

**MASARYKOVA UNIVERZITA  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY**

# **Bakalářská práce**

**BRNO 2019**

**MICHAELA KECSKÉSOVÁ**

# Zeta funkce a Riemannova hypotéza

Bakalářská práce

**Michaela Kecskésová**

**Vedoucí práce: doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.      Brno 2019**

# Bibliografický záznam

**Autor:**

Michaela Kecskésová  
Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav matematiky a statistiky

**Název práce:**

Zeta funkce a Riemannova hypotéza

**Studijní program:**

Matematika

**Studijní obor:**

Finanční a pojistná matematika

**Vedoucí práce:**

doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

**Akademický rok:**

2018/2019

**Počet stran:**

*viii + 44*

**Klíčová slova:**

Prvočíselná věta; prvočíselná funkce; nekonečné řady; Riemannova hypotéza; zeta funkce; Eulerův součin

# Bibliografický záznam

**Autor:**

Michaela Kecskésová  
Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita  
Ústav matematiky a štatistiky

**Názov práce:**

Zeta funkcia a Riemannova hypotéza

**Študijný program:**

Matematika

**Študijný odbor:**

Finančná a poistná matematika

**Vedúci práce:**

doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

**Akademický rok:**

2018/2019

**Počet strán:**

*viii + 44*

**Kľúčové slová:**

Prvočíselná veta; prvočíselná funkcia; nekonečné rady;  
Riemannova hypotéza; zeta funkcia; Eulerov súčin

# Bibliographic Entry

<b>Author:</b>	Michaela Kecskésová Faculty of Science, Masaryk University Department of mathematics and statistics
<b>Title of Thesis:</b>	Zeta function and the Riemann hypothesis
<b>Degree Programme:</b>	Mathematics
<b>Field of Study:</b>	Financial and insurance mathematics
<b>Supervisor:</b>	doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.
<b>Academic Year:</b>	2018/2019
<b>Number of Pages:</b>	<i>viii + 44</i>
<b>Keywords:</b>	Prime Number theorem; prime counting function; infinite series; Riemann hypothesis; zeta function; Euler product formula

# Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme zejména Riemannově zeta funkci, Prvočíselné větě a Riemannově hypotéze. Formulujeme si dva odlišné tvary Prvočíselné věty, poté postupně budujeme Riemannovu zeta funkci a ukazujeme si její základní vlastnosti a také její souvislost s prvočísly. Jako další formulujeme znění Riemannovy hypotézy a její zobecnění a poté pojednáváme o některých pokusech o její důkaz. V závěru práce se zaměřujeme na to, jakým způsobem Riemannova hypotéza zasahuje do dalších vědeckých oborů.

# Abstrakt

V tejto bakalárskej práci sa venujeme najmä Riemannovej zeta funkci, Prvočíselnej vete a Riemannovej hypotéze. Formulujeme si dva odlišné tvary Prvočíselnej vety, potom postupne budujeme Riemannovu zeta funkciu a ukazujeme si jej základné vlastnosti a taktiež jej súvislosť s prvočíslami. Ako ďalšie formulujeme znenie Riemannovej hypotézy a jej zovšeobecnenie a pojednávame o niektorých pokusoch o jej dôkaz. V závere práce sa zameriavame na to, akým spôsobom Riemannova hypotéza zasahuje do ďalších vedeckých oborov.

# Abstract

In this thesis, we mainly focus on the Riemann zeta function, the Prime number theorem and the Riemann hypothesis. We formulate two different forms of the Prime number theorem, then we build the Riemann zeta function step by step and show its main properties as well as its connection to prime numbers. We then state the Riemann hypothesis and its generalization and further discuss various attempts at delivering its proof. At the end of this thesis, we focus on how does the Riemann hypothesis affect other scientific disciplines.



MASARYKOVA UNIVERZITA  
Přírodovědecká fakulta

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2018/2019

**Ústav:** Ústav matematiky a statistiky

**Studentka:** Michaela Kecskésová

**Program:** Matematika

**Obor:** Finanční a pojistná matematika

Ředitel Ústavu matematiky a statistiky PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

**Název práce:** Zeta funkce a Riemannova hypotéza

**Název práce anglicky:** Zeta function and Riemann hypothesis

**Oficiální zadání:**

Cílem práce je popsat Riemannovu zeta funkci a její základní vlastnosti. Poté se zaměřit na Riemannovu hypotézu, popsat její význam a pojednat o pokusech o její důkaz, popř. popsat i její zobecnění. Je možné, pokud to rozsah práce umožní, věnovat se i jiným nevyřešeným matematickým problémům.

**Literatura:**

MAZUR, Barry a William A. STEIN. *Prime numbers and the Riemann hypothesis*. First published. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2016. xi, 142. ISBN 9781107499430.

P. Borwein, S. Choi, B. Rooney a A Weirathmueller. *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*. Springer-Verlag New York, 2008, ISBN 978-0-387-72125-5.

**Jazyk závěrečné práce:** slovenština

**Vedoucí práce:** doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.

**Datum zadání práce:** 22. 5. 2018

**V Brně dne:** 31. 10. 2018

Souhlasím se zadáním (podpis, datum): 08.11.2018

.....  
Michaela Kecskésová  
studentka

.....  
doc. Mgr. Petr Hasil, Ph.D.  
vedoucí práce

.....  
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.  
ředitel Ústavu matematiky a  
statistiky

# Pod'akovanie

Na tomto mieste by som chcela pod'akovať doc. Mgr. Petrovi Hasilovi, Ph.D., za konzultácie a cenné rady poskytnuté pri písaní tejto bakalárskej práce.

# Prohlášení

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu vypracovala samostatne s využitím informačných zdrojov, ktoré sú v práci citované.

Brno 1. května 2019

.....  
Michaela Kecskésová

# Obsah

<b>Úvod</b> .....	<b>1</b>
<b>Kapitola 1. Použité pojmy a definície</b> .....	<b>3</b>
<b>Kapitola 2. Prvočíselná veta</b> .....	<b>6</b>
2.1 Logaritmický integrál .....	9
<b>Kapitola 3. Zeta funkcie</b> .....	<b>11</b>
3.1 Riemannova zeta funkcia .....	12
3.2 Rozširovanie definičného oboru .....	14
3.2.1 Gamma funkcia .....	16
3.3 Eulerov súčin .....	18
3.4 Vlastnosti funkcie $\zeta(s)$ .....	19
3.4.1 Nulové body .....	19
<b>Kapitola 4. Möbiova funkcia <math>\mu(n)</math></b> .....	<b>22</b>
<b>Kapitola 5. Riemannova hypotéza</b> .....	<b>25</b>
5.1 Vizualizácia .....	26
5.2 Súvislosti s prvočíslami .....	28
5.3 Význam .....	29
5.4 Zovšeobecnená Riemannova hypotéza .....	33
<b>Kapitola 6. Pokusy o dôkaz</b> .....	<b>35</b>
6.1 Thomas Stieltjes .....	35
6.2 Pál Turán .....	36
6.3 Alan Turing .....	36
6.4 Michael Atiyah .....	36
6.5 Existencia dôkazu .....	38
<b>Kapitola 7. Význam Riemannovej hypotézy</b> .....	<b>39</b>
7.1 Rozloženie prvočísel .....	39
7.2 Šifrovanie .....	39
7.3 Fyzika .....	40
<b>Závěr</b> .....	<b>41</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b> .....	<b>42</b>

# Úvod

Prvočísla sú pojem, o ktorom sa učia už deti na základnej škole. Tie zvláštne čísla, ktoré nie je možné deliť žiadnym iným číslom, než 1, alebo sebou samým. Zoznam začína číslom 2 ako jediným párnym prvočíslom a pokračuje

$$3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Otázka znie: Aké je ďalšie prvočíslo? Vieme ho nejakým spôsobom predpovedať?

Človeku, ktorému by sa podarilo nájsť cestu, akou presne predpovedať alebo popísat správanie prvočísel, by sa s určitosťou dostalo veľkej slávy a celosvetového uznania a bezpochyby by sa významne zapísal do histórie matematiky medzi mená ako Isaac Newton, Leonhard Euler, Albert Einstein a pod. O niečo takéto sa v roku 1859 pokúsil v relatívne mladom veku 32 rokov nemecký matematik Bernhard Riemann.

Nesmierne nadaný Georg Friedrich Bernhard Riemann mal už v tom čase publikovaných niekoľko významných prác týkajúcich sa geometrie, komplexných funkcií, Fourierových radov, Abelovských funkcií atď. a v tomto roku sa stal členom Berlínskej Akadémie vied. Pri tejto príležitosti predložil svoj jediný článok venujúci sa teórií čísel s názvom „*O počte prvočísel menších ako daná hodnota*“, v ktorom sa pokúsil odvodiť všeobecný vzorec pre počet prvočísel menších alebo rovných ako ľubovoľné zvolené číslo. Zaoberal sa v ňom funkciou zeta, označenou gréckym písmenom  $\zeta$  a najmä vzťahom

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

kde za  $p$  dosádzal prvočísla. Tento vzťah už nejaký čas pred ním objavil Leonhard Euler, no Riemann sa ako prvý začal zaoberať zeta funkciou pre komplexnú premennú.

Práve v tomto článku vyslovil tvrdenie, že všetky netriviálne nulové body funkcie zeta majú reálnu časť rovnú  $\frac{1}{2}$ . Toto tvrdenie je dnes známe ako slávna Riemannova hypotéza a už takmer 160 rokov odoláva akýmkoľvek pokusom o dokázanie alebo naopak, vyvrátenie. Práve z tohto dôvodu bola v roku 1900 zaradená medzi 23 Hilbertových problémov, ktoré predložil nemecký matematik David Hilbert na svojej prednáške „*Problémy matematiky*“ na druhom medzinárodnom kongrese matematikov v Paríži. V tej dobe boli tieto považované za najväčšie nevyriešené problémy. Dnes už je mnoho z nich dokázaných, prípadne vyvrátených, no Riemannova hypotéza ostáva stále otvorenou otázkou.

V roku 2000 bola taktiež zaradená medzi 7 tzv. problémov milénia, t.j. nevyriešených otázok z rôznych oblastí matematiky, za ktorých vyriešenie Clayov matematický inštitút v New Hampshire vypísal odmenu milión dolárov.

V tejto bakalárskej práci sa zaoberáme v prvých troch kapitolách kľúčovými pojmi súvisiacimi s Riemannovou hypotézou, a to najmä Prvočíselnou vetou, funkciou zeta a Eulerovým súčinom. V ďalších kapitolách formulujeme presné znenie hypotézy a pojednávame o jej význame, zovšeobecnení a niektorých historických pokusoch o jej dokázanie.

Pre zdôraznenie významnosti Riemannovej hypotézy si môžeme na úvod taktiež uviesť známy citát od Davida Hilberta:

*„Ak by som sa mal prebudiť po tisícročnom spánku, moja prvá otázka by bola: Vyriešil už niekto Riemannovu hypotézu?“*

*–David Hilbert*

# Kapitola 1

## Použité pojmy a definície

V tejto bakalárskej práci sa vyskytuje pomerne veľa pojmov z oboru komplexnej analýzy a teórie čísel, ktoré si pre zjednodušenie čítania práce objasníme. Niektoré ďalšie pojmy budú definované v nasledujúcich kapitolách, u čitateľa sa však napriek tomu predpokladajú znalosti základných pojmov a súvislostí z algebry, aritmetiky a matematickej analýzy, vrátane komplexných čísel. Definície sme preberali zo zdrojov [1], [2], [4], [8], [17], [21], [27] a [34].

- **Aritmetická funkcia**

Aritmetická funkcia je reálna alebo komplexná funkcia, ktorej definičným oborom je množina prirodzených čísel, teda ide o zobrazenie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ .

- **Laurentov rad**

Laurentovým radom alebo Laurentovým rozvojom funkcie  $f$  so stredom v bode  $z_0$  nazývame súčet funkcionálnych radov tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}, \quad (1.1)$$

kde  $z_0$  a  $a_n, n \in \mathbb{Z}$ , sú pevne dané komplexné čísla, pričom  $a_n$  nazývame koeficientmi Laurentovho radu. Mocninový rad  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  sa nazýva *regulárna časť* a rad  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$  sa nazýva *hlavná časť*.

- **Holomorfná funkcia**

Holomorfná funkcia je komplexná funkcia jednej alebo viacerých komplexných premenných definovaná na otvorenej podmnožine  $\mathbb{C}$ , ktorá je v každom bode jej definičného oboru komplexne diferencovateľná. Z komplexnej diferencovateľnosti tak tiež plynne nekonečná diferencovateľnosť a rozvinuteľnosť do Taylorovho radu. Funkcia  $f$  je holomorfná na otvorenej množine  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  práve vtedy, keď pre každý bod  $z_0 \in \Omega$  existuje limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

- **Celistvá funkcia**

Funkcia  $f$ , holomorfná na celej komplexnej rovine, sa nazýva celistvá.

- **Singularita funkcie**

Bod  $z_0 \in \mathbb{C}$  sa nazýva izolovanou singularitou funkcie  $f$ , ak je  $f$  holomorfná na nejakom prstencovom okolí bodu  $z_0$ , avšak nie je holomorfná v samotnom bode  $z_0$ . Potom podľa Laurentovej vety [17] existuje Laurentov rozvoj funkcie  $f$  v okolí bodu  $z_0$ . Ak je hlavná časť tohto radu nulová pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , potom je  $z_0$  *odstraniteľná singularita*. V prípade, ak má hlavná časť radu konečne veľa nenulových členov, teda  $\exists k \in \mathbb{N}$  také, že  $a_{-k} \neq 0$  a  $a_{-n} = 0$  pre každé  $n > k$ , potom sa bod  $z_0$  označuje ako *pól rádu k*. V poslednom prípade, ak má hlavná časť Laurentovoho radu nekonečne veľa nenulových členov, nazývame izolovanú singularitu  $z_0$  *podstatnou*.

- **Rezíduum**

Rezíduum funkcie  $f$  v bode  $z_0$  je Laurentov koeficient  $a_{-1}$  z radu (1.1) a označuje sa  $a_{-1} = \text{res}_{z_0} f$ . Pre  $z_0 = \infty$ , čo bude aj prípad v tejto bakalárskej práci, je  $\text{res}_\infty f = -a_1$ , kde  $a_1$  je koeficient v Laurentovom rozvoji

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n.$$

- **Meromorfná funkcia**

Meromorfná funkcia na otvorenej podmnožine  $D$  komplexnej roviny je komplexná funkcia komplexnej premennej, ktorá je holomorfná na  $D$  s výnimkou nejakej množiny izolovaných bodov, ktoré sú pôlmi danej funkcie.

