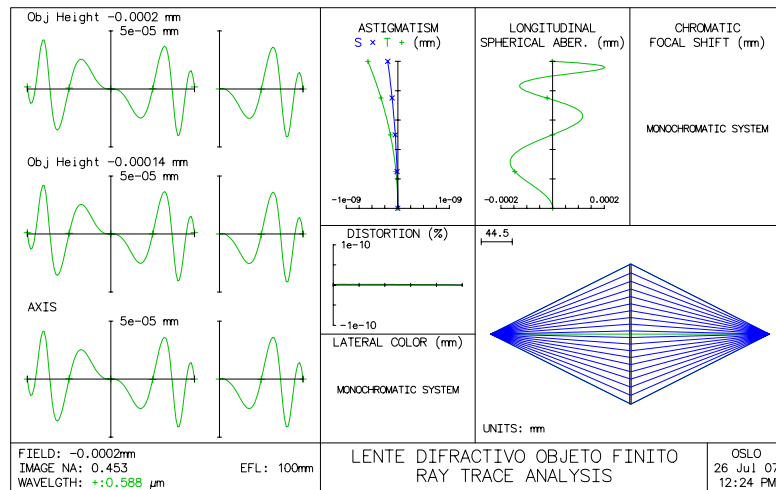


Figura (5.27). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva, con el objeto a una distancia finita.

5.2.1.1.2 Lente Difractivo con el Objeto en el Infinito

Mostramos los parámetros paraxiales de una superficie difractiva $f/1$, que esta sobre una placa de caras plano paralelas, con el objeto en el infinito y distancia focal de 100 mm., en la tabla (5.10).

Superficie	Radio de curvatura	de	Espesor	Semidiámetro	Material
1			∞		Aire
2	∞		2	50	BK7
3	*	∞	100	50	Aire

Tabla (5.10). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva, con el objeto en el infinito.

Para este ejemplo se usaron cuatro coeficientes de la fase, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección se muestra en la siguiente tabla.

Coeficientes	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	paraxial	-0.005
a_4	1	1.249885×10^{-07}
a_6	0.88	$-6.221648 \times 10^{-12}$
a_8	0.7	3.644607×10^{-16}
a_{10}	0.45	$-1.639236 \times 10^{-20}$

Tabla (5.11). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente difractiva, con el objeto en el infinito.

En la figura (5.28), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la superficie difractiva de este ejemplo, como se puede ver hay

De la figura (5.30), podemos ver que los cósenos directores del rayo difractado se pueden calcular con ayuda de las siguientes ecuaciones

$$M_2 = \frac{Y_2}{D_2} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{d_2 - Z_2}{D_2}, \quad (5.44)$$

y D_2 se calcula como

$$D_2 = \sqrt{Y_2^2 + (d_2 - Z_2)^2}. \quad (5.45)$$

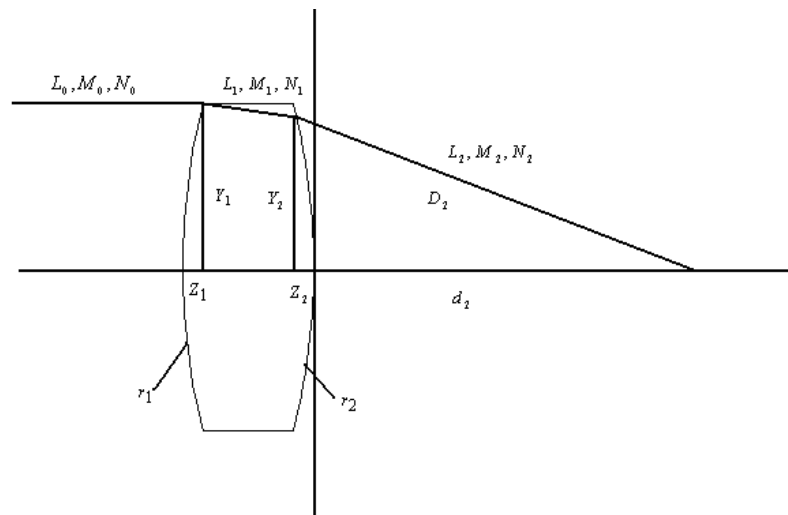


Figura (5.30). Superficie difractiva sobre la segunda superficie de una lente convencional.

El $\text{sen } \theta_r$ y $\text{cos } \theta_r$ de la superficie sobre la cual estará grabada la superficie difractiva, de manera general calculada como

$$\text{sen } \theta_r, \text{cos } \theta_r = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)}{\left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.46)$$

Donde F es la función que define la superficie.

Para cuando la superficie difractiva esta sobre una superficie cónica tenemos

$$\operatorname{sen} \theta_r = \frac{-Y_2}{r_2 \left(1 - \frac{2k_2 Z_2}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{y} \quad \cos \theta_r = \frac{1 - \frac{Z_2(k_2 + 1)}{r_2}}{\left(1 - \frac{2k_2 Z_2}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (5.47)$$

donde k_2 es la constante de conicidad de la segunda superficie.

Para el caso cuando la superficie difractiva esta sobre una superficie esférica tenemos

$$\operatorname{sen} \theta_r = \frac{-Y_2}{r_2} \quad \text{y} \quad \cos \theta_r = \frac{-Z_2}{r_2} + 1. \quad (5.48)$$

La ecuación (5.28), se puede reescribir en una sumatoria considerando el primer orden de difracción como

$$f_y = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_{2k} y^{2k-1} \right], \quad (5.49)$$

donde k es un entero 1,2,3,4,... que depende el número de coeficientes a utilizar. Por lo tanto la ecuación (5.43), se puede reescribir de la siguiente manera

$$[(n'M_2 - nM_1) \cos \theta_r + (nN_1 - n'N_2) \operatorname{sen} \theta_r] = \cos \theta_r \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ky^{2k-1} a_{2k} \right]. \quad (5.50)$$

Usando las ecuaciones (5.46), (5.50) y trazando n rayos por el sistema óptico en diferentes posiciones en la pupila de entrada, podemos corregir la aberración esférica de todo el sistema. Una manera más fácil de resolver todas las ecuaciones es reescribir la ecuación (5.50) en forma matricial de $k \times k$ elementos.

Con la ecuación (5.51), encontramos los coeficientes $a_{2(k+1)}$, tantos como rayos tracemos por el sistema o puntos de corrección necesitemos.

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1k} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & w_{2k} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \cdots & w_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{k1} & w_{k2} & w_{k3} & \cdots & w_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{l}{2f} \\ a_4 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

donde w representa las constantes de la derecha y los términos A representan las constantes del lado izquierdo de la ecuación (5.50), para diferentes alturas en la segunda superficie.

5.2.2.1 Ejemplos

En los siguientes ejemplos mostraremos el procedimiento para diseñar superficies difractivas sobre un sustrato esférico o cónico, con el objeto a una distancia finita y con el objeto en el infinito usando la metodología propuesta. En todos los ejemplos se considero solo el primer orden de difracción.

5.2.2.1.1 Lente Difractivo Sobre un Sustrato Esférico con el Objeto a una distancia finita

Mostramos los parámetros paraxiales de una lente difractiva $f/1.01$, que esta sobre una lente biconvexa, con el objeto a una distancia finita y

distancia focal de 50.689 mm, la tabla (5.12), muestra los parámetros de primer orden de este ejemplo.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		200		Aire
2	101.954	8.137	25	BK7
3	*	-101.954	25	Aire

Tabla (5.12). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva grabada sobre un sustrato esférico.

Para este ejemplo se usaron cuatro coeficientes de la fase, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección se muestra en la siguiente tabla.

Coefficientes	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	paraxial	-0.005
a_4	1	1.194486×10^{-06}
a_6	0.88	$-1.687750 \times 10^{-10}$
a_8	0.7	3.654734×10^{-14}
a_{10}	0.4597	$-6.165158 \times 10^{-18}$

Tabla (5.13). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente difractiva sobre un sustrato esférico.

En la figura (5.31), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la superficie difractiva de este ejemplo, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a los lugares seleccionados.

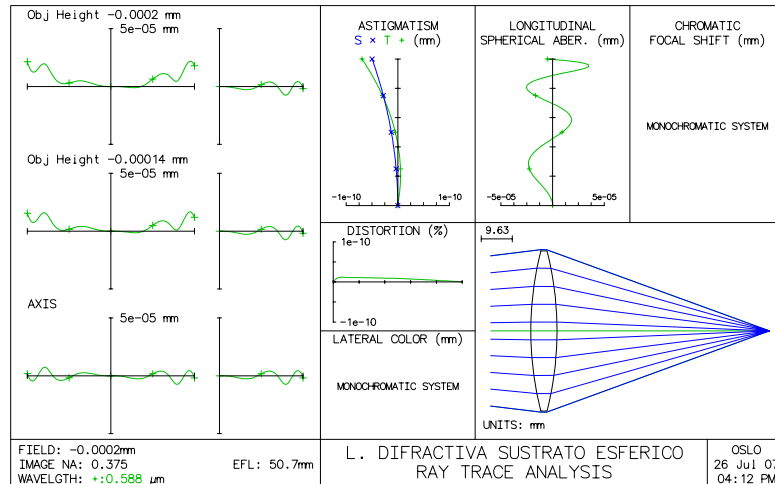


Figura (5.31). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva garbada sobre un sustrato esférico.

5.2.2.1.1 Lente Difractivo Sobre un Sustrato Cónico con el Objeto a una distancia finita

Mostramos los parámetros paraxiales de una superficie difractiva $f/1$, que esta sobre una superficie cónica ($K_2 = -4.653$), con el objeto a una distancia finita, y distancia focal de 100 mm., en la tabla (5.14).

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		200		Aire
2	121.256	33.587	50	BK-7
3	* CC	-88.440	178.258	50 Aire

Tabla (5.14). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva garbada sobre un sustrato cónico.

Para este ejemplo se usaron cuatro coeficientes de la fase, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección se muestra en la siguiente tabla.

Coefficientes	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	paraxial	-0.000246
a_4	1	$-1.313801 \times 10^{-07}$
a_6	0.88	5.812602×10^{-11}
a_8	0.7	$-1.017128 \times 10^{-14}$
a_{10}	0.4597	8.513772×10^{-19}

Tabla (5.15). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una superficie difractiva grabada sobre un sustrato cónico.

En la figura (5.32), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente difractiva de este ejemplo, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a los lugares seleccionados.

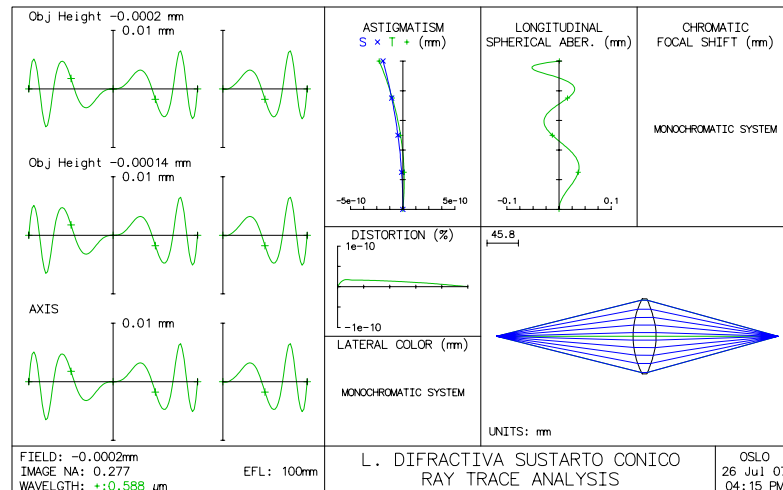


Figura (5.32). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva grabada sobre un sustrato cónico.

5.3 CONCLUSIONES

Se explicó el procedimiento mediante el cual proponemos diseñar sistemas libres de aberración esférica. Esto lo conseguimos cambiando la última superficie del sistema por una superficie asférica o por grabar en ella una superficie difractiva. El método presentado es sencillo, exacto y no necesita de una rutina de optimización posterior. El valor de los coeficientes de asfericidad o de difracción de la fase, es calculado trazando rayos por el sistema y resolviendo un sistema de ecuaciones de primer grado. Con estos métodos podemos decidir el número y la localización de los puntos de corrección en la pupila de entrada, sin importar la posición del objeto y la imagen, el número- f o el número de superficies del sistema.

Para las superficies asféricas o difractivas la corrección de la aberración depende del número de coeficientes que utilicemos. En todos los ejemplos presentados la corrección de la aberración esférica se hizo hasta tener sistemas limitados por difracción.

También explicamos como hacer la simulación de ronchigramas para espejos asféricos polinomiales, usando el trazo de rayos exacto. Los resultados presentados nos muestran que las diferencias entre una cónica ideal y un asférica polinomial bien corregida, no se pueden notar en un solo espejo, si el periodo de la rejilla es más grande que la aberración esférica residual, por lo tanto, es necesario usar otra prueba o una rejilla con una periodo del orden de la aberración esférica residual, pero al hacer esto la difracción nos impedirá ver el ronchigrama.

Cabe mencionar que algunas de estas simulaciones son físicamente imposibles de realizar debido al problema de difracción, sin embargo las simulaciones nos mostraron que a diferencia de una cónica ideal donde las franjas son rectas y paralelas con cualquier periodo en la rejilla, en las

superficies esféricas se nota que las franjas toman formas caprichosas cuando el periodo de la rejilla se acerca a la cantidad de aberración esférica residual si la rejilla esta localizada en el foco, cuando la rejilla se aleja del foco los ronchigramas de ambas superficies son prácticamente iguales.

CAPÍTULO 6

DISEÑO DE LENTES HÍBRIDAS APLANÁTICAS

6.1 INTRODUCCIÓN

La combinación de elementos refractivos y difractivos (lentes híbridas) pueden reducir significativamente la aberración cromática [20][21]. Kleinhans [61] y Welford [62] demostraron que la coma para placas zonales, lentes de Fresnel y hologramas puede corregirse al curvar el segundo plano principal.

Abbe [63] dice que una lente corregida de aberración esférica estará libre de coma (lente aplanática) cerca del centro del campo si las ampliificaciones marginal y paraxial son iguales, ecuación (6.1)

$$m = M , \tag{6.1}$$

o

$$\frac{u}{u'} = \frac{\text{Sin}U}{\text{Sin}U'} , \tag{6.2}$$

donde u y u' son los ángulos de incidencia y refracción del rayo paraxial, U y U' son los ángulos de incidencia y refracción del rayo marginal. La ecuación (6.2) es conocida como la Condición del Seno de Abbe.

Para un objeto que esta en el infinito Kingslake [63], demostró que la condición del seno se reduce a la ecuación (6.3)

$$F' = f' , \tag{6.3}$$

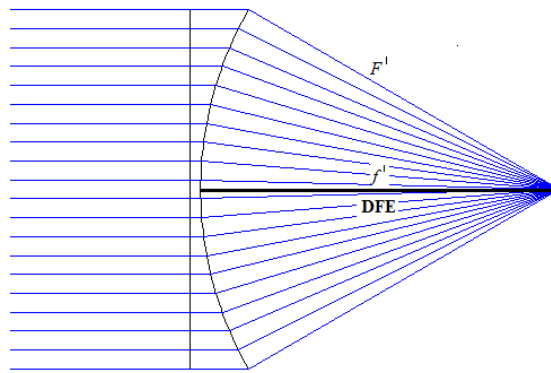


Figura (6.2). Lente híbrida con $F' = f'$.

La corrección de la aberración esférica la haremos usando una lente difractiva grabada en la segunda superficie de la lente refractiva, el procedimiento utilizado es el mismo que se explico en el capítulo anterior, solo cambia la manera de calcular al coeficiente a_2 , este ahora se calculara como

$$a_2 = -\frac{n}{2f_T}, \quad (6.4)$$

donde n es el índice de refracción de la lente refractiva y f_T es la distancia focal efectiva de la lente híbrida.

6.2.1 Ejemplos

En los siguientes ejemplos mostraremos el procedimiento para diseñar lentes híbridas aplanáticas, usando superficies esféricas y superficies difractivas, con el objeto a una distancia finita y con el objeto en el infinito, utilizando la metodología propuesta. En todos los ejemplos se considero solo el primer orden de difracción.

6.2.1.1 Lente Híbrida Aplanática con el Objeto en el Infinito

Diseñamos una lente híbrida $f/1$, con 100 mm de distancia focal efectiva y un ángulo de campo de 1° . Los parámetros paraxiales se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		1×10^{20}		Aire
2	∞	3	50	BK-7
3	*	100	50	Aire

Tabla (6.1). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.

Para este ejemplo se usaron cuatro coeficientes de la fase, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la aberración esférica se muestra en la tabla (6.2).

Coefficientes difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	-0.007584
a_4	1	$-1.895476 \times 10^{-07}$
a_6	0.88	$-9.606272 \times 10^{-12}$
a_8	0.7	$-4.865876 \times 10^{-16}$
a_{10}	0.45	$-7.670514 \times 10^{-20}$

Tabla (6.2). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida con el objeto en el infinito.

En la figura (6.3), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente híbrida de este ejemplo, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila de entrada donde la aberración esférica es cero,

estas corresponden a los lugares seleccionados, pero además la gráfica para los objetos fuera de eje es una recta, y eso nos dicen que esta lente híbrida no tiene coma, por que la gráfica característica de la coma es una parábola.

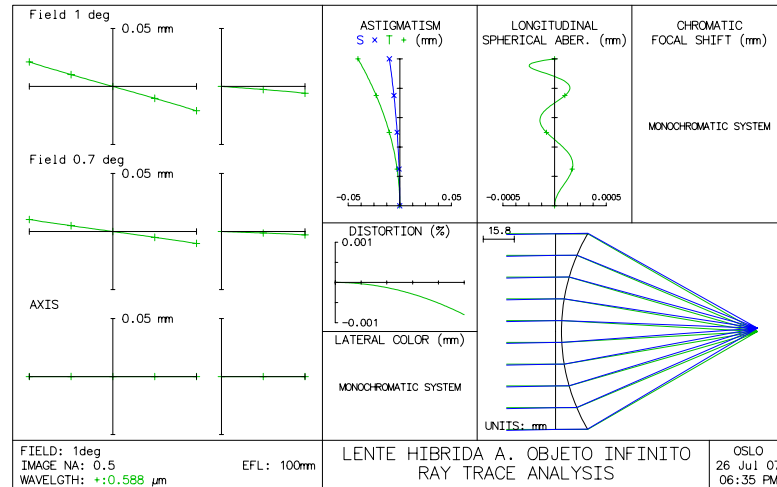


Figura (6.3). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.

6.2.1.2 Lente Híbrida Aplanática con el Objeto a una Distancia Finita

Para diseñar estas lentes es necesario grabar una superficie difractiva en cada una de las superficies de la lente, asegurando que el radio de curvatura de cada una corresponda con la distancia objeto e imagen del sistema respectivamente.

Para mostrar la metodología propuesta diseñamos una lente híbrida $f/0.41$, con 41.82 mm de distancia focal efectiva, con el objeto a 100 mm de la primera superficie y un ángulo de campo de 1° . Los parámetros paraxiales se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		100		Aire
2	100	4	50	BK-7
3	*	70	50	Aire

Tabla (6.3). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.

Para este ejemplo se usaron seis coeficientes de la fase, en cada una de las superficies, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la aberración esférica se muestran en las tablas (6.4) y (6.5). Debemos mencionar que el diseño de cada superficie se hizo por separado, considerándolas como una lente cóncavo-plana para la primera superficie y una lente plano-cóncava para la segunda, finalmente las unimos por su cara plana.

Coeficientes difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	-0.007584
a_4	1	-1.895976×10^{-7}
a_6	0.92	$-9.487491 \times 10^{-12}$
a_8	0.88	$-5.826830 \times 10^{-16}$
a_{10}	0.8	$-4.819902 \times 10^{-20}$
a_{12}	0.7	$-6.325205 \times 10^{-25}$
a_{14}	0.45	$-6.835863 \times 10^{-28}$

Tabla (6.4). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida, primera superficie.

