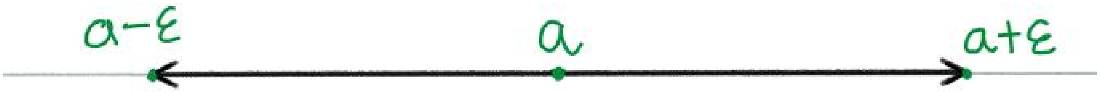
LIMITA FUNKCIJE

Okolica točke a je **odprt interval s središčem v a**:



- meji intervala sta oddaljeni od točke a za ε; $(\varepsilon \in \mathbb{R}^+)$ ε='*epsilon*'
- interval širine $2\boldsymbol{\varepsilon}$ zapišemo: $(\boldsymbol{a-\varepsilon},\ \boldsymbol{a+\varepsilon})$,
- ta interval imenujemo **ε-okolica točke a**.

Označimo jo:

$$\boxed{O_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)}$$

Okolica je lahko poljubno velik interval, širina intervala je odvisna od izbire pozitivnega števila ε (ki pa je ponavadi, ko želimo kaj dokazati, zelo majhen).

Število x je v ε-okolici točke a, če je **od točke a oddaljeno za manj kot $\boldsymbol{\varepsilon}$**:

$$x \in O_\varepsilon(a) \Leftrightarrow |x-a| < \varepsilon$$

Definicija limite

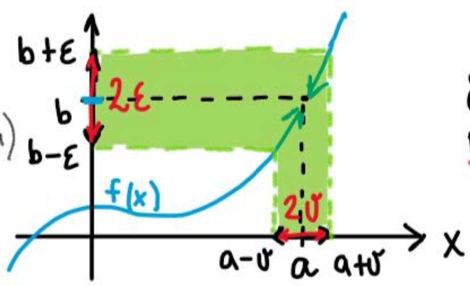
Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

obstaja, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

1. PRIKAZ:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$

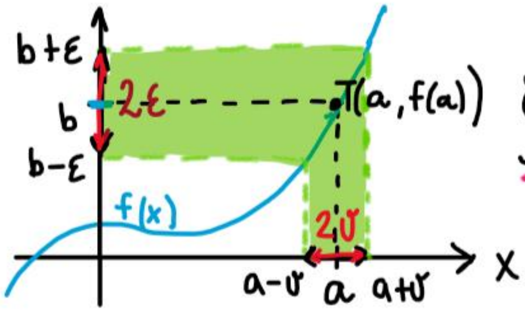


če f(x) v točki a **NI** definirana

→ f(a) ne obstaja, vendar limita obstaja $b \neq f(a)$

2. PRIKAZ:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = f(a)$$



če $f(x)$ v točki a JE definirana

→ $f(a)$ obstaja

$b = f(a)$

Pravila za računanje z limitami:

1.) vsota limit je enaka limiti vsote:

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

2.) limita produkta konstante s funkcijo

$$\lim_{x \to a} \left(k \cdot f(x)\right) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

3.) limita produkta je enaka produktu limit

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

4.) limita količnika

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad ; \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

ZVEZNOST FUNKCIJE

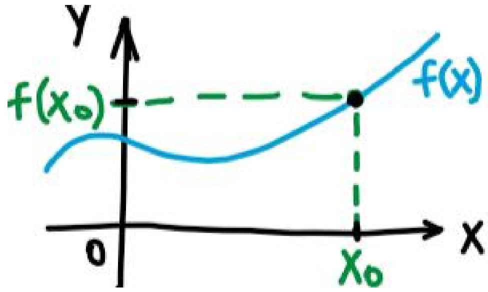
Definicija zveznosti funkcije v točki

Funkcije si predstavljamo kot krivulje v ravnini, ki so lahko pretrgane ali nepretrgane. Kadar so nepretrgane, pravimo da je funkcija zvezna, če pa je krivulja v kakšni točki prekinjena, pravimo da je funkcija nezvezna.