- **Bernoulliho čísla**

Bernoulliho čísla, označované ako  $B_n$ , sú členy postupnosti racionálnych čísel, ktoré sa často vyskytujú v teórií čísel. Najčastejšia je definícia pomocou číselného radu, a to ako

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 1} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad |t| < 2\pi.$$

Pričom platí, že pre každé  $n$  rôzne od nuly je  $B_n$  negatívne, ak je  $n$  deliteľné 4 a pozitívne inak. Pre každé nepárne  $n$  rôzne od 1 je  $B_n = 0$ . Ich hodnoty sa dajú vypočítať iteráciami pomocou rekurentného vzorca

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, \quad n \geq 2.$$

V tabuľke 1.1 sú uvedené hodnoty týchto čísel až po  $B_{20}$ .

$n$	0	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$B_n$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3167}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

Tabuľka 1.1: Hodnoty Bernoulliho čísel až po  $B_{20}$ .

- **Eulerova–Mascheroniho konštantá**

Eulerova–Mascheroniho konštantá  $\gamma$  je definovaná ako limitný rozdiel medzi súčtom harmonického radu  $H_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  a prirodzeným logaritmom  $\ln n$  pre  $n \rightarrow \infty$ . Vzorec pre jej výpočet môžeme napísť ako

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) = \int_1^{\infty} \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} \right) dx,$$

kde  $[x]$  vyjadruje dolnú celú časť čísla  $x$ .

- **Jacobiho theta funkcia**

Jacobiho theta funkciu definujeme pomocou predpisu

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}, \quad x > 0.$$

- **Apéryho konštantá**

Apéryho konštantá je hodnota zeta funkcie v bode 3, teda

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \right).$$

Jej približná hodnota je  $\zeta(3) = 1, 202 056 903 159 954 \dots$ . Často sa vyskytuje vo fyzikálnych problémoch, týkajúcich sa hlavne kvantovej elektrodynamiky. Roger Apéry v roku 1978 dokázal, že je iracionálna. Tento výsledok je známy ako Apéryho veta a je dostupný na [21].

- **Möbiova inverzia**

Möbiova inverzia je proces inverzie pre aritmetické funkcie, ktorý hovorí, že ak máme funkcie  $g$  a  $f$  splňujúce

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad \forall n \geq 1,$$

potom vieme  $f$  vyjadriť ako

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right), \quad \forall n \geq 1,$$

kde index  $d|n$  značí sumu cez všetky pozitívne delitele  $d$  čísla  $n$  a  $\mu(d)$  označuje Möbiovu funkciu, ktorá je podrobne rozobratá v kapitole 4.

# Kapitola 2

## Prvočíselná veta

Téma rozoberaná v tejto bakalárskej práci je veľmi úzko prepojená s prvočíslami a ich rozložením, čo si neskôr aj podrobnejšie ukážeme. Preto si v tejto kapitole načrtнем niektoré ich dôležité vlastnosti a poznatky týkajúce sa ich usporiadania. Hlavnými zdrojmi informácií a tabuliek pre túto kapitolu boli [7], [20], [29] a [34].

Prvočísla samé o sebe sú akousi záhadou, ktorá fascinuje matematikov už celé stáročia. Podľa definície sú to čísla, ktoré nemajú žiadne vlastné delitele okrem čísla 1 – sú deliteľné iba 1 a samé sebou, narozdiel od zložených čísel, ktoré majú aj tzv. *netriiviálne delitele*, teda delitele rôzne od 1 a seba samého. Samotné číslo 1 sice tejto definícii vyhovuje, v dnešnej matematike sa však medzi prvočísla zvyčajne nezaraduje. Podľa *Základnej vety aritmetiky* [31] je možné každé prirodzené číslo väčšie ako 1 jednoznačne vyjadriť ako súčin mocnín prvočísel. Vďaka tomu sú prvočísla v istom zmysle vnímané ako jeden zo základov pre budovanie všetkých čísel. Je však veľmi náročné odhadnúť ich „správanie“ – výskyt, rozloženie, atď.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Tabuľka 2.1: Prvočísla medzi prvými 1 000 prirodzenými číslami

Ak sa bližšie pozrieme na tabuľku 2.1 a rozdelíme si prvých 1 000 prirodzených čísel do blokov po 100, zistíme, že medzi číslami 1 a 100 sa nachádza 25 prvočísel. Medzi 401 a 500 ich je 17 a medzi 901 a 1 000 už iba 14. Ak zoberieme prvý trilión prirodzených čísel, v poslednom bloku budú iba 4 prvočísla. Vyzerá to teda, že sa

počet prvočísel v každom bloku postupne znižuje. Z toho si prirodzene môžeme položiť otázku, či to znamená, že prvočísla nakoniec úplne vymiznú, resp. či existuje nejaké najväčšie prvočíslo. Táto otázka bola zodpovedaná Euklidom už okolo roku 300 p.n.l. Odpoveď na ňu si sformulujeme do nasledujúcej vety a dokážeme.

**Veta 2.1.** *Prvočisel je nekonečne veľa.*

*Dôkaz.* Predpokladajme, že prvočisel je konečný počet. Spravíme si zoznam všetkých prvočísel  $2, 3, 5, \dots, p$ . Nech teraz  $P$  je ich súčin, teda  $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots p$ . Nech  $q = P+1$ . Číslo  $q$  môže byť buď prvočíslo, alebo zložené číslo.

- Ak je  $q$  prvočíslo, tým sme našli nové prvočíslo, ktoré nie je v zozname.
- Ak je  $q$  zložené číslo, potom podľa Základnej vety aritmetiky musí byť deliteľné nejakým prvočíslom, ktoré nie je v zozname.

To znamená, že v oboch prípadoch existuje prvočíslo, ktoré nie je v zozname. Teda prvočisel musí byť nekonečný počet.  $\square$

Doteraz sa však nepodarilo presne odhadnúť nejaký systém alebo pravidlo, podľa ktorého by prvočísla boli rozložené. Takisto zatiaľ nemáme žiadny algoritmus, ktorý by rýchlo a efektívne vedel rozhodnúť, či je nejaké „veľké“ číslo prvočíslom. Práve táto otázka je úzko spojená s Riemannovou zeta funkciou a jej nulovými bodmi.

Najlepšími algoritmami pre generovanie prvočísel sú tzv. *sitové algoritmy*, z ktorých je najznámejší algoritmus *Erastotenovo sito*. Jeho princíp je nasledovný:

1. Vezmi všetky prirodzené čísla od 2 až po zadané  $N$ .
2. Odober prvé číslo zo zoznamu a označ ho ako prvočíslo.
3. Vyškrtni všetky násobky odobratého čísla.
4. Zopakuj krok 2.

Týmto spôsobom algoritmus postupne získa všetky prvočísla až do nami zvoleného čísla  $N$ . Postup sa však stáva neefektívnym pre vysoké hodnoty  $N$ , napríklad  $N = 10^{50}$ , čo môže znamenať vysokú časovú náročnosť aj pre výkonnejšie výpočetné zariadenia. Aj preto sa prvočíslami a ich hľadaním začalo zaoberať stále viac a viac matematikov. Pre začiatok našich úvah v tejto kapitole sa zamyslime nad otázkou, ktorou začína aj slávny Bernhard Riemann:

„Existuje nejaké pravidlo, podľa ktorého by sme vedeli určiť, kolko existuje prvočísel menších ako nami zvolené číslo?“

K zodpovedaniu otázok a problémov týkajúcich sa prvočísel je kľúčovým bodom preskúmať niektoré postupnosti, funkcie a rady, ktoré s nimi úzko súvisia.

Ak si vezmeme prvých 1 000 prirodzených čísel, zistíme, že sa medzi nimi nachádza 168 prvočísel. V prvom milíone prirodzených čísel ich je 78 498 atď. Toto nám vyjadruje *prvočíselná funkcia*, označovaná  $\pi(N)$ . Je to druh schodovej funkcie, ktorej funkčná hodnota sa zvýši o 1 vtedy, keď je  $N$  prvočíslo a tým vyjadruje počet prvočísel menších alebo rovných ako  $N$ .

Pre lepší prehľad si zostavíme tabuľku 2.2.

$N$	$\pi(N)$
1 000	168
1 000 000	78 498
1 000 000 000	50 847 523
1 000 000 000 000	37 607 912 018
1 000 000 000 000 000	29 844 570 422 669
1 000 000 000 000 000 000	24 739 954 287 740 860

Tabuľka 2.2

Teraz skúsime vydeliť prvý stĺpec tabuľky 2.2 druhým a k tomu pridáme nový stĺpec s hodnotami prirodzených logaritmov čísla  $N$ . Výsledok je vidno v tabuľke 2.3.

$N$	$\pi(N)$	$N/\pi(N)$	$\ln(N)$
1 000	168	5,9524	6,9078
1 000 000	78 498	12,7592	13,8155
1 000 000 000	50 847 523	19,6665	20,7232
1 000 000 000 000	37 607 912 018	26,5901	27,6310
1 000 000 000 000 000	29 844 570 422 669	33,6247	34,5378
1 000 000 000 000 000 000	24 739 954 287 740 860	40,4204	41,4465

Tabuľka 2.3

Z Tabuľky 2.3 môžeme taktiež vidieť, že hodnota výrazu  $N/\pi(N)$  je podobná hodnote čísla  $\ln(N)$  a ak by sme naďalej zvyšovali  $N$ , percentuálna chyba (vzhľadom k  $N$ ) by bola čím ďalej, tým menšia, teda môžeme písť  $N/\pi(N) \sim \ln(N)$ . Inak povedané, hodnota  $N/\pi(N)$  sa asymptoticky približuje hodnote  $\ln(N)$ . Toto tvrdenie nám dáva základ pre formuláciu *Prvočíselnej vety*.

**Veta 2.2** (Prvočíselná veta). *Nech  $\pi(N)$  označuje počet prvočísel menších alebo rovných ako  $N$ . Potom*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\pi(N)}{N/\ln(N)} = 1,$$

čo môžeme pre naše neskôršie účely zapísť aj v užitočnejšom tvare ako

$$\pi(N) \sim \frac{N}{\ln(N)}, \quad \text{ked } N \rightarrow \infty.$$

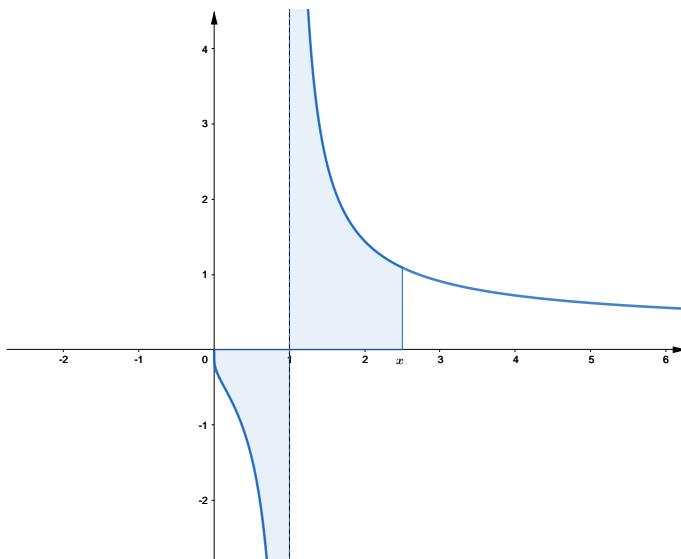
Túto vetu sformuloval v roku 1792 Carl Friedrich Gauss a v roku 1896 sa ju podarilo nezávisle dokázať dvom matematikom – Charlesovi Jeanovi de la Vallée Poussinovi a Jacquesovi Hadamardovi [13].

**Dôsledok 1.** Z Prvočíselnej vety vyplývajú dva dôležité dôsledky:

- Pravdepodobnosť, že  $N$  je prvočíslo, je  $\sim \frac{1}{\ln(N)}$ .
- $N$ -té prvočíslo je  $\sim N \cdot \ln(N)$ .

## 2.1 Logaritmický integrál

Doteraz sme sa nachádzali v obore prirodzených čísel, keďže sme širší obor zatiaľ nepotrebovali. V tejto časti sa však už presunieme do oboru nezáporných reálnych čísel  $\mathbb{R}_0^+$ . Vezmieme si teraz funkciu  $1/\ln(t)$ . Ako argument sme vzali premennú  $t$ , kvôli lepšej prehľadnosti. Na obrázku 2.1 máme vykreslený graf tejto funkcie, s vyfarbenou plochou od 0 až do  $x$  (konkrétnie v tomto prípade je  $x = 2,5$ ).



Obr. 2.1: Graf funkcie  $1/\ln(t)$ .

Ak by sme chceli teraz zistiť obsah vyfarbenej plochy, museli by sme vypočítať  $\int_0^x (1/\ln(t)) dt$ , no integrál funkcie  $1/\ln(t)$  nevieme vyjadriť pomocou elementárnych funkcií. Preto ho zadefinujeme ako novú funkciu, ktorú názveme *logaritmická integrálna funkcia*<sup>1</sup> a budeme ju označovať  $\text{Li}(x)$ . Teda

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \left( \frac{1}{\ln(t)} \right) dt.$$

Funkcia  $1/\ln(t)$  nie je definovaná pre  $t = 1$ , pričom z ľavej strany graf funkcie pred týmto bodom klesá do mínus nekonečna a z pravej strany zase rastie do nekonečna, ako aj vidno z obrázku 2.1. Pri výpočte plochy pod grafom sa však tieto hodnoty vyrušia, keďže plochu pod osou  $x$  berieme so záporným znamienkom a približne v bode  $x = 1,451\,369\,234\,883\dots$  bude integrál rovný nule. Za týmto bodom už bude jeho hodnota postupne rásť. Gradientom tejto funkcie v ľubovoľnom bode  $x$  je  $1/\ln(x)$ , čo je podľa dôsledku 1 Prvocíselnej vety pravdepodobnosť, že je nejaké celé číslo v okolí  $x$  prvočíslom.

---

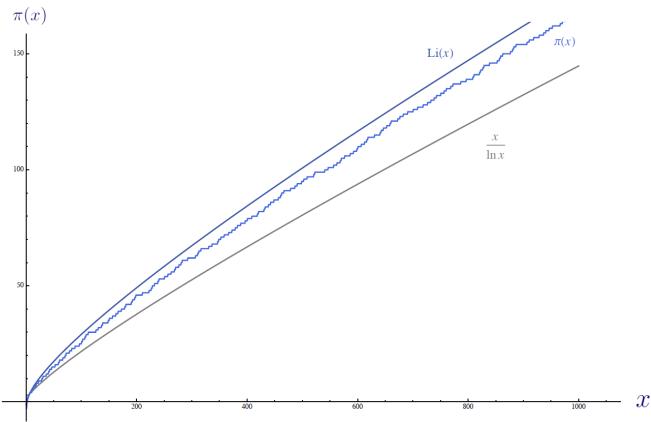
<sup>1</sup>Funkcia  $\text{Li}(x)$  býva definovaná dvomi spôsobmi – niekedy ako  $\int_2^x (1/\ln(t)) dt$ , práve kvôli bodu  $t = 1$ . Ich hodnoty sa odlišujú o približne  $1.04516378012\dots$  Takto definovaná funkcia sa nazýva tiež *Eulerov logaritmický integrál*.