Coeficientes difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	- 0.010834
a_4	1	-5.508956×10^{-7}
a_6	0.92	$-6.216594 \times 10^{-11}$
a_8	0.88	1.572569×10^{-16}
a_{10}	0.8	$-5.846995 \times 10^{-18}$
a_{12}	0.7	1.486627×10^{-21}
a_{14}	0.45	$-2.722713 \times 10^{-25}$

Tabla (6.5). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida, segunda superficie.

En la figura (6.4), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente híbrida de este ejemplo, como se puede ver hay seis posiciones en la pupila donde la aberración esférica es cero, y estas corresponden a los lugares seleccionados, pero además la gráfica para los objetos fuera de eje es una recta, y eso nos dicen que esta lente híbrida no tiene coma, ya que la gráfica característica de la coma es una parábola.

Esta propuesta tiene las siguientes desventajas: la forma de la lente esta comprometida con la posición del objeto y de la imagen, ambas superficies deben tener una lente difractiva grabada sobre ellas si el objeto esta a una distancia finita, asegurando que los rayos dentro de la lente sean paralelos al eje óptico, esto hace que las potencias de las lentes refractivas y difractivas también estén comprometidas, por lo tanto no permiten la corrección de la aberración cromática. En la siguiente sección presentamos otra propuesta para diseñar lentes híbridas aplanáticas.

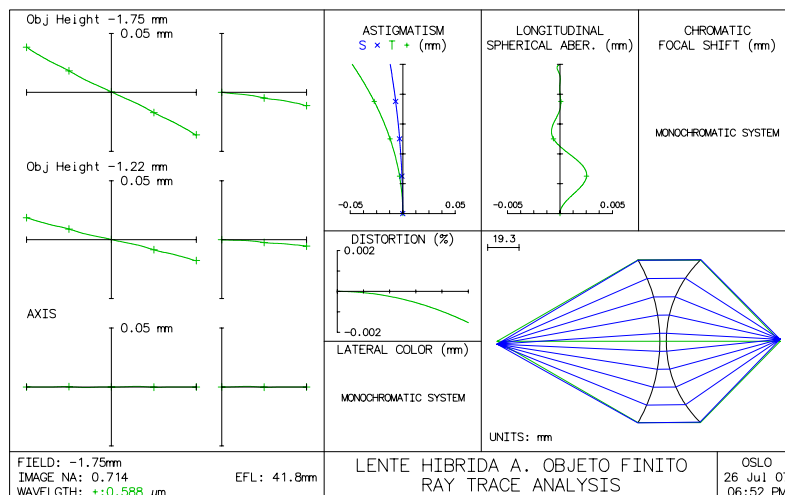


Figura (6.4). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática con el objeto a una distancia finita.

6.3 SUPERFICIES ASFÉRICAS Y SUPERFICIES DIFRACTIVAS

La ecuación (6.3), nos dice que la coma esta corregida, si la segunda superficie principal es una esfera centrada en el punto imagen axial, para cuando el objeto esta en el infinito. Partiendo de esto proponemos encontrar otra forma de la lente que nos permita curvar el segundo plano principal, pero que además podamos corregir la aberración cromática, la aberración esférica y mantener la distancia focal efectiva.

La figura (6.5), nos muestra la forma que toma el segundo plano principal con diferentes factores de forma (B). En todas las gráficas, la línea roja representa la superficie principal ideal y la línea azul representa la superficie principal real. Es fácil identificar que en la gráfica del factor de forma para la coma de tercer orden igual a cero [64], la superficie principal real y la ideal son del mismo signo con una pequeña diferencia entre ambas, pero no es la ideal. La menor diferencia entre las superficies principales se encuentra con un factor de forma igual a 0.734. Para factores de forma igual a cero o mayores las superficies principales son de signo contrario, por lo tanto son malas soluciones. Las gráficas se

obtuvieron considerando ambas superficies esféricas y sin superficies difractivas, el material considerado fue BK7.

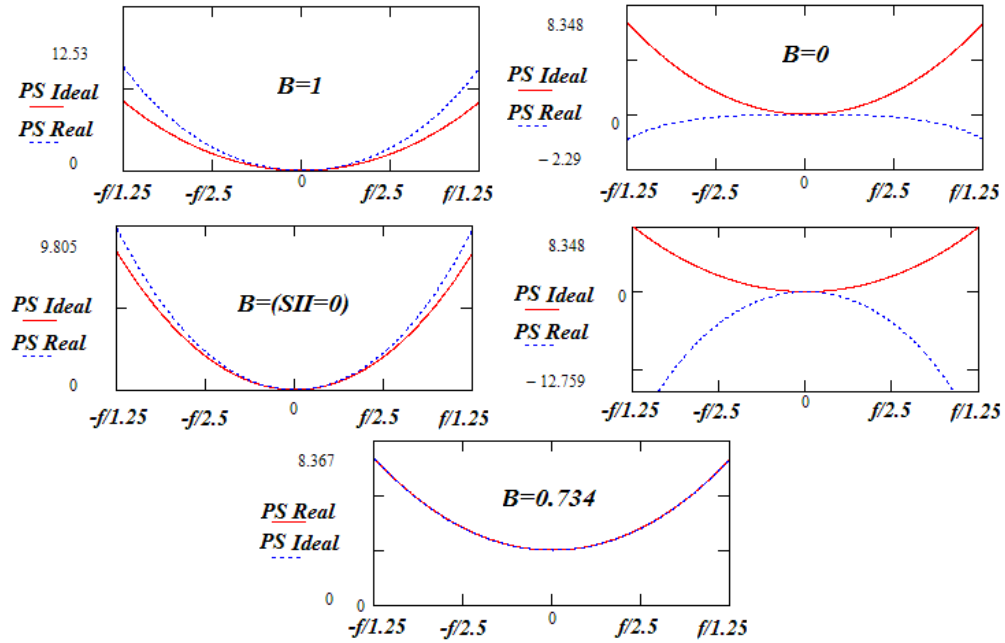


Figura (6.5). Comparación entre el plano principal real e ideal para diferentes factores de forma.

En la figura (6.6), mostramos las diferencias entre las superficies principales para la mejor solución del factor de forma. En este caso las superficies principales se sobrepone en tres diferentes alturas de la pupila de entrada.

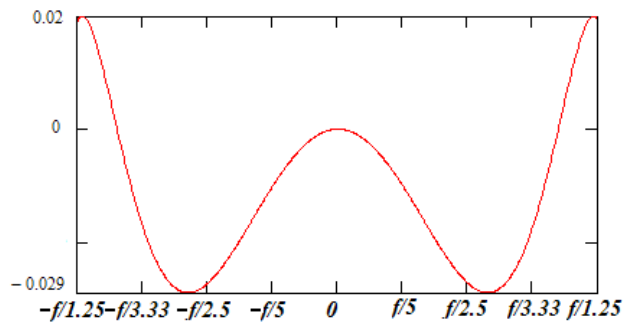


Figura (6.6).Diferencias entre las superficies principales para el mejor factor de forma.

El siguiente paso fue considerar que la superficie difractiva estaba ya grabada sobre la segunda superficie de la lente, por lo tanto la lente híbrida no tiene aberración esférica. Nosotros calculamos la distancia focal efectiva de la parte refractiva y difractiva [21]

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(V_1 - V_2)f_T}{V_1} \\ f_2 &= \frac{(V_2 - V_1)f_T}{V_2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde f_T es la distancia focal efectiva total de la lente híbrida V_1 y V_2 son los números de Abbe de la parte refractiva y difractiva, para la parte difractiva $V_2 = -3.453$ [21].

No debemos olvidar que la ecuación (6.5), es para lentes delgadas y corrigen solo la aberración cromática de primer orden. Engrosamos la parte refractiva con el método propuesto por Kingslake [65], al insertarles espesor a las lentes delgadas la f_2 debe recalcularse para mantener la distancia focal efectiva de la lente híbrida constante

$$f_2 = \frac{1 - \frac{d_1(n-1)}{nr_1}}{\frac{1}{f_T} - \frac{1}{f_1}}, \quad (6.6)$$

n es el índice de refracción de la parte refractiva, r_1 es el radio de curvatura de la primer superficie refractiva y d_1 es el espesor central de la parte refractiva.

Usando gráficas como las de la figura (6.6), encontramos el mejor factor de forma de la parte refractiva para números- f mayor a $f/3.333$. La figura (6.7), muestra los resultados obtenidos.

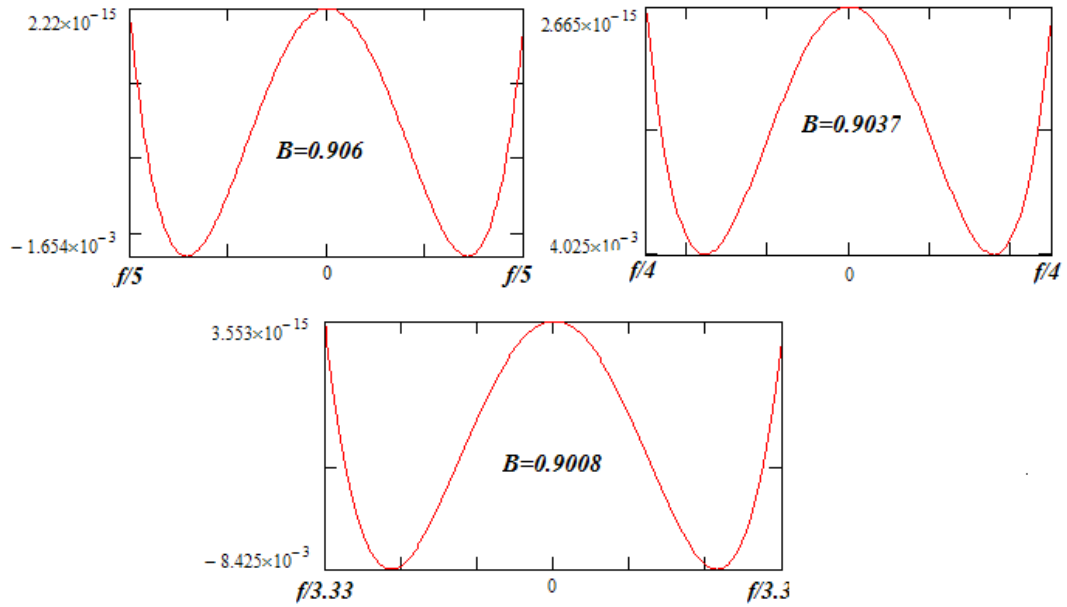


Figura (6.7). Los mejores factores de forma para números- f mayores a $f/3.33$.

A manera de conclusión decimos que el uso de superficies esféricas solo funciona para números- f mayor a $f/3.333$, pero se debe seleccionar un factor de forma de la lente refractiva para iniciar el proceso de asferización. De la figura (6.8), podemos ver que

$$\tan U = \frac{Y_2}{dfp - Z_2} = \frac{Y_1}{dfe - Z_{pp'}}, \quad (6.7)$$

$Z_{pp'}$ es la sagita de la superficie principal, dfe es la distancia focal efectiva de la lente híbrida, dfp es la distancia focal posterior de la lente híbrida, Y_1 es la altura del rayo en la primer superficie, Y_2 y Z_2 son las coordenadas del rayo en la segunda superficie.

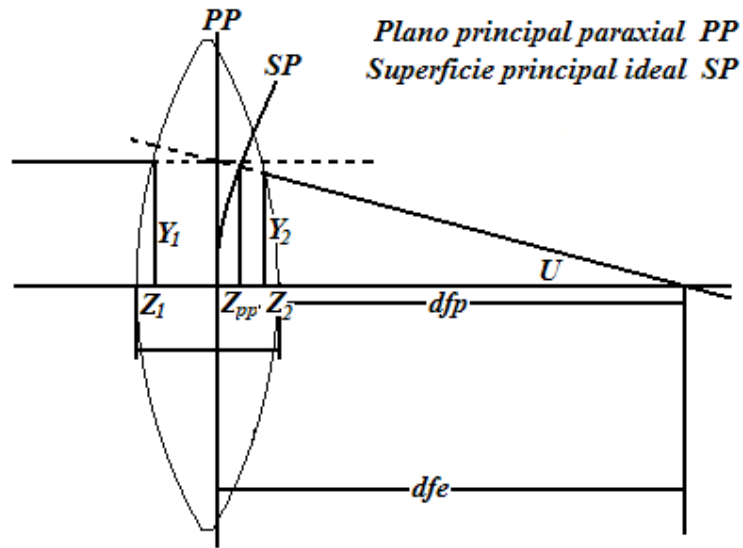


Figura (6.8). Diagrama para la corrección de la coma.

Sustituyendo la ecuación (5.3) en la ecuación (6.7)

$$\frac{Y_1 + D_1 M_1}{dfp - Z_1 + d_1 - N_1 D_1} = \frac{Y_1}{dfe - Z_{pp'}}, \quad (6.8)$$

donde D_1 es la distancia medida a lo largo del rayo marginal entre las superficies. Resolviendo la ecuación (6.8), para D_1

$$D_1 = \frac{Y_1 (dfp - Z_1 + d_1 - dfe + Z_{pp'})}{M_1 (dfe - Z_{pp'}) + Y_1 N_1}. \quad (6.9)$$

Con la ecuación (6.9) y la ecuación (5.3), podemos calcular las coordenadas de la superficie que harán que la superficie principal tenga una forma esférica centrada en el punto imagen axial, para corregir a la coma.

Sustituyendo las coordenadas en la ecuación (5.12), podemos calcular los coeficientes de asfericidad de la segunda superficie. El número de

coeficientes dependerá de la corrección requerida. El proceso final es calcular los coeficientes de la fase de la lente difractiva que corrigen la aberración esférica como en el capítulo anterior y con esto obtendremos una lente híbrida aplanática acromática.

6.3.1 Ejemplos

En los siguientes ejemplos mostramos el procedimiento para diseñar lentes híbridas aplanáticas acromáticas, usando superficies esféricas, asféricas y difractivas, con el objeto en el infinito y con la metodología propuesta. En los ejemplos se considero solo el primer orden de difracción.

6.3.1.1 Lente Híbrida Aplanática con el Objeto en el Infinito

Como primer ejemplo diseñamos una lente híbrida $f/5$, con 100 mm de distancia focal efectiva y un ángulo de campo de 1° . Para este ejemplo solo se usaron superficies esféricas, considerando el mejor factor de forma, figura (6.7). Los parámetros paraxiales se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		1×10^{20}		Aire
2	57.1	2.924	10	BK-7
3	*	-1157.802	10	Aire

Tabla (6.6). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/5$ con el objeto en el infinito, usando solo superficies esféricas.

Para este ejemplo se usaron dos coeficientes de la fase, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la aberración esférica se muestra en la tabla (6.7).

Coeficientes difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	-0.0002598
a_4	1	2.614697×10^{-7}
a_6	0.77	$-1.241729 \times 10^{-11}$

Tabla (6.7). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/5$, con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

En la figura (6.9), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente híbrida de este ejemplo, como se puede ver hay dos posiciones en la pupila de entrada donde la aberración esférica es cero, estas corresponden a los lugares seleccionados, pero además la gráfica para los objetos fuera de eje es una recta, y eso nos dice que esta lente híbrida no tiene coma, por que la gráfica característica de la coma es una parábola. Cabe mencionar que no fue necesario usar superficies esféricas. El círculo negro nos muestra el diámetro del disco de Airy.

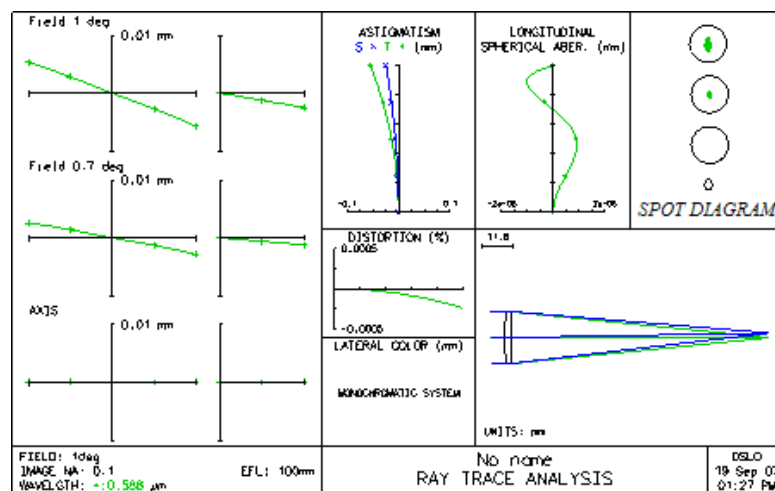


Figura (6.9). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/5$ con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

El segundo ejemplo es una lente híbrida $f/3.33$, con 100 mm de distancia focal efectiva y un ángulo de campo de 0.5° . Para este ejemplo solo se usaron superficies esféricas considerando el mejor factor de forma, figura (6.7). Los parámetros paraxiales se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		1×10^{20}		Aire
2	57.234	4.100	15	BK-7
3	*	-1096.682	15	Aire

Tabla (6.8). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/3.33$ con el objeto en el infinito, usando solo superficies esféricas.

Para este ejemplo se usaron dos coeficientes de la fase, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la aberración esférica se muestra en la tabla (6.9).

Coefficientes Difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	-0.0002617
a_4	1	2.680062×10^{-7}
a_6	0.7	$-1.292264 \times 10^{-11}$

Tabla (6.9). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/3.33$ con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

En la figura (6.10), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente híbrida del segundo ejemplo, como se puede ver hay dos posiciones en la pupila de entrada donde la aberración esférica es cero, estas corresponden a los lugares seleccionados, pero además la

gráfica para los objetos fuera de eje se aproxima a una recta, y eso nos dicen que esta lente híbrida no tiene coma, por que la gráfica característica de la coma es una parábola. Cabe mencionar que no fue necesario usar superficies esféricas. El círculo negro nos muestra el diámetro del disco de Airy.

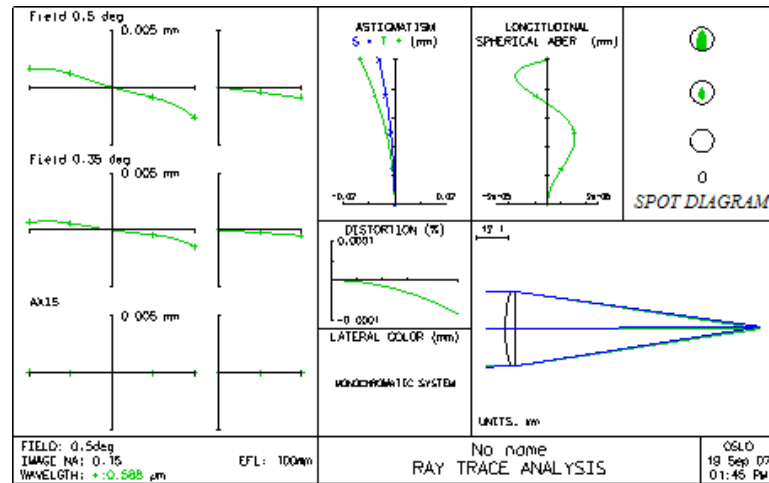


Figura (6.10). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/3.33$ con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

El tercer ejemplo es una lente híbrida $f/2.5$, con 100 mm de distancia focal efectiva y un ángulo de campo de 0.5° . Para este ejemplo se usaron superficies esféricas, considerando el mejor factor de forma ($B=0.903$). Los parámetros paraxiales se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		1×10^{20}		Aire
2	57.141	5.786	20	BK-7
3	* SA	-1121.036	20	Aire

Tabla (6.10). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/2.5$ con el objeto en el infinito, usando superficies esféricas.