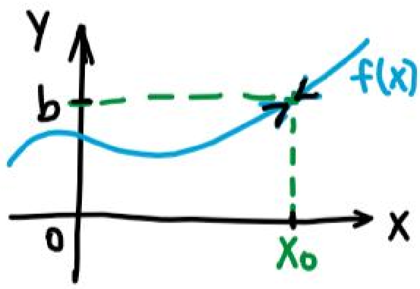
Funkcija f je v točki x_0 zvezna natanko takrat, ko je v točki x_0 definirana in ima limito:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Najbolj običajen primer je, ko ima funkcija v točki a limito in je tudi zvezna v tej točki:



Velikokrat pa se zgodi tudi, da ima funkcija v točki a limito, ampak v tej točki ni zvezna:



$b \neq f(x_0)$

f. v x_0 ni zvezna

Leva in desna limita

Število L je **leva limita funkcije f v točki x_0**, kadar se x približuje x_0 z leve strani. Oznaka za levo limito:

x narašča proti x_0
z leve strani

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L$$

Število D je **desna limita funkcije f v točki x_0**, kadar se x približuje x_0 z desne strani. Oznaka za desno limito:

x pada proti x_0
z desne strani

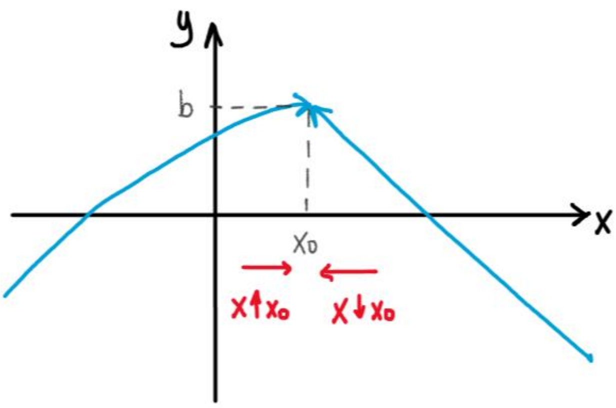
$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = D$$

Limita funkcije

Naj bo f definirana v okolici točke x_0.

Limita v tej točki obstaja natanko takrat, **ko v tej točki obstajata leva in desna limita in sta enaki:**

$$\boxed{\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)}$$

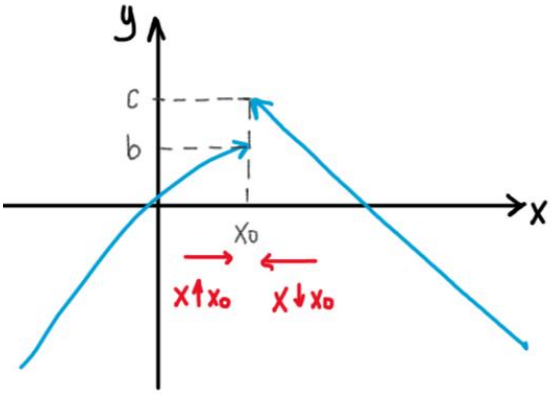


$$L = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = b$$

$$D = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = b$$

Torej $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, saj je $L = D$

Limita funkcije v točki x_0 je vrednost b.



$$L = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = b$$

$$D = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = c$$

Torej $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ne obstaja, saj je $L \neq D$

Funkcija nima limite v točki x_0.

Primeri zveznih funkcij:

- konstantna funkcija: $f(x) = x$
- linearna funkcija: $f(x) = kx + n$
- kvadratna funkcija: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- potenčna funkcija: $f(x) = x^n$; $n \in \mathbb{N}$
- polinomska funkcija: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
- eksponentna funkcija: $f(x) = a^x$; $a > 0$
- logaritemska funkcija: $f(x) = \log_a x$; $x > 0, a > 1$
- sinusna funkcija: $f(x) = \sin x$
- kosinusna funkcija: $f(x) = \cos x$

Lastnosti zveznih funkcij:

- Zvezna funkcija, ki ni nikjer na zaprtem intervalu enaka 0, ima na vsem intervalu stalen predznak (je povsod pozitivna ali povsod negativna).