Práve z tohto dôvodu je táto funkcia veľmi dôležitá v teórii čísel – ak budeme hodnotu  $x$  postupne zvyšovať, bude sa hodnota  $\text{Li}(x)$  približovať  $x / \ln(x)$ . Podľa Prvočíselnej vety 2.2 je  $\pi(x) \sim x / \ln(x)$ , teda platí nasledovná veta.

**Veta 2.3** (Prvočíselná veta s logaritmickým integrálom). *Nech  $\pi(x)$  je počet prvočísel menších alebo rovných ako daná hodnota a  $\text{Li}(x)$  je logaritmická integrálna funkcia. Potom platí*

$$\pi(x) \sim \text{Li}(x).$$

Tento tvar Prvočíselnej vety odvodil Lejeune Dirichlet [9] v roku 1838 a dáva nám ešte o čosi presnejšiu informáciu o počte prvočísel menších alebo rovných ako nami zvolené  $x$ , než veta 2.2.



Obr. 2.2: Aproximácia  $\pi(x)$  pomocou  $\text{Li}(x)$  a  $x / \ln(x)$  [34].

Funkcia  $\text{Li}(x)$  je lepšou aproximáciou  $\pi(x)$  preto, že konverguje k  $\pi(x)$  oveľa rýchlejšie ako  $x / \ln(x)$ , na čo poukazuje aj obrázok 2.2. Napriek pomalšej konvergencii je však  $\pi(x) \sim x / \ln(x)$  stále známejšou formou Prvočíselnej vety.

# Kapitola 3

## Zeta funkcie

Názov tejto kapitoly sa môže na prvý pohľad javiť ako veľký myšlienkový skok od kapitoly 2, keďže prechádzame z oboru aritmetiky do oboru matematickej analýzy. Neskôr si však ukážeme, ako sú tieto dve odvetvia matematiky prepojené práve pojimami vysvetlenými v týchto dvoch kapitolách. Informácie sme čerpali z [2], [6], [7], [10], [16], [17], [25], [30] a [34].

Skúmanie skupiny tzv. *zeta funkcií* začalo už okolo roku 1650 *Bazilejským problémom*, ktorý prednesol taliansky matematik Pietro Mengoli. Išlo o otázku presného súčtu prevrátených hodnôt štvorcov všetkých prirodzených čísel, v matematickom zápise ako

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

V roku 1734 tento problém vyriešil Leonhard Euler, ktorý prišiel na to, že súčet tohto radu je presne  $\pi^2/6$ , a to pomocou Taylorovho rozvoja funkcie sínus.

Všeobecne je zeta funkcia pre reálne hodnoty  $r, n \in \mathbb{R}$  definovaná ako

$$\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

a označuje sa gréckym písmenom zeta, tj.  $\zeta$ .

Euler v roku 1750 našiel vzorec pre presný súčet zeta funkcie s kladným párnym celočíselným argumentom  $2n$

$$\zeta(2n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^{2n}} = (-1)^{n-1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n},$$

kde  $B_{2n}$  sú párne *Bernoulliho čísla* (viď kapitola 1). Nepodarilo sa mu však nájsť vzorec pre nepárne celočíselné argumenty a doteraz pre ne žiadny vzorec nemáme – ich hodnoty treba aproximovať. Napríklad  $\zeta(3)$  je známa ako *Apéryho konštantu* (taktiež bližšie definovaná v kapitole 1) a Apéryho veta [21] hovorí, že je iracionálna, konkrétnie

$$\zeta(3) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \approx 1,202\,056\,9031\dots$$

Tieto Eulerove poznatky využil o viac ako sto rokov neskôr práve Bernhard Riemann vo svojom článku z roku 1859, s názvom „*O počte prvočísel menších ako daná hodnota*“ [24]. V nasledujúcej časti si konkrétnie Riemannovu zeta funkciu zadefinujeme a pozrieme sa na jej základné vlastnosti.

### 3.1 Riemannova zeta funkcia

Kedže presne zadefinovať Riemannovu zeta funkciu nie je triviálna záležitosť, budeme to musieť urobiť postupne, v menších krokoch. Na začiatok našich uváh sa pre jednoduchosť obmedzíme na množinu reálnych čísel a postupne prejdeme do množiny komplexných čísel. Kedže táto funkcia je historicky definovaná pre premennú  $s$ , budeme ju odteraz používať. Nech teda  $s \in \mathbb{R}$ .

Ako prvé si vezmieme nekonečný rad tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \quad (3.1)$$

Skúmanie konvergencie tohto radu nie je ničím náročné. Vidíme, že ak položíme  $s = 1$ , dostaneme na pravej strane tzv. *harmonický rad*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots,$$

o ktorom vieme dokázať, že je divergentný, a to napríklad pomocou porovnávacieho kritéria pre konvergenciu číselných radov. Dôkaz si pre úplnosť aj uvedieme.

**Veta 3.1.** *Harmonický rad je divergentný.*

*Dôkaz.*  $2^n$ -tý čiastočný súčet harmonického radu môžeme napísť ako

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n} \right),$$

pričom tento súčet bude určite väčší ako

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left( \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kedže  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2^n} = \infty$ , harmonický rad bude taktiež divergovať.  $\square$

Ak položíme  $s \leq 0$  a  $k = -s$ , môžeme (3.1) prepísať ako

$$1 + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + \dots, \quad k \geq 0,$$

pričom v tomto prípade bude rad určite tiež divergentný.

Pre prípad, kedy  $s \in (0, 1)$ , vieme znova veľmi jednoducho dokázať, že rad diverguje (napríklad porovnaním s harmonickým radom). Zostal nám teda posledný prípad, kedy  $s > 1$ . Vtedy (3.1) konverguje, a to dokonca absolútne.

*Dôkaz.* Teraz porovnáme zeta funkciu s geometrickým radom, ktorý je konvergentný.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= 1 + \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \right) + \left( \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} \right) + \dots \\
&< 1 + \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} \right) + \left( \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} \right) + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \left( \frac{1}{2^{s-1}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2^{s-1}} \right)^3 + \dots \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}},
\end{aligned}$$

pričom  $s > 1$ . Kedže geometrický rad pre dané  $s$  absolútne konverguje, mohli sme využiť asociatívny zákon.  $\square$

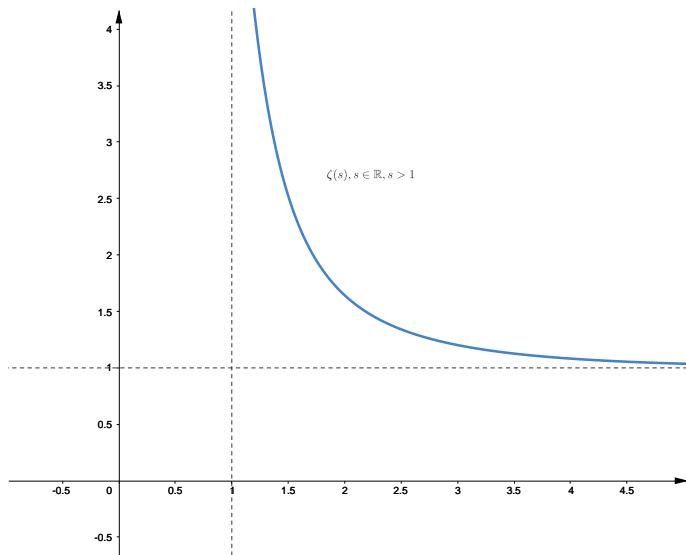
*Poznámka.* Konvergencie predchádzajúcich radov je možné dokázať napríklad aj pomocou integrálneho kritéria.

Zadefinujeme si teda

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots \quad (3.2)$$

pre  $s > 1, s \in \mathbb{R}$ .

Existujú prípady, kedy nekonečný rad definuje funkciu iba na určitej časti jej definičného oboru, a to konkrétnie časti, kde daný rad konverguje. Ako príklad môžeme uvážiť súčet geometrického radu  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , ktorý definuje funkciu  $(1-x)^{-1}$ , ale iba pre  $x \in (-1; 1)$ . Na obrázku 3.1 je vykreslený graf nami definovanej funkcie  $\zeta(s)$  pre  $s > 1, s \in \mathbb{R}$ .



Obr. 3.1: Graf funkcie zeta pre  $s > 1, s \in \mathbb{R}$ .

Zatiaľ sme však stále obmedzení iba na množinu reálnych čísel a aj na tejto množine máme  $\zeta(s)$  definovanú iba pre  $s > 1$ . Ako už sme spomenuli, skúmaniu tejto funkcie pre hodnoty z  $\mathbb{R}$  sa dlho venoval Leonhard Euler. Ten k tejto téme prispel aj ďalším veľmi významným objavom, ktorý si však ukážeme až neskôr. Teraz by sme chceli (3.2) nejakým spôsobom dodefinovať aj na zvyšnej časti reálnej osi, prípadne jej definičný obor rozšíriť na celú komplexnú rovinu. Až o nejaký čas po Eulerovi prišiel práve Riemann, ktorý začal tento rad skúmať podrobnejšie, a to ako funkciu komplexnej premennej.

Nech  $s = \sigma + it$  je komplexné číslo a  $\sigma, t \in \mathbb{R}$ . Číslo  $\sigma$  budeme nazývať *reálnou zložkou* čísla  $s$  a budeme označovať  $\Re(s)$  a číslo  $t$  budeme nazývať jeho *imaginárnu zložkou* a označovať  $\Im(s)$ . K rozšíreniu (3.2) do komplexnej roviny nám pomôže nasledujúca definícia.

**Definícia 1.** Dirichletov rad je funkcia tvaru

$$f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = a_1 + \frac{a_2}{2^s} + \frac{a_3}{3^s} + \dots,$$

kde  $a_n$  sú komplexné čísla a  $s$  je komplexná premenná.

Môžeme si všimnúť podobnosť medzi týmto radom a radom (3.1). Ak vezmeme konštantnú postupnosť, kde  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ , dostaneme presne (3.1), tentokrát však pre komplexnú premennú  $s$ .

**Definícia 2.** Analytická funkcia je taká funkcia, ktorú je možné na okolí každého bodu z jej definičného oboru vyjadriť ako súčet mocninného radu. Pre funkciu  $f(z)$  komplexnej premennej  $z$  to znamená, že na okolí bodu  $z_0$  môžeme písť

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

kde  $z_0$  je ľubovoľný bod definičného oboru funkcie  $f$ .

Majme teraz Dirichletov rad tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots \quad (3.3)$$

Videli sme, že (3.1) diverguje pre akékoľvek číslo  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s \leq 1$ . Tu už sme však v obore komplexných čísel a všímame si individuálne reálne a imaginárne časti daných premenných. Rad (3.3) v tomto prípade nedefinuje zeta funkciu mimo oblasti  $\Re(s) > 1$ , keďže tam bude divergovať. To znamená, že (3.3) definuje analytickú funkciu na oblasti  $\Re(s) > 1$ .

## 3.2 Rozšírovanie definičného oboru

Teraz už sme sa presunuli z množiny reálnych čísel do množiny komplexných čísel, stále však máme  $\zeta(s)$  definovanú iba pre relatívne malú oblasť oproti tomu, čo by sme chceli. Budeme teda pokračovať v jej budovaní, a to rozšírením jej definičného oboru *analytickým pokračovaním*.

**Definícia 3.** Majme dve oblasti,  $S_1$  a  $S_2$ , pričom  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$  a nech  $f_1(z)$  je analytická na  $S_1$ . Ak existuje funkcia  $f_2(z)$ , ktorá je analytická na  $S_2$  a  $f_2(z) = f_1(z)$  pre každé  $z \in S_1 \cap S_2$ , nazveme ju *analytickým pokračovaním funkcie*  $f_1(z)$  v oblasti  $S_2$ .

Riemann vo svojej práci [24] z roku 1859 dokázal, že funkciu  $\zeta(s)$  možno rozšíriť analytickým pokračovaním na analytickú funkciu na celej komplexnej rovine s výnimkou bodu  $s = 1$ , kde má  $\zeta(s)$  pól s reziduom rovným 1.

**Definícia 4.** Riemannova funkcia  $\zeta(s)$  je analytickým pokračovaním Dirichletovho radu do celej komplexnej roviny s výnimkou bodu  $s = 1$ .

Nech teda máme

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \\ &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{2}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{3}{3^s} - \frac{3}{4^s} + \frac{4}{4^s} - \frac{4}{5^s} + \frac{5}{5^s} - \frac{5}{6^s} + \dots \\ &= 1\left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + 2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = s \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Nech  $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ , kde  $\lfloor x \rfloor$  je celá a  $\{x\}$  zlomková časť  $x$ . Keďže  $\lfloor x \rfloor$  je vždy rovné konštante  $n$  pre akokoľvek  $x \in [n, n+1)$ , môžeme písat

$$\zeta(s) = s \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx = s \int_1^{\infty} \lfloor x \rfloor x^{-s-1} dx.$$

Dosadením za  $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$  dostávame

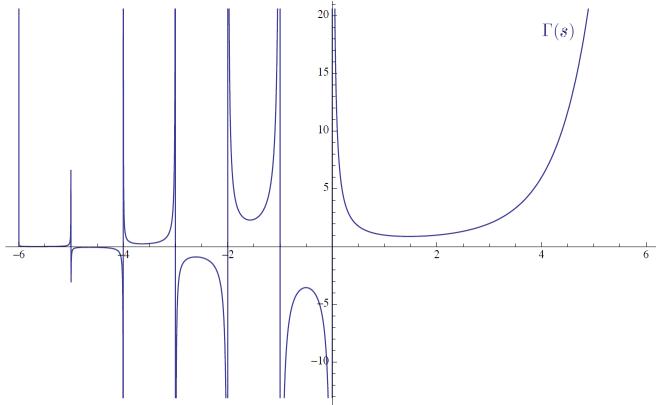
$$\begin{aligned}\zeta(s) &= s \int_1^{\infty} x^{-s} dx - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx \\ &= \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Odtiaľto vidíme, že keďže  $0 \leq \{x\} < 1$ , nevlastný integrál v (3.5) konverguje práve vtedy, keď je  $\Re(s) = \sigma > 0$ , pretože integrál  $\int_1^{\infty} x^{-\sigma-1} dx$  konverguje. Tento nevlastný integrál definuje analytickú funkciu premennej  $s$  v oblasti  $\Re(s) > 0$ . To znamená, že funkcia na pravej strane (3.5) zadáva analytické pokračovanie funkcie zeta v oblasti  $\Re(s) > 0$  a člen  $\frac{s}{s-1}$  vyjadruje jej singularitu v bode  $s = 1$  s reziduom rovným 1.