Para este ejemplo se usaron tres coeficientes esféricos, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la coma se muestra en la tabla (6.11).

Coeficientes de asfericidad	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	1	3.957247×10^{-6}
a_4	0.88	-2.033981×10^{-8}
a_6	0.7	2.294896×10^{-11}

Tabla (6.11). Valor calculado de los coeficientes de asfericidad y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2.5$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

Además se usaron cuatro coeficientes difractivos, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la aberración esférica se muestra en la tabla (6.12).

Coeficientes difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	-0.000264
a_4	1	-1.767534×10^{-6}
a_6	0.88	1.041541×10^{-8}
a_8	0.7	$-1.141164 \times 10^{-11}$
a_{10}	0.45	$-5.205028 \times 10^{-16}$

Tabla (6.12). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2.5$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

En la figura (6.11), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente híbrida del tercer ejemplo, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila de entrada donde la aberración esférica es cero, estas corresponden a los lugares seleccionados, pero además la gráfica para los objetos fuera de eje se aproxima a una recta, y eso nos dice que esta lente híbrida no tiene coma, por que la gráfica característica de la coma es una parábola. El círculo negro nos muestra el diámetro del disco de Airy.

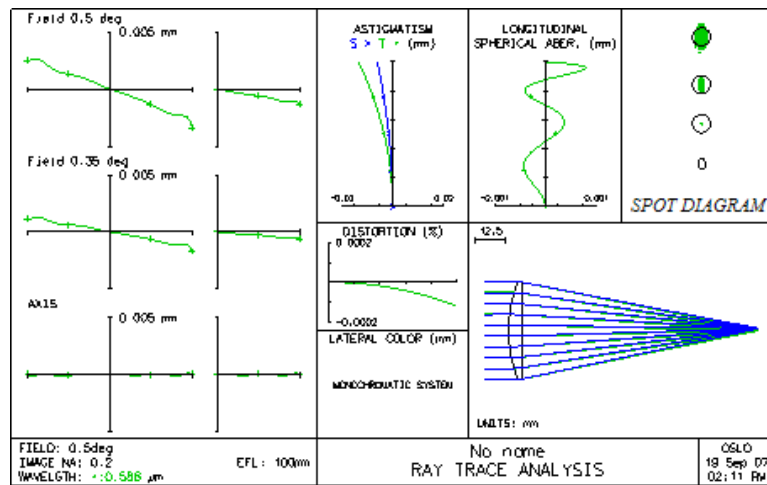


Figura (6.11). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/2.5$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

El tercer ejemplo es una lente híbrida $f/2$, con 100 mm de distancia focal efectiva y un ángulo de campo de 0.5° . Para este ejemplo se usaron superficies esféricas, considerando el mejor factor de forma ($B=0.885$). Los parámetros paraxiales se muestran en la siguiente tabla.

Superficie	Radio de curvatura	Espesor	Semidiámetro	Material
1		1×10^{20}		Aire
2	57.626	8.018	25	BK-7
3	* SA	-944.572	25	Aire

Tabla (6.13). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/2$ con el objeto en el infinito, usando superficies asféricas.

Para este ejemplo se usaron cuatro coeficientes esféricos, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la coma se muestra en la tabla (6.14).

Coefficientes de asfericidad	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	1	7.868×10^{-6}
a_4	0.94	-3.175621×10^{-8}
a_6	0.88	4.531858×10^{-11}
a_8	0.7	$-2.391451 \times 10^{-14}$

Tabla (6.14). Valor calculado de los coeficientes de asfericidad y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

Además se usaron cinco coeficientes difractivos, su valor y la posición en la pupila de entrada donde se hizo la corrección de la aberración esférica se muestra en la tabla (6.15).

Coeficientes difractivos	Posición en la pupila de entrada normalizadas	Valor
a_2	Paraxial	-0.0002680
a_4	1	-3.778726×10^{-6}
a_6	0.94	1.6234×10^{-8}
a_8	0.88	$-2.272113 \times 10^{-11}$
a_{10}	0.7	1.13448×10^{-14}
a_{12}	0.45	5.319782×10^{-19}

Tabla (6.15). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

En la figura (6.12), mostramos la gráfica de la aberración transversal del rayo para la lente híbrida del tercer ejemplo, como se puede ver hay cuatro posiciones en la pupila de entrada donde la aberración esférica es cero, estas corresponden a los lugares seleccionados, pero además la gráfica para los objetos fuera de eje se aproxima a una recta, y eso nos dice que esta lente híbrida no tiene coma, por que la gráfica característica de la coma es una parábola. El círculo negro nos muestra el diámetro del disco de Airy.

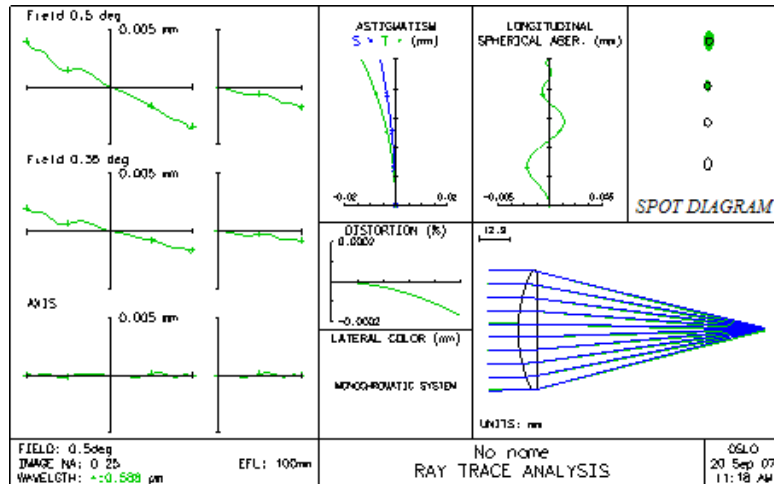


Figura (6.12). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/2$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

En todos los casos, tenemos una corrección adicional de aberraciones. Las aberraciones corregidas son la aberración cromática lateral y la distorsión debido a que ambas aberraciones dependen de la amplificación y la condición del seno se basa en igualar las amplificaciones paraxial y marginal. En la figura (6.13), mostramos el porcentaje de distorsión y la gráfica de la aberración cromática lateral para un ángulo de campo de 10° .

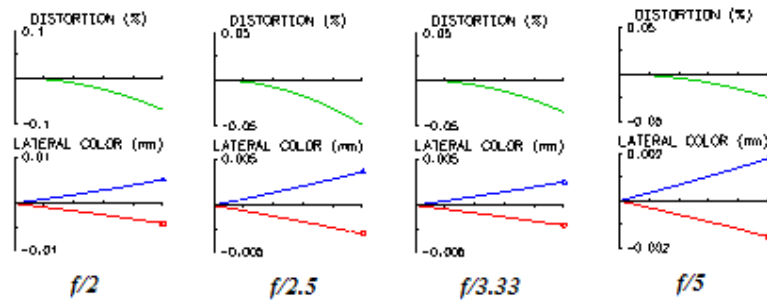


Figura (6.13). Gráficas de la aberración cromática lateral y el porcentaje de la distorsión para todos los ejemplos.

6.4 CONCLUSIONES

Presentamos diferentes métodos para diseñar sistemas híbridos aplanáticos, en la primera parte, mostramos un método que usaba solo superficies esféricas y difractivas para lograr el objetivo. Este método muestra las siguientes desventajas: la forma de la lente esta comprometida con la posición del objeto y de la imagen, ambas superficies deben tener una lente difractiva grabada sobre ellas si el objeto esta a una distancia finita, asegurando que los rayos dentro de la lente sean paralelos al eje óptico, esto hace que las potencias de las lentes refractivas y difractivas también estén comprometidas, por lo tanto no permiten la corrección de la aberración cromática.

El segundo método nos permite corregir además de la aberración esférica y la coma la aberración cromática, encontrando los mejores factores de forma para los ejemplos presentados, estos aseguraban que las diferencias entre los planos principales reales e ideales fueran mínimas, además de que nos indicaban que no era necesario emplear superficies asféricas para curvar el segundo plano principal si el número- f del sistema es mayor a $f/3.333$. Para sistemas con números- f menor a $f/3.333$, presentamos las ecuaciones para curvar el segundo plano principal usando superficies asféricas. Los puntos de corrección dependen solo de la corrección que queramos y del número- f del sistema. Las coordenadas de la superficie que curva el plano principal se encuentran, resolviendo una ecuación lineal y los coeficientes de asfericidad se calculan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Todos los ejemplos solo presentan curvatura de campo y astigmatismo, por lo tanto, los sistemas son aplanáticos. Adicionalmente ya que el método iguala la amplificación marginal y paraxial, la aberración cromática lateral y la distorsión también están corregidas.

Los métodos no requieren un proceso de optimización posterior, pero debemos recordar que la corrección de la aberración cromática axial solo se hizo a primer orden.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

Definimos la aberración esférica del rayo y del frente de onda, a partir de esta encontramos las expresiones analíticas para calcularla a tercer orden en superficies esféricas, asféricas, planas, refractivas, reflectivas y lentes delgadas. Explicamos de manera general la función de fase de la superficie difractiva y como calcular los coeficientes de esta para corregir la aberración esférica de tercer orden.

Se analizaron los métodos de mínimos cuadrados y mínimos cuadrados amortiguados. Se mostró que sus deficiencias al trabajar con funciones no lineales se deben al hecho de no incluir derivadas de orden superior. Estos métodos necesitan un punto inicial para buscar el óptimo, lo cual conduce irremediablemente a óptimos locales y a una fuerte dependencia del punto inicial.

Se explicó en que consisten los algoritmos genéticos y como funcionan sus rutinas mas importantes. Se indicaron las ventajas que estos algoritmos tienen sobre los métodos tradicionales de optimización. Se planteó el teorema fundamental de los algoritmos genéticos, en el cual se indica por que estos algoritmos funcionan con un paralelismo implícito. Finalmente, se ilustró el funcionamiento de los algoritmos genéticos buscando el óptimo de una función con múltiples máximos y mínimos, encontrándose efectivamente el óptimo global en el intervalo establecido.

Se explicaron las ventajas y desventajas de todos los métodos analíticos encontrados en la literatura para corregir la aberración esférica con superficies esféricas, asféricas y difractivas de manera analítica y exacta, desde una sola superficie y combinaciones de dos superficies. Algunos de estos métodos sacrifican los grados de libertad del diseño para lograrlo, en otros se condiciona la posición del objeto, la forma de la lente o los

puntos de corrección no son suficientes para el número- f del sistema. En general estos métodos pueden tener aplicación en casos muy particulares, pero no se encontró un método en el cual no existieran restricciones. El último método presentado utiliza superficies esféricas polinomiales y demuestran que es posible tener una superficie al final del sistema que corrija la aberración esférica, sin embargo, no explica el método de ajuste para esa superficie o del número de coeficientes esféricos que se debe usar para esto, además explica algunas maneras diferentes de hacer la integral que aparece en sus ecuaciones pero, ninguna de ellas de manera concreta.

Se explicó el procedimiento para diseñar sistemas libres de aberración esférica. Esto lo conseguimos cambiando la última superficie del sistema por una superficie esférica polinomial o por grabar en ella una superficie difractiva. El método presentado es sencillo, exacto y no necesita de una rutina de optimización posterior. El valor de los coeficientes de asfericidad o de difracción de la fase se calcula trazando el rayo por el sistema y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales de primer grado. Con estos métodos podemos decidir el número y la localización de los puntos de corrección en la pupila de entrada, sin importar la posición del objeto y la imagen, el número- f o el número de superficies del sistema.

Para las superficies esféricas o difractivas la corrección de la aberración esférica depende del número de coeficientes que utilizemos. En todos los ejemplos presentados la corrección de la aberración esférica se hizo hasta tener sistemas limitados por difracción.

Explicamos como hacer la simulación de ronchigramas para espejos esféricos polinomiales, usando el trazo de rayos exacto. Los resultados presentados nos muestran que las diferencias entre una cónica ideal y un esférico polinomial bien corregida, no se pueden notar en un solo espejo, si el periodo de la rejilla es más grande que la aberración esférica

residual, por lo tanto, es necesario usar otra prueba o una rejilla con un periodo del orden de la aberración esférica residual, pero al hacer esto la difracción nos impedirá ver el ronchigrama.

Cabe mencionar que algunas de estas simulaciones son físicamente imposibles de realizar debido a la difracción, sin embargo las simulaciones nos mostraron que a diferencia de una cónica ideal donde las franjas son rectas y paralelas con cualquier periodo en la rejilla, en las superficies esféricas se nota que las franjas toman formas caprichosas cuando el periodo de la rejilla se acerca a la cantidad de aberración esférica residual si la rejilla esta localizada en el foco, cuando la rejilla se aleja del foco los ronchigramas de ambas superficies son prácticamente iguales.

Presentamos también diferentes métodos para diseñar sistemas híbridos aplanáticos, primero mostramos un método que usaba solo superficies esféricas y difractivas, con el cual lográbamos el objetivo. Este método presenta las siguientes desventajas: la forma de la lente esta comprometida con la posición del objeto y de la imagen, ambas superficies deben tener una lente difractiva grabada sobre ellas si el objeto esta a una distancia finita, para asegurar que los rayos dentro de la lente sean paralelos al eje óptico, esto hace que las potencias de las lentes refractivas y difractivas también estén comprometidas, por lo tanto, el método propuesto no permite la corrección de la aberración cromática. Sin embargo todos los ejemplos que presentamos están limitados por difracción para los objetos sobre eje y para los objetos fuera de eje las aberraciones dominantes son la curvatura de campo y el astigmatismo, lo cual nos habla de que son sistemas aplanáticos.

El otro método nos permite corregir además de la aberración esférica y la coma a la aberración cromática, debido a que encontramos los mejores factores de forma para los ejemplos presentados, estos aseguraban que

las diferencias entre los planos principales reales e ideales fueran mínimas, además, nos indicaban que no era necesario emplear superficies esféricas para curvar el segundo plano principal si el número- f del sistema es mayor a $f/3.333$. Para sistemas con números- f menor a $f/3.333$, presentamos las ecuaciones para curvar el segundo plano principal usando superficies esféricas. Los puntos de corrección dependen solo de la corrección que queramos y del número- f del sistema. Las coordenadas de la superficie que curva el plano principal se encuentran resolviendo una ecuación lineal y los coeficientes de esféricidad se calculan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

Los ejemplos presentados para este método, solo presentan curvatura de campo y astigmatismo, por lo tanto, los sistemas son aplanáticos. Adicionalmente, ya que el método iguala la amplificación marginal y paraxial, la aberración cromática lateral y la distorsión también están corregidas con estos métodos.

Los métodos para diseñar lentes híbridas aplanáticas, no requieren un proceso de optimización posterior, pero debemos recordar que la corrección de la aberración cromática axial, solo se hizo a primer orden.

APÉNDICE 1

PROGRAMA PARA LA SIMULACIÓN DE RONCHIGRAMAS DE ESPEJOS ASFÉRICOS POLINOMIALES

```
#include <graphics.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <stdarg.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
#include "gtext.cpp"

void grafica (void);

double X0,Y0,n0=1,n1=-1,k1,K1,i,h,R,r,num,L,l,CC;
double
D0,L0,M0,N0,F1,G1,DELTA1,Y1,X1,Z1,M1,N1,L1,COSI1,COSII1;
int x,j,respuesta1;
double AUX,D,X2,Y2,aux1,M,e,aux2,YP,X3,Y3,AUX1;
double
z,alfa,beta,gama,a[15],aux4,aux5,aux6,aux7,aux8,aux9,z1,x1,y1,z2,x2,y2;
double alfa1,beta1,gama1,za,zb,aux10,g,xa,ya,zx,suma,aux12;
char resp='s';
float d,aux3;
void main(void)
{
while(tolower(resp)!='s')
{
clrscr();
```

```

grafica ();
getch();
closegraph();

printf("\n\nQuieres simular otro Ronchigrama:(s/n)\n\n");
resp=getche();;
clrscr();

}

}

void grafica (void)
{

int gdriver = DETECT, gmode, errorcode;
initgraph(&gdriver, &gmode, "");
errorcode = graphresult();
if (errorcode != grOk)
{
printf("Graphics error: %s\n", grapherrormsg(errorcode));
printf("Press any key to halt:");
getch();
exit(1);
}

printf("\n\nCual es el radio de curvatura del espejo(mm)\t");
scanf("%lf",&r);
printf("\n\nCual es el semidiametro del espejo(mm)\t");
scanf("%lf",&D);

```

```

printf("\n\nLineas por pulgada de la rejilla\t");
scanf("%lf",&num);
printf("\n\nDistancia del espejo a la fuente(mm)\t");
scanf("%lf",&L);
printf("\n\nDistancia del espejo a la rejilla(mm)\t");
scanf("%lf",&l);
printf("\n\nConstante de conicidad del espejo\t");
scanf("%lf",&CC);
for(x=1; x<=10; x++)
{
printf("\nCoeficiente a(%d)= ",x);
scanf("%lf",&g);
a[x]=g;
suma+=a[x];
}
printf("\n\n 1 Para Rejilla Lineal");
printf("\n\n 2 Para Rejilla Circular");
printf("\n\n 3 Para Rejilla Cuadrada");
printf("\n\n Escriba 1 , 2 o 3\t");
scanf("%d",&respuesta1);
if (suma==0)
{
AUX1=D/0.264;
bar(0,0,630,478);
setcolor(0);
//circle((315),(239),AUX1);
floodfill(315,239,0);
AUX=D/AUX1;
aux2=(AUX1/(2*D));

for(i=-D;i<=D;i=i+(AUX))
{

```

```

for(h=-D;h<=D;h=h+(AUX))
    {
    R=sqrt((pow(i,2))+pow(h,2));
    if (R<=D)
        {

        xa=i;
        ya=h;
        zx((((1/-r)*((pow(D,2))))/(1+sqrt(1-(pow((1/-
r),2))*(CC+1)*(pow(D,2))))));
        D0=(sqrt(pow(xa,2)+pow(ya,2)+pow((-L-zx),2)));

        N0=-(-L-zx)/D0;
        M0=ya/D0;
        L0=xa/D0;

        X0=xa+(L0/N0)*(-zx);
        Y0=ya+(M0/N0)*(-zx);

        F1=(1/-r)*(pow(X0,2)+pow(Y0,2));
        G1=N0-((1/-r)*((L0*X0)+(M0*Y0)));
        DELTA1=F1/(G1+sqrt(pow(G1,2)-((1/-
r)*F1*(1+(CC*(pow(N0,2)))))));
        X1=X0+(L0*DELTA1);
        Y1=Y0+(M0*DELTA1);
        Z1=N0*DELTA1;

        aux12=1-((1/-r)*(CC+1)*Z1);
        COSI1=(N0-((1/-
r)*((L0*X1)+(M0*Y1)+(N0*Z1*(CC+1)))))/sqrt((pow(((1/-
r)*X1),2))+pow(((1/-r)*Y1),2))+pow(aux12,2));
        COSII1=-COSI1;

```



```

k1=COSI1-(n0*COSI1);
K1=(1/-r)*k1;

```

```

L1=L0-((K1*X1)/sqrt((pow(((1/-
r)*X1),2))+pow(((1/r)*Y1),2))+pow(aux12,2)))));

```

```

M1=M0-((K1*Y1)/sqrt((pow(((1/-
r)*X1),2))+pow(((1/r)*Y1),2))+pow(aux12,2)))));

```

```

N1=N0-((K1*Z1*(CC+1))-k1)/sqrt((pow(((1/-r)*X1),2))+pow(((1/-
r)*Y1),2))+pow(aux12,2));

```

```

X2=X1+(L1/N1)*(-I-Z1);

```

```

Y2=Y1+(M1/N1)*(-I-Z1);

```

```

switch (respuesta1)

