MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2017 KRISTÍNA VRTÍKOVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Transformace vícerozměrných integrálů

Bakalářská práce

Kristína Vrtíková

Vedoucí práce: doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D. **Brno 2017**

Bibliografický záznam

Autor:	Kristína Vrtíková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Transformace vícerozměrných integrálů
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika
Vedoucí práce:	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Akademický rok:	2016/2017
Počet stran:	ix + 46
Klíčová slova:	Transformace; Vícerozměrný integrál; Dvojný integrál; Trojný integrál; Věta o transformaci; Polární souřadnice; Válcové souřadnice; Sférické souřadnice

Bibliografický záznam

Autor:	Kristína Vrtíková Prírodovedecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a štatistiky
Názov práce:	Transformácia viacrozmerných integrálov
Študijný program:	Matematika
Študijný odbor:	Finančná a poistná matematika
Vedúci práce:	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Akademický rok:	2016/2017
Počet strán:	ix + 46
Kľúčové slová:	Transformácia; Viacrozmerný integrál; Dvojný integrál; Trojný integrál; Veta o transformácii; Polárne súradnice; Valcové súradnice; Sférické súradnice

Bibliographic Entry

Author:	Kristína Vrtíková Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Transformations of multiple integrals
Degree Programme:	Mathematics
Field of Study:	Financial and Insured Mathematics
Supervisor:	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Academic Year:	2016/2017
Number of Pages:	ix + 46
Keywords:	Transformation; Multidimensional integral; Double integral; Triple integral; Theorem of transformation; Polar coordinates; Cylindrical coordinates; Spherical coordinates

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá transformacemi vícerozměrných integrálů. Text práce je rozdělen do tří kapitol. První kapitola sa věnuje transformacím n-rozměrných integrálů. Formulujeme zde základní definice a věty o substituci, které dokážeme. Ve druhé kapitole přejdeme k transformacím dvojných integrálů a ilustrujeme je na příkladech. Poslední kapitola pojednává o transformacích trojných integrálů, kde také řešíme příklady.

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá transformáciami viacrozmerných integrálov. Text práce je rozdelený do troch kapitol. Prvá kapitola sa venuje transformáciam n-rozmerných integrálov. Formulujeme tu základné definície a vety o substitúcii, ktoré dokážeme. V druhej kapitole prejdeme k transformáciám dvojných integrálov a ilustrujeme ich na príkladoch. Posledná kapitola pojednáva o transformáciách trojných integrálov, kde tiež riešime príklady.

Abstract

This bachelor thesis deals with transformations of multidimensional integrals. The text of the thesis has divided into three chapters. First chapter focuses on the transformations of the n-dimensional integrals. We formulate basic definitions and theorems of substitution which will be proved. In the second chapter we pass on to the transformations of the double integrals and we illustrate them with several examples. The last chapter deals with the transformations of the triple integrals where we solve examples too.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2016/2017

Ústav:	Ústav matematiky a statistiky
Studentka:	Kristína Vrtíková
Program:	Matematika
Obor:	Finanční a pojistná matematika

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s názvem:

Název práce:	Transformace vícerozměrných integrálů
Název práce anglicky:	Transformations of multiple integrals

Oficiální zadání:
Cílem práce je uceleně pojednat o transformacích vícerozměrných integrálů. Postupně budou uvažovány dvojné, trojné a také integrály obecné dimenze. Nejprve budou formulovány základní věty o obecných transformacích. Důraz však bude kladen na uvedení konkrétních (v aplikacích důležitých) transformací a jejich prezentování na větším počtu původních příkladů.

Literatura:

SIKORSKI, Roman. *Diferenciální a integrální počet : funkce více proměnných*. 2. změn. a dopl. vyd. Praha: Academia, 1973. 495 s.

JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet (II)*. 2. vyd. Praha: Academia, 1976. 763 s.

KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2009. 278 s. ISBN 978-80-210-4975-8.

Jazyk závěrečné práce: slovenština

Vedoucí práce:	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Datum zadání práce:	21. 5. 2016
V Brně dne:	3. 11. 2016

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Vrtíková 15.11.2016		v.z.
Kristína Vrtíková **studentka**	doc. RNDr. Michal Veselý, Ph.D. **vedoucí práce**	prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc. **ředitel Ústavu matematiky a statistiky**

Poďakovanie

Na tomto mieste by som sa rada poďakovala doc. RNDr. Michalovi Veselému, Ph.D. za odborné, profesionálne a precízne vedenie mojej bakalárskej práce, za všetky jeho cenné rady, pripomienky a opravy, za jeho ochotu a čas, ktorý mi venoval.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 20. mája 2017 ....

Kristína Vrtíková

Obsah

Úvod

Integrálny počet patrí medzi základné časti matematickej analýzy. V kurze matematickej analýzy sa môžeme stretnúť najskôr s integrálmi funkcií jednej premennej a neskôr s integrálmi funkcií viac premenných. Práve teóriou a výpočtami integrálov funkcií viac premenných sa venuje táto bakalárska práca, presnejšie výpočtom pomocou substitúcií.