- Če je na krajiščih zaprtega intervala $[a, b]$ na katerem je zvezna, različno predznačena, ima na tem intervalu vsaj eno ničlo.

- Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na njem omejena in zavzame svojo natančno zgornjo mejo M in spodnjo mejo m in vse vrednosti med njima.

- Če je funkcija f naraščajoča in zvezna, je njena inverzna funkcija f^{-1} tudi zvezna in naraščajoča funkcija.

Neskončna limita

Neskončna limita je limita, ki naraste čez vse vrednosti, ko se naša variabila bliža limitni vrednosti. Zapišemo jo kot:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

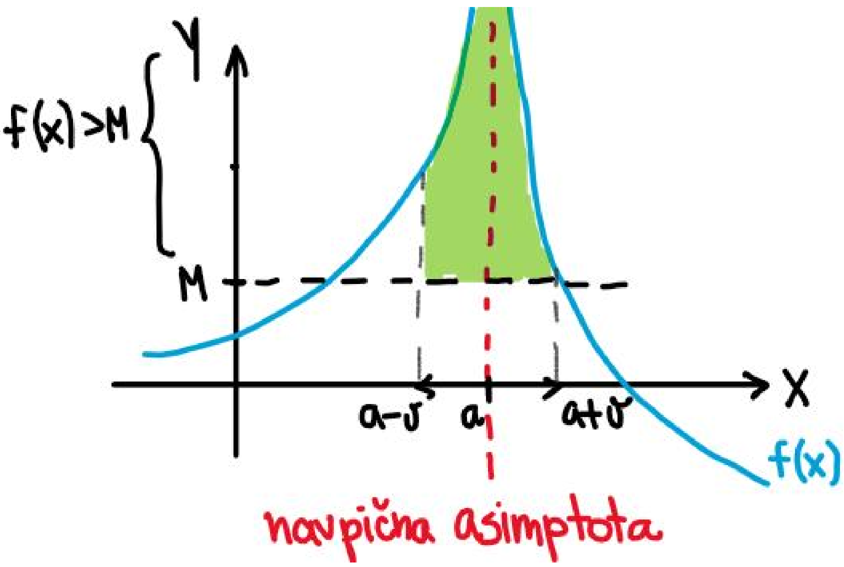
Definicija neskončne limite:

Limita je neskončna, če za poljubno vrednost $M \in \mathbb{R}$, da lahko najdemo tak δ, da ko bo x v δ-okolici točke a, torej $x \in (a-\delta, a+\delta)$, bo f(x) večja od M.

Matematični zapis:

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, če za vsak $M \in \mathbb{R}$ obstaja $\delta > 0$,

da velja: če je $x \in (a-\delta, a+\delta)$, potem je $f(x) > M$



Navpična asimptota

S pomočjo limit lahko določimo potek navpične asimptote v grafu. Če velja, da

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$$

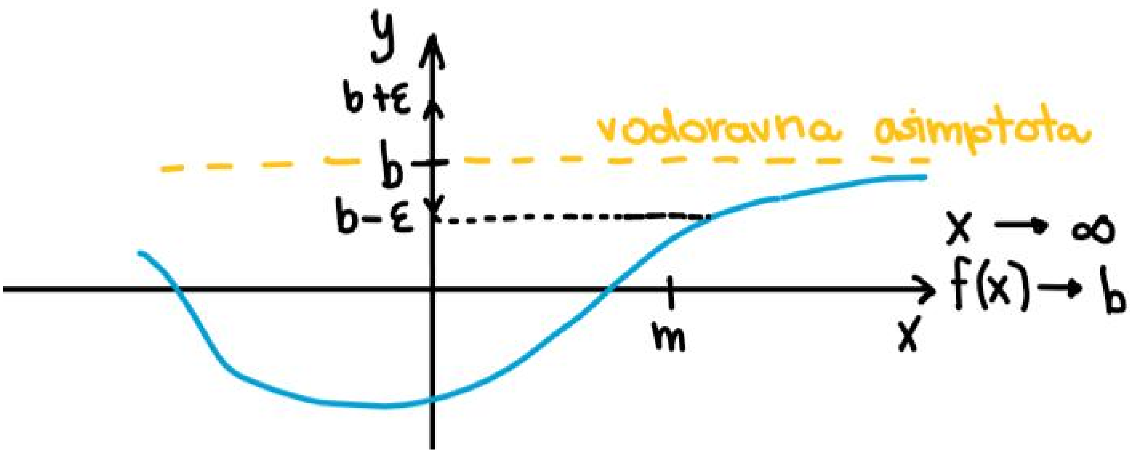
potem ima graf funkcije f(x) navpično asimptoto v x = a.