```

```

{

```

```

case 1 :

```

```

d=((25.4)/num)/2;

```

```

aux3=(d/2);

```

```

M=floor((Y2+aux3)/d);

```

```

aux1=floor(M/2);

```

```

e=aux1-(M/2);

```

```

if(e==0)

```

```

{

```

```

X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);

```

```

Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);

```

```

putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);

```

```

}

```

```

break;

```

```

case 2 :

```

```

YP=sqrt(pow(X2,2)+pow(Y2,2));

```

```

d=((25.4)/num)/2;

```

```

aux3=d/2;
M=floor((YP+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);
putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
}
break;

```

case 3 :

```

d=((25.4)/num)/2;
aux3=d/2;
M=floor((Y2+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);
putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
}

```

```

M=floor((X2+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);

```

```

        putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
    }
    break;
}

}

}

}

}

}

if(suma!=0)
{
    AUX1=D/0.264;
    bar(0,0,630,478);
    setcolor(0);
    //circle((315),(239),AUX1);
    floodfill(315,239,0);
    AUX=D/AUX1;
    aux2=(AUX1/(2*D));
    for(i=-D;i<=D;i=i+(AUX))
    {
        for(h=-D;h<=D;h=h+(AUX))
        {
            R=sqrt((pow(i,2))+pow(h,2));
            if (R<=D)
            {
                xa=i;
                ya=h;
                zx=(((1/-r)*((pow(D,2))))/(1+sqrt(1-(pow((1/-
r),2))*(CC+1)*(pow(D,2)))))+(a[1]*pow((pow(D,2)),2)+(a[2]*pow((pow(D,2)
),3)+(a[3]*pow((pow(D,2)),4)+(a[4]*pow((pow(D,2)),5)+(a[5]*pow((pow(D

```

$$,2)),6))+(a[6]*\text{pow}(\text{pow}(D,2),7))+a[7]*\text{pow}(\text{pow}(D,2),8))+a[8]*\text{pow}(\text{pow}(D,2),9))+a[9]*\text{pow}(\text{pow}(D,2),10))+a[10]*\text{pow}(\text{pow}(D,2),11));$$

$$D0=(\text{sqrt}(\text{pow}(xa,2)+\text{pow}(ya,2)+\text{pow}((-L-zx),2)));$$

$$N0=-(-L-zx)/D0;$$

$$M0=ya/D0;$$

$$L0=xa/D0;$$

$$X0=xa+(L0/N0)*(-zx);$$

$$Y0=ya+(M0/N0)*(-zx);$$

$$z=\left(\frac{(1/r)*(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2))}{1+\text{sqrt}(1-(\text{pow}((1/r),2))*(CC+1)*(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2)))}\right)+a[1]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),2))+a[2]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),3))+a[3]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),4))+a[4]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),5))+a[5]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),6))+a[6]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),7))+a[7]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),8))+a[8]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),9))+a[9]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),10))+a[10]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),11);$$

$$\begin{aligned} \text{aux4} &= X0/\text{sqrt}(\text{pow}(r,2)-(CC+1)*(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2)))- \\ & (4*a[1]*X0*(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2)))- \\ & (6*X0*a[2]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),2))- \\ & (8*X0*a[3]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),3))- \\ & (10*X0*a[4]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),4))- \\ & (12*X0*a[5]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),5))- \\ & (14*X0*a[6]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),6))- \\ & (16*X0*a[7]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),7))- \\ & (18*X0*a[8]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),8))- \\ & (20*X0*a[9]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),9))- \\ & (22*X0*a[10]*\text{pow}(\text{pow}(X0,2)+\text{pow}(Y0,2),10)); \end{aligned}$$

```

    aux5=Y0/sqrt(pow(r,2)-(CC+1)*(pow(X0,2)+pow(Y0,2)))-
(4*a[1]*Y0*(pow(X0,2)+pow(Y0,2)))-
(6*Y0*a[2]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),2))-
(8*Y0*a[3]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),3))-
(10*Y0*a[4]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),4))-
(12*Y0*a[5]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),5))-
(14*Y0*a[6]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),6))-
(16*Y0*a[7]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),7))-
(18*Y0*a[8]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),8))-
(20*Y0*a[9]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),9))-
(22*Y0*a[10]*pow((pow(X0,2)+pow(Y0,2)),10));

```

```

    aux6= sqrt((pow(aux4,2)+(pow(aux5,2))+1);

```

```

    alfa=aux4/aux6;

```

```

    beta=aux5/aux6;

```

```

    gama=1/aux6;

```

```

    za=(gama*N0*z)/((alfa*L0)+(beta*M0)+(gama*N0));

```

```

    x1=(L0/N0)*za+X0;

```

```

    y1=(M0/N0)*za+Y0;

```

```

    z1=(((1/-r)*((pow(x1,2)+pow(y1,2))))/(1+sqrt(1-(pow((1/-
r),2))*(CC+1)*(pow(x1,2)+pow(y1,2)))))+(a[1]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),
2)+(a[2]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),3)+(a[3]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),
4)+(a[4]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),5)+(a[5]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),
6)+(a[6]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),7)+(a[7]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),
8)+(a[8]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),9)+(a[9]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,
2)),10)+(a[10]*pow((pow(x1,2)+pow(y1,2)),11));

```

```

    j=0;

```

```

    for(j=0;j<3;j++)

```

```

    {

```

$$z1 = (((1/r) * ((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)))) / (1 + \text{sqrt}(1 - (\text{pow}((1/r), 2) * (CC + 1) * (\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)))))) + (a[1] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 2)) + (a[2] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 3)) + (a[3] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 4)) + (a[4] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 5)) + (a[5] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 6)) + (a[6] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 7)) + (a[7] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 8)) + (a[8] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 9)) + (a[9] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 10)) + (a[10] * \text{pow}((\text{pow}(x1,2) + \text{pow}(y1,2)), 11));$$

$$\begin{aligned} \text{aux7} = & x1 / \text{sqrt}(\text{pow}(-r, 2) - (CC + 1) * (\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2))) - \\ & (4 * a[1] * x1 * (\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2))) - \\ & (6 * x1 * a[2] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 2)) - \\ & (8 * x1 * a[3] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 3)) - \\ & (10 * x1 * a[4] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 4)) - \\ & (12 * x1 * a[5] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 5)) - \\ & (14 * x1 * a[6] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 6)) - \\ & (16 * x1 * a[7] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 7)) - \\ & (18 * x1 * a[8] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 8)) - \\ & (20 * x1 * a[9] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 9)) - \\ & (22 * x1 * a[10] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 10)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{aux8} = & y1 / \text{sqrt}(\text{pow}(-r, 2) - (CC + 1) * (\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2))) - \\ & (4 * a[1] * y1 * (\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2))) - \\ & (6 * y1 * a[2] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 2)) - \\ & (8 * y1 * a[3] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 3)) - \\ & (10 * y1 * a[4] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 4)) - \\ & (12 * y1 * a[5] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 5)) - \\ & (14 * y1 * a[6] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 6)) - \\ & (16 * y1 * a[7] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 7)) - \\ & (18 * y1 * a[8] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 8)) - \\ & (20 * y1 * a[9] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 9)) - \\ & (22 * y1 * a[10] * \text{pow}((\text{pow}(x1, 2) + \text{pow}(y1, 2)), 10)); \end{aligned}$$

$$\text{aux9} = \text{sqrt}((\text{pow}(\text{aux7}, 2)) + (\text{pow}(\text{aux8}, 2)) + 1);$$

$$\text{alfa1} = \text{aux7} / \text{aux9};$$

```

beta1=aux8/aux9;
gama1=1/aux9;
aux10=((alfa1*L0)+(beta1*M0)+(gama1*N0));
zb=N0*((alfa1*(x1-X0))+(beta1*(y1-Y0))+(gama1*z1))/aux10;
x2=(L0/N0)*zb+X0;
y2=(M0/N0)*zb+Y0;
z2=(((1/-r)*((pow(x2,2)+pow(y2,2))))/(1+sqrt(1-(pow((1/-
r),2))*(CC+1)*(pow(x2,2)+pow(y2,2)))))+(a[1]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),
2)+(a[2]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),3)+(a[3]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),
4)+(a[4]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),5)+(a[5]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),
6)+(a[6]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),7)+(a[7]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),
8)+(a[8]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),9)+(a[9]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,
2)),10)+(a[10]*pow((pow(x2,2)+pow(y2,2)),11));

```

```

x1=x2;
y1=y2;
z2=z1;
}

```

```

X1=x1;
Y1=y1;
Z1=z2;
COSI1=((alfa1*L0)+(beta1*M0)+(gama1*N0));
COSII1=-sqrt(pow(n1,2)-pow(n0,2)+(pow(n0,2)*pow(COSI1,2)));
k1=(COSII1-(n0*COSI1));

```

```

L1=(L0+(k1*alfa1));
M1=(M0+(k1*beta1));
N1=(N0+(k1*gama1));

```

```

X2=X1+(L1/N1)*(-I-Z1);
Y2=Y1+(M1/N1)*(-I-Z1);

```

```

switch (respuesta1)
{
case 1 :
d=((25.4)/num)/2;
aux3=(d/2);
M=floor((Y2+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);
putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
}
break;

case 2 :
YP=sqrt(pow(X2,2)+pow(Y2,2));

d=((25.4)/num)/2;
aux3=d/2;
M=floor((YP+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);
putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
}
break;

```



```

case 3 :
d=((25.4)/num)/2;
aux3=d/2;
M=floor((Y2+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);
putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
}

M=floor((X2+aux3)/d);
aux1=floor(M/2);
e=aux1-(M/2);
if(e==0)
{
X3=X1+(L1/N1)*(zx-Z1);
Y3=Y1+(M1/N1)*(zx-Z1);
putpixel((315+ceil((Y3)*aux2)),(239-ceil((X3)*aux2)),0);
}
break;
}
}
}
}

```

APÉNDICE 2

TRABAJOS PRESENTADOS DURANTE LA REALIZACIÓN DE LA TESIS

J. Castro-Ramos, S. Vázquez-Montiel, J. Hernández-de-la-Cruz, O. García-Liévanos y W. Calleja-Arriaga, “*Óptica difractiva: una revisión al diseño y construcción de sistemas ópticos empleando lentes difractivas*”, Revista Mexicana de Física, Vol. 52(6), 479-500, Diciembre (2006).

O. Garcia-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, “*Free system of spherical and coma aberrations by use aspherical and diffractive surfaces*”, Proceso, RIAO Brasil (2007).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, “*Aplanatic hybrid lenses*”, Proc. SPIE, Vol. 6667, P. 66670K1-7, San Diego (2007).

O. Garcia-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, J.A. Hernández-Cruz, J. Castro-Ramos, “*Optical Design with Aspheric Surfaces and Exact Ray Tracing: An Analytic Method*”, Proc. SPIE, Vol. 6342, P. 63422H1-8, Canadá (2006).

J.A. Hernández-Cruz, S. Vázquez-Montiel, O. García-Liévanos, J. Castro-Ramos, “*Analytical and Exact Method for Design Diffractive Lenses Free of Spherical Aberration*”, Proc. SPIE, Vol. 6342, P. 63422J1-8, Canada (2006).

O. Garcia-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, “*Optical design of Galilean Telescopes using hybrid elements (refractive-diffractive) for people with low vision*”, Proc. SPIE, Vol. 5875, P. 58750R1-10, San Diego (2005).

O. Garcia-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, “*Telescopic system design using hybrid elements (refractive-diffractive) for people with visual weakness*”, Proc. SPIE, Vol. 5622(2), P. 784-789, Venezuela (2004).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, “*Relación analítica de los números Abbe en el diseño de dobletes acromáticos libres de aberración esférica y coma.*”, L CONGRESO NACIONAL DE FISICA, Proceso, OPTICA (2007).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, J.A. Hernández-Cruz, “*Simulación de ronchigramas para espejos asféricos.*”, XLIX CONGRESO NACIONAL DE FISICA / XIX REUNION ANNUAL AMO, DF-02, P. 1-8, OPTICA (2006).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, J.A. Hernández-Cruz, J. Castro-Ramos, “*Corrección de la aberración esférica a tercer orden usando dos superficies esféricas*”, XLIX CONGRESO NACIONAL DE FISICA / XIX REUNION ANNUAL AMO, DF-03, P. 1-5, OPTICA (2006).

J.A. Hernández-Cruz, S. Vázquez-Montiel, O. García-Liévanos, J. Castro-Ramos, “*Fabricación de una placa de fase cúbica.*”, XLIX CONGRESO NACIONAL DE FISICA / XIX REUNION ANNUAL AMO, DF-04, P. 1-9, OPTICA (2006).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, J.A. Hernández-Cruz, “*Replacing a Thin Ophthalmic Lens by Thick Ophthalmic Lens by Keeping the Shape Factor and the Vertex Power.*”, XLVIII CONGRESO NACIONAL DE FISICA / XVIII REUNION ANNUAL AMO, DF-04, P. 1-5, OPTICA (2005).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, J.A. Hernández-Cruz, “*Diseño de Lentes Libres de Aberración Esférica y Coma a Tercer Orden, con una Constante de Conicidad.*”, XLVIII CONGRESO NACIONAL DE FISICA / XVIII REUNION ANNUAL AMO, DF-01, P. 1-7, OPTICA (2005).

J.A. Hernández-Cruz, S. Vázquez-Montiel, O. García-Liévanos, “*Determinación de la profundidad de foco de los sistemas ópticos usando una*

placa de fase cúbica.”, XLVIII CONGRESO NACIONAL DE FISICA / XVIII REUNION ANNUAL AMO, DF-03, P. 1-9, OPTICA (2005).

O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, “*Diseño y construcción de superficies asféricas.*”, SEPTIMO ENCUENTRO DE INVESTIGACION INAOE, P. 49-52 (2006).

ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura (2.1). Aberración del frente de onda (W).
- Figura (2.2). Figura explicativa de la aberración esférica.
- Figura (2.3). Diagrama para conocer la aberración esférica de una superficie.
- Figura (2.4). Diagrama para conocer el invariante de refracción de una superficie.
- Figura (2.5). Superficie difractiva con (a) perfil continuo, (b) perfil multinivel y (c) perfil binario.
- Figura (2.6). Superficie difractiva que conecta un punto objeto (x_1, y_1, z_1) con un punto imagen (x_2, y_2, z_2) .
- Figura (3.1). Descripción de un algoritmo genético.
- Figura (3.2). Gráfica de la función $f(x) = x \cdot \text{sen}(10 \cdot \pi \cdot x) + 1$.
- Figura (3.3). Definición de la función *flip*.
- Figura (3.4). Subrutina para generar una población inicial.
- Figura (3.5). Subrutina para seleccionar cadenas con la rueda de la ruleta.
- Figura (3.6). Ejemplo del operador de cruza en un punto.
- Figura (3.7). Subrutina para implementar el operador de cruza en un punto.
- Figura (3.8). Función para generar números aleatorios.
- Figura (3.9). Subrutina para mutaciones en la población.
- Figura (4.1). Diagrama para conocer la aberración esférica de una superficie con un conjugado en el infinito.
- Figura (4.2). Gráfica de las soluciones para la aberración esférica a tercer orden ($n = 1.5168$).
- Figura (4.3). Gráficas de la diferencia de camino óptico (DCO) de una lente aplanática con incidencia normal en la segunda superficie.
- Figura (4.4). Diagrama esquemático para la diferencia de camino óptico, Kingslake [13].
- Figura (4.5). Gráfica de la DCO, propuesta de Kingslake [13].

Figura (4.6). Gráfica de la DCO, propuesta de la Tesis.

Figura (4.7). Diagrama esquemático para la diferencia de camino óptico, Chávez y Castro.

Figura (4.8). Gráfica de la DCO, propuesta de J. Castro y M.T. Chávez [15].

Figura (4.9). Gráficas de la DCO usando dos constantes de conicidad en las superficies refractoras.

Figura (4.10). Gráfica de la DCO, propuesta de J. Castro [5].

Figura (4.11). Gráficas de la DCO del telescopio con una constante de conicidad en cada espejo.

Figura (4.12). Lente difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto en el infinito.

Figura (4.13). Gráficas de la DCO para una lente difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto en el infinito.

Figura (5.1). Diagrama esquemático para la generalización del método.

Figura (5.2). Parámetros iniciales para diseñar un Telescopio Gregoriano.

Figura (5.3). DCO del telescopio sin coeficientes de asfericidad.

Figura (5.4). DCO del telescopio con un coeficiente de asfericidad.

Figura (5.5). DCO del telescopio con dos coeficientes de asfericidad.

Figura (5.6). DCO del telescopio con tres coeficientes de asfericidad.

Figura (5.7). DCO del telescopio con cuatro coeficientes de asfericidad.

Figura (5.8). PSF del telescopio con cuatro coeficientes de asfericidad (Razón de Strehl 0.9678).

Figura (5.9). DCO del telescopio con cinco coeficientes de asfericidad.

Figura (5.10). PSF del telescopio con cinco coeficientes de asfericidad (Razón de Strehl 0.999).

Figura (5.11). DCO del telescopio Cassegrain con trece coeficientes de asfericidad.

Figura (5.12). DCO de la lente $f/1$ con el objeto en posición finita.

Figura (5.13). DCO del doblete cementado $f/2$ con el objeto en el infinito.

Figura (5.14). Método iterativo para encontrar la intersección del rayo y la superficie esférica

Figura (5.15). Píxeles en la pupila de entrada.

Figura (5.16). Gráfica de la aberración transversal para espejo esférico corregido con un coeficiente.

Figura (5.17). Ronchigrama para espejo esférico corregido con un coeficiente.

Figura (5.18). Gráfica de la aberración transversal para espejo esférico corregido con dos coeficientes.

Figura (5.19). Ronchigrama para espejo esférico corregido con dos coeficientes.

Figura (5.20). Gráfica de la aberración transversal para espejo esférico corregido con cuatro coeficientes.

Figura (5.21). Ronchigrama para espejo esférico corregido con cuatro coeficientes.

Figura (5.22). Ronchigrama para espejo esférico corregido con cuatro coeficientes, con la rejilla dentro de foco.

Figura (5.23). Ronchigrama para espejo cónico ($k=-0.25$), con la rejilla dentro de foco.

Figura (5.24). Superficie difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto en el infinito.

Figura (5.25). Vista de frente de una superficie difractiva, con periodo variable.

Figura (5.26). Superficie difractiva sobre un sustrato plano, con el objeto a una distancia finita.

Figura (5.27). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva, con el objeto a una distancia finita.

Figura (5.28). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva, con el objeto en el infinito.

Figura (5.29). Lente difractiva sobre un sustrato curvo.

Figura (5.30). Superficie difractiva sobre la segunda superficie de una lente convencional.

Figura (5.31). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva garbada sobre un sustrato esférico.

Figura (5.32). Gráfica de la aberración transversal para la superficie difractiva grabada sobre un sustrato cónico.

Figura (6.1). Sistema aplanético.

Figura (6.2). Lente híbrida con $F' = f'$.

Figura (6.3). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.

Figura (6.4). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática con el objeto a una distancia finita.

Figura (6.5). Comparación entre el plano principal real e ideal para diferentes factores de forma.

Figura (6.6). Diferencias entre las superficies principales para el mejor factor de forma.

Figura (6.7). Los mejores factores de forma para números- f mayores a $f/3.33$.

Figura (6.8). Diagrama para la corrección de la coma.

Figura (6.9). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/5$ con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

Figura (6.10). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/3.33$ con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

Figura (6.11). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/2.5$ con el objeto en el infinito usando superficies asféricas.

Figura (6.12). Gráfica de la aberración transversal para la lente híbrida aplanática $f/2$ con el objeto en el infinito usando superficies asféricas.

Figura (6.13). Gráficas de la aberración cromática lateral y el porcentaje de la distorsión para todos los ejemplos.

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla (3.1). Resultado de 150 generaciones.