Toto nám však stále dáva rozšírenie funkcie  $\zeta$  iba na o niečo väčšiu oblasť  $\Re(s) > 0$ . Pre nájdenie jej analytického pokračovania na celej komplexnej rovine budeme potrebovať ďalšiu známu funkciu, a to konkrétnie funkciu gamma.

### 3.2.1 Gamma funkcia

Vieme, že  $\Gamma(s)$  je akýmsi zobecnením faktoriálu na množinu komplexných čísel, s výnimkou nekladných celých čísel, pričom pre prirodzené čísla platí známy vzorec  $\Gamma(n) = (n - 1)!$ . Gamma funkcia je definovaná taktiež v množine komplexných čísel pre  $\Re(s) > 0$ ,  $s \in \mathbb{C}$ , a je analytická na celej komplexnej rovine s výnimkou bodov  $s = 0, -1, -2, \dots$ . Jej reziduum v  $s = -n$  je  $\frac{(-1)^n}{n!}$ . Táto funkcia nemá žiadne nulové body, ako je vidieť aj z obrázku 3.2.



Obr. 3.2: Graf funkcie  $\Gamma(s)$  [34].

Najčastejšie býva Gamma funkcia pre komplexné čísla definovaná pomocou integrálu

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Treba však dať pozor na to, že táto definícia platí iba pre  $\Re(s) > 0$ . Po dosadení  $s + 1$  do argumentu a použití metódy per partes dostaneme

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^s dt = [-t^s e^{-t}]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = s\Gamma(s),$$

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Podľa tejto funkcionálnej rovnice vieme nájsť aj hodnoty pre  $\Re(s) < 0$ .

*Poznámka.* Existuje aj ďalší spôsob vyjadrenia Gamma funkcie, ktorý súvisí s funkciou  $\zeta(s)$  a platí pre všetky  $s \in \mathbb{C}$ , a to *Weierstrassov vzorec*

$$\frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

kde  $\gamma$  je *Eulerova-Mascheronihho konštantá* (vid' kapitola 1).

Majme teraz

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

pre  $\sigma > 0$ . Substitúciou  $t = n^2\pi x$  dostávame

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) n^{-s} = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx.$$

Ďalej obe strany rovnice sčítame nekonečne veľa krát cez  $n \in \mathbb{N}$  a dostávame

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} e^{-n^2\pi x} dx.$$

Kedže  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$  rovnomerne konverguje, potom vďaka vete o zámene sumy a integrálu môžeme tento vzťah prepísať ako

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \right) dx \\ &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \psi(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1} \left( \frac{\vartheta(x) - 1}{2} \right) dx, \end{aligned}$$

pričom sme definovali  $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ . V treťom riadku je táto funkcia prepísaná pomocou *Jacobiho theta funkcie*. Kedže platí

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x},$$

platí aj vzťah  $\vartheta(x) = 1 + 2\psi(x)$ , teda  $\psi(x) = \frac{\vartheta(x)-1}{2}$ . Jacobiho theta funkcia vykazuje akúsi symetriu a splňa funkcionálnu rovnicu

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \vartheta(x^{-1}),$$

ktorá platí pre  $x > 0$ . Použitím tejto funkcionálnej rovnice a vzťahu s funkciou  $\psi(x)$  vieme odvodit

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \left\{ \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) \cdot \left( \frac{\vartheta(x) - 1}{2} \right) dx \right\}. \quad (3.6)$$

Tento integrál vzhľadom k exponenciálnemu rozpadu funkcie  $\vartheta(x)$  (tzn. funkčné hodnoty exponenciálne klesajú) konverguje pre každé  $s \in \mathbb{C}$ , a teda definuje celistvú funkciu na obore komplexných čísel a rovnica (3.6) nám dáva analytické pokračovanie  $\zeta(s)$  na celej komplexnej rovine s výnimkou bodov  $s = 0$  a  $s = 1$ , čím sme úspešne rozšírili jej definičný obor.

### 3.3 Eulerov súčin

Ako sme už v tejto kapitole naznačili, Leonhard Euler okrem vzorca na výpočet presnej hodnoty zeta funkcie pre kladné celočíselné párne argumenty prispel k jej skúmaniu ešte významnejším objavom, a to vzorcom pre *Eulerov súčin*. A práve to je kľúčom k taktiež spomínanému prepojeniu medzi aritmetikou a matematickou analýzou. V kapitole 2 sme si vysvetlili, ako funguje algoritmus Erastotenovo sita. Teraz skúsime podobný postup aplikovať na funkciu  $\zeta(s)$ .

Spomeňme si, že pre  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(s) > 1$ , máme

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} + \dots \quad (3.7)$$

Týmto spôsobom môžeme pravú stranu rozpísť pre ľubovoľný počet členov  $N$  s tým, že sa postupne v menovateľoch budú nachádzať prirodzené čísla až do nami zvolenej výšky  $N$ , umocnené na komplexnú premennú  $s$ .

Teraz obidve strany rovnice vynásobíme výrazom  $\frac{1}{2^s}$ . Dostaneme

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{12^s} + \frac{1}{14^s} + \frac{1}{16^s} + \dots \quad (3.8)$$

V ďalšom kroku odčítame rovnicu (3.8) od rovnice (3.7) a vyjde nám

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{15^s} + \dots$$

Týmto sme z pravej strany odstránili všetky členy, ktoré majú v menovateli mocninu čísla dva. Podobne ako predtým, vynásobíme obe strany rovnice výrazom  $\frac{1}{3^s}$  a odčítame od predchádzajúcej rovnice

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} + \frac{1}{19^s} + \frac{1}{23^s} + \dots$$

Teraz sme zase z členov na pravej strane odstránili všetky tie, ktoré mali v menovateli mocniny čísla 3. Ak by sme takto pokračovali ďalej a postupne násobili vzniknuté rovnice výrazmi  $\frac{1}{5^s}, \frac{1}{7^s}, \dots$  a vždy odčítali poslednú rovnicu od predchádzajúcej, pre nejaké „veľké“ prvočíslo, napríklad 997, by sme dostali

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{997^s}\right) \left(1 - \frac{1}{991^s}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = \\ = 1 + \frac{1}{1009^s} + \frac{1}{1013^s} + \frac{1}{1019^s} + \frac{1}{1021^s} + \dots \end{aligned}$$

Kedže  $\Re(s) > 1$ , výraz na pravej strane sa bude postupne blížiť k číslu 1, čo znamená, že ak by sme v opísanom procese pokračovali ďalej až do nekonečna, dostali by sme

$$\cdots \left(1 - \frac{1}{13^s}\right) \left(1 - \frac{1}{11^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = 1,$$

pričom výrazy v zátvorkách na ľavej strane rovnosti obsahujú v menovateľoch každé prvočíslo umocnené na exponent  $s$ . Ako ďalšie skúsime vydeliť obe strany rovnosti každým z výrazov v zátvorke, z čoho nám vznikne

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{11^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{13^s}} \cdots$$

Zložené zlomky na pravej strane vieme ešte upraviť na „krajší“ tvar, ktorý vyzerá nasledovne

$$\zeta(s) = (1 - 2^{-s})^{-1} (1 - 3^{-s})^{-1} (1 - 5^{-s})^{-1} (1 - 7^{-s})^{-1} (1 - 11^{-s})^{-1} \cdots$$

Pravú stranu teraz môžeme skrátene zapísať pomocou nekonečného súčinu ako

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad (3.9)$$

kde za  $p$  postupne dosádzame všetky prvočísla.

Objavenie tohto vzorca bolo prvým prepojením zeta funkcie a prvočísel a bolo publikované v roku 1737 v Eulerovom článku *Variae observationes circa series infinitas* [11].

## 3.4 Vlastnosti funkcie $\zeta(s)$

Veta o Eulerovom súčine sa tiež nazýva *analytickou formou základnej vety aritmetiky*. Keďže nekonečný súčin na pravej strane by mohol byť nulový iba v prípade, že by bol nulový nejaký z jeho členov, čo by viedlo k sporu v dôkaze o nekonečnom počte prvočísel, vyplýva z toho veta 3.2.

**Veta 3.2.** Pre každé  $s \in \mathbb{C}$ , pre ktoré je  $\Re(s) > 1$ , platí  $\zeta(s) \neq 0$ .

Nás budú zaujímať predovšetkým nulové body funkcie  $\zeta(s)$  a vďaka vete 3.2 sa nám významne zmenšila oblasť, v ktorej by sa mohli tieto nulové body nachádzať.

### 3.4.1 Nulové body

K nájdeniu prvých koreňov funkcie  $\zeta(s)$  nám pomôžu formulácie jej funkcionálnej rovnice, ktorých odvodenie bolo súčasťou Riemannovho článku z roku 1859. [24].

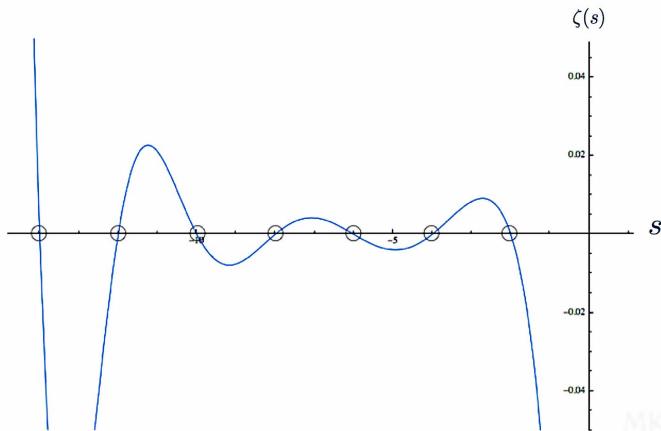
**Veta 3.3** (Funkcionálna rovnica). Pre každé  $s \in \mathbb{C}$  platí

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (3.10)$$

Odtiaľto pekne vidno symetriu pre premenné  $s$  a  $1 - s$  a tým aj fakt, že  $\zeta(s)$  je symetrická podľa priamky  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ . Ďalším tvarom funkcionálnej rovnice je

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \quad (3.11)$$

Zatiaľ čo (3.10) nám ukazuje symetriu zeta funkcie, z (3.11) vieme zase ľahko zistiť tzv. *triviálne nulové body*, teda korene funkcie, ktoré vieme relatívne jednoducho nájsť a vysvetliť. Pravá strana bude nulová, keď bude nulový člen  $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ , čo znamená, že  $\frac{\pi s}{2} = k\pi$ , teda  $s = 2k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pričom pre záporné  $k$  sa bude hodnota  $\zeta(s)$  rovnať nule a pri kladných  $k$  bude výraz nedefinovaný kvôli singularitám gamma funkcie. Tento fakt je lepšie vidno po dosadení  $s = 2k$  do (3.6). Na obrázku 3.3 je zvýraznených prvých 7 triviálnych nulových bodov  $\zeta(s)$ .



Obr. 3.3: Triviálne nulové body funkcie zeta [34].

Týmto sme našli nulové body v polovine  $\Re(s) < 0$  a ukázali, že pre  $\Re(s) > 1$  žiadne nulové body neexistujú. Zostala nám posledná oblasť  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ . Túto oblasť budeme nazývať *kritickým pásmom*. Hľadanie nulových bodov v tejto oblasti už nie je triviálnou záležitosťou a je jedným z akýchsi hlavných cieľov dnešnej analytickej teórie čísel. Nulové body ležiace v kritickom páse budeme preto označovať ako *netriviálne nulové body*.

Riemann si ako ďalšie zadefinoval tzv. *xí funkciu* s predpisom

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Táto funkcia nemá žiadne singularity, a teda je celistvá na komplexnej rovine, pričom splňuje jednoduchú funkcionálnu rovnicu

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (3.12)$$

Podľa tejto rovnice vidíme, že funkcia  $\xi(s)$  je, rovnako ako funkcia  $\zeta(s)$ , symetrická podľa priamky  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ . Práve vďaka tejto symetrii a Eulerovmu súčinu vieme povedať, že  $\xi(s)$  môže mať nulové body iba v kritickom páse  $0 \leq \Re(s) \leq 1$ . Tieto nulové body korešpondujú s netriviálnymi nulovými bodmi  $\zeta(s)$ .

Na záver tejto kapitoly si ešte zhrnieme základné vlastnosti funkcie  $\zeta(s)$ , a to vo vete 3.4.

**Veta 3.4.** *Funkcia  $\zeta(s)$  má nasledujúce vlastnosti:*

- i)  $\zeta(s)$  nemá žiadny nulový bod v oblasti  $\Re(s) > 1$ ,
- ii)  $\zeta(s)$  má pól v bode  $s = 1$  s reziduom rovným 1,
- iii)  $\zeta(s)$  má triviálne nulové body v  $s = -2, -4, \dots$ ,
- iv)  $\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ ,
- v) netriviálne nulové body ležia v oblasti  $0 \leq \Re(s) \leq 1$  a sú symetrické podľa priamky  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  a takisto podľa osi  $\Im(s) = 0$ ,
- vi) nulové body funkcie  $\xi(s)$  sú ekvivalentné netriviálnym nulovým bodom  $\zeta(s)$ .

Vlastnosť i) už sme spomenuli na strane 19 a vychádza z (3.9), pretože nekonečný produkt na pravej strane nikdy nebude nulový. Takisto ii) a iii) už boli v tejto kapitole odvodené, konkrétnie na stranach 15 a 20. Vlastnosť iv) vychádza z (3.6) a vlastnosti komplexne konjugovaných čísel, ktoré zachovávajú súčin a súčet, najmä platí  $\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ . Symetria netriviálnych nulových bodov zase vychádza zo symetrie zeta funkcie podľa priamky  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  a fakt, že sú symetrické aj podľa osi  $\Im(s) = 0$  znamená, že existujú v komplexne združených dvojiciach. To priamo implikuje vlastnosť iv). Vlastnosť vi) odvodil Riemann vo svojej publikácii [24].

# Kapitola 4

## Möbiova funkcia $\mu(n)$

Nemecký matematik August Ferdinand Möbius počas skúmania Eulerovho súčinu prišiel na nový vzorec zahrňujúci zeta funkciu, ktorý spolu s prevrátenými hodnotami prvočísel obsahuje aj každé prirodzené číslo, ktoré je súčinom párneho a nepárneho počtu prvočísel. Čísla, ktoré sa v sume nenachádzajú, sú tie, ktoré sú deliteľné druhou mocninou nejakého prvočísla. Postup a vzťahy v tejto kapitole sme prevzali z [7] a [34].

Möbius začal prevrátenou hodnotou Eulerovho súčinu

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) \dots$$

a pokračoval nasledujúcim spôsobom.

Sumu si rozdelíme na niekoľko častí, ktoré budeme postupne znova sčítavať.