Cieľom tejto bakalárskej práce je zoznámiť čitateľa s transformáciami viacrozmerných integrálov. Pre štúdium tohto textu sa predpokladá znalosť integrálneho počtu, pojmov dvojný, trojný, n-rozmerný integrál a ich výpočet na merateľných množinách, pomocou Fubiniho vety. Venujeme sa teórii a výpočtom viacrozmerných integrálov, kedy je veľmi náročné vypočítať viacrozmerné integrály prevodom na násobné integrály. Práve transformácie uľahčujú tieto výpočty, a tak sú často využívané v aplikáciach.

Práca sa skladá z troch kapitol. Postupne uvažujeme integrály všeobecnej dimenzie, dvojné a nakoniec trojné integrály. Prvá kapitola sa venuje transformáciám n-rozmerných integrálov. Sformulujeme základné vety o substitúciách n-rozmerných integrálov a uvedieme niekoľko typov transformácií. Hlavnou časťou prvej kapitoly sú dôkazy viet o transformáciách, kde sa hlavne čerpá zo zdroja [5]. V ďalších kapitolách sa od všeobecnej dimenzie presunieme najskôr k dvojnému integrálu a potom k trojnému integrálu. V oboch kapitolách definujeme pojmy, ktoré sú potrebné na formuláciu základnej vety o transformáciách. Prezentujeme základné typy transformácií, s ktorými sa väčšinou stretávame a následne ukážeme ich použitie na väčšom počte pôvodných príkladoch.

Kapitola 1

Transformácie n-rozmerných integrálov

V tejto kapitole nebudeme definovať základné definície a tvrdenia, čo je to viacrozmerný, resp. dvojný alebo trojný integrál, ale predpokladáme znalosť týchto pojmov. Zameriame sa hlbšie na transformácie n-rozmerných integrálov. Odvodíme základné vety a definície, dokážeme základné vety o transformáciách n-rozmerných integrálov a vyriešime príklad na transformáciu do sférických súradníc v priestore $\mathbb{R}^6$.

1.1 Základné definície a vety

Predtým než budeme formulovať vety o transformácii n-rozmerného integrálu, je potrebné definovať jakobián, spojité diferencovateľné a regulárne zobrazenie.

Majme zobrazenie $F : N \to \mathbb{R}^n$, kde $N \subseteq \mathbb{R}^n$. Jakobián J zobrazenia F pri n-rozmernom integrále je determinant matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1}h_1 & \frac{\partial}{\partial v_2}h_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial v_1}h_2 & \frac{\partial}{\partial v_2}h_2 & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n}h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v_1}h_n & \frac{\partial}{\partial v_2}h_n & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n}h_n \end{pmatrix}.$$

Musí ale platiť, že zobrazenie $F : N \to \mathbb{R}^n$ je spojito diferencovateľné na množine N. Formulujme teda definíciu spojito diferencovateľného zobrazenia.

1 Definícia. Majme množinu $N \subseteq \mathbb{R}^n$ a funkcie $h_1, h_2, \ldots, h_n$, ktoré sú definované na množine N. Ďalej majme bod $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ z množiny N, ktorému v rámci zobrazenia $F : N \to \mathbb{R}^n$ priraďujeme bod

$$F(v) = F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = [h_1(v_1, v_2, \ldots, v_n), h_2(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, h_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)].$$

Ak existuje otvorená množina $\Omega \supseteq N$ taká, že funkcie $h_1, h_2, \ldots, h_n$ môžeme rozšíriť na Ω tak, aby v Ω mala spojité parciálne derivácie prvého rádu podľa všetkých premenných, potom hovoríme, že zobrazenie $F : N \to \mathbb{R}^n$ je spojito diferencovateľné na množine N.

2 Definícia. Ak vo všetkých bodoch množiny N je jakobián J rôzny od nuly, potom spojito diferencovateľné zobrazenie $F : N \to \mathbb{R}^n$ nazývame regulárnym na N.

Máme už všetky predpoklady na to, aby sme mohli formulovať vety o transformácii n-rozmerného integrálu.

Veta 1.1. *Majme množinu $N \subseteq \mathbb{R}^n$, ktorá je uzavretá a merateľná, a otvorenú množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, pričom platí $N \subseteq \Omega$. Ďalej nech zobrazenie $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulárne s jakobiánom J a*

$$F(v) = F(v_1, v_2, \ldots, v_n) = [h_1(v_1, v_2, \ldots, v_n), h_2(v_1, v_2, \ldots, v_n), \ldots, h_n(v_1, v_2, \ldots, v_n)].$$

Nech $M = F(N)$. Ak funkcia $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom platí