Tabla (4.1). Parámetros de primer orden, propuesta de Welford.

Tabla (4.2). Parámetros de primer orden, propuesta de Kingslake [13].

Tabla (4.3). Parámetros de primer orden, propuesta de Tesis.

Tabla (4.4). Parámetros de primer orden, propuesta de J. Castro y M.T. Chávez.

Tabla (4.5). Parámetros de primer orden usando dos constantes de conicidad en las superficies refractoras.

Tabla (4.6). Parámetros de primer orden, propuesta de J. Castro.

Tabla (4.7). Parámetros de primer orden, telescopio con una constante de conicidad en cada espejo.

Tabla (4.8). Valor de los coeficientes de la fase difractiva.

Tabla (5.1). Parámetros paraxiales del telescopio Gregoriano.

Tabla (5.2). Parámetros del trazo de rayos del Telescopio Gregoriano

Tabla (5.3). Coordenadas en la última superficie que corrigen la aberración esférica.

Tabla (5.4). Parámetros paraxiales del telescopio Cassegrain.

Tabla (5.5). Coeficientes calculados para corregir el telescopio Cassegrain.

Tabla (5.6). Coeficientes calculados para corregir la aberración esférica de la lente $f/1$.

Tabla (5.7). Coeficientes calculados para corregir la aberración esférica del doblete cementado $f/2$.

Tabla (5.8). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva, con el objeto a una distancia finita (El * nos indica la superficie sobre la cual estará grabada la superficie difractiva).

Tabla (5.9). Parámetros del Trazo de rayos por una superficie difractiva, con el objeto a una distancia finita.

Tabla (5.10). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva, con el objeto en el infinito.

Tabla (5.11). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente difractiva, con el objeto en el infinito.

Tabla (5.12). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva grabada sobre un sustrato esférico.

Tabla (5.13). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente difractiva sobre un sustrato esférico.

Tabla (5.14). Parámetros paraxiales de una superficie difractiva grabada sobre un sustrato cónico.

Tabla (5.15). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una superficie difractiva grabada sobre un sustrato cónico.

Tabla (6.1). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.

Tabla (6.2). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida con el objeto en el infinito.

Tabla (6.3). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática con el objeto en el infinito.

Tabla (6.4). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida, primera superficie.

Tabla (6.5). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida, segunda superficie.

Tabla (6.6). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/5$ con el objeto en el infinito, usando solo superficies esféricas.

Tabla (6.7). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/5$, con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

Tabla (6.8). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/3.33$ con el objeto en el infinito, usando solo superficies esféricas.

Tabla (6.9). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/3.33$ con el objeto en el infinito usando solo superficies esféricas.

Tabla (6.10). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/2.5$ con el objeto en el infinito, usando superficies esféricas.

Tabla (6.11). Valor calculado de los coeficientes de asfericidad y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2.5$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

Tabla (6.12). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2.5$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

Tabla (6.13). Parámetros paraxiales de una lente híbrida aplanática $f/2$ con el objeto en el infinito, usando superficies esféricas.

Tabla (6.14). Valor calculado de los coeficientes de asfericidad y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

Tabla (6.15). Valor calculado de los coeficientes de la fase y su posición en la pupila de entrada para una lente híbrida $f/2$ con el objeto en el infinito usando superficies esféricas.

BILBIOGRAFÍA

- [1] M. Schwertner, M.J. Booth, T. Tanaka, T Wilson and S. Kawata, “*Spherical aberration correction system using an adaptive optics deformable mirror*”, *Optics communications*, 263, 2, 147-151 (2006).
- [2] Roman Ilinsky, “*Gradient-index meniscus lens free of spherical aberration*”, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **2**, 449 - 451 (2000).
- [3] J. Upatnieks, A. Vander Lugt and E. Leith, “*Correction of lens aberrations by means of holograms*”, *Appl. Opt.*, **5**, 589 - 593 (1966).
- [4] O. García-Liévanos and S. Vázquez-Montiel, “*Optical Design of Galilean Telescopes using Hybrid Elements (refractive-diffractive) for people with low vision*”, *Proceedings of SPIE*, **58750R**, pp 1-10 (2005).
- [5] J. Castro-Ramos, A. Cordero-Davila, S. Vazquez-Montiel and D. Gale, “*Exact Design of Aplanatic Microscope Objectives, using two conic mirrors*”, *Appl. Opt.*, **37**, 5195-5198 (1998).
- [6] Milton Katz, “*Aspherical surfaces used to minimize oblique astigmatic error, power error, and distortion of some high positive and negative power ophthalmic lenses*”, *Appl. Opt.*, **21**, 2982-2991 (1982).
- [7] Wen-Shing Sun, Chuen-Lin Tien, Ching-Cherhg Sun, et al, “*Ophthalmic lens design with the optimization of the aspherical coefficients*”, *Opt. Eng.*, **39**, 978-988 (2000).
- [8] K. Bergman, N. Bonadeo, I. Brener and I. Chiang, “*Ultra-high capacity MEMS – based optical cross connects*” in *design, Test, Integration and Packaging of MEMS 2001*, Proc. SPIE 4408, pp. 2-5(2001).
- [9] W. Goltsos and M. Holz, “*Agile beams steering using binary optics microlens arrays*”, *Opt. Eng.* 29, pp. 1392-1397 (1990).
- [10] J. R. Leger, D. Chen, and G. Mowry, “*Design and performance of diffractive optics custom laser resonator*”, *Appl. Opt.* 34, pp. 2498-2505 (1995).
- [11] D. Malacara, “*Óptica Básica*”, Fondo de Cultura Economica, (México, Second Edition, 2004).
- [12] A. E. Conrady, “*Applied Optics and Optical Design*”, Part I, Pag. 75-79, Dover Publ., (New York, 1960).

- [13] R. Kingslake, *“Lens Design Fundamentals”*, (Academic Press, Inc. New York, USA, 1978), 112 -113 and 300-305.
- [14] E. Hecht, *“Optica”*, Addison Wesley Iberoamericana S.A., (Madrid, Third Edition, 2000).
- [15] M.T. Chavez, *“Aplanatismo en lentes gruesas con objeto lejano y cercano mediante superficies conicas”*, M.S. Thesis (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México, 2004)
- [16] Scott A. Lerner and Jose M. Sasian, *“Optical design with parametrically defined aspheric surface”*, *Appl. Opt.*, **39**, 5205-5213 (2000).
- [17] Akira Yabe, *“Optimal selection of aspheric surfaces in optical design”*, *Optics Express*, **13**, 7233-7242 (2005).
- [18] Joseph Meiron, *“On the design of optical systems containing aspheric surface”*, *J. O. S. A.*, **46**, 288-292 (1956).
- [19] Lambda Research Corporation, *“OSLO Optics Software for Layout and Optimization.”*, Optics Reference, Version 6.1, Littleton, MA, USA, 2001.
- [20] N. Davidson, A. A. Friesem, and E. Hasman, *“Analytic design of hybrid diffractive-refractive achromats”*, *Applied optics*, **32**, 25, pp. 4770 – 4774, 1993.
- [21] Thomas Stone and Nicholas George, *“Hybrid diffractive – refractive lenses and achromats”*, *Applied optics*, **27**, 2960 – 2971, 1988.
- [22] W. C., Sweatt, *“Describing holographic optical elements as lenses”*, *J.O.S.A.*, **67**, 6, pp. 803-808, 1977.
- [23] W. C., Sweatt, *“Mathematical equivalence between a holographic optical elements and ultra-high index lens”*, *J.O.S.A.*, **69**, 3, pp. 486-487, 1979.
- [24] Dele A. and G. Michael Morris, *“Design of diffractive singlets for monochromatic imaging”*, *Applied optics*, **30**, No. 16, 2151-2157, (1991).
- [25] J. Castro-Ramos, S. Vázquez-Montiel, J. Hernández-de-la-Cruz, O. García-Liévanos y W. Calleja-Arriaga, *“Óptica difractiva: una revisión al diseño y construcción de sistemas ópticos empleando lentes difractivas”*, *Revista Mexicana de Física*, **52**, 6, 479-500 (2006).
- [26] W. T. Welford, *“Aberrations of the symmetrical optical system”*, Academic Press Inc, London, Pag. 86, (1974).

- [27] W. T. Welford, *“Aberrations of the symmetrical optical system”*, Academic Press Inc, London, Pag. 112, (1974).
- [28] Michael. J. Kidger, *“Fundamental optical design”*, Spie Press Inc, Washington, Pag. 61, (2002).
- [29] S. Martellucci and A. N. Chester, *“Diffractive optics and optical Microsystems”*, Plenum press, New York, 24, (1997).
- [30] G. H. Spencer and M. V. R. K. Murty, *“General ray – tracing procedure”*, J.O.S.A., **52**, 672 – 678, June (1962).
- [31] Jary Turunen and Frank Wyrowski, *“Diffractive optics for industrial and commercial applications”*, Akademie Verlag, Berlin, 88, (1997).
- [32] W.B. King, *“A direct approach to the evaluation of the variance of the wave aberration”*, Appl. Opt., 7, 489-494, (1968).
- [33] Kathryn B. O’Brian, *“Automatic optical design of desired image distributions using orthogonal constraints”*, J. Opt. Soc. Am., 54, 1252-1255, (1964).
- [34] T. H. Jamieson, *“Optimization techniques in lens design”*, Adam Hilger, London, 33-50, (1971).
- [35] Michael J. Kidger, *“Use of the Levenberg-Marquardt (damped least squares) optimization method in lens design”*, Opt. Engineering, 32, 1731-1732, (1993).
- [36] W. T. Welford, *“Aberrations of the symmetrical optical system”*, Academic Press Inc, London, Cap. 11, Pag. 203-222, (1974).
- [37] Michael J. Kidger, *“Use of the Levenberg-Marquardt (damped least squares) optimization method in lens design”*, Opt. Engineering, 32, 1731-1732, (1993).
- [38] R. Gostick, *“Optimization methods in optical design”*, PhD Thesis, London University, (1974).
- [39] Howard Anton, *“Introducción al algebra lineal”*, Limusa, 343-359, (1998).
- [40] T. H. Jamieson, *“Optimization techniques in lens design”*, Adam Hilger, London, 14-15, (1971).

- [41] C. G. Wynne, “*Lens designing by electronic digital computer, I*”, Proc. Phys. Soc., 73, 777, (1959).
- [42] J. Meiron, “*Damped least squares method for automatic lens design*”, J. Opt. Soc. Am., 55, 1105, (1965).
- [43] T. H. Jamieson, “*Optimization techniques in lens design*”, Adam Hilger, London, 21-22, (1971).
- [44] Jhon Holland, “*Algoritmos genéticos*”, investigación y ciencia, septiembre, 34-45, (1992).
- [45] David E. Goldberg, “*Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*”, Addison-Wesley, 27-33, (1989).
- [46] Lawrence Davis, “*Handbook of genetic algorithms*”, Van Nostrand Reinhold, New Cork, 13-15, (1991).
- [47] Lawrence Davis, “*Handbook of genetic algorithms*”, Van Nostrand Reinhold, New Cork, 16-20, (1991).
- [48] W. T. Welford, “*Aberrations of the symmetrical optical system*”, Academic Press Inc, London, Pag. 139-142, (1974).
- [49] G. Smith and D.A. Atchison, “*The eye and visual instruments*”, Cambridge, New York, first edition, Pag. 120 (1997).
- [50] O. García-Liévanos, S. Vázquez-Montiel, J.A. Hernández-Cruz, J. Castro-Ramos, “*Corrección de la aberración esférica a tercer orden usando dos superficies esféricas.*”, XLIX Congreso Nacional de Física / XIX Reunion anual AMO, DF-03, p. 1-5, óptica (2006).
- [51] A. Cordero-Davila, S. Vazquez-Montiel, A. Cornejo-Rodriguez and O. Cordona-Nuñez, “*A relation between the conic constants of the two mirror telescope*”, Proc. SPIE, Vol. 1983, 159-160 (1993).
- [52] E. Wolf, “*On the designing of aspheric surfaces*”, Proc. Phys. Soc., 61, pp. 494 – 503, (1948).
- [53] Malacara D. and Z. Malacara. “*Handbook of lens design*”, Marcel Dekker Inc., New York, Second Edition, Chap. 14 (1994).
- [54] A. Cordero-Davila, E. Luna-Aguilar, S. Vasquez-Montiel, et. Al, “*Ronchi Test with Square Grid*”, Appl. Opt., 37, 672-675 (1998).

- [55] D. Malacara, “*Geometrical Ronchi test of aspherical mirrors*”, *Appl. Opt.*, 4,1371-1374 (1965).
- [56] A. Cordero, A. Cornejo and O. Cardona, “*Ronchi and Hartmann tests with the same mathematical theory*”, *Appl. Opt.*, 31, 2370-2376 (1992).
- [57] A. Zarate, A. Cordero and A. Cornejo, “*Simulación de ronchigramas para secciones cónicas en eje y fuera de eje, y con la fuente de iluminación en cualquier posición*”, Reporte Técnico 122 (Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México, 1996).
- [58] A. Cordero-Dávila, José Díaz-Anzures and Víctor Cabrera-Peláez, “*Algorithm for the Simulation of Ronchigrams of Arbitrary Optical Systems and Ronchi Grids in Generalized Coordinates*”, *Appl. Opt.*, 41, 3866-3873 (2002).
- [59] W. T. Welford, “*Aberrations of Optical Systems*”, Adam Hilger, Bristol, Great Britain, pag. 57-58 (1991).
- [61] W. A. Kleinmans, “*Aberrations of curved zone plates and Fresnel lenses*”, *Applied Optics*, 16, 6, pp. 1701- 1704, 1977.
- [62] W. T. Welford, “*Aberrations of the symmetrical optical system*”, Capitulo 5 , *CRC Press Inc, Boston (1986)*.
- [63] Rudolf Kingslake, “*Lens design fundamentals*”, 158, Academic Press, New York (1978).
- [64] W. T. Welford, “*Aberrations of Optical Systems*”, Adam Hilger, Bristol, Great Britain, pag. 190-198 (1991).
- [65] Rudolf Kingslake, “*Lens design fundamentals*”, 56-58, Academic Press, New York (1978).

ANALYTHIC METHODS FOR CORRECT THE SPHERICAL AND COMA ABERRATIONS USING NON SPHERICAL SURFACES

1. ASPHERICAL SURFACES

1.1. Introduction

The optical system performance is affected by the aberrations; the spherical aberration is the most important of all the aberrations, because it affects the whole field of vision, including the vicinity of the optical axis. This aberration is due to different focus or image position between meridional marginal and paraxial rays. For correcting the aberrations the most widely used method is the one that uses multiple spherical lenses for aberration correction, but with this method we obtain complicated system optical and with large-size, it has its limitation today when we speculating the trend that micronization and light-weightization of the optical system, then we use other options like adaptive optics [1], gradient-index materials [2], holograms [3], diffractive optics [4] or aspheric surfaces [5]. In recent years with the improvement of the manufacturing ability of aspheric surfaces have incremented its use [6][7].

The use of conic constants to correct spherical aberration is a fact well known. Four centuries ago Descartes tried to determine the shape of the surfaces that correct the spherical aberration for any object position [8]. One century ago Conrady [9] showed that there are three cases in which the spherical surfaces have null spherical aberration. Kingslake [10] found analytic solution to correct the spherical aberration for any ray using mirrors if we know the object and image position; he also analyzed two refractive cases. Hecht [11] employed the principle of Fermat to calculate the eccentricity of the aspheric surface that compensates the spherical aberration for refractive surfaces. Castro, et al. [5] and Chavez [12] proposed a method to compensate the spherical aberration with one conic

surface, but only for one pupil position. Using aspheric surfaces, Schmidt introduced a corrector plate to compensate the spherical aberration [13]. A. Lerner and M. Sasian [14] proposed using general aspheric surface parametrically defined and they showed that with this method is possible to find a better correction for spherical aberration using a smaller number of coefficients than the commercial programs.

The main problem with the general aspheric surfaces is that we must decide which surface to make aspheric [15] and to find the aspherical coefficient values, for this we can use the theory of third [16], fifth or seventh order, or use the optimization routine of commercial programs [17]. In the first possibility, the analysis is complicated, limited and it is not exact, in the second possibility, we can not have total control of the compensation of the spherical aberration, neither the position of zeros of the spherical aberration in the pupil position.

1.2. Spherical Aberration Correction

The necessary condition to obtain a system with spherical aberration compensated is that both paraxial and marginal optical lengths will be equal, see figure 1.

$$n_0 D_0 + n_1 D_1 + n_{k-1} D_{k-1} + n_k D_k = d_0 + n d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k . \quad (1)$$

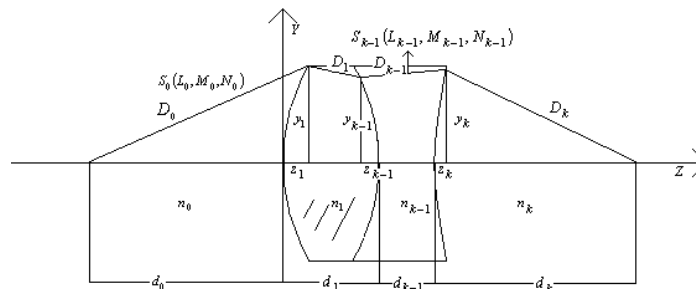


Figure 1. Diagram to correct the spherical aberration.

From figure 1, we see that D_k is

$$D_k = \sqrt{(y_k)^2 + (d_k - z_k)^2}, \quad (2)$$

and the coordinates at the last surface for the marginal ray are

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + D_{k-1}M_{k-1} \\ z_k &= z_{k-1} - d_{k-1} + N_{k-1}D_{k-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

substituting equations (3) in equation (2) we obtain

$$D_k = \sqrt{(y_{k-1} + M_{k-1}D_{k-1})^2 + (d_k - z_{k-1} + d_{k-1} - N_{k-1}D_{k-1})^2}, \quad (4)$$

by substituting equation (4) into equation (1) and by squared, we obtain a quadratic equation for D_{k-1} which has the form

$$aD_{k-1}^2 + bD_{k-1} + c = 0, \quad (5)$$

for the object in finite position the coefficients of the second degree equation are calculated as follow

$$a = (n_k^2 - n_{k-1}^2), \quad (6a)$$

$$b = 2 \left[\frac{n_k^2 y_{k-1} M_{k-1} - n_k^2 N_{k-1} (d_k - z_{k-1} + d_{k-1}) + n_{k-1} (n_0 d_0 + n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 D_0 - n_1 D_1)}{n_{k-1} (n_0 d_0 + n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 D_0 - n_1 D_1)} \right], \quad (6b)$$

$$c = \left[\frac{n_k^2 y_{k-1}^2 + n_k^2 (d_k - z_{k-1} + d_{k-1})^2 - (n_0 d_0 + n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 D_0 - n_1 D_1)^2}{n_{k-1} (n_0 d_0 + n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 D_0 - n_1 D_1)} \right], \quad (6c)$$

and when the object is at the infinity the coefficients are calculated as

$$a = (n_k^2 - n_{k-1}^2), \quad (7a)$$

$$b = 2 \left[\frac{n_k^2 y_{k-1} M_{k-1} - n_k^2 N_{k-1} (d_k - z_{k-1} + d_{k-1}) + n_{k-1} (n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 z_1 - n_1 D_1)}{n_{k-1} (n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 z_1 - n_1 D_1)} \right], \quad (7b)$$

$$c = \left[\begin{array}{l} n_k^2 y_{k-1}^2 + n_k^2 (d_k - z_{k-1} + d_{k-1})^2 \\ -(n_1 d_1 + n_{k-1} d_{k-1} + n_k d_k - n_0 z_1 - n_1 D_1)^2 \end{array} \right]. \quad (7c)$$

We see that if the last surface is a mirror in air the coefficient a is zero, then we have to solve a first grade equation to know D_{k-1} .