1. Z každej zátvorky na pravej strane vezmeme člen (1) a dostaneme

$$(1) \cdot (1) \cdot (1) \cdot (1) \dots$$

2. Z prvej zátvorky vezmeme člen  $(-\frac{1}{2^s})$  a zo zvyšných (1). Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{2^s}\right) \cdot (1) \cdot (1) \cdot (1) \dots$$

3. Z druhej zátvorky vezmeme člen  $(-\frac{1}{3^s})$  a zo zvyšných (1). Dostaneme

$$(1) \cdot \left(-\frac{1}{3^s}\right) \cdot (1) \cdot (1) \dots$$

Ak budeme takto postupovať do nekonečna a výsledky z každého kroku postupne sčítavať, prvá časť sumy bude vyzeráť takto

$$1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} - \dots$$

Ďalším krokom budú násobky prevrátených hodnôt mocnín dvoch prvočísel.

1. Z prvej a druhej zátvorky vezmeme  $(-\frac{1}{2^s})$  a  $(-\frac{1}{3^s})$  a zo zvyšku (1). Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{2^s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3^s}\right) \cdot (1) \cdot (1) \dots$$

2. Z prvej a tretej zátvorky vezmeme  $(-\frac{1}{2^s})$  a  $(-\frac{1}{5^s})$  a zo zvyšku (1). Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{2^s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5^s}\right) \cdot (1) \cdot (1) \dots$$

3. Z prvej a štvrtnej zátvorky vezmeme  $(-\frac{1}{2^s})$  a  $(-\frac{1}{7^s})$  a zo zvyšku (1). Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{2^s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7^s}\right) \cdot (1) \cdot (1) \dots$$

Pokračovaním do nekonečna by sme dostali

$$\frac{1}{6^s} + \frac{1}{10^s} + \frac{1}{14^s} + \frac{1}{15^s} + \dots,$$

teda v menovateľoch máme postupne násobky dvojíc rôznych prvočísel.

Princíp ďalšieho postupu už je rovnaký – tentokrát budeme vyberať tri členy tvaru  $\frac{1}{p^s}$  z rôznych zátvoriek a zo zvyšných člen (1). Pokračovaním do nekonečna takto dostaneme

$$-\frac{1}{30^s} - \frac{1}{42^s} - \frac{1}{66^s} - \frac{1}{70^s} - \dots$$

Týmto postupom sa po dostatočne dlhom čase dopracujeme k výsledku

$$\frac{1}{\zeta(s)} = 1 - \frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} - \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{10^s} - \dots,$$

pričom členy tohto súčtu sú tvorené prevrátenými hodnotami

- a) prvočísel,
- b) prirodzených čísel, ktoré sú násobkom nepárneho počtu prvočísel so znamienkom mínus,
- c) prirodzených čísel, ktoré sú násobkom párnego počtu prvočísel so znamienkom plus,

a naproti tomu neobsahujú prevrátené hodnoty čísel, ktoré sú deliteľné druhou mocninou nejakého prvočísla. Toto vieme skrátene zapísť v tvare

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

kde  $\mu(n)$  označuje *Möbiiovu funkciu*, ktorej definičným oborom sú všetky  $n \in \mathbb{N}$  a ktorá nadobúda hodnoty

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{ak má } n \text{ párny počet prvočísel v rozklade a nie je} \\ & \text{deliteľné druhou mocninou žiadneho prvočísla,} \\ 0, & \text{ak má } n \text{ v rozklade druhú mocninu prvočísla,} \\ -1, & \text{ak má } n \text{ nepárny počet prvočísel v rozklade a nie je} \\ & \text{deliteľné druhou mocninou žiadneho prvočísla.} \end{cases}$$

S Möbiiovou funkciou a Riemannovou hypotézou úzko súvisí aj *Mertensova funkcia*, ktorá je definovaná ako kumulatívny súčet Möbiovnej funkcie, teda ako

$$M(k) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \cdots + \mu(k),$$

pre nejaké  $k$ . Pomocou Mertensovej funkcie sa dajú naformulovať tvrdenia ekvivalentné Riemannovej hypotéze, ktoré niekoľko matematikov skúšilo použiť ako cestu k jej dokázaniu. To však bude predmetom kapitoly 6.

# Kapitola 5

## Riemannova hypotéza

Tu sa dostávame k hlavnému bodu tejto bakalárskej práce, a to slávnej Riemannovej hypotéze. V tejto kapitole si ju naformulujeme, ukážeme niekoľko obrázkov užitočných pre vizualizáciu koreňov zeta funkcie a načrtneme súvislosť s prvočíslami a prvočíselnou funkciou. Na záver popíšeme zovšeobecnenú Riemannovu hypotézu. Zdrojmi pre túto kapitolu boli [6], [7], [9], [24], [25], [29] a [34].

Celkovo by sa táto práca doteraz dala rozdeliť na dve časti – 1. časť, zaobrajúca sa aritmetikou a 2. časť, zameraná na matematickú analýzu. Až do roku 1837, kedy Lejeune Dirichlet publikoval článok [9], v ktorom dokázal, že v každej neohraničenej aritmetickej postupnosti, ktorej prvým členom a diferenciou sú celé čísla bez spoločného deliteľa, sa nachádza nekonečne veľa prvočísel, boli tieto dve odvetvia matematiky vnímané akosi oddelené. Aritmetika sa zaoberala štúdiom vlastností základných operácií s číslami a analýza štúdiom limít a infinitezimálneho počtu. Dirichlet však svojim článkom položil *analytickej teórie čísel* – spojenia aritmetiky a matematickej analýzy, ktorú o 22 rokov neskôr rozvinul práve Bernhard Riemann.

Jedným z hlavných predmetov skúmania dnešnej analytickej teórie čísel je článok publikovaný Riemannom v roku 1859 s názvom „*O počte prvočísel menších ako daná hodnota*“ [24]. Za jeho kariéru to bol napriek veľkému množstvu publikácií jediný článok týkajúci sa teórie čísel, napriek tomu je však do dnešného dňa považovaný za najdôležitejší v tejto oblasti. Riemann v ňom objavil vzťahy a prepojenia medzi funkciami, ktoré sme si v predchádzajúcich kapitolách spomínali. Konkrétnie to boli

- definícia Riemannovej zeta funkcie  $\zeta(s)$  pre komplexnú premennú  $s$ ,
- analytické pokračovanie  $\zeta(s)$  do celej komplexnej roviny s výnimkou  $s = 1$ ,
- definícia Riemannovej xí funkcie  $\xi(s)$  a jej súvislosť s nulovými bodmi  $\zeta(s)$ ,
- dva tvary funkcionálnej rovnice pre  $\zeta(s)$ ,
- definícia Riemannovej prvočíselnej funkcie  $R(x)$  pomocou funkcií  $\pi(x)$  a Möbiovej funkcie  $\mu(x)$ ,
- vzorec pre počet prvočísel menších ako daná hodnota pomocou funkcie  $R(x)$  a jej prepojenie s netriviálnymi nulovými bodmi  $\zeta(s)$ .

Môžeme si teraz slávnu Riemannovu hypotézu naformulovať a ďalej budeme pojednávať o tom, čo vlastne znamená a čo ju činí tak významnou.

### Riemannova hypotéza:

*Všetky netriviálne nulové body funkcie  $\zeta(s)$  majú reálnu časť rovnú  $\frac{1}{2}$ .*

Táto hypotéza inými slovami hovorí, že každý netriviálny nulový bod bude pre  $s = \sigma + it$  vyzeráť takto

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0.$$

Pôvodné znenie od Riemanna bolo, že všetky korene funkcie  $\xi(s)$  sú reálne. On sám však toto zistenie nepovažoval za obzvlášť prevratné a jeho dokazovaniu nevenoval veľkú pozornosť.

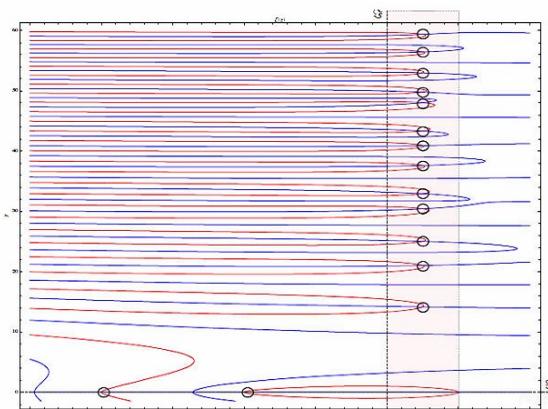
*„... je veľmi pravdepodobné, že všetky korene tejto funkcie sú reálne. Samozrejme si to vyžaduje rigorózny dôkaz. Ja som nateraz jeho hľadanie odložil stranou po niekoľkých neúspešných pokusoch, keďže nie je kľúčový pre moje ďalšie skúmanie.“*

– Bernhard Riemann, 1859.

## 5.1 Vizualizácia

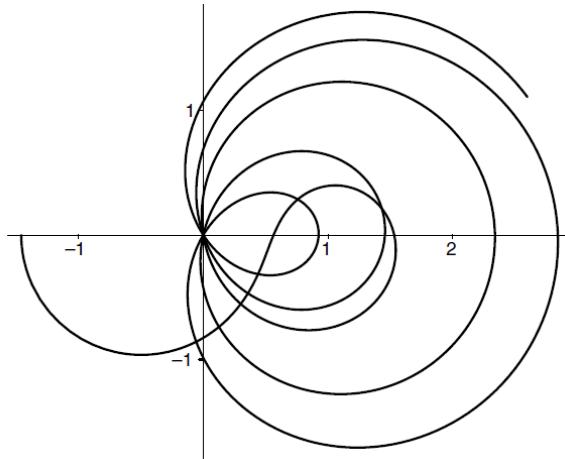
Grafy komplexných funkcií sú vo všeobecnosti náročné na predstavivosť – potrebujeme jednu rovinu pre zobrazenie argumentov funkcie a ďalšiu rovinu pre zobrazenie ich funkčných hodnôt. To by dohromady dávalo štvorrozmerný priestor, ktorý už je veľmi náročný na vizualizáciu. Riemann bol však známy tým, že mal brilliantnú predstavivosť a pracovať s grafmi funkcií komplexných premenných mu nerobilo problémy (vdľaka tomu vynášiel aj tzv. *Riemannovské povrchy* [26]).

Môžeme si pomôcť vizualizovať zeta funkciu pomocou viacerých grafov, pričom niektoré z nich sú veľmi zaujímavé.



Obr. 5.1: Rovina argumentov [34].

Na obrázku 5.1 sú vykreslené argumenty funkcie  $\zeta(s)$ , pre ktoré je funkčná hodnota reálnym, alebo rýdzo imaginárnym číslom. Tie argumenty, ktoré zodpovedajú reálnym funkčným hodnotám, sú vykreslené červenou farbou a tie, ktoré zodpovedajú rýdzo imaginárnym hodnotám, sú vykreslené modrou farbou. Keďže reálne číslo sa môže rovnať imaginárному iba v bode 0, priesecníky týchto kriviek sú rovné nulovým bodom funkcie zeta. Tie sú na obrázku zvýraznené. Už na tomto grafe vidno, že okrem triviálnych nulových bodov sa zvyšné (netriviálne) objavujú presne na kritickej priamke.



Obr. 5.2: Funkčné hodnoty pre kritickú priamku [7].

Ďalším zaujímavým grafom je graf vykreslený na obrázku 5.2, ktorý zobrazuje funkčné hodnoty pre kritickú priamku. Začína v bode  $\zeta\left(\frac{1}{2}\right)$ , ktorý zodpovedá bodu  $-1,460\,354\,508\,809\dots$  a ďalej pokračuje na prvý pohľad nesystematicky, no potom sa dostane k prvému nulovému bodu  $\frac{1}{2} + 14,134\,725\,142i$  a odtiaľ tvorí relatívne pravidelné krivky, pričom sa po nejakej dobe vždy dostane naspať do ďalšieho nulového bodu.

Jednou z ďalších osobností, ktoré významne prispeli k analytickej teórii čísel, bol anglický matematik Godfrey Harold Hardy, ktorý v roku 1914 publikoval článok s názvom *Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann* [14]. V ňom sa Hardymu podarilo dokázať nasledovné

**Veta 5.1** (Hardyho veta). *Nekonečne veľa netriviálnych nulových bodov splňuje Riemannovu hypotézu – teda majú reálnu časť rovnú  $\frac{1}{2}$ .*

Toto tvrdenie ešte stále neznamená, že je hypotéza pravdivá, no je veľkým krokom bližšie k jej dokázaniu. Jeho dôkaz v tejto bakalárskej práci uvádzajú nebudeme vzhľadom k tomu, že využíva pomerne zložité postupy z oboru komplexnej analýzy a k vysvetleniu ďalších postupov pre nás nie je podstatný. Je však dostupný na [6, s. 25–27].

## 5.2 Súvislosti s prvočíslami

Kľúčovým významom Riemannovej hypotézy je práve jej prepojenie s Prvočíselnou vetou 2.2. Pripomeňme si, že Prvočíselná veta hovorí, že prvočíselná funkcia  $\pi(x)$  sa aproximativne približuje k logaritmickej integrálnej funkcií  $\text{Li}(x)$ . Prepojenie spočíva práve v rozdielie hodnôt týchto dvoch funkcií, teda v chybovom člene. Znovu si môžeme zostaviť tabuľku, tentokrát popisujúcu absolútnu a relatívnu chybu funkcie  $\text{Li}(x)$ .

$x$	absolútна chyba	relatívna chyba
1 000	10	0,059523809524
1 000 000	130	0,001656093149
1 000 000 000	1 701	0,000033452950
1 000 000 000 000	38 263	0,000001017419
1 000 000 000 000 000	1 052 619	0,00000035270
1 000 000 000 000 000 000	21 949 555	0,000000000887

Tabuľka 5.1

Absolútna chyba v tabuľke 5.1 je rozdiel  $\pi(x) - \text{Li}(x)$  a relatívna chyba je absolútna chyba voči  $\pi(x)$ , teda  $\frac{\pi(x) - \text{Li}(x)}{\pi(x)}$ . Veľkosť relatívnej chyby by podľa Prvočíselnej vety mala konvergoať k nule, čo nám tabuľka 5.1 potvrdzuje. Otázkom je, či by sme vedeli túto konvergenciu opísť pomocou nejakého pravidla alebo funkcie. Až do roku 1914 sa verilo, že hodnota  $\text{Li}(x)$  bude vždy o niečo väčšia ako  $\pi(x)$ . Opak vtedy dokázal John Littlewood, pričom jeho tvrdenie bolo ešte o niečo silnejšie. Tvrnil, že znamienko výrazu  $\text{Li}(x) - \pi(x)$  sa zmení nekonečne veľa krát. Ďalej sa pokračovalo hľadaním čo najmenšej hornej hranice pre hodnotu, pri ktorej by výraz znamienko zmenil. Tým vzniklo napríklad aj *Skewesovo číslo*, ktoré je doteraz najväčším číslom, ktoré sa prirodzene objavilo ako výsledok dôkazu. Jeho hodnota je rovná  $e^{e^{79}}$ . Časom sa postupne podarilo túto hranicu znížiť na  $1,39822 \cdot 10^{316}$ . Ďalším významným bodom bolo odvodenie a dokázanie nasledovnej vety [18].