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_M f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n &= \\ &= \int \cdots \int_N f(h_1(v), h_2(v), \ldots, h_n(v))\,|J(v)|\,\mathrm{d}v_1\,\mathrm{d}v_2 \cdots \mathrm{d}v_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Veta 1.2. *Majme merateľnú množinu N a majme otvorenú množinu N_1, pre ktoré platí $N_1 \subseteq N \subseteq \mathbb{R}^n$ a miera $m_n(N \setminus N_1) = 0$. Ďalej nech spojito diferencovateľné zobrazenie $F : N \to \mathbb{R}^n$ je prosté a regulárne v N_1. Nech $M = F(N)$ a $M_1 = F(N_1)$ a nech množina M je merateľná a $m_n(M \setminus M_1) = 0$. Nech je funkcia f spojitá na M_1 a ohraničená na M. Ak f na množine, ktorá priraďuje každému $v \in N$ hodnotu*

$$f(h_1(v), h_2(v), \ldots, h_n(v))\,|J(v)|,$$

je ohraničené, potom platí (1.1).

1.2 Typy transformácií n-rozmerných integrálov

Spomenieme tri základné transformácie n-rozmerného integrálu

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ x_2 &= h_2(v_1, v_2, \ldots, v_n), \\ &\vdots \\ x_n &= h_n(v_1, v_2, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

- **Transformácia do sférických súradníc** pre $n \geq 2$ (so súradnicami $\rho, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}$) je daná vzťahmi

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos\theta_1, \\ x_2 &= \rho \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ x_3 &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \cos\varphi, \\ x_n &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2} \sin\varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

  Jakobián označíme $J_n = J_n(\rho, \varphi, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2})$. Potom pre $n \geq 2$ je

$$|J_n| = \rho^{n-1} \sin^{n-2}\theta_1 \sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}.$$

- **Posunutie** alebo inak nazývané translácia je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x_1 &= v_1 + b_1, \\ x_2 &= v_2 + b_2, \\ &\vdots \\ x_n &= v_n + b_n, \end{aligned}$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sú konštanty. Jakobián je $J(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 1$.

- **Dilatácia** je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 v_1, \\ x_2 &= b_2 v_2, \\ &\vdots \\ x_n &= b_n v_n, \end{aligned}$$

kde $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sú nenulové konštanty. Jakobián je $J(v_1, v_2, \ldots, v_n) = b_1 b_2 \cdots b_n$.

1.3 Dôkazy viet o transformácii n-rozmerných integrálov

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať dokazovaním viet o transformácii n-rozmerného integrálu, a to Viet 1.1 a 1.2. Kvôli rozsiahlosti dôkazov je potrebné, aby sme ich rozdelili na niekoľko častí a tie budeme dokazovať samostatne. Jednoduchšie a prehľadnejšie bude, ak dôkazy urobíme hlavne pre $n = 2$ alebo $n = 3$ a potom ich len prenesieme na všeobecnú dimenziu n.

V prvom rade musíme nájsť všeobecný vzorec jakobiánu pre zložené zobrazenie. Potom spomenieme niekoľko vlastností regulárneho zobrazenia.

Lemma 1.3. *Majme otvorené množiny $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Ďalej majme spojité a diferencovateľné zobrazenia $G : A_1 \to A_2$ a $F : A_2 \to \mathbb{R}^n$ s jakobiánmi J_G a J_F. Potom jakobián pre zložené zobrazenie $F \circ G$ je*

$$J_{F\circ G}(x) = J_F(G(x)) J_G(x), \quad x \in A_1.$$

Dôkaz. Ako sme na začiatku spomenuli, budeme dokazovať pre $n = 2$. Označme

$$G(x_1,x_2) = [g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2)]\,, F(y_1,y_2) = [f_1(y_1,y_2), f_2(y_1,y_2)]\,,$$

$$H(x_1,x_2) = [h_1(x_1,x_2), h_2(x_1,x_2)]\,,$$

kde $H = F \circ G$. Teda vieme, že platí

$$H(x_1,x_2) = [f_1(g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2))\,, f_2(g_1(x_1,x_2), g_2(x_1,x_2))]\,.$$

Matice parciálnych derivácií zobrazení G, F a H sú postupne

$$M_G = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 \end{pmatrix}, \quad M_F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial y_2} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial y_2} f_2 \end{pmatrix}, \quad M_H = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} h_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} h_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} h_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} h_2 \end{pmatrix}.$$

Zo vzorca pre deriváciu zloženej funkcie dvoch premenných, tj.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} h_i(x) = \frac{\partial}{\partial y_1} f_i(y) \frac{\partial}{\partial x_j} g_1(x) + \frac{\partial}{\partial y_2} f_i(y) \frac{\partial}{\partial x_j} g_2(x)$$

pre $i, j = 1, 2$, vyplýva $M_H(x) = M_F(y) M_G(x)$, kde stačilo využiť Cauchyovu vetu o determinante súčinu dvoch matíc. $\square$