From figure 1, we see that $D_0, D_1, D_{k-2}, d_0, d_1, d_{k-1}, d_k, y_1, y_{k-1}$ and z_{k-1} are paraxial parameters and parameters that we can know with exact ray tracing. M_{k-1} and N_{k-1} are direction cosines of the marginal ray and n_k and n_{k-1} are the refraction indexes, with this parameters we calculate D_{k-1} by employ equations (5), (6) and (7), after we calculate y_k and z_k by using equations (3), to obtain a system free of spherical aberration.

1.3. General Aspheric Surface Correction

We defined the general aspheric surface as

$$z_{aspheric} = z_{spheric} + a_1 (x_k^2 + y_k^2)^2 + a_2 (x_k^2 + y_k^2)^3 + a_3 (x_k^2 + y_k^2)^4 + \dots, \quad (8)$$

where $z_k = z_{aspheric}$ that together with x_k and y_k are the coordinates at the last surface for the marginal ray and $z_{spheric}$ is calculated by use the curvature c_k and the same coordinates x_k and y_k as follow

$$z_{spheric} = \frac{c_k (x_k^2 + y_k^2)}{1 + \sqrt{1 - c_k^2 (x_k^2 + y_k^2)}}, \quad (9)$$

using the rotationally symmetric, and solving equation (8) only for a_1 we obtain

$$a_1 = \frac{z_{aspheric} - z_{spheric}}{y_k^4}. \quad (10)$$

With this result we have the spherical aberration correction for one pupil position, if we want to correct the spherical aberration for two entrance pupil positions we need to solve the next equations system

$$\begin{aligned} z_{asph\acute{e}rica(edge)} &= z_{spher\acute{e}c(edge)} + a_1 (y_{k(edge)})^4 + a_2 (y_{k(edge)})^6 \\ z_{asph\acute{e}rica(0.7)} &= z_{spher\acute{e}c(0.7)} + a_1 (y_{k(0.7)})^4 + a_2 (y_{k(0.7)})^6 \end{aligned} \quad (11)$$

In general, If we want to correct the spherical aberration in more entrance pupil positions is better that we use a matrix form, then we have

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & b_{51} & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & b_{52} & b_{n2} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} & b_{53} & b_{n3} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} & b_{54} & b_{n4} \\ b_{15} & b_{25} & b_{35} & b_{45} & b_{55} & b_{n5} \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & b_{4n} & b_{5n} & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

where $c_{1,2,3,n}$ are the differences between $z_{asph\acute{e}rica}$ and $z_{spher\acute{e}c}$, $b_{1,2,3,n}$ are the coordinates at the last surface for the marginal ray to the four power, six power etc. and $a_{1,2,3,n}$ are the coefficients of the general aspheric surface. Solving the equations system (12), we can know the coefficients that compensate the spherical aberration for n entrance pupil positions.

1.4. Examples

1.4.1. Gregorian telescope

The first example is a Gregorian telescope $f/10$ of two mirrors, with a spherical primary mirror, $f/1$, with very large spherical aberration, the secondary mirror is aspheric and it is used to compensate the aberration of the primary mirror. The primary mirror diameter is 100 mm and the distance from the vertex of the primary mirror to the Gregorian focus is 50 mm, see figure 2.

1.4.1.1. First order design of Gregorian telescope

We use the equations found by D. Malacara [18] for the first order design, we begin by find the effective focal length of the telescope and the primary mirror with next equations

$$F = D_1 f_{\# \text{telescope}} \quad \text{and} \quad f_1 = D_1 f_{\#1}, \quad (13)$$

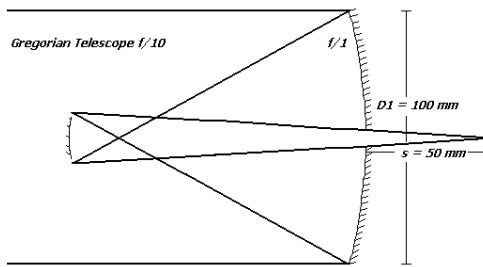


Figure 2. Initial parameters for design a Gregorian telescope.

D_1 is the primary mirror diameter, $f_{\# \text{telescope}}$ is the f number of the telescope and $f_{\#1}$ is the f -number of the primary mirror. The separation between the mirrors is calculate with the equation

$$l = \frac{f_1(F - s)}{f_1 + F}, \quad (14)$$

also we calculate de the effective focal length of the secondary mirror, as

$$f_2 = F \left(\frac{f_1(f_1 + s)}{f_1^2 - F^2} \right), \quad (15)$$

and the diameter of the secondary mirror, with the next equation

$$D_2 = \frac{(f_1 - l)D_1}{f_1}, \quad (16)$$

finally we calculate the radii of curvature for the mirrors as follow

$$r_1 = -2f_1 \quad \text{and} \quad r_2 = 2f_2. \quad (17)$$

We show the paraxial parameters of Gregorian telescope in the table 1.

Surface	Effective focal length	Radii of curvature	Diameter	Separation
1	100 mm	-200 mm	100 mm	116.666
2	15.1515 mm	30.303 mm	16.667 mm	166.666

Table 1. Paraxial parameters of the Gregorian telescope.

1.4.1.2. Exact design of Gregorian telescope

We must do the exact ray tracing in different pupil positions until penultimate surface, we show this procedure in table 2, for this example we trace the ray in five different pupil positions.

Ray Tracing Parameters	Pupil Positions				
	1	0.93	0.88	0.7	0.5
M_0	0	0	0	0	0
N_0	1	1	1	1	1
Y_l	50	46.5	44	35	25
Z_l	-6.35083	-5.48072	-4.90002	-3.08631	-1.56865
M_l	-0.48412	-0.45225	-0.42922	-0.34459	-0.24803
N_l	-0.875	-0.89188	-0.9032	-0.93875	-0.96875

Table 2. Ray tracing parameters of the Gregorian telescope.

Where M_0 , N_0 , M_l , and N_l are the directors cosines of the ray. Y_l and Z_l are the coordinates on the primary mirror. For the next step we must apply the

equations (5) and (7) to know D_{k-1} . After, we calculate the last surface coordinates that correct the spherical aberration with the equation (3), we show these coordinates in the table 3.

Coordinates that Correct the Spherical Aberration	Pupil Positions				
	1	0.93	0.88	0.7	0.5
D_{k-1}	124.27768	123.19794	122.48397	120.28783	118.4891
Y_2	-10.16567	-9.21717	-8.57256	-6.45106	-4.3899
$Z_2=Z_{aspheric}$	1.572863	1.30724	1.139116	0.66015	0.311697
$Z_{spheric}$	1.756004	1.435793	1.237849	0.694629	0.319667

Table 3. Last surface coordinates that correct the spherical aberration of the Gregorian telescope.

Finally we show the equations system from one to five coefficients and the changes in telescope OPD with each coefficient:

1.4.1.2.1. One coefficient

We choose the pupil edge to correct the spherical aberration. We solve the equation (10), with the coordinates that correct the spherical aberration as follow

$$a_1 = \frac{1.572863 - 1.756004}{(-10.165674)^4} = -(1.714910)^{-4}$$

Figure 3 shows the telescope OPD (Optical Path Differences) without aspheric coefficient, only with two spherical mirrors; as you can see the spherical aberration is very large.

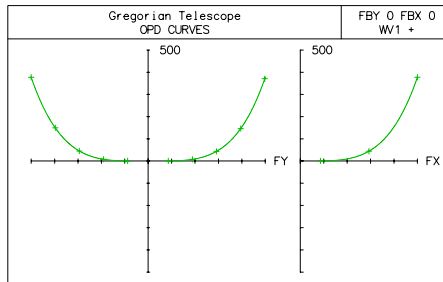


Figure 3. Telescope OPD without aspheric coefficients.

Figure 4 shows the telescope OPD, with one aspheric coefficient, as you can see; there is one pupil position with zero spherical aberration in the edge.

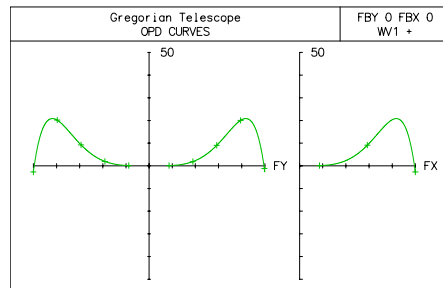


Figure 4. Telescope OPD with one aspheric coefficient in the pupil edge.

The changes with only one coefficient are very significant, but the correction is not complete. We need to correct the spherical aberration zonal (0.7).

1.4.1.2.2. Two coefficients

We choose two pupil positions to correct the spherical aberration in 1 and 0.7. We solve the equations system (11), with the coordinates of the table 3 as follow

$$1.572863 = 1.756004 + a_1(-10.165674)^4 + a_2(-10.165674)^6$$

$$0.66015 = 0.694629 + a_1(-6.451061)^4 + a_2(-6.451061)^6$$

The solutions are $a_1 = -2.176739 \times 10^{-5}$ and $a_2 = 4.468982 \times 10^{-8}$. Fig. 5 shows the telescope OPD, with two aspheric coefficients, as you can see; there are two pupil positions with zero spherical aberration.

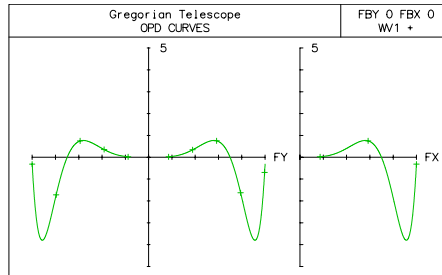


Figure 5. Telescope OPD with two aspheric coefficients.

The correction with two coefficients is better, but the correction is not complete. We need more aspheric coefficients; we choose other pupil positions according to the figure 5.

1.4.1.2.3. Three coefficients

Now we use three pupil positions to correct the spherical aberration in 1, 0.88 and 0.7. We solve the equations system (12), with the coordinates of the table 3 as follow

$$\begin{aligned} 1.572863 &= 1.756004 + a_1(-10.165674)^4 + a_2(-10.165674)^6 + a_3(-10.165674)^8 \\ 1.139116 &= 1.237848 + a_1(-8.572564)^4 + a_2(-8.572564)^6 + a_3(-8.572564)^8 \\ 0.66015 &= 0.694629 + a_1(-6.451061)^4 + a_2(-6.451061)^6 + a_3(-6.451061)^8 \end{aligned}$$

The solutions are $a_1 = -2.267818 \times 10^{-5}$, $a_2 = 7.538870 \times 10^{-8}$ and $a_3 = -2.117790 \times 10^{-10}$. Figure 6 shows the telescope OPD, with three aspheric coefficients, as you can see; there are three pupil positions with zero spherical.

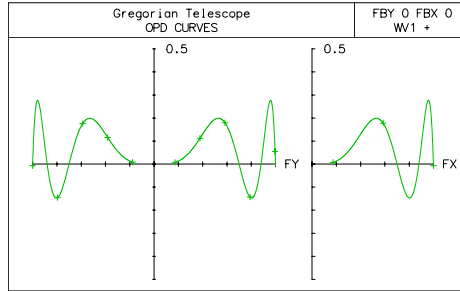


Figure 6. Telescope OPD with three aspheric coefficients.

The correction with three coefficients is almost complete. We need other aspheric coefficients; we must choose other pupil positions according to the figure 6.

1.4.1.2.4. Four coefficients

We use four pupil positions to correct the spherical aberration in 1, 0.93, 0.88 and 0.7. We solve the equations system (12), with the coordinates of the table 3 as follow

$$\begin{aligned}
 1.572863 &= 1.756004 + a_1(-10.165674)^4 + a_2(-10.165674)^6 + a_3(-10.165674)^8 + \\
 &\quad a_4(-10.165674)^{10} \\
 1.307240 &= 1.435793 + a_1(-9.217172)^4 + a_2(-9.217172)^6 + a_3(-9.217172)^8 + \\
 &\quad a_4(-9.217172)^{10} \\
 1.139116 &= 1.237848 + a_1(-8.572564)^4 + a_2(-8.572564)^6 + a_3(-8.572564)^8 + \\
 &\quad a_4(-8.572564)^{10} \\
 0.66015 &= 0.694629 + a_1(-6.451061)^4 + a_2(-6.451061)^6 + a_3(-6.451061)^8 + \\
 &\quad a_4(-6.451061)^{10}
 \end{aligned}$$

The solutions are $a_1 = -2.299409 \times 10^{-5}$, $a_2 = 9.033522 \times 10^{-8}$, $a_3 = -4.301246 \times 10^{-10}$ and $a_4 = 9.995402 \times 10^{-13}$. Figure 7 shows the telescope OPD, with four aspheric coefficients, as you can see; there are four pupil positions with zero spherical aberration

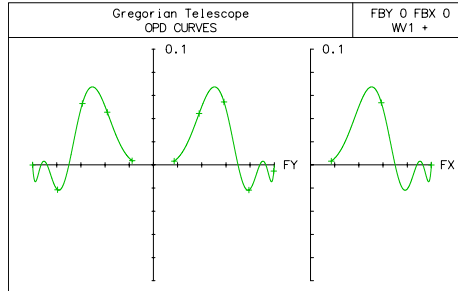


Figure 7. Telescope OPD with four aspheric coefficients.

The correction with four coefficients is complete because the telescope PSF, figure 8, is bigger than 0.8, but there is one pupil position where the spherical aberration is bigger than the other pupil position. We need other aspheric coefficient to correct that pupil position, we choose 0.5 according to the figure 7.

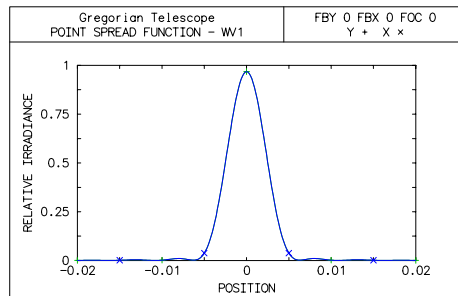


Figure 8. Telescope PSF with four aspheric coefficients.

1.4.1.2.5. Five coefficients

We use five pupil positions to correct the spherical aberration; in 1, 0.93, 0.88, 0.7 and 0.5. We solve the equations system (12), with the coordinates of the table 3 as follow

$$\begin{aligned}
1.57286 &= 1.75600 + a_1(-10.16567)^4 + a_2(-10.16567)^6 + \\
&\quad a_3(-10.16567)^8 + a_4(-10.16567)^{10} + a_5(-10.16567)^{12} \\
1.30724 &= 1.43579 + a_1(-9.21717)^4 + a_2(-9.21717)^6 + \\
&\quad a_3(-9.21717)^8 + a_4(-9.21717)^{10} + a_5(-9.21717)^{12} \\
1.13911 &= 1.23784 + a_1(-8.57256)^4 + a_2(-8.57256)^6 + \\
&\quad a_3(-8.57256)^8 + a_4(-8.57256)^{10} + a_5(-8.57256)^{12} \\
0.66015 &= 0.69462 + a_1(-6.45106)^4 + a_2(-6.45106)^6 + \\
&\quad a_3(-6.45106)^8 + a_4(-6.45106)^{10} + a_5(-6.45106)^{12} \\
0.31169 &= 0.31966 + a_1(-4.38994)^4 + a_2(-4.38994)^6 + \\
&\quad a_3(-4.38994)^8 + a_4(-4.38994)^{10} + a_5(-4.38994)^{12}
\end{aligned}$$

The solutions are $a_1=-2.321123 \times 10^{-5}$, $a_2=1.031650 \times 10^{-7}$, $a_3=-7.011418 \times 10^{-10}$, $a_4=3.453245 \times 10^{-12}$ and $a_5=-8.087233 \times 10^{-15}$. Figure 9 shows the telescope OPD, with five aspheric coefficients, as you can see; there are five pupil positions with zero spherical aberration. The correction with five coefficients is complete because the telescope PSF is 0.9995, see figure 10.

In all cases the correction corresponds with the pupil positions where we choose that the spherical aberration was zero, the aspheric coefficients number depends on the correction we want.

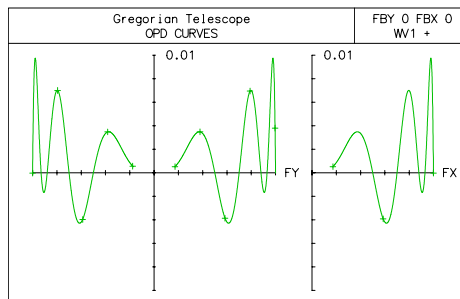


Figure 9. Telescope OPD with five aspheric coefficients.

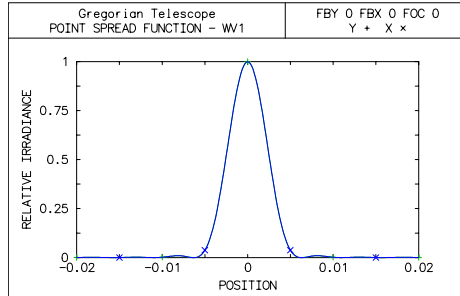


Figure 10. Telescope PSF with five aspheric coefficients.

1.4.2. Lens $f/1$

The second example is a lens, $f/1$, with 100 mm of effective focal length and the object is to 400 mm from the lens. The first surface is spherical and the second surface is aspheric and it is used to compensate the spherical aberration. In this case, we use five aspherical coefficients to compensate the spherical aberration, as you can see in figure 11; there are five pupil positions with zero spherical aberration. In table 4 we show the aspherical coefficients of the second surface.

Coefficients	Pupil Positions	Value
a_1	1	7.538529×10^{-7}
a_2	0.95	$-5.556488 \times 10^{-11}$
a_3	0.88	9.062669×10^{-15}
a_4	0.70	$-1.338032 \times 10^{-18}$
a_5	0.5	1.044944×10^{-22}

Table 4. Coefficients calculated to compensate the spherical aberration for the lens $f/1$.

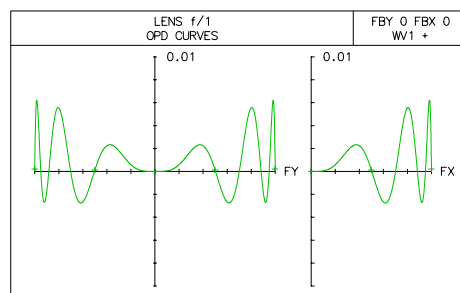


Figure 11. Lens $f/1$ OPD with the object in finite position.

1.4.3. Cemented doublet $f/2$

The Third and final example is a cemented doublet, $f/2$, with 100 mm of effective focal length and the object is at the infinity, the first and second surfaces are spherical and the third surface is aspheric and it is used to compensate the spherical aberration. In this case, we use three aspherical coefficients to compensate the spherical aberration, as you can see in the figure 12; there are three pupil positions with zero spherical aberration. In table 5 we show the aspherical coefficients of the third surface.

Coefficients	Heights	Value
a_1	1	1.830066×10^{-7}
a_2	0.88	$-2.955372 \times 10^{-10}$
a_3	0.7	$-1.919597 \times 10^{-13}$

Table 5. Coefficients calculated to compensate the spherical aberration for the doublet $f/2$.

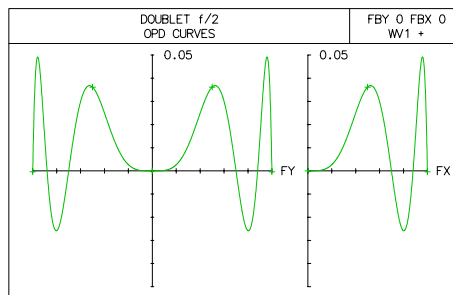


Figure 12. Cemented doublet $f/2$ OPD with the object at the infinity.

1.5. Conclusions

We present an analytic method to compensate the spherical aberration by using the aspheric surface coefficients in the last surface of the optical system, the calculations are made solving a system of equations of first degree, and the solution is easy and quick. As the equations are not approximate, the process of optimization is not required. This method can apply for any optical system and for any object position. The results show that optical systems are diffraction limited. The number of coefficients depended on the correction we want.