**Veta 5.2.** Ak je Riemannova hypotéza pravdivá, potom platí

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(\sqrt{x} \ln(x)). \quad (5.1)$$

Funkcia  $O(f(x))$  vo vete 5.2 sa často označuje ako *Landauova notácia* a používa sa na porovnávanie asymptotického chovania funkcií, pričom sa zanedbávajú multiplikatívne aj aditívne konštanty, teda

$$O(f(x)) = O(f(x) + A) = O(A \cdot f(x)),$$

kde  $A \in \mathbb{R}$ . Inými slovami, funkcia  $y$  je  $O(f(x))$  ak platí, že veľkosť<sup>1</sup>  $y$  pre dostatočne veľký argument nikdy nepresiahne nejaký pevný násobok  $f(x)$ . Veta 5.2 teda hovorí, že ak platí Riemannova hypotéza, vzdialenosť medzi  $\pi(x)$  a  $\text{Li}(x)$  od určitého  $x$  nikdy

<sup>1</sup>Tu veľkosť znamená funkčná hodnota bez ohľadu na znamienko, teda jej absolútna hodnota.

nepresiahne hodnotu  $|C\sqrt{x}\ln(x)|$  pre nejaké pevné  $C$ . Vetu 5.2 môžeme vyjadriť aj alternatívnym spôsobom (substitúciou  $x^\varepsilon$  za  $\ln(x)$ ), a to ako

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad (5.2)$$

pre ľubovoľne malé  $\varepsilon$ . To je ale o čosi slabšie tvrdenie a platí, že (5.1) implikuje (5.2), ale nie naopak.

Riemann vo svojom článku [24] z roku 1859 definoval novú funkciu, tzv. *Riemannovu prvočíselnú funkciu*, ktorú označil ako  $f$ . Vzhľadom k tomu, že sa takto v dnešnej matematike definujú funkcie všeobecne, bude jednoduchšie označiť ju inak, napríklad písmenom  $R$ . Samotná definícia tejto funkcie je

$$R(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(\sqrt{x}) + \frac{1}{3}\pi(\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{4}\pi(\sqrt[4]{x}) + \dots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Všimnime si, že tento súčet nie je nekonečný. Vyplýva to z toho, že pre akékoľvek veľké  $x$  bude po určitom čase argument prvočíselnej funkcie menší ako 2 a pre tieto hodnoty je už  $\pi(x)$  rovná nule.

Funkcia  $R(x)$  je, rovnako ako  $\pi(x)$ , schodová funkcia. Všimnime si, že vždy, keď je  $x$  prvočíslo, funkčná hodnota stúpne o 1. Ak je  $x$  štvorec nejakého prvočísla, funkčná hodnota narastie o  $\frac{1}{2}$ , lebo  $\pi(\sqrt{x})$  narastie o 1. Ďalej, ak je  $x$  treťou mocninou nejakého prvočísla, hodnota  $R(x)$  narastie o  $\frac{1}{3}$ , atď.

Aplikáciou Möbiovej inverzie (viď kapitola 1) na funkciu  $R(x)$  dostaneme nasledujúce vyjadrenie

$$\pi(x) = R(x) - \frac{1}{2}R(\sqrt{x}) - \frac{1}{3}R(\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{5}R(\sqrt[5]{x}) + \frac{1}{6}R(\sqrt[6]{x}) - \frac{1}{7}R(\sqrt[7]{x}) + \dots \quad (5.4)$$

Z (5.4) vidno, že niekoľko členov chýba. Sú to presne tie, kde by sa v menovateli nachádzali čísla 4, 8, 9, ..., teda čísla, ktoré vo svojom prvočíselnom rozklade obsahujú druhú mocninu nejakého prvočísla. Z prítomných členov majú kladné znamienko tie, ktorých menovateľ je násobkom párneho počtu prvočísel a záporné znamienko naopak tie, kde má menovateľ vo svojom rozklade nepárny počet prvočísel. Skrátený zápis by vyzeral následovne

$$\pi(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n} R(\sqrt[n]{x}),$$

kde  $\mu(n)$  je Möbiova funkcia, popísaná v kapitole 4. Preto sa aj postup aplikovaný na (5.3) nazýva Möbiova inverzia. Tento súčet, podobne ako (5.3), nebude nekonečný, keďže funkcia  $R(x)$  má nulovú hodnotu pre  $x < 2$ .

### 5.3 Význam

Teraz už vieme, že význam Riemannovej hypotézy spočíva vo vyjadrení prvočíselnej funkcie pomocou Riemannovej funkcie  $R(x)$ . Stále však nemáme objasnené prepojenie s koreňmi funkcie  $\zeta(s)$ . Pripomeňme si teraz jeden zo spôsobov zápisu zeta funkcie, a to pomocou Eulerovho súčinu

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \cdots$$

Teraz obe strany zlogaritmujeme a dostaneme

$$\ln \zeta(s) = -\ln \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{5^s}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{7^s}\right) - \dots \quad (5.5)$$

Skúsmo si teraz výraz  $\ln(1-x)$  vyjadriť pomocou nekonečného Maclaurinovho radu. Ten bude mať nasledovný tvar

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Musíme však dať pozor na to, že tento rad bude konvergentný iba pre  $|x| < 1$ . Ak toto aplikujeme na (5.5), dostaneme

$$\begin{aligned} \ln \zeta(s) &= \frac{1}{2^s} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{2s}}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{3s}}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{4s}}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^{5s}}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{3^s} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{2s}}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{3s}}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^{4s}}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^{5s}}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3^{6s}}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{5^s} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^{2s}}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^{3s}}\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5^{4s}}\right) + \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^{5s}}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5^{6s}}\right) + \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Týmto sme v podstate vytvorili nekonečný súčet nekonečných súčtov, čo sa môže javiť ako skomplikovanie postupu. Ak sa bližšie pozrieme na niektorý z jeho členov, napríklad  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{2s}}$ , vieme ho prepísť pomocou integrálu ako

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{2s}} = \frac{1}{2} s \int_{3^2}^{\infty} x^{-s-1} dx. \quad (5.7)$$

Na prvý pohľad sa toto môže zdať ako čoraz komplikovanejšie vyjadrenie, no týmto spôsobom sa snažíme dopracovať naspäť k funkcií  $R(x)$ . K tomu nám pomôže práve integrál na pravej strane (5.7). Skúsmo teraz vynásobiť  $R(x)$  výrazom  $x^{-s-1}$  pričom predpokladajme, že  $\Re(s) > 1$ . Táto funkcia bude klesajúca, teda keď budeme zväčšovať hodnotu  $x$ , funkčná hodnota sa bude zmenšovať. Otázkou je, akú hodnotu bude mať integrál  $\int_0^{\infty} R(x)x^{-s-1} dx$ . Vzhľadom k zmenšujúcim sa funkčným hodnotám máme dôvod predpokladať, že bude mať konečnú hodnotu. Vezmieme si najprv prvočíslo 2. Preň dostaneme súčet integrálov v tvare

$$\int_2^{\infty} x^{-s-1} dx + \int_{2^2}^{\infty} \frac{1}{2} x^{-s-1} dx + \int_{2^3}^{\infty} \frac{1}{3} x^{-s-1} dx + \int_{2^4}^{\infty} \frac{1}{4} x^{-s-1} dx + \dots$$

Podobne pre číslo 3 dostaneme

$$\int_3^{\infty} x^{-s-1} dx + \int_{3^2}^{\infty} \frac{1}{2} x^{-s-1} dx + \int_{3^3}^{\infty} \frac{1}{3} x^{-s-1} dx + \int_{3^4}^{\infty} \frac{1}{4} x^{-s-1} dx + \dots$$

A rovnako pre zvyšné prvočísla 5, 7, 11, ... Ak toto všetko napíšeme dohromady, máme nekonečný súčet nekonečných súčtov integrálov v tvare

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2^n}^{\infty} \frac{1}{n} x^{-s-1} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{3^n}^{\infty} \frac{1}{n} x^{-s-1} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{5^n}^{\infty} \frac{1}{n} x^{-s-1} dx + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{7^n}^{\infty} \frac{1}{n} x^{-s-1} dx + \dots \end{aligned}$$

Tu vieme každý člen, analogicky k (5.7), prepísať ako  $\frac{1}{n} \int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1} dx$ , čo je  $\frac{1}{s}$ -násobkom (5.6). Z toho dostávame výsledný tvar

$$\frac{1}{s} \ln \zeta(s) = \int_0^{\infty} R(x) x^{-s-1} dx. \quad (5.8)$$

Táto rovnica je veľmi významným prepojením medzi matematickou analýzou a teóriou čísel. Keďže už vieme vyjadriť  $\pi(x)$  pomocou funkcie  $R(x)$  a inverziou vzťahu (5.8) aj  $R(x)$  pomocou funkcie  $\zeta(s)$ , znamená to, že vieme vyjadriť  $\pi(x)$  pomocou  $\zeta(s)$ . Teda vlastnosti prvočíselnej funkcie musia byť nejakým spôsobom „zakódované“ vo funkcií  $\zeta(s)$ .

Inverziu vzťahu (5.8) a s pomocou funkcie  $\xi(s)$  sa Riemann dopracoval k nasledujúcemu vzťahu

$$R(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2 - 1) \ln t} + \ln \xi(0). \quad (5.9)$$

Posledné dva členy na pravej strane nie sú príliš zaujímavé, keďže ich hodnoty sú relatívne malé pre veľké  $x$  (hodnota posledného členu je rovná  $\ln 2$ ). Prvý člen, funkciu  $\text{Li}(x)$ , sme už definovali v kapitole 2. Preto sa teraz budeme sústrediť hlavne na člen  $\sum_{\rho} \text{Li}(x^{\rho})$ . Práve tu sú zakódované netriviálne nulové body funkcie  $\zeta(s)$  – vyjadruje ich grécke písmeno  $\rho$ .

Pri umocnení  $x$  na komplexné číslo  $\rho = \frac{1}{2} + ti$  dostaneme bod v komplexnej rovine, vzdialený od stredu súradnicového systému o  $\sqrt{x}$ . To znamená, že  $x^{\rho}$  budú body v komplexnej rovine, ktoré ležia na kružnici so stredom v počiatku a polomerom  $\sqrt{x}$ . Funkciu  $\text{Li}(x)$  sme doteraz mali definovanú iba pre reálne čísla, je však možné ju definovať aj v obore komplexných čísel, a to ako

$$\text{Li}(z) = \text{Ei}(\ln z),$$

kde  $\text{Ei}(z)$  je exponenciálny integrál, definovaný ako

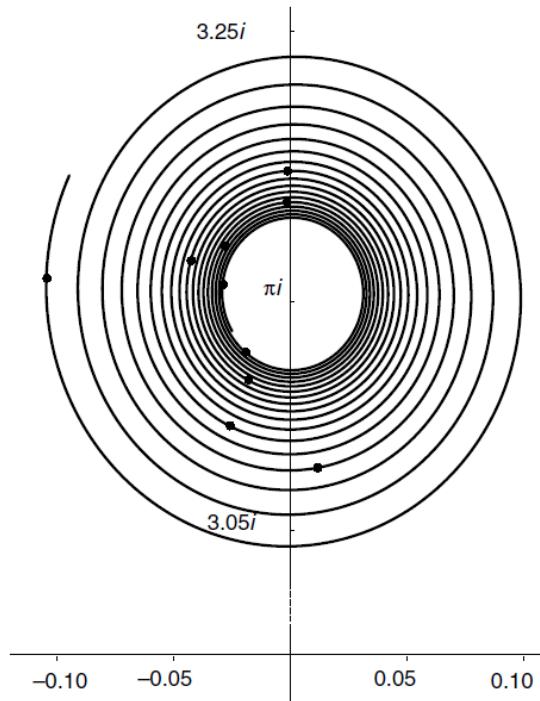
$$\text{Ei}(z) = \gamma + \ln z + \int_0^z \frac{e^u - 1}{u} du.$$

Na obrázku 5.3 je zobrazená funkcia  $\text{Li}(20^z)$ , pre konkrétnie zadané  $x = 20$ , pričom  $z$  „beží“ po kritickej priamke. Dôvodom, prečo nevykresľujeme iba nulové body ale celú kritickú priamku je lepší dôraz na konvergenciu. Nulové body  $\zeta(s)$  sú na špirále vyznačené. Zaujímavosťou je, ako sa špirála postupne blíži k hodnote  $\pi i$ .

Konvergencia je však relatívne pomalá, konkrétnie nepriamo úmerná „výške“  $T$  na kritickej priamke. Toto bol v podstate prvý zásadný objav Riemanna – zistil, že počet nulových bodov  $\rho$ , ktorých imaginárna časť leží v intervale<sup>2</sup>  $[0; T]$  na kritickej priamke je približne rovný

$$\frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

pričom relatívna chyba tejto aproximácie je rádovo rovná  $1/T$ . Dôkaz tohto tvrdenia iba načrtol, pričom ho považoval za triviálne pre čitateľa. Riadny dôkaz sa však podarilo skonštruovať až von Mangoltovi v roku 1905 [35].



Obr. 5.3: Graf funkcie  $\text{Li}(20^z)$  pre kúsok kritickej priamky [7].

Kedže netriviálne nulové body  $\zeta(s)$  sa objavujú v komplexne združených dvojiciach, rovnaká špirála bude vytvorená aj na zápornej časti imaginárnej osi, pričom obe špirály budú spojené. Čím viac by sme zväčšovali  $x$ , tým viac by bola táto krvka „roztiahnutá“, pričom by sa postupne obe špirály začali prekrývať. Konvergencia k  $\pi i$  a  $-\pi i$  bude však zachovaná.

K vypočítaniu hodnoty druhého člena z (5.3) nám zostáva ešte členy  $\text{Li}(x^\rho)$  nekonečne veľa krát sčítať cez všetky netriviálne nulové body. Tým sa vlastne pokúšame sčítať všetky body vyznačené na obrázku 5.3, spolu s ich komplexne združenými dvojicami. Ich imaginárne časti sa vyrušia a zostanú nám iba reálne čísla, čo nám vyhovuje, keďže funkčná hodnota  $R(x)$  je vždy reálna. Nemáme však istotu, či tento súčet bude konvergovať.