Lemma 1.4. *Majme otvorenú množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a zobrazenie $F : A \to \mathbb{R}^n$, ktoré je regulárne. Potom k ľubovolnému bodu $x \in A$ existuje istá otvorená množina B, ktorá je podmnožinou A a pre ktorú je $x \in B$, taká, že:*

- *zobrazenie F na množine B je prosté;*
- *$F(B)$ je otvorená množina;*
- *inverzné zobrazenie k zobrazeniu F na množine $F(B)$ je spojito diferencovateľné.*

Dôkaz. Dokazujeme znova pre $n = 2$. Vyjadríme zobrazenie F ako

$$F(x,y) = [f_1(x,y), f_2(x,y)] = [b,c].$$

Potom zobrazenie $G : A \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sa rovná

$$G(x,y,b,c) = [g_1(x,y,b,c), g_2(x,y,b,c)] = [f_1(x,y) - b, f_2(x,y) - c].$$

Ak ešte označíme $z = (x,y)$ a $d = (b,c)$, potom $G(x,y,b,c)$ má tvar $G(z,d) = F(z) - d$. Ďalej nech $z_0 \in A$ a $F(z_0) = d_0$. Vieme, že jakobián zobrazenia F, ktoré je regulárne, je $J_F(z_0) \neq 0$. Potom v bode z_0 je regulárna aj matica

$$G_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_1 & \frac{\partial}{\partial y} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2 & \frac{\partial}{\partial y} g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1 & \frac{\partial}{\partial y} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2 & \frac{\partial}{\partial y} f_2 \end{pmatrix}.$$

Platí $G(z_0, d_0) = [0,0]$. Majme okolia bodov z_0 a d_0 (značíme $\mathscr{O}(z_0)$ a $\mathscr{O}(d_0)$) a spojito diferencovateľné zobrazenie $H = [h_1, h_2] : \mathscr{O}(d_0) \to \mathscr{O}(z_0)$, kde

$$\mathscr{O}(z_0) \times \mathscr{O}(d_0) \subset A \times \mathbb{R}^2, \quad G(H(d), d) = [0,0], \quad d \in \mathscr{O}(d_0),$$

a pre $d \in \mathscr{O}(d_0)$ je teda $H(d)$ jediný bod z v okolí bodu z_0, pre ktorý platí $G(z,d) = [0,0]$, tj. $F(z) = d$. Úplný vzor okolia $\mathscr{O}(d_0)$ v F označíme

$$C = F^{-1}(\mathscr{O}(d_0)) = \{[x,y] \in A : F(x,y) \in \mathscr{O}(d_0)\}.$$

Nech $B = C \cap \mathscr{O}(z_0)$. Zobrazenie F je spojito diferencovateľné, teda aj spojité, a preto množina C je otvorená a obsahuje bod z_0 taký, že $F(z_0) = d_0$. Potom množina B je tiež otvorená. Platí $F(B) = \mathscr{O}(d_0)$ a $B = H(\mathscr{O}(d_0))$. Pretože $B \subseteq C$, platí $F(B) \subseteq \mathscr{O}(d_0)$. Zvoľme $d \in \mathscr{O}(d_0)$. Potom

$$H(d) \in \mathscr{O}(z_0), \quad G(H(d), d) = [0,0], \quad \text{tj.} \quad F(H(d)) = d.$$

Z $H(d) \in C$ vyplýva $H(d) \in B$, čo znamená, že $H(\mathscr{O}(d_0)) \subseteq B$. Ďalej zvoľme ľubovolný bod $z_1 \in B$ a označme $d_1 = F(z_1)$. Riešením rovnice $G(z, d_1) = [0,0]$ je teda z_1, pričom $[z_1, d_1] \in \mathscr{O}(z_0) \times \mathscr{O}(d_0)$. Potom platí $z_1 = H(d_1) = H(F(z_1))$. Keďže $F(B) = \mathscr{O}(d_0)$, tak množina $F(B)$ je otvorená a zobrazenie H je spojito diferencovateľné na $F(B) = \mathscr{O}(d_0)$. $\square$

Dôsledok 1.5. *Množina $F(A)$ je otvorená, ak F je regulárne zobrazenie na otvorenej množine A.*

Dôkaz. Dôsledok vyplýva z Lemmy 1.4, že každý bod množiny $F(A)$ je vnútorný. □

3 Definícia. Difeomorfizmus, inak nazývaný aj difeomorfné zobrazenie, je prosté a regulárne zobrazenie F na otvorenej množine a jeho inverzné zobrazenie F^{-1} je spojité.