2. DIFFRACTIVE SURFACES

2.1. Introduction

In many cases, the spherical aberration is the most important of all primary aberrations, because it affects the whole field of the lens, including the vicinity of the optical axis. This is due to different focus positions for a marginal meridional and paraxial rays. An alternative to minimize the spherical aberration is using diffractive optical elements. Diffractive lenses are essentially gratings with a variable spacing groove which introduce a chromatic aberration that is much worse than conventional refractive/reflective optical elements. In some applications an optical component may require a diffractive surface combined with a classic lens element. By using the diffractive properties; we can design a hybrid element to obtain a corrected achromatic element [19]. In other cases the requirements can be satisfied with just a diffractive element. In general, iterative methods are used to design these lenses [20]. Also, some people have used analytical third-order and numerical integrator methods to design diffractive lenses [19], [21]. The diffractive lenses we describe in this paper are limited to monochromatic applications, even though our proposed method is valid for all wavelengths. So, the analysis is also valid for systems which contain diffractive lenses.

First, we describe the diffractive lenses theory. Also we give a brief derivation of the general grating equation to trace a couple rays through of a rotationally symmetrical surface. Then we establish the algebraic method to minimize the spherical aberration. Finally, we conclude by providing a design example.

2.2. Theory of the Diffractive Lenses

The diffractive lenses can be described by a polynomial phase function [22]

$$\phi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n, \quad (18)$$

where λ is the design wavelength and the a_{mn} are the phase lens coefficients. We consider that the diffractive lens is rotationally symmetrical, so the equation (18) is re-written as

$$\phi(y) = \frac{2\pi}{\lambda} (a_0 + a_2 y^2 + a_4 y^4 + a_6 y^6 + a_8 y^8 + \dots), \quad (19)$$

where the longitudinal displacement of the reference sphere is $a_0 = 0$ because we have assumed this is in the ideal focus. In the coefficient a_2 are implicit lens paraxial properties, it is equal to $-\frac{l}{2f}$, f is the focal length. The remainder coefficients in the last equation give the amount of spherical aberrations of the first, second and higher order [23], [24].

Designers usually use some commercial optical design programs to computer the phase coefficients, and they made by using an optimization process. We will describe an analytical method to computer these coefficients.

To trace a pencil of rays through the diffractive optical surface we use the grating equation. For a planar surface the grating equation is given by

$$n' \sin I' - n \sin I = m \lambda f, \quad (20)$$

n' and n are refractive indexes for two different medium, I' and I are the diffractive and incident angles, f is the grating frequency and m is the diffracted order.

To analyze the light propagation through a diffractive curved surface, we have to change the form of the last equation. After some algebra we obtain the general grating equation

$$(n'M_2 - nM_1)\cos\theta_N + (nN_1 - n'N_2)\sin\theta_N = m\lambda\cos\theta_N f, \quad (21)$$

where the direction of refracted and diffracted rays are given by the direction cosines M_1, M_2, N_1, N_2 as it is shown in the Figure 13. θ_N is the angle between the normal at surface and optical axis, given by

$$\sin\theta_N, \cos\theta_N = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (22)$$

where F is the surface function, x and y are the surface coordinates.

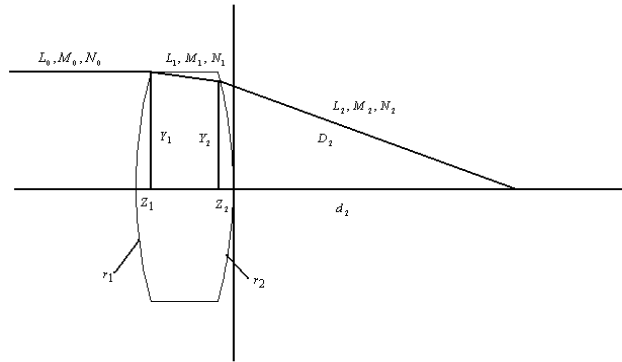


Figure13. Lens parameters (the diffractive surface is on the second surface).

In other hand the grating frequency in one dimension can be calculated by

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (23)$$

$$f_y = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_{2k} y^{2k-1} \right],$$

ϕ is the phase function given by the equation (19) and k is a integer 1,2,3,4,... and the diffracted order $m = 1$. Then the equation (21) can be re-written as

$$[(n'M_2 - nM_1)\cos \theta_N + (nN_1 - n'N_2)\sin \theta_N] = \cos \theta_N \left[\sum_{k=1}^{\infty} 2ky^{2k-1}a_{2k} \right]. \quad (24)$$

Using the formulas (22) and (24) we can trace n rays through the surface at different heights on the pupil. Then they can arrangement $k \times k$ equations system, as much as n coefficients a_{2k} we wanted to find.

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots & w_{1k} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & w_{2k} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \cdots & w_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_{k1} & w_{k2} & w_{k3} & \cdots & w_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2f} \\ a_4 \\ a_6 \\ \vdots \\ a_{2k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \end{bmatrix}, \quad (25)$$

where w represent the different constants of the right term and A are the constants of the left term of the equation (24), for different height rays on the pupil.

2.3. Examples

We have proposed a general expression to computer the phase coefficients. Now we will show how these coefficients minimize the spherical aberration with some numerical examples. All examples considered in this section the diffracted have order $m = 1$.

2.3.1 Example 1

We consider that the diffractive surface is on a spherical surface (last surface), diameter 50mm, numerical aperture 0.375386 object distance 200mm, and $\lambda = 0.587 \mu\text{m}$.

In the table 6, other characteristic of the refractive-diffractive lens are shown.

Surfaces	Radius(mm)	Thickness (mm)	Radius aperture(m m)	Glass
1	∞	200		Air
2	101.959	8.137	25	BK7
3	DOE -101.954	66.059	25	Air
4	∞	0		Air

Table 6. Refractive-diffractive lens data.

We must trace rays until the last surface for that we can calculate all constants of the equation (8). The number of rays traced depends on the coefficients number. In this example we use two coefficients for solving the next equations system

$$\begin{bmatrix} 6.341E + 4 & 6.131E + 7 \\ 2.155E + 4 & 1.004E + 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.067053 \\ 0.024193 \end{bmatrix}.$$

We have used the arrangement (25) to computer the phase coefficients for two different pupil positions on the surface and they are shown in table 7.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	paraxial	-0.005 mm^{-1}
a_4	25.39	$1.182803 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-3}$
a_6	17.62	$-1.295498 \times 10^{-10} \text{ mm}^{-5}$

Table 7. Different coefficient values for the diffractive surface.

Figure 14 shows the spherical aberration in the refractive-diffractive lens, the graphics were obtained using the commercial optical design program “OSLO”.

We can see in the graphics a transversal spherical aberration about 0.05 mm, having zeros on two pupil positions. It is because we have computed two coefficients for this system. The corresponding Strehl Ratio is about 0.240536.

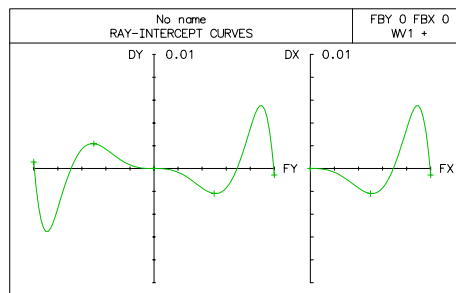


Figure 14. Transversal spherical aberration of the refractive-diffractive lens.

2.3.2 Example 2

Consider the same optical system but now we will use three phase coefficients. Solving the next equations system

$$\begin{bmatrix} 6.341\text{E}+4 & 6.131\text{E}+7 & 5.27\text{E}+10 \\ 4.302\text{E}+4 & 3.196\text{E}+7 & 2.111\text{E}+10 \\ 2.155\text{E}+4 & 1.004\text{E}+7 & 4.155\text{E}+9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_6 \\ a_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.067053 \\ 0.046688 \\ 0.024193 \end{bmatrix},$$

we obtain the following phase coefficients.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	paraxial	-0.005 mm^{-1}
a_4	25.39	$1.192958 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-3}$
a_6	22.26	$-1.618580 \times 10^{-10} \text{ mm}^{-5}$
a_8	17.62	$2.537014 \times 10^{-14} \text{ mm}^{-7}$

Table 8. Different coefficient values for the diffractive surface.

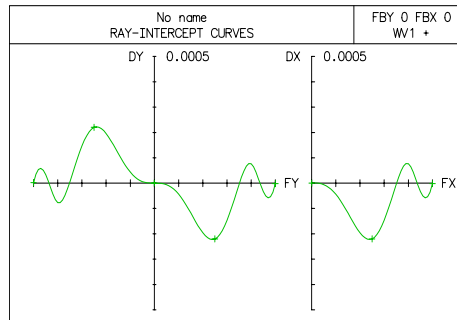


Figure 15. Transversal spherical aberration of the refractive-diffractive lens.

In this figure, we can see a transversal spherical aberration of the refractive-diffractive lens about 0.0005 mm, having zeros on three pupil positions. It is because we have computed three coefficients for this system. The corresponding Strehl Ratio is about 0.992327.

2.3.3 Example 3

Considering the same optical system, but now the diffractive surface is on a hyperbolic surface (last surface), $K=-4.6539$, 50mm, aperture, numerical aperture 0.375386, object distance 200mm and $\lambda = 0.587 \mu\text{m}$. We must trace rays until the hyperbolic surface because of this way we can calculate all constants of the equation (25) for this example. We use four phase coefficients to solve the following equations system

$$\begin{bmatrix} 6.423\text{E}+4 & 6.21\text{E}+7 & 5.337\text{E}+10 & 4.3\text{E}+13 \\ 4.337\text{E}+4 & 3.222\text{E}+7 & 2.128\text{E}+10 & 1.317\text{E}+13 \\ 2.163\text{E}+4 & 1.007\text{E}+7 & 4.169\text{E}+9 & 1.618\text{E}+12 \\ 6.085\text{E}+3 & 1.212\text{E}+6 & 2.145\text{E}+8 & 3.56\text{E}+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_6 \\ a_8 \\ a_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.048792 \\ 0.034222 \\ 0.01794 \\ 5.316407\text{E}-3 \end{bmatrix}$$

In the table 9 are the new coefficients for this optical system.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	paraxial	-0.005 mm^{-1}
a_4	25.39	$9.107234 \times 10^{-7} \text{ mm}^{-3}$
a_6	22.25	$-1.947083 \times 10^{-10} \text{ mm}^{-5}$
a_8	17.62	$5.323818 \times 10^{-14} \text{ mm}^{-7}$
a_{10}	11.52	$-1.054035 \times 10^{-17} \text{ mm}^{-9}$

Table 9. Different coefficient values for the diffractive surface.

The figure 16 shows the aberration of this refractive-diffractive lens.

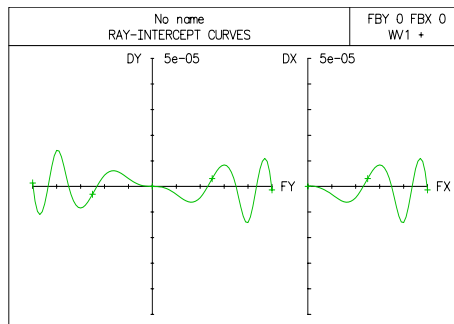


Figure 16. Transversal spherical aberration of the refractive-diffractive lens

We can see again a very small spherical aberration and it is $5 \times 10^{-5} \text{ mm}$. And it has 4 zeros because we have used 4 phase coefficients. The irradiance distribution corresponding to this system is

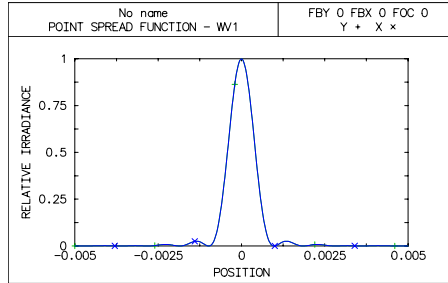


Figure 17. The point spread function of the refractive-diffractive lens.

Our method proposed is also for planar surfaces. We have to make zero the angle between the normal to surface and optical axis in the equation (21) and then we obtain the grating equation (20) for planar surface. We can follow the procedure that is used before in the examples.

2.4. Conclusions

We have established a new exact method to design diffractive lenses free of spherical aberration by using the general grating equation and exact ray trace. In the first and the second example we have shown that we can have a high control of spherical aberration, minimizing at points on the surface where we have wanted. Also we have show that the method proposed is valid for any rotationally symmetrical surface. We have used four coefficients for different 4 height apertures to minimize this aberration in the last example. Finally, it is very important to see that to minimize the spherical aberration we only use as many coefficients as be necessary.

3. APLANATIC HYBRID LENSES

3.1. Spherical and Diffractive Surfaces

3.1.1. Introduction

The combination between refractive and diffractive elements (hybrid element) can eliminate or significantly reduce the chromatic aberration [19][25]. The phase function of the diffractive element can be found to third order by consider it as a thin lens with its refraction index becomes infinite [26][27], in this consideration the distortion and Petzval curvature is zero

but in this treatment the higher order aberrations are neglected. J.A. Hernandez-Cruz et. al. [28] propose an alternative method to diffractive elements design by use exact ray-tracing, allowing us to find the phase function which corrects the spherical aberration in all orders. Kleinhans [29] and Welford [30] show that the zone plates, Fresnel lenses and holograms can be aplanatic if the second principal plane is a spherical surface centred on the axial point image.

In the next section we explain as the hybrid element achieve the Abbe's condition for aplanatism when the diffractive element is on the second surface of the refractive lens. We use the method explained in the section two to correct the spherical aberration of the hybrid element. The method can be applied for any object position and for any f -number. The results show the changes that produce the phase function coefficients which correct the spherical aberration. Finally the conclusions are given. The manufacturing problem is not considered here, so the reader should read J. Castro, et. al. [31].

3.1.2. Abbe Sine Condition

Abbe [32] says that a spherically corrected lens would be free from coma near the center of the field if the marginal and paraxial magnifications, equation (26) and (27)

$$m = M , \tag{26}$$

or

$$\frac{u}{u'} = \frac{\text{Sin}U}{\text{Sin}U'} , \tag{27}$$

where u and u' are the incident and refraction angles of the paraxial ray, U and U' are the incident and refraction angles of the exact marginal ray. The equation (27) is known as Abbe's Sine Condition.

For a very distant object Kingslake [32] shows that the sine condition takes the next form

$$F' = f' , \tag{28}$$

where f' is the distance from the principal plane to the focal point measured along the paraxial ray and F' is the distance measured along the marginal ray from the equivalent refracting locus to the point where the ray crosses the lens axis, figure 18.

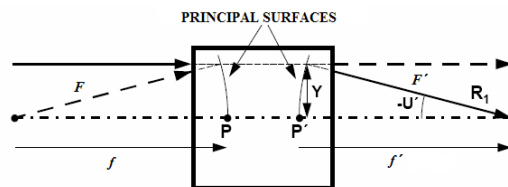


Figure 18. Aplanatic system.

The equation (28) says that if the second principal surface is a sphere centered on the back focal point, the system will be coma free [29][30][32].

We propose the use of a planoconcave lens where the curvature radio must be equal to the effective focal length (EFL), Figure 19. In this way we obtain the equation (28) condition. The spherical aberration correction will be explained in the next section.

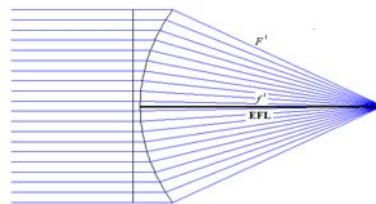


Figure 19. Lens with $F' = f'$.

3.1.3. Examples

We have proposed a method to design aplanatic hybrid lens. Now we will show some numerical examples. All examples considered in this section, we used the diffracted order $m = 1$.

The first example is a hybrid lens, $f/1$, 100 mm of effective focal length; the object is at the infinite and 1° of field angle. In the next table we show the first order parameters.

Surface	Radius (mm)	Thickness (mm)	Aperture Radius (mm)	Glass
Object		1×10^{20}		Air
1	∞	3	50	BK-7
2	DOE	100	50	Air

Table 10. First order Parameters example 1.

In this case, we use four diffractive coefficients to compensate the spherical aberration. In the table 11 we show the diffractive coefficients value of the phase function.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	Paraxial	-0.007584
a_4	50	$-1.895476 \times 10^{-07}$
a_6	44	$-9.606272 \times 10^{-12}$
a_8	35	$-4.865876 \times 10^{-16}$
a_{10}	22.5	$-7.670514 \times 10^{-20}$

Table 11. Diffractive coefficients of the phase function example 1.

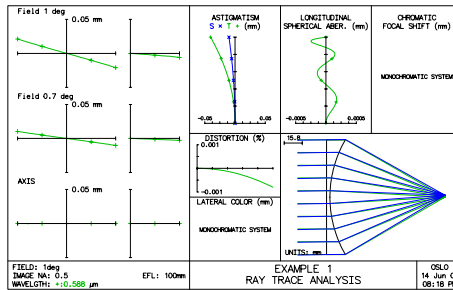


Figure 20. Example 1 ray trace analysis.

On axis the hybrid lens has four pupil positions with zero spherical aberration because we use four diffractive coefficients to off-axis points, the principal aberrations are field curvature and astigmatism but this hybrid lens does not present coma aberration, then we have an aplanatic hybrid lens when the object is at infinite.

The second example is a hybrid lens, $f/0.41$, 41.82 mm of effective focal length; the object is to 100 mm from the first surface of the lens with 1° of field angle. In the next table we show the first order parameters of this example.

Surface	Radius (mm)	Thickness (mm)	Aperture Radius (mm)	Glass
Object		100		Air
1	100	4	50	BK-7
2	DOE	70	50	Air

Table 12. First order Parameters example 2.

In this case, we use six diffractive coefficients to compensate the spherical aberration in each surface. In the tables 13 and 14 we show the diffractive coefficients of the phase function of the first and second surface.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	Paraxial	-0.007584
a_4	50	-1.895976×10^{-7}
a_6	46	$-9.487491 \times 10^{-12}$
a_8	44	$-5.826830 \times 10^{-16}$
a_{10}	40	$-4.819902 \times 10^{-20}$
a_{12}	35	$-6.325205 \times 10^{-25}$
a_{14}	22.5	$-6.835863 \times 10^{-28}$

Table 13. Diffractive coefficients of the phase function example 2 first surface.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	Paraxial	- 0.010834
a_4	50	-5.508956×10^{-7}
a_6	46	$-6.216594 \times 10^{-11}$
a_8	44	1.572569×10^{-16}
a_{10}	40	$-5.846995 \times 10^{-18}$
a_{12}	35	1.486627×10^{-21}
a_{14}	22.5	$-2.722713 \times 10^{-25}$

Table14. Diffractive coefficients of the phase function example 2 second surface.

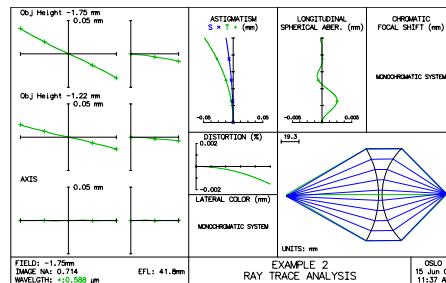


Figure 21. Example 2 ray trace analysis.

On axis the hybrid lens has six pupil positions with zero spherical aberration because we use six diffractive coefficients to off-axis points the principal aberrations are field curvature and astigmatism but as the other example this hybrid lens does not present coma aberration then we have

an aplanatic hybrid lens when the object is into a finite distance. In both cases the coefficients number depend on the f -number.