Limita v neskončnosti

Z limito v neskončnosti opišemo obnašanje funkcij in njihovih grafov daleč proč od koordinatnega izhodišča, ko neodvisna spremenljvka x raste prek vseh meja v pozitivno ali negativno smer.

Zapišemo jo kot:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$



Matematični zapis:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, če za vsak $m \in \mathbb{R}$ obstaja $\varepsilon > 0$,

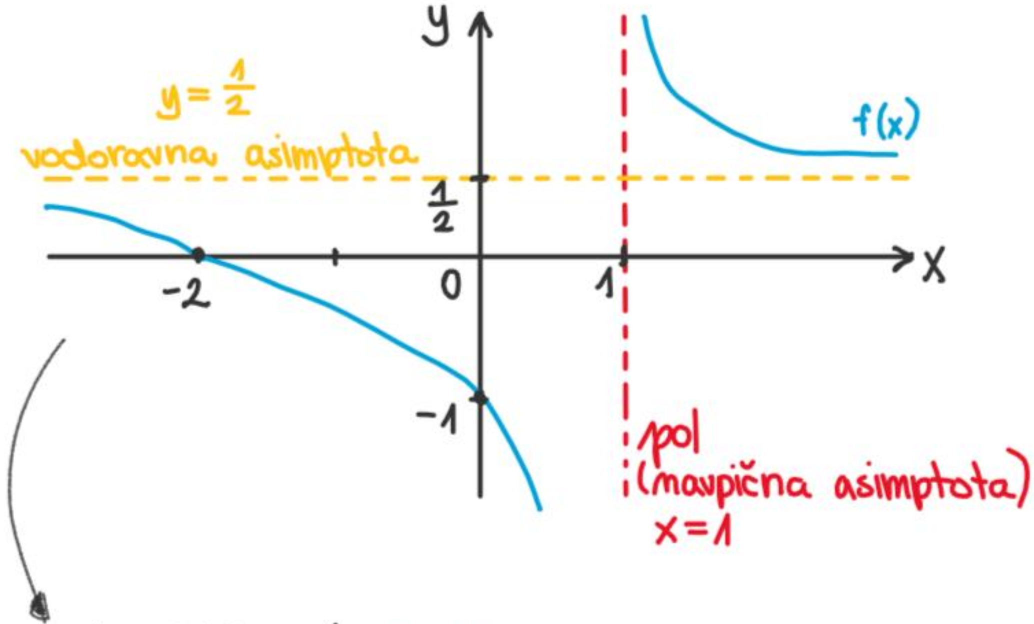
da velja: $f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, potem $x > m$

Limita v neskončnosti racionalnih funkcij

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad ; \quad q(x) \neq 0$$

Limita v neskončnosti pri racionalni funkciji je ravno **vrednost vodoravne asimptote ali poševne asimptote** (*glej 'Zapiski za 3. letnik'),* kar pa je odvisno od stopenj polinomov v števcu in imenovalcu.