Dôsledok 1.6. *Zobrazenie F a jeho inverzné zobrazenie F^{-1} sú difeomorfné, ak F je prosté a spojito diferencovateľné na otvorenej množine C a F^{-1} je taktiež spojito diferencovateľné na $F(C)$.*

Dôkaz. Vieme, že existuje množina $D \supseteq F(C)$, ktorá je otvorená, a spojito diferencovateľné zobrazenie G na množine D také, že $G|_{F(C)} \equiv F^{-1}$. Označme identické zobrazenie na C ako id_C, ktorého konštantný jakobián sa rovná 1. Potom $G \circ F = F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_C$. Pre každé $x \in C$ je $J_F(x) J_{F^{-1}}(F(x)) = 1$ (podľa Lemmy 1.3). To znamená, že J_F je nenulové na C a $J_{F^{-1}}$ je tiež nenulové na $F(C)$. Z Dôsledku 1.5 vyplýva, že $F(C)$ je otvorená množina. Zobrazenia F a F^{-1} sú difeomorfné, teda podľa Lemmy 1.4 je F^{-1} spojito diferencovateľné. □

Teraz ukážeme, ako prosté regulárne zobrazenia zobrazujú vnútorné a hraničné body. Ale najskôr si potrebujeme definovať, čo je hraničný bod a hranica množiny.

4 Definícia. Majme množinu $B \subseteq \mathbb{R}^n$ a bod $x \in \mathbb{R}^n$. Potom tento bod je hraničným bodom množiny B, ak pre všetky $\mathscr{O}_\varepsilon(x)$ platí

$$\mathscr{O}_\varepsilon(x) \cap B \neq \emptyset \quad \text{a} \quad \mathscr{O}_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset.$$

To znamená, že všetky $\mathscr{O}_\varepsilon(x)$ obsahujú aspoň jeden bod množiny B a aspoň jeden bod, ktorý patrí do množiny $\mathbb{R}^n \setminus B$. Potom definujeme hranicu $h(B)$ ako množinu všetkých hraničných bodov množiny B.

Lemma 1.7. *Majme prosté a regulárne zobrazenie $F : A \to \mathbb{R}^n$ na otvorenej množine $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ďalej majme množinu B a jej uzáver $\overline{B}$, pre ktoré $B, \overline{B} \subseteq A$. Potom platí, že $F(h(B)) \subseteq h(F(B))$. Rovnosť $F(h(B)) = h(F(B))$ platí, ak množina B je obmedzená.*

Dôkaz. Majme ľubovoľné $x_0 \in h(B), y_0 = F(x_0)$ a ľubovolné okolie $\mathscr{O}(y_0)$. Existuje okolie $\mathscr{O}(x_0)$ také, že $F(\mathscr{O}(x_0)) \subseteq \mathscr{O}(y_0)$. To znamená, že zobrazenie F je spojité. Okrem hraničného bodu x_0 množiny B existujú body $x_1, x_2 \in \mathscr{O}(x_0)$ také, že $x_1 \in B$ a $x_2 \notin B$. Zobrazenie F je prosté, teda $F(x_1) \in F(B)$ a $F(x_2) \notin F(B)$. Platí $F(x_1), F(x_2) \in \mathscr{O}(y_0)$ a z toho vyplýva, že

$$y_0 \in h(F(B)), \quad \text{tj.} \quad F(h(B)) \subseteq h(F(B)).$$

Nech množina B je obmedzená. Jej uzáver $\overline{B} \subset A$ je teda kompaktný. Majme ľubovolný bod $y_0 \in h(F(B))$. Potom existuje postupnosť $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F(B)$ taká, že $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Platí $y_n = F(x_n)$ pre isté $x_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$. Vieme, že množina $\overline{B}$ je kompaktná, a preto existuje podpostupnosť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, kde $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ pre $x_0 \in \overline{B}$. Pretože zobrazenie F je spojité, je $F(x_0) = \lim_{k\to\infty} F(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$, tj. $F(x_0) = y_0$. Predpokladajme, že x_0 je vnútorný bod množiny B. Potom existuje okolie $\mathscr{O}(x_0) \subset B$. Z Dôsledku 1.5 vieme, že množina $F(\mathscr{O}(x_0))$ je otvorená, ležiaca v $F(B)$ a obsahujúca bod y_0. Tu ale dochádza k sporu, pretože y_0 je vnútorný bod $F(B)$. Platí teda, že $x \in h(B)$ a $F(h(B)) = h(F(B))$. □

Pre ďalšiu lemmu je potrebné spomenúť definíciu Lipschitzovej podmienky, charakteristickej funkcie a n-rozmerných intervalov I_1 a I_2. Pri dokazovaní tejto lemmy je zase dôležité definovať normu delenia a vzdialenosť (metriku) prvkov.

5 Definícia. Nech X je ľubovolná neprázdna množina. Zobrazenie $\rho : X \times X \to (0, \infty)$ nazývame metrika, ak pre všetky $x, y, z \in X$ spĺňa tieto vlastnosti:

1. $\rho(x,y) = 0, \quad \text{práve keď} \quad x = y;$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x);$
3. $\rho(x,y) + \rho(y,z) \geq \rho(x,z).$

Potom číslo $\rho(x,y)$ označujeme ako vzdialenosť prvkov x a y v tzv. metrickom priestore (X, ρ) pre dané $x, y \in X$.