Vo veľmi veľa prípadoch nekonečných radov ich konvergencia závisí od poradia, v akom členy sčítame a inak to nebude ani pre  $\sum_\rho \text{Li}(x^\rho)$ . Keďže reálne časti  $x$ , ako

---

<sup>2</sup>Pohybujeme sa smerom nahor a nadol po kritickej priamke.

aj vidno z obrázka 5.3, nadobúdajú aj kladné aj záporné hodnoty, je veľká šanca, že sa budú navzájom do istej miery rušiť a súčet naozaj bude mať konečnú hodnotu. Čo sa týka poradia, je potrebné postupne sčítavať logaritmické integrály argumentov  $x$  umocnených najprv na nulový bod  $\zeta(s)$  a potom na jeho komplexne združenú dvojicu. Týmto spôsobom bude rad konvergentný, čo znamená, že vieme vypočítať hodnotu  $R(x)$  pre akékoľvek veľké číslo  $x$  a tým pádom aj hodnotu  $\pi(x)$  pomocou funkcie  $\zeta(s)$  a jej netriviálnych nulových bodov.

## 5.4 Zovšeobecnená Riemannova hypotéza

Riemannova hypotéza sa zaoberá konkrétnie Riemannovou funkciou  $\zeta(s)$ . Existuje však aj *zovšeobecnená Riemannova hypotéza*, ktorá sa zaoberá zovšeobecnením samotnej zeta funkcie, ktorá patrí do kategórie tzv. *Dirichletových L-funkcií*. Tieto funkcie sa definujú podobným spôsobom, ako sme na začiatku kapitoly 3 definovali Riemannovu funkciu  $\zeta(s)$ .

**Definícia 5.** Dirichletov  $L$ -rad je rad tvaru

$$L(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_k(n) n^{-s},$$

kde  $\chi_k(n)$  je Dirichletov charakter modulo  $k$ , ktorý je definovaný vlastnosťami

$$\begin{aligned} \chi_k(1) &= 1, \\ \chi_k(n) &= \chi_k(n+k), \\ \chi_k(m)\chi_k(n) &= \chi_k(mn) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, \\ \chi_k(n) &= 0 \quad \text{pre } (k, n) \neq 1, \end{aligned}$$

kde značenie  $(k, n)$  znamená najväčší spoločný deliteľ  $k$  a  $n$ .

*Poznámka.* Charakter  $\chi_k(n)$  sa nazýva *primitívny*, ak neexistuje žiadny  $\chi_d(n)$  taký, že  $\chi_k(n) = \chi_d(n)$ , kde  $d$  delí  $k$  a  $d \neq k$ . Jediný  $\chi_k(n)$  taký, že  $\chi_k(n) = 1$  pre každé  $n$  s  $(k, n) = 1$ , sa nazýva *hlavný*.

**Definícia 6.** Dirichletova  $L$ -funkcia  $L(s, \chi_k)$  je analytickým pokračovaním príslušného Dirichletovho  $L$ -radu.

Riemannova  $\zeta(s)$  do tejto skupiny funkcií patrí, keďže

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_1(n) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

Riemannovu hypotézu je možné naformulovať aj vo všeobecnejšom tvare pre skupinu Dirichletových  $L$ -funkcií ako

**Veta 5.3** (Zovšeobecnená Riemannova hypotéza). *Všetky netriviálne nulové body funkcie  $L(s, \chi_k)$  majú reálnu časť rovnú  $\frac{1}{2}$ .*

V tomto prípade „netriviálny“ znamená, že  $L(s, \chi_k) = 0$  pre  $s \in \mathbb{C}$  také, že  $0 < \Re(s) < 1$ . Funkcia  $L(s, \chi_k)$  má nulové body aj na osi  $\Im(s) = 0$ , no tie sa považujú za triviálne. Keďže  $\zeta(s)$  patrí do skupiny  $L$ -funkcií, zovšeobecnená Riemannova hypotéza implikuje „klasickú“ Riemannovu hypotézu a tým predstavuje silnejšie tvrdenie.

Existuje niekoľko ďalších zovšeobecnení, rozšírení a tvrdení ekvivalentných Riemannovej hypotéze z pohľadov rôznych odvetví matematiky, mimo matematickej analýzy napríklad algebry a teórie pravdepodobnosti, tie však nie sú predmetom skúmania tejto bakalárskej práce.

# Kapitola 6

## Pokusy o dôkaz

Numericky boli hodnoty pre netriviálne nulové body overené pre približne  $10^{13}$  bodov, čo je jeden z dôvodov, prečo sa vo vedách ako fyzika a chémia, niekedy berie Riemannova hypotéza ako experimentálne overená. To ale ako rigorózny dôkaz nestačí – ten nájdený do dnešného dňa neboli.

V tejto práci bolo spomínaných niekoľko mien veľkých matematikov ako Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, Jacques Hadamard, Charles Jean de la Vallée Poussin, David Hilbert, Lejeune Dirichlet, G. H. Hardy, John E. Littlewood a ďalší. Všetci z nich významne prispeli k dnešnej analytickej teórii čísel objavmi týkajúcimi sa či už prvočíselnej vety, zeta funkcie, alebo priamo Riemannovej hypotézy. Mnoho matematikov sa za posledných 160 rokov pokúšalo hypotézu dokázať či vyvrátiť a nové nápady a pokusy pribúdajú každý deň, zatiaľ však neúspešne. V tejto kapitole si ukážeme niektoré z najznámejších pokusov, vrátane najnovšieho, zatiaľ však nepotvrdeného dôkazu Michaela Atiyaha zo septembra roku 2018. Zdrojmi informácií pre túto kapitolu boli [3], [5], [6], [7], [12], [19], [22], [32] a [33].

### 6.1 Thomas Stieltjes

Prvý známy pokus o dôkaz Riemannovej hypotézy prišiel od Thomasa Joannesa Stieltjesa v roku 1885. Vychádzal z Mertensovej domnenky, ktorá hovorí, že pre akékoľvek  $n \geq 1$  platí, že  $|M(n)| < n^{\frac{1}{2}}$ , kde  $M(n)$  označuje Mertensovú funkciu, ktorú sme si definovali v kapitole 4. Stieltjes publikoval článok [19] v časopise *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, kde tvrdil, že dokázal rovnosť  $M(n) = O(n^{\frac{1}{2}})$ . Toto je silnejšie tvrdenie ako samotná Riemannova hypotéza, ktorá by z neho automaticky vyplývala, keďže tá je ekvivalentná tvrdeniu, že  $M(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$  pre akékoľvek malé  $\varepsilon$ . Toto tvrdenie inými slovami hovorí, že číslo, ktoré vo svojom prvočíselnom rozklade neobsahuje štvorec nejakého prvočísla, bude mať v tomto rozklade párny počet prvočísel s pravdepodobnosťou 50% a nepárny počet prvočísel taktiež s pravdepodobnosťou 50%. Stieltjes však zomrel skôr, ako stihol oficiálny dôkaz publikovať a po jeho smrti sa ani v jeho papieroch žiadny takýto dôkaz nenašiel.

Thomas Stieltjes bol známym a rešpektovaným matematikom a takmer nikto nemal pochybnosti o tom, že nejaký dôkaz našiel napriek tomu, že ho nikdy nepublikoval. V roku 1985 však Andrew Odlyzko a Herman te Riele vyvrátili Mertensovú

domienku [23], čím vrhli tieň pochybností na existenciu, prípadne správnosť Stieljesovho dôkazu.

## 6.2 Pál Turán

Maďarský matematik Pál Turán vo svojej publikácií [?] tvrdil, že ak pre dostatočne veľké  $N$  nebude  $N$ -tý parciálny súčet  $\zeta(s)$  pre  $\sigma > 1$  konvergovať k nule, vyplýva z toho Riemannova hypotéza. Neskôr bol však tento prístup ukázaný ako nesprávny, keď Hugh Montgomery dokázal, že pre akékoľvek kladné  $c < \frac{4}{\pi} - 1$  má  $N$ -tý parciálny súčet  $\zeta(s)$  nulové body v polrovine  $\sigma > 1 + c^{\frac{\ln \ln(N)}{\ln(N)}}$ .

## 6.3 Alan Turing

Alan Turing ako jeden z mála matematikov veril, že Riemannova hypotéza pravdivá nie je a jeho cieľom bolo nájsť nejaký protipríklad, teda netriviálny nulový bod, ktorý by ležal mimo kritickú priamku. V roku 1939 mal v úmysle vyrobiť analógový prístroj [22, s. 1186–1187], ktorý mu mal pomôcť s výpočtami potrebnými pre overenie pravdivosti hypotézy. Na jeho konštrukciu dokonca získal peňažný grant od Kráľovskej spoločnosti. Podarilo sa mu však iba manuálne vyrobiť niektoré súčasťky, keďže v tom istom roku musel tieto záležitosti odložiť kvôli povinnostiam v II. svetovej vojne. K svojej práci sa vrátil až v roku 1950, kedy už však bolo možné na výpočty využívať algoritmy bez zásahu človeka.

Turing mal v úmysle overiť netrivialne nulové body zeta funkcie v rozmedzí  $1450 < t < 6000$ , keďže pre interval  $0 < t < 1464$  už sa ich podarilo overiť Edwardovi Titchmarshovi. Základným princípom bol výpočet funkcie  $Z(t)$ , definovanej ako  $Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta(\frac{1}{2} + it)$  [5] pomocou jej approximácie

$$Z(t) \approx 2 \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{t/2\pi} \rfloor} n^{-\frac{1}{2}} \cos(\theta(t) - t \ln n).$$

Turing konštrukciu prístroja však nikdy nedokončil a keďže sa bál odsúdenia a následnej väzby, urýchlene vydal nedokončenú publikáciu [33], v ktorej popisoval svoje úvahy a výpočty. Bohužiaľ z nej však bolo zrejmé iba to, že bol so svojimi výsledkami nespokojný a to, aké boli jeho ďalšie úmysly, sa už nikto nedozvedel, keďže krátko na to spáchal samovraždu.

## 6.4 Michael Atiyah

Najnovší populárny pokus o dôkaz Riemannovej hypotézy bol publikovaný v septembri roku 2018 a jeho autorom bol sir Michael Atiyah. Svoje myšlienky prezentoval na 6. Heidelberg Laureate Forum v Nemecku. Jeho článok [3] sa mohol hned na prvý pohľad zdať veľmi jednoduchý, keďže mal rozsah iba 5 strán a napriek Atiyahovej povesti jedného z mála matematikov, ktorým sa podarilo získať Fieldsovú medailu

aj Abelovu cenu, sa naň mnoho expertov pozeralo skepticky a vyjadrovali o ňom už od začiatku pochybnosti.

Dokádzanie Riemannovej hypotézy nebolo spočiatku ani jeho hlavným cieľom a tvrdil, že k nemu dospel náhodou počas odvádzania vlastností konštanty jemnej štruktúry  $\alpha$  [15], ktorá opisuje interakciu medzi svetlom a hmotou. Základ dôkazu spočíval v určitých vlastnostiach tzv. *Toddovej funkcie* [3], ktorú označil  $T$  a použil princíp dôkazu sporom. Ukážme si najprv spomenuté vlastnosti.

**Veta 6.1.** *Toddova funkcia má nasledujúce vlastnosti:*

1.  *$T$  je reálna, teda  $\overline{T(s)} = T(\bar{s})$ .*
2.  *$T(1) = 1$ .*
3.  *$T$  zobrazuje kritický pás do kritického pásu a kritickú priamku na kritickú priamku.*
4. *Na kladnej časti kritickej priamky je  $T$  monotónna rastúca funkcia  $\Im(s)$ , ktorej limita je rovná  $\infty^1$ .*
5. *Ak  $f$  a  $g$  sú mocninové rady bez konštantného člena, potom*

$$T\{[1 + f(s)] \cdot [1 + g(s)]\} = T\{1 + f(s) + g(s)\}.$$

6.  *$T(\sqrt{s}) = \sqrt{T(s)}$ .*
7.  *$\sqrt{T(1+s)} = T(1+s/2)$ .*

Atiyah teda najprv predpokladal existenciu nulového bodu vnútri kritického pásu, no mimo kritickej priamky. Potom vytvoril novú funkciu s predpisom

$$F(s) = T\{1 + \zeta(s + b)\} - 1$$

a nulovým bodom v  $b$ , čím získal ďalší nulový bod  $b'$ , bližšie ku kritickej priamke. Opakováním tohto procesu dostať postupnosť nulových bodov, konvergujúcich k bodu na kritickej priamke. Tvrdil, že funkcia  $F(s)$  musí byť tým pádom identicky rovná nule, čo by však viedlo k sporu s ním definovanými vlastnosťami funkcie  $T$ .

Skepticizmus okolo tohto dôkazu sa týka práve funkcie  $T$ , keďže ju Atiyah zadefinoval sám a dôkazy jej vlastností presne neuviedol. Veľkým pozitívom jeho pokusu však bolo to, že napriek tomu, že sa mu hypotézu dokázať pravdepodobne nepodařilo, vyvolal okolo tejto témy relatívne veľký rozruch a čoraz viac matematikov, ale aj laikov, sa o ňu začalo opäť zaujímať.

---

<sup>1</sup>Konšanta  $\infty$  súvisí so spomínanou konštantou jemnej štruktúry  $\alpha$  a jej hodnota je podľa Atiyaha presne rovná  $1/\alpha$ .

## 6.5 Existencia dôkazu

Práve z dôvodu neúspešnosti doposiaľ všetkých pokusov o dôkaz tejto slávnej hypotézy sa objavujú stále nové teórie pojednávajúce o samotnej existencii nejakého dôkazu. Riemannova hypotéza totiž môže byť prípadom, pre ktorý platí tzv. *1. Gödelova veta o neúplnosti*.

**Veta 6.2** (1. Gödelova veta o neúplnosti). *Každý formálny systém zahrňujúci aspoň aritmetiku prirodzených čísel bud' nie je bezsporný, alebo nie je úplný.*

Inými slovami by sa dalo povedať, že ak máme zadaný bezsporný systém pomočou axióm, tak v ňom existujú tvrdenia, ktoré nie je možné vnútri daného systému dokázať ani vyvrátiť. Toto by sa mohlo tiež vzťahovať na Riemannovu hypotézu, čo by znamenalo, že v súčasnej matematickej teórií nemáme potrebné nástroje na jej dokádzanie alebo vyvrátenie. Tým, že hypotéza stále odoláva akýmkoľvek pokusom o dôkaz či vyvrátenie, sa tento názor stáva čoraz pravdepodobnejším, takisto je však možné, že ešte neboli použitý ten správny prístup, či metóda.

Ako sme spomenuli na začiatku tejto kapitoly, doteraz boli reálne časti overené pre  $10^{13}$  nulových bodov zeta funkcie, pričom všetky boli rovné  $\frac{1}{2}$ . Naznačuje to jej možnú pravdivosť, zatiaľ však stále nevieme, na čo by sme prišli, ak by sa nám podarilo vypočítať napríklad  $10^{100}$  netriviálnych koreňov, prípadne viac. Spomeňme si na kapitolu 5, kde sme okrajovo spomenuli vznik *Skewesovho čísla*. Toto je číslo, pre ktoré Stanley Skewes dokázal, že porušuje nerovnosť  $\text{Li}(x) > \pi(x)$ , pričom sa dovtedy verilo, že táto nerovnosť bude vždy platiť. Riemannova hypotéza by taktiež mohla byť podobným prípadom.