3.1.4. Conclusions

We present a method to design aplanatic hybrid lens we use the curvature radius of the refractive surface to correct the coma aberration. In the first example we curved the second principal plane with its center on the axial point image and in the second example we used this for the object and image point. We obtained the spherical aberration correction using a diffractive lens where the coefficients number depends on the f -number. Both examples only present field curvature and astigmatism. This method does not require an optimization routine and it can be applied to any f -number with the conjugates in any position.

3.2. Aspherical and Diffractive Surfaces

3.2.1. Introduction

G. D. Wassermann and E. Wolf [33] described methods for the design of aplanatic aspheric system with two surfaces; the method depends basically on the simultaneous solution of two first order differential equations for to know the profiles of the desired surfaces. E. M Vaskas [34] extended this method to the more general situation in which the aspherical surfaces are separated by a number of known surfaces k for to know the profiles of the desired surfaces we need to solve $k + 2$ first order differential equations simultaneously. J. J. M. Braat and P. F. Greve [35] showed that the shape of each aspheric surface is determined by a differential equation also they showed that the ray trajectories through the optical surface, located between the two aspheric surfaces are found by solving a system of N linear equations where N is the number of intermediate surfaces, this simplify the methods of Wasserman [33] and Vaskas [34]. J. Castro-Ramos, et. al. [5] derived the equations for designing aplanatic microscope objectives of two conic mirrors; they found

two equations of second degree one for spherical aberration correct and one for coma correction, these equations are exact and with these they can calculate the conic constants of the two mirrors, but the correction is only for one height on the entrance pupil. We use the method explained in the section 1.3 to correct the spherical aberration in different heights on the entrance pupil, they found a second degree equation to calculate the aspherical surface coordinates that correct the spherical aberration and they solved an equations system of first degree for fit the coordinates to the aspheric surfaces.

The combination between refractive and diffractive elements (hybrid element) can eliminate or significantly reduce the chromatic aberration but the analysis presented is only to first order [19][25]. Kleinhans [29] and Welford [36] show that the zone plates, Fresnel lenses and holograms can be aplanatic if the second principal plane is a spherical surface centred on the axial point image, this analysis is to third order. J.A. Hernandez-Cruz et. al. [28] proposes a novel method to diffractive elements design by using exact ray-tracing allowing us to find the phase function which corrects the spherical aberration in all orders.

3.2.2. Abbe Sine Condition

The equation (28) says that if the second principal surface is a sphere centered on the back focal point, the system will be coma free [29][36].

We propose to curve the second principal surface using an aspherical surface but we must know first the shape of the second principal surface with different shape factor of the lens (B) for choice the best shape factor in this analysis we use only spherical surfaces. We show the results in the figure 22, we consider a BK-7 lens with an effective focal length of 100 mm, with the object at the infinite, the central thickness are 19.5 mm and the spherical aberration is not corrected.

In the figure 22, the real principal surface is the blue line and the red line is the ideal principal surface. We see that the different shape factors change strongly the principal surface. When the shape factor is zero or -1 the principal surface is the sign opposite to the ideal principal surface and when the shape factor is equal to 1 and for third order coma equal to zero [37], the real and ideal principal surfaces have the same sign. In this figure seem that the minor difference between the principal surfaces is when shape factor is equal to 0.734 but the figure 23, shows the difference between them.

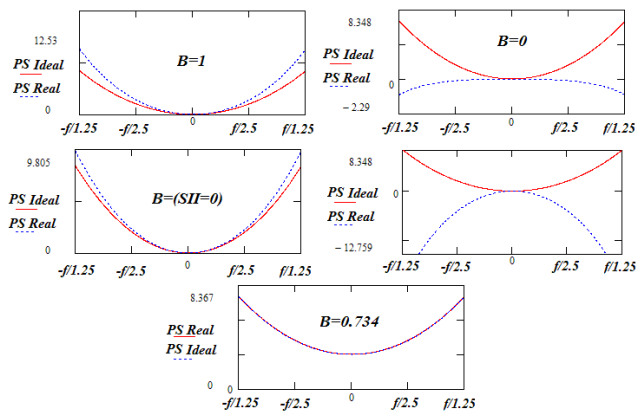


Figure 22. Principal surface (PS) real against ideal for different shape factor of the lens.

In the figure 23, we can see that the differences between the principal surfaces for the best shape factor. In this case the principal surfaces overlap in three different heights on the entrance pupil.

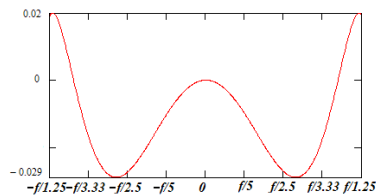


Figure 23. Difference between the principal surfaces for the best shape factor of the lens.

The next step was considered that the diffractive surface is on the second surface of the lens and by this reason the hybrid lens has not spherical aberration. We compute the effective focal length by refractive and

diffractive part as T. Stone and N. George [25]. This analysis is for thin lens and corrects only the chromatic aberration of first order. We insert the thickness with the method propose by Kingslake [38]. When we insert the thickness we need to compute again f_2 to keep the effective focal length of the hybrid lens

$$f_2 = \frac{1 - \frac{d_1(n-1)}{nr_1}}{\frac{1}{f_T} - \frac{1}{f_1}}, \quad (29)$$

n is the refractive index of the refractive part, r_1 is curvature radius and d_1 is the central thickness.

Using graphics as the figure 23, we find the best shape factor for refractive part with good results for f -numbers higher that $f/3.333$. The figure 24 shows these results.

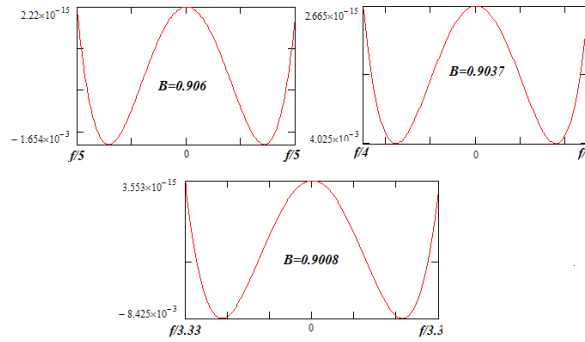


Figure 24. The best shape factor of the lens with smaller differences between ideal and real principal surfaces.

For f -numbers smaller than $f/3.33$ we propose use aspheric surfaces for curve the second principal surface as follow, of the figure 25 we can see that

$$\tan U = \frac{Y_2}{bfd - Z_2} = \frac{Y_1}{efl - Z_{pp'}}, \quad (30)$$

$Z_{pp'}$ is the principal surface sag, efl is the effective focal length of the hybrid lens, bfd is the back focal distance of the hybrid lens, Y_1 is the ray height in the first surface, Y_2 and Z_2 are ray coordinates in the second surface.

The coordinates at the last surface for the marginal ray as function of directors cosines of the ray refracted in the first surface (M_1 and N_1), of the distance measured along the marginal ray between surfaces (D_1) and the central thickness (d_1) are

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 + D_1 M_1 \\ Z_2 &= Z_1 - d_1 + D_1 N_1 \end{aligned} \quad (31)$$

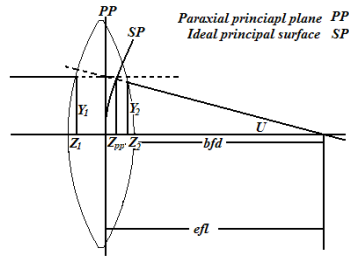


Figure 25. Coma correction diagram.

sustituting the equation (30) in (31) we have

$$\frac{Y_1 + D_1 M_1}{bfd - Z_1 + d_1 - N_1 D_1} = \frac{Y_1}{efl - Z_{pp'}} \quad (32)$$

We solve the equation (32) for D_1 as follow

$$D_1 = \frac{Y_1 (bfd - Z_1 + d_1 - efl + Z_{pp'})}{M_1 (efl - Z_{pp'}) + Y_1 N_1} \quad (33)$$

The equation (33) ensures that the second principal surface is a sphere centered on the back focal point and the hybrid lens is free of coma. The aspherical surface coordinates can be computed with the equation (31).

We use the method propose in the section 1.2 to fit the coordinates to the aspherical surface, simply by solving an equations system of first degree. Where the equations number depend on the aspherical coefficients number and each position entrance pupil is correct with one aspherical coefficient.

We use the method explained in the section two to correct the spherical aberration. This calculates the diffractive coefficients of the phase function by solving an equations system of the first degree too. The coefficients numbers depend of the different heights on the entrance pupil position that we want.

3.2.3. Examples

We have proposed a method to design aplanatic hybrid lens with chromatic aberration corrected to first order. Now we will show some numerical examples. All examples considered in this section we used the diffracted order $m = 1$.

The first example is a hybrid lens, $f/3.33$, 100 mm of effective focal length; the object is at the infinite and the lens has 0.5° of field angle, we use the best shape factor, see the figure 24. In the next table we show the first order parameters.

Surface	Radius (mm)	Thickness (mm)	Aperture Radius (mm)	Glass	
Object		1×10^{20}		Air	
1	57.234	4.100	15	BK-7	
2	Diffractive S.	-1096.682	97.558	15	Air

Table 15. First order Parameters example one.

In this case, we use two diffractive coefficients to compensate the spherical aberration. In the table 16 we show the diffractive coefficients value of the phase function.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	Paraxial	-0.0002617
a_4	10	2.680062×10^{-7}
a_6	7	$-1.292264 \times 10^{-11}$

Table 16. Diffractive coefficients of the phase function example one.

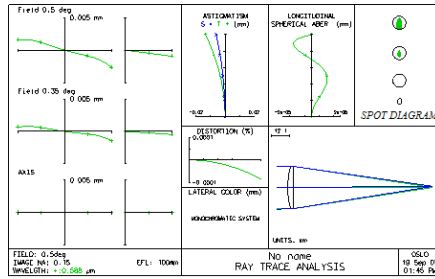


Figure 26. Example two rays trace analysis.

On axis the hybrid lens has two pupil positions with zero spherical aberration because we use two diffractive coefficients for off-axis points the principal aberrations are field curvature and astigmatism because the coma characteristic form of the curve is a second grade parabola then we have an aplanatic hybrid lens $f/3.33$ when the object is at infinite. The black circle is Airy's disc diameter. In this case the uses of aspherical coefficients for curving the second principal surface were not necessary.

The last example is a hybrid lens, $f/2$, 100 mm of effective focal length; the object is at the infinite and the lens has 0.5° of field angle, we use the shape factor equal to 0.885. In the next table we show the first order parameters.

Surface	Radius (mm)	Thickness (mm)	Aperture Radius (mm)	Glass
Object		1×10^{20}		Air
1	57.626	8.018	25	BK-7
2	Diffractive and aspherical S. -944.572	95.259	25	Air

Table 17. First order Parameters example four.

We use four aspherical coefficients to curve the second principal surface for compensate the coma. In the table 18 we show the aspherical coefficients value.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	25	7.868×10^{-6}
a_4	23.5	-3.175621×10^{-8}
a_6	22	4.531858×10^{-11}
a_8	17.5	$-2.391451 \times 10^{-14}$

Table 18. Aspherical coefficients of the second surface example four.

In this case, we use five diffractive coefficients to compensate the spherical aberration. In the table 19 we show the diffractive coefficients value of the phase function.

Coefficients	Aperture height(mm)	Value
a_2	Paraxial	-0.0002680
a_4	25	-3.778726×10^{-6}
a_6	23.5	1.6234×10^{-8}
a_8	22	$-2.272113 \times 10^{-11}$
a_{10}	17.5	1.13448×10^{-14}
a_{12}	11.25	5.319782×10^{-19}

Table 19. Diffractive coefficients of the phase function example four.

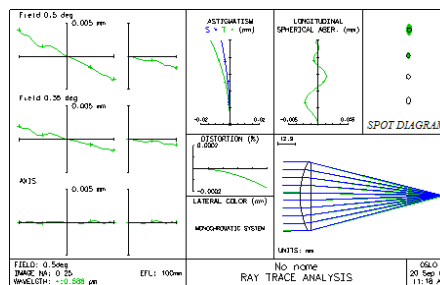


Figure 27. Example four rays trace analysis.

On axis the hybrid lens has five pupil positions with zero spherical aberration because we use four diffractive coefficients for off-axis points the principal aberrations are field curvature and astigmatism because the coma characteristic form of the curve is a second grade parabola then we have an aplanatic hybrid lens $f/2$ when the object is at infinite. The black circle is Airy's disc diameter.

In all cases the solutions have an additional correction of others aberrations. The aberrations corrected are lateral chromatic aberration and distortion. The correction occurs because both are function of the magnification and the Abbe's sine condition does that the paraxial and marginal magnifications will be equals

3.2.4. Conclusions

We present a method to design aplanatic hybrid lens, we use an aspherical surface to curve the second principal plane and correct the coma and we use diffractive surface to correct the spherical aberration. For f -numbers higher than $f/3.33$ we use only spherical surface and with these we can curve the principal plane. For f -numbers smaller than $f/3.33$ we use aspherical surfaces for curve the principal plane. All examples only present field curvature and astigmatism. This method does not require an optimization routine and it can be applied to any f -number with the object at the infinite. The axial chromatic aberration is correct only to first order. The solutions have an additional correction of transverse chromatic aberration and distortion because both depend on the magnification and the Abbe's sine condition do that the paraxial and marginal magnifications are equals.

4. REFERENCES

- 1.- M. Schwertner, M.J. Booth, T. Tanaka, T Wilson and S. Kawata, "*Spherical aberration correction system using an adaptive optics deformable mirror*", Optics Communications, **263**, 2, 147-151 (2006).
- 2.- Roman Ilinsky, "*Gradient-index meniscus lens free of spherical aberration*", J. Opt. A:Pure Appl. Opt. **2**, 449 - 451 (2000).
- 3.- J. Upatnieks, A. Vander Lugt and E. Leith, "*Correction of lens aberrations by means of holograms*", Appl. Opt., **5**, 589 - 593 (1966).
- 4.- O. García-Liévanos and S. Vázquez-Montiel, "*Optical Design of Galilean Telescopes using Hybrid Elements (refractive-diffractive) for people with low vision*", Proceedings of SPIE, **58750R**, pp 1-10 (2005).
- 5.- J. Castro-Ramos, A. Cordero-Davila, S. Vazquez-Montiel and D. Gale, "*Exact Design of Aplanatic Microscope Objectives, using two conic mirrors*", Appl. Opt., **37**, 5195-5198 (1998).

- 6.- Milton Katz, "Aspherical surfaces used to minimize oblique astigmatic error, power error, and distortion of some high positive and negative power ophthalmic lenses", *Appl. Opt.*, **21**, 2982-2991 (1982).
- 7.- Wen-Shing Sun, Chuen-Lin Tien, Ching-Cherhg Sun, et al, "Ophthalmic lens deign with the optimization of the aspherical coefficients", *Opt. Eng.*, **39**, 978-988 (2000).
- 8.- D. Malacara, "*Óptica Básica*", Fondo de Cultura Economica, (México, Second Edition, 2004).
- 9.- A. E. Conrady, "*Applied Optics and Optical Design*", Part I and II, Dover Publ., (New York, 1960).
- 10.- R. Kingslake, "*Lens Design Fundamentals*", (Academic Press, Inc. New York, USA, 1978), 112 -113 and 300-305.
- 11.- E. Hecht, "*Optics*", Addison Wesley Iberoamericana S.A., (Madrid, Third Edition, 2000).
- 12.- M.T. Chavez, "*Aplanatismo en lentes gruesas con objeto lejano y cercano mediante superficies conicas*", M.S. Thesis (Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Puebla, México, 2004).
- 13.- Virendra N. Mahajan, "*Aberration theory made simple*", SPIE Optical Engineering Press, (Washington, USA, 1991).
- 14.- Scott A. Lerner and Jose M. Sasian, "*Optical design with parametrically defined aspheric surface*", *Appl. Opt.*, **39**, 5205-5213 (2000).
- 15.- Akira Yabe, "*Optimal selection of aspheric surfaces in optical design*", *Optics Express*, **13**, 7233-7242 (2005).
- 16.- Joseph Meiron, "*On the design of optical systems containing aspheric surface*", *J. O. S. A.*, **46**, 288-292 (1956).
- 17.- Lambda Research Corporation, "*OSLO Optics Software for Layout and Optimization.*", Optics Reference, Version 6.1, Littleton, MA, USA, 2001.
- 18.- Malacara D. and Z. Malacara. "*Handbook of lens design*", Marcel Dekker Inc., (New York, 1994).

- 19.- N. Davison, A. A. Friesem, and E. Hasman, "Analytic design diffractive-refractive achromats", *Applied optics*, 32, No. 25, 4770-4774, (1993).
- 20.- Victor A. Soifer, *Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements*, Wiley & Sons, (New York, 2002).
- 21.- Dele A. and G. Michael Morris, "Design of diffractive singlets for monochromatic imaging", *Applied optics*, 30, No. 16, 2151-2157, (1991).
- 22.-H. P. Herzig, "Design of refractive and diffractive micro-optics", S. Martellucci, A. Chester, Plenum press, N.Y., 23-33, (1997).
- 23.- M. Young, "Zone Plates and Their Aberrations", *J.O.S.A.*, 62, 972-976, (1972).
- 24.- Reinhard W. Meier, "Magnification and Third-Order Aberrations in Holography", *J.O.S.A.*, 55, 987-992, (1965).
- 25.- Thomas Stone and Nicholas George, "Hybrid diffractive – refractive lenses and achromats", *Applied optics*, **27**, 2960 – 2971, 1988.
- 26.- W. C., Sweatt, "Describing holographic optical elements as lenses", *J.O.S.A.*, **67**, 6, pp. 803-808, 1977.
- 27.- W. C., Sweatt, "Mathematical equivalence between a holographic optical elements and ultra-high index lens", *J.O.S.A.*, **69**, 3, pp. 486-487, 1979.
- 28.- J.A. Hernández-Cruz, S. Vázquez-Montiel, O. García-Liévanos, J. Castro-Ramos, "Analytical and Exact Method for Design Diffractive Lenses Free of Spherical Aberration", *Proc. SPIE*, Vol. 6342, P. 63422J1-8, Canada (2006).
- 29.- W. A. Kleinhans, "Aberrations of curved zone plates and Fresnel lenses", *Applied Optics*, **16**, 6, pp. 1701- 1704, 1977.
- 30.- W. T. Welford, *Aberrations of the symmetrical optical system*, Chapter 5 , *CRC Press Inc, Boston*, 1986.
- 31.- J. Castro-Ramos, S. Vázquez-Montiel, J. Hernández-de-la-Cruz, O. García-Liévanos y W. Calleja-Arriaga, "Óptica difractiva: una revisión al diseño y construcción de sistemas ópticos empleando lentes difractivas", *Revista Mexicana de Física*, **52**, 6, 479-500, 2006.

- 32.- Rudolf Kingslake, *Lens design fundamentals*, 158, Academic Press, New York, 1978.
- 33.- G. D. Wassermann and E. Wolf, "On the theory of aplanatic aspheric system", *Proc. Phys. Soc.*, **62B**, pp. 2 – 8, (1949).
- 34.- Evelyn M. Vaskas, "Note on the Wassermann-Wolf method for designing aspheric surfaces", *J.O.S.A.*, **47**, pp. 669 – 670, (1957).
- 35.- J. J. M. Braat and P. F. Greve, "Aplanatic optical system containing two aspheric surfaces", *Applied optics*, **18**, pp. 2187 – 2191, (1979).
- 36.- W.T. Welford, "Practical design of an aplanatic hologram lens of focal length 50 mm and numerical aperture 0.5", *Optics Communications*, **15(1)**, pp. 46 – 49, (1975).
- 37.- W. T. Welford, "Aberrations of the symmetrical optical system", Academic Press Inc, London, pp. 190-202, 1974.
- 38.- Rudolf Kingslake, *Lens design fundamentals*, pp. 56-58, Academic Press, New York, 1978.