6 Definícia. Nech $F : P \to \mathbb{R}^n$, kde $P \subseteq \mathbb{R}^n$. Zobrazenie F spĺňa Lipschitzovu podmienku (je lipschitzovské), ak existuje $L > 0$ také, že pre každé $x, y \in P$ platí

$$\rho\left(F(x), F(y)\right) \leq L\rho(x,y),$$

kde ρ je metrika v euklidovskom priestore $\mathbb{R}^n$.

Poznámka 1.8. *Každé lipschitzovské zobrazenie je spojité.*

7 Definícia. Nech P je ľubovolná podmnožina $\mathbb{R}^n$. Potom jej charakteristická funkcia $\chi_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná ako

$$\chi_P(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{pre } [x_1, \ldots, x_n] \notin P, \\ 1 & \text{pre } [x_1, \ldots, x_n] \in P. \end{cases}$$

8 Definícia. Hovoríme, že $I \subseteq \mathbb{R}^n$ je n-rozmerný, uzavretý interval, ak je tvorený karteziánskym súčinom uzatvorených intervalov, a to

$$I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle.$$

9 Definícia. Majme uzatvorený interval $I = [a,b]$ a čísla $x_0, x_1, \ldots, x_m$, ktoré spĺňajú podmienku $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. Potom konečnú postupnosť bodov $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ z intervalu $[a,b]$ nazývame delenie intervalu $[a,b]$. Číslo $\nu(D) = \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \langle 1, m \rangle\}$ nazývame normou delenia.

Lemma 1.9. *Majme obmedzenú množinu $P \subset \mathbb{R}^n$ a zobrazenie $F : P \to \mathbb{R}^n$, ktoré je lipschitzovské s konštantou L. Ak existujú dva n-rozmerné uzavreté a ohraničené intervaly I_1 a I_2 také, že $P \subseteq I_1$ a $F(P) \subseteq I_2$, potom platí*

$$\overline{\int \cdots \int_{I_2}} \chi_{F(P)}(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \leq L^n 2^n n^{n/2} \overline{\int \cdots \int_{I_1}} \chi_P(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Dôkaz. Dôležité je uvedomiť si, že existencia intervalu, ktorý obsahuje množinu $F(P)$, je dokázaná, pretože $F(P)$ je obmedzená, a to vyplýva z tvrdenia, že P je obmedzené a F je lipschitzovské. Dôkaz znovu urobíme len pre $n = 2$. Nech I_1 je štvorec so stranou $a > 0$. Nech D_m je jeho rozdelenie na m^2 rovnakých štvorcov so stranami a/m, kde $m \in \mathbb{N}$. Norma delenia D_m je teda $\nu(D_m) = a\sqrt{2}/m$. Ďalej rozdeľme delenie D_m na dieliky $M_1, \ldots, M_k$, kde $k \le m^2$ tak, aby dieliky nemali prázdny prienik s množinou P. Označme χ_P ako charakteristickú funkciu I_1. Potom horný súčet funkcie χ_P pri delení D_m je

$$S(D_m, \chi_P) = m_2(M_1) + \cdots + m_2(M_k) = ka^2/m^2,$$

kde $m_2(M_i)$, $i = 1, \ldots, k$ je miera (obsah) dielikov M_i. Nech pre každé $x, y \in M_j$, $j = 1, \ldots, k$ platí $\rho(x,y) \le \nu(D_m)$. Potom $\rho(F(x), F(y)) \le L\nu(D_m)$, čo znamená, že obraz $F(M_j)$ je podmnožinou istého kruhu s polomerom $L\nu(D_m)$ a ten je podmnožinou štvorca B_j so stranou $2L\nu(D_m)$. Nech teda I_2 obsahuje všetky štvorce B_j, $j = 1, \ldots, k$. Potom platí

$$F(P) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} F(M_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j = B$$

a tiež na I_2 platí

$$\chi_{F(P)} \le \chi_B = \max\{\chi_{B_j} : j = 1, \ldots, k\} \le \sum_{j=1}^{k} \chi_{B_j}.$$

Podľa nerovnosti

$$\overline{\iint_A} [f(x,y) + g(x,y)] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \le \overline{\iint_A} f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \overline{\iint_A} g(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

kde f, g sú funkcie ohraničené na obdĺžniku A, dostávame

$$\begin{aligned} \overline{\iint_{I_2}} \chi_{F(P)}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &\le \sum_{j=1}^{k} \overline{\iint_{I_2}} \chi_{B_j}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{k} \iint_{I_2} \chi_{B_j}(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \\ &= \sum_{j=1}^{k} m_2(B_j) = 4kL^2 [\nu(D_m)]^2 = 8kL^2 a^2/m^2 = 8L^2 S(D_m, \chi_P). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Limitným prechodom pre $m \to \infty$ nakoniec z (1.3) vyjde

$$\overline{\iint_{I_2}} \chi_{F(P)}(x,y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le 8L^2 \overline{\iint_{I_1}} \chi_P(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

pričom χ je charakteristickou funkciou (viď Definícia 7), I_1, I_2 sú n-rozmerné, uzavreté intervaly (viď Definícia 8) a $L > 0$ je konštanta. □