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-2}$$



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$ limita v neskončnosti

$$L = \lim_{x \uparrow 1} f(x) = -\infty$$ leva limita

$L \neq D \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = /$

$$D = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = \infty$$ desna limita

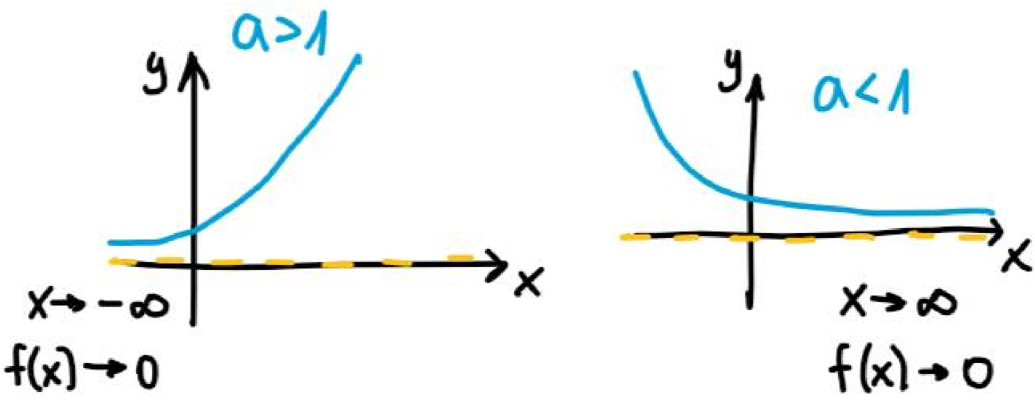
Limita v neskončnosti eksponentnih funkcij

$$f(x) = a^x \quad ; \quad a > 0$$

- za limito eksponentne funkcije velja:

1.) $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$, če je $a < 1$

2.) $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, če je $a > 1$



- v kolikor gre za premik funkcije po y osi, dobi funkcija obliko

$$f(x) = a^x + p \quad ; \quad p \in \mathbb{R}$$

Potem je limita te funkcije

$$\lim_{x \to \infty} (a^x + p) = p \quad , \text{če je } a < 1$$

$p \in \mathbb{R}$

in $$\lim_{x \to -\infty} (a^x + p) = p \quad , \text{če je } a > 1$$

Tudi pri eksponentni funkciji se v vrednosti limite nahaja vodoravna asimptota.

Posebne limite:

- Limita in Eulerjeva konstanta:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

- Poseben primer limite sinus:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

TE ZANIMAJO NATANČNO REŠENE NALOGE IZ POGLAVJA 'LIMITA IN ZVEZNOST FUNKCIJE'? *Pripravljam e-zbirko 200+ pregledno rešenih primerov korak za korakom, s katerim boš popolnoma usvojil-a vso snov. To ti zagotavljam. :)*

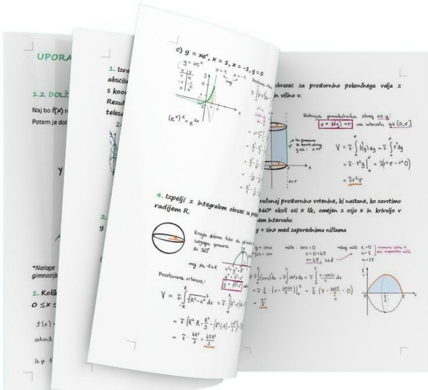
Zbirka bo dodana naši spletni strani v začetku marca 2023. Tako da se prijavi na email novičke ali pa spremljaj obvestila.

IN PA NE SPREGLEJ ….

ZBIRKE 1000+ REŠENIH NALOG, KI SO ŽE NA VOLJO:

- ODVOD (pravila za računanje, uporaba odvoda) z vso teorijo in formulami: 230+ nalog

- INTEGRAL (pravila, določeni in nedoločeni integral, metode integriranja, ploščine in prostornine) z vso teorijo in formulami: 170+ nalog



- ZAPOREDJA (lastnosti zaporedij, limita in konvergenca, aritmetično zaporedje, geometrijsko zaporedje in vrsta, obrestni račun): 280+ nalog

- KOMBINATORIKA IN VERJETNOST (osnovni izrek kombinatorike, permutacije, variacije, kombinacije, binomski izrek, verjetnost): 250+ nalog

- REŠENE MATURITETNE POLE (18 pol; spomladanski rok 2004-2021)

Za dostop do rešenih nalog preveri TUKAJ.