# Kapitola 7

## Význam Riemannovej hypotézy

Poslednou otázkou, ktorou sa budeme zaoberať v tejto bakalárskej práci je to, čo vlastne činí Riemannovu hypotézu tak dôležitou (a súčasne aj nebezpečnou). Už sme si ukázali, že existuje prepojenie zeta funkcie s rozložením prvočísel, a že ak je Riemannova hypotéza naozaj pravdivá, dá sa toto rozloženie aj veľmi presne určiť. Informácie pre túto kapitolu sme čerpali z [6], [7], [20], [25] a [28].

### 7.1 Rozloženie prvočísel

Vzorec pre prvočíselnú funkciu podľa Riemanna vlastne hovorí, že vzdialenosť prvočísel od ich očakávanej hodnoty je kontrolovaná reálnymi časťami netriviálnych nulových bodov zeta funkcie. Konkrétnie chybový člen v Prvočíselnej Vete je úzko prepojený s jej nulovými bodmi. Jedným z výsledkov Riemannovho článku z roku 1859 je totiž vzorec, ktorý hovorí, že počet prvočísel menších ako nami zvolená hodnota  $x$  je presne rovný Riemannovej prvočíselnej funkcií v bode  $x$  plus chybový člen, rovný nekonečnému súčtu  $R(x^\rho)$ , za predpokladu, že platí Riemannova hypotéza. Matematický zápis vyzerá takto

$$\pi(x) = R(x) + \sum_{\rho} R(x^\rho),$$

kde  $\rho$  označuje netriviálne nulové body  $\zeta(s)$ . Toto však platí iba za spomenutého predpokladu, že je Riemannova hypotéza pravdivá. Všeobecne existuje veľké množstvo článkov a publikácií, začínajúcich vetou „Ak platí Riemannova hypotéza, potom ...“, za čím nasleduje niekoľko strán teórie. Prakticky sa v matematike však nemožno spoliehať na pravdivosť teórie, ktorá je podložená predpokladom, ku ktorému neboli predložený žiadny rigorózny dôkaz.

### 7.2 Šifrovanie

Ďalším dôležitým príkladom je šifrovanie, v modernom svete najmä v bankovníctve. To využíva tzv. *RSA kryptosystém*, pomenovaný podľa trojice Rivest–Shamir–Adleman. Je to asymetrický šifrovací algoritmus, založený na princípe verejného

kľúča, kde je šifrovací kľúč verejný a odlišný od toho dešifrovacieho. Približný postup vyzerá nasledovne

1. Vyber dve veľké prvočísla  $p$  a  $q$ .
2. Vynásob ich medzi sebou a vytvor  $N = p \cdot q$ .
3. Spočítaj hodnotu Eulerovej funkcie  $\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$ .
4. Zvoľ celé číslo  $k$  menšie ako  $\varphi(n)$ , ktoré je s  $\varphi(n)$  nesúdeliteľné.
5. Nájdi číslo  $d$  tak, aby platilo  $dk \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ .
6. Ak je  $k$  prvočíslo, potom  $d = \frac{1+r \cdot \varphi(n)}{k}$ , kde  $r = (k - 1)\varphi(n)^{k-2}$ .

Verejným kľúčom je potom dvojica  $(n, k)$  a súkromným kľúčom dvojica  $(n, d)$ . Tento algoritmus sa považuje za bezpečný, pokiaľ je dvojica  $p, q$  dostatočne veľká (na šifrovanie transakcií sa používajú prvočísla so 150 a viac číslicami). Na následné dešifrovanie by bolo treba poznať prvočíselný rozklad čísla  $N$ , ktorý je nesmierne ľahké vypočítať aj modernou výpočetnou technikou. Napriek veľkej časovej náročnosti to nie je nemožné, čo je aj dôvod, prečo banky vymieňajú kreditné karty vždy po uplynutí určitej doby.

Často sa vynára otázka, aký by malo dokázanie Riemannovej hypotézy vplyv práve na bezpečnosť šifrovacích algoritmov založených na prvočíslach. Následkom jej dokázania by zrejme nebol okamžitý vznik rýchleho dešifrovacieho algoritmu, na ktorom by sa zrútila bezpečnosť internetového bankovníctva. Problém by mohla predstavovať skôr metóda dôkazu, keďže je veľmi pravdepodobné, že sa na jej dokázanie bude musieť vymyslieť úplne nový prístup a možno aj nové odvetvie matematiky. Toto by mohlo taktiež viesť k novým metódam a operáciám s prvočíslami, čo by už v dôsledku mohlo ohrozíť práve kryptosystémy založené na vlastnostiach prvočísel.

### 7.3 Fyzika

Poslednou zaujímavou oblasťou, ktorú iba okrajovo spomenieme v tejto práci a do ktorej hypotéza zasahuje, je fyzika. Ukazuje sa, že zeta funkcia zohráva svoju rolu aj v kvantovej fyzike, a to práve rozložením jej netriviálnych nulových bodov. Platí totiž, že štatistické rozdelenie známych koreňov ležiacich na kritickej priamke je rovnaké, ako štatistické rozloženie vlastných čísel Hermitovských matíc. Práve táto technika sa vo fyzike používa k popisu energetických hladín atómových jadier a úzko súvisí s niektorými javmi kvantovej fyziky. Z tohto vyplýva aj možná metóda dôkazu – ak by sa niekomu podarilo nájsť kvantový dynamický systém, ktorého vlastné čísla presne zodpovedajú netriviálnym koreňom zeta funkcie, tak by tieto korene nutne museli ležať na kritickej priamke. Tým by mohla byť hypotéza dokázaná.

# Záver

V tejto bakalárskej práci sme sa venovali najmä Prvočíselnej vete, Riemannovej zeta funkcií a slávnej Riemannovej hypotéze. Jej hlavným cieľom bolo oboznámiť čitateľa s tým, o čom vlastne daná hypotéza hovorí a čo ju činí tak významnou.

Prácu sme rozdelili do 7 kapitol, pričom v úvodnej kapitole sme si pre zjednodušenie čítania pripomenuli niektoré pojmy z komplexnej analýzy a teórie čísel. Ďalej sme si predstavili dve formulácie Prvočíselnej vety, s ktorou je Riemannova hypotéza kľúčovo prepojená. V 3. kapitole sme si postupne zadefinovali Riemannovu zeta funkciu, najprv pre obor reálnych čísel, a potom aj pre celú komplexnú rovinu, pomocou jej analytického pokračovania. Ako ďalšie sme odvodili vzorec pre Eulerov súčin, ktorý predstavuje hlavné prepojenie medzi zeta funkciou a prvočíslami. Taktiež sme si ukázali základné vlastnosti funkcie zeta, ako napríklad symetriu podľa priamok  $\Re(s) = \frac{1}{2}$  a  $\Im(s) = 0$ , alebo existenciu tzv. triviálnych a netriviálnych nulových bodov. Štvrtú kapitolu sme venovali odvodeniu Möbiovej funkcie  $\mu$ , ktorá je tiež so zeta funkciou a slávnou hypotézou úzko spojená. V kapitolách 5 a 6 už sme sa zaoberali priamo Riemannovou hypotézou, o čom vlastne hovorí, ako súvisí s rozložením prvočísel a taktiež najvýznamnejšími pokusmi o jej dokázanie, vrátane najnovšieho dôkazu z roku 2018, ktorého autorom je sir Michael Atiyah. Poslednú, 7. kapitolu, sme potom venovali významu Riemannovej hypotézy a jej dopadu aj na iné vedecké obory, najmä šifrovanie a fyziku.

# Zoznam použitej literatúry

- [1] ABRAMOWITZ, Milton a Irene STEGUN, ed. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover Publications, 1972. ISBN 978-048-6612-720.
- [2] AGARWAL, Ravi P., Kanishka PERERA a Sandra PINELAS. *An Introduction to complex analysis*. New York: Springer, 2011. ISBN 978-1-4614-0194-0.
- [3] ATIYAH, sir Michael Francis. *The Riemann Hypothesis* [online]. [cit. 2019-03-27]. Dostupné z: <https://ep00.epimg.net/descargables/2018/09/25/b133e2bf9a3e7bb55f5fae26dcf9b8c0.pdf>
- [4] BIANE, Philippe, Jim PITMAN a Marc YOR. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 2001, **38**(4), 435–465.
- [5] BOOKER, Andrew R. Turing and the Riemann Hypothesis. *Notices of the American Mathematical Society* [online]. 2006, **53**(10), 1208-1211 [cit. 2019-03-27]. Dostupné z: <https://www.ams.org/notices/200610/fea-booker.pdf>
- [6] BORWEIN, Peter, Stephen CHOI, Brendan ROONEY a Andrea WEIRATH-MUELLER. *The Riemann hypothesis: a resource for the aficionado and virtuoso alike*. London: Springer, 2008. ISBN 978-0387721255.
- [7] DERBYSHIRE, John. *Prime obsession: Bernhard Riemann and the greatest unsolved problem in mathematics*. Washington, DC: Joseph Henry Press, 2003. ISBN 03-090-8549-7.
- [8] DEVOS, Matt. *Möbius Inversion and Lattices* [online]. [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: [http://www.sfu.ca/~mdevos/notes/comb\\_struct/mobius.pdf](http://www.sfu.ca/~mdevos/notes/comb_struct/mobius.pdf)
- [9] DIRICHLET, Peter Gustav Lejeune. Sur l'usage des series infinies dans la théorie des nombres. *J. Reine Angew. Math.* 1838, (18), 259-274.
- [10] DOŠLÁ, Zuzana a Vítězslav NOVÁK. *Nekonečné řady*. První vydání. Brno: Masarykova univerzita, 1998. ISBN 80-210-1949-2.
- [11] EULER, Leonhard. Variae observationes circa series infinitas. *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. 1737, 160-188.

- [12] GÖDEL, Kurt. *On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems*. New York: Dover Publications, 1992. ISBN 04-866-6980-7.
- [13] HADAMARD, Jacques. Sur la distribution des zéros de la fonction  $\zeta(s)$  et ses conséquences arithmétique. *Bull. Soc. Math. France*. 1896, 24, 199-220.
- [14] HARDY, G. H. Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* [online]. 1914, (158), 1012-1014 [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3111d/f1014.image.r=>
- [15] Introduction to the constants for nonexperts. *The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty* [online]. [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/alpha.html>
- [16] IVIC, Aleksandar. *The Riemann Zeta-Function: Theory and Applications* [online]. Courier Corporation, 2012 [cit. 2019-03-27]. ISBN 9780486140049. Dostupné z: <https://books.google.cz/books?id=tUXCAGAAQBAJ>
- [17] KALAS, Josef. *Analýza v komplexním oboru*. První vydání. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2006. ISBN 80-210-4045-9.
- [18] KOCH, Helge. Sur la distribution des nombres premiers. *Acta Mathematica* [online]. 1901, 24, 159-182 [cit. 2019-03-29]. DOI: 10.1007/BF02403071. ISSN 0001-5962. Dostupné z: <http://projecteuclid.org/euclid.acta/1485882091>
- [19] MARÍN, Juan Miguel. *Marvelous cancellations: T.J. Stieltjes' letters concerning the zeta function* [online]. [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1410/1410.8592.pdf>
- [20] MAZUR, Barry a William A. STEIN. *Prime numbers and the Riemann hypothesis*. First published. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2016. xi, 142. ISBN 9781107499430.
- [21] NESTERENKO, Yu. V. An elementary proof of the irrationality of  $\zeta(3)$ . *Moscow University Mathematics Bulletin*. 2009, 64(4), 165-171 [cit. 2019-03-26]. DOI: 10.3103/S0027132209040056. ISSN 0027-1322. Dostupné tiež z: <http://www.springerlink.com/index/10.3103/S0027132209040056>
- [22] *Notices of the American Mathematical Society*. 2006, **53**(10).
- [23] ODLYZKO, A. M. a H. J. J. te RIELE. *Disproof of the Mertens Conjecture* [online]. [cit. 2019-03-27]. Dostupné z: <http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/arch/mertens.disproof.pdf>
- [24] RIEMANN, Bernhard. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. *Monatsberichte der Berliner Akademie* [online]. 1859 [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Ueber\\_die\\_Anzahl\\_der\\_Primezahlen\\_unter\\_einer\\_gegebenen\\_Grösse.pdf](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Ueber_die_Anzahl_der_Primezahlen_unter_einer_gegebenen_Grösse.pdf)

- [25] RIEMANN, Bernhard a David R. WILKINS. *On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity (Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.)* [online]. [cit. 2018-12-02]. Dostupné z: <https://www.claymath.org/sites/default/files/ezeta.pdf>
- [26] RIEMANN, Bernhard. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse.* [online]. Göttingen, 1851 [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Grund/Grund.pdf>. Inauguraldissertation.
- [27] RIVAT, Joël. Arithmetic Functions. *Ergodic Theory and Dynamical Systems in their Interactions with Arithmetics and Combinatorics*. Cham: Springer International Publishing, 2018, 2018-06-16, Lecture Notes in Mathematics. ISBN 978-3-319-74907-5.
- [28] RIVEST, R. L., A. SHAMIR a L. ADLEMAN. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM* [online]. 1978, 21(2), 120-126. ISSN 00010782. Dostupné z: <http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=359340.359342>
- [29] ROCKMORE, Dan. *Stalking the Riemann Hypothesis: The Quest to Find the Hidden Law of Prime Numbers*. Vintage, 2006. ISBN 978-0375727726.
- [30] PATTERSON, S. J. *An introduction to the theory of the Riemann zeta-function*. New York: Cambridge University Press, 1988. ISBN 05-213-3535-3.
- [31] The Fundamental Theorem of Arithmetic. *The Oxford Math Center* [online]. [cit. 2019-03-27]. Dostupné z: <http://www.oxfordmathcenter.com/drupal7/node/165>
- [32] TURÁN, Pál. On Some Approximative Dirichlet-Polynomials in the Theory of the Zeta-Function of Riemann. *Mathematisk-fysiske meddelelser*. København: I kommission hos Munksgaard, 1948, (17), 1-36.
- [33] TURING, A. M. Some Calculations of the Riemann Zeta-Function. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1953, s3-3(1), 99-117. DOI: 10.1112/plms/s3-3.1.99. ISSN 00246115. Dostupné tiež z: <http://doi.wiley.com/10.1112/plms/s3-3.1.99>
- [34] VEISDAL, J. *Prime Numbers and the Riemann Zeta Function*. Trondheim, 9.5.2013. B.Sc. thesis. University of Stavanger, Stavanger.
- [35] V. MANGOLDT, H. Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion  $\gamma(t)$ . *Mathematische Annalen* [online]. 1905, 60(1), 1-19 [cit. 2019-04-12]. DOI: 10.1007/BF01447494. ISSN 0025-5831. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF01447494>