Dôsledok 1.10. *Buď $F : P \to \mathbb{R}^n$ zobrazenie, ktoré spĺňa Lipschitzovu podmienku a $P \subset \mathbb{R}^n$ merateľná množina s mierou nula. Množina $F(P)$ je tiež merateľná a nulovej miery.*

Dôkaz. Pri dôkaze budeme vychádzať z Lemmy 1.9. Majme n-rozmerné, uzavreté intervaly I_1, I_2 a $x = (x_1, \dots, x_n), \mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$. Podľa predpokladu je

$$m(P) = \int \cdots \int_{I_1} \chi_P(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int \cdots \int_{I_1}} \chi_P(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Platí

$$0 \le \underline{\int \cdots \int_{I_2}} \chi_{F(P)}(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int \cdots \int_{I_2}} \chi_{F(P)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

pretože charakteristická funkcia $\chi_{F(P)}$ je nezáporná. A z Lemmy 1.9 vyplýva

$$\underline{\int \cdots \int_{I_2}} \chi_{F(P)}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int \cdots \int_{I_2}} \chi_{F(P)}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Teda funkcia $\chi_{F(P)}$ je integrovateľná na I_2 a

$$m\left(F(P)\right) = \int \cdots \int_{I_2} \chi_{F(P)}(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

□

Lemma 1.11. *Zobrazenie $F : I \to \mathbb{R}^n$ je lipschitzovské, ak jeho zložky majú ohraničené parciálne derivácie na n-rozmernom intervale I.*

Dôkaz. Dokážme pre $n = 2$, teda $F = (f_1, f_2)$. Uvažujeme $(x, y) \in I$. Potom platí

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} f_i(x,y) \right| \le K \quad \text{a} \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} f_i(x,y) \right| \le K$$

pre $i = 1, 2$ a isté $K > 0$. Nech $(x_j, y_j) \in I$ pre $j = 1, 2$. Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote vieme, že existuje číslo α, ktoré leží medzi x_1, x_2; a číslo β, ktoré leží medzi y_1, y_2, tak, že platí

$$f_1(x_2,y_2) - f_1(x_1,y_1) = \frac{\partial}{\partial x} f_1(\alpha, y_1)(x_2 - x_1) + \frac{\partial}{\partial y} f_1(x_2, \beta)(y_2 - y_1).$$

Z toho vyplýva, že

$$|f_1(x_2,y_2) - f_1(x_1,y_1)| \le K\left(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\right) < 2K\rho\left([x_1,y_1],[x_2,y_2]\right).$$

To isté platí aj pre f_2. Teda platí

$$\rho^2\left(F(x_1,y_1), F(x_2,y_2)\right) = \sum_{i=1}^{2} \left(f_i(x_1,y_1) - f_i(x_2,y_2)\right)^2 \le 8K^2\rho^2\left([x_1,y_1],[x_2,y_2]\right).$$

Dokázali sme tak, že F je lipschitzovské pre konštantu $L = 2\sqrt{2}K$. □

10 Definícia. Nech (X, ρ) je metrický priestor a $B \subseteq X$. Hovoríme, že $x \in B$ je vnútorným bodom množiny B, ak existuje $\varepsilon > 0$ také, že $\mathscr{O}_\varepsilon(x) \subseteq B$. Množinu všetkých vnútorných bodov množiny B nazývame vnútro B a značíme $\operatorname{int} B$.

11 Definícia. Pod pojmom uzáver množiny B rozumieme množinu $\overline{B}$ definovanú ako zjednotenie vnútra a hranice množiny B, tj. $\overline{B} = \operatorname{int} B \cup h(B)$.

V nasledujúcej lemme odvodíme, že ak máme kompaktnú a merateľnú množinu, tak jej obrazom pri istých zobrazeniach je merateľná množina; a ak má množina mieru rovnú nule, tak jej obrazom je tiež množina s nulovou mierou.

Lemma 1.12. *Nech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina a $F : A \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulárne zobrazenie. Nech B je obmedzená množina a $\overline{B} \subseteq A$. Množina B je merateľná, práve keď je merateľná aj množina $F(B)$; a miera $m(B) = 0$, práve keď $m(F(B)) = 0$.*

Dôkaz. Pre hranicu množiny B sme v Lemme 1.7 dokázali tvrdenie $F(h(B)) = h(F(B))$. Ak predpokladáme, že B je merateľné, potom podľa [5, strana 40] miera $m(h(B)) = 0$, a $h(B)$ je kompaktná množina. Ku každému $x \in B$ sa dá nájsť istý kváder $K(x)$ taký, že $x \in \operatorname{int} K(x) =: L(x)$. Potom $L(x) \subset K(x) \subset A$. Máme množiny $L(x)$ pre $x \in B$, ktoré tvoria otvorené pokrytie množiny $h(B)$, a z nich vyberieme konečné podpokrytie $L(x_1), \dots, L(x_k)$. Nech $B_i = h(B) \cap K(x_i)$ pre $i = 1, \dots, k$. Pre $i = 1, \dots, k$ je miera $m(B_i) = 0$, pretože $m(h(B)) = 0$. To znamená, že B má prázdne vnútro. Zložky regulárneho zobrazenie F majú spojité parciálne derivácie a sú ohraničené na množinách $K(x_i), i = 1, \dots, k$, ktoré sú kompaktné. Potom zobrazenie F je lipschitzovské na $K(x_i)$ (podľa Lemmy 1.11) a miera je $m(h(B)) = 0, i = 1, \dots, k$ (podľa Dôsledku 1.10). Keďže

$$F(h(B)) = F(B_1 \cup \dots \cup B_k) = F(B_1) \cup \dots \cup F(B_k),$$

tak $m(F(h(B))) = 0$. Potom aj $m(h(F(B))) = 0$, čo znamená, že množina $F(B)$ je merateľná. Platí $B \subseteq h(B)$, a teda $F(B) \subseteq F(h(B))$ alebo $F(B) \subseteq h(F(B))$. Z Lemmy 1.4 a Dôsledkov 1.5 a 1.6 je zrejmé, že inverzné zobrazenie F^{-1} je prosté a regulárne na množine $F(A)$, ktorá je otvorená. Potom $\overline{F(B)} = F(B) \cup h(F(B)) = F(B) \cup F(h(B))$. Ak zameníme F a F^{-1}, B a $F(B)$, potom sme dokázali celú lemmu. □

Teraz dokážeme vlastnosti prostého a regulárneho zobrazenie, a to, že môže byť vyjadrené ako zložené zobrazenie z dvoch tiež prostých a regulárnych zobrazení, kde prvé z nich zmení len jednu súradnicu a ostatné nezmení, zatiaľ čo druhé z nich si ponechá zmenenú súradnicu a ostatné zmení. Toto nám pomôže pri dôkaze Lemmy 1.18 matematickou indukciou.

Lemma 1.13. *Majme prosté a regulárne zobrazenie $F : A \to \mathbb{R}^n$, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Nech $x^* \in A$. Existuje okolie V bodu x^*, číslo $k \in \{1, \dots, n\}$ a zobrazenia $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$, $\Theta : \Psi(V) \to \mathbb{R}^n$ také, že:*

- *zobrazenie Ψ je prosté, regulárne na V;*
- *zobrazenie Θ je prosté, regulárne na otvorenej množine $\Psi(V)$;*
- *platí $F = \Theta \circ \Psi$ na V;*

- *zobrazenie* $\Psi : [x_1,\dots,x_n] \mapsto [y_1,\dots,y_n]$ *má tvar* $y_1 = \psi(x_1,\dots,x_n)$, *kde* $\psi = f_1$, *a*

$$\begin{aligned} y_2 &= x_1,\\ y_3 &= x_2,\\ &\vdots\\ y_k &= x_{k-1},\\ y_{k+1} &= x_{k+1},\\ &\vdots\\ y_{n-1} &= x_{n-1},\\ y_n &= x_n; \end{aligned} \tag{1.4}$$

- *zobrazenie* $\Theta : [y_1,\dots,y_n] \mapsto [z_1,\dots,z_n]$ *má tvar*

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1,\\ z_2 &= \theta_2(y_1,\dots,y_n),\\ &\vdots\\ z_{n-1} &= \theta_{n-1}(y_1,\dots,y_n)\\ z_n &= \theta_n(y_1,\dots,y_n), \end{aligned} \tag{1.5}$$

  kde $\Theta = [\mathrm{id}\,\theta_2,\dots,\theta_n]$.

Dôkaz. Dokazujeme pre $n=2$. Máme zobrazenie $F : [x_1,x_2] \mapsto [z_1,z_2]$, ktorého zložky sú teda $z_1 = f_1(x_1,x_2)$ a $z_2 = f_2(x_1,x_2)$. Z predpokladov vieme, že aspoň jeden z prvkov $f_{1|x_1}(x^*)$ a $f_{1|x_2}(x^*)$ je nenulový, napr. $f_{1|x_1}(x^*) \neq 0$, a pre určitosť nech je kladný. Preto na množine A má F nenulový jakobián, tj. $J_F(x^*) \neq 0$. Pretože derivácia $f_{1|x_1}$ je spojitá, existuje okolie V bodu x^* také, že $f_{1|x_1}(x) > 0$ pre každé $x \in V$. Ďalej máme zobrazenie $\Psi : [x_1,x_2] \mapsto [y_1,y_2]$, ktorého zložky sú $y_1 = f_1(x_1,x_2)$ a $y_2 = x_2$ pre $[x_1,x_2] \in V$.

Nech $[x_1,x_2],[\overline{x_1},\overline{x_2}] \in V, [x_1,x_2] \neq [\overline{x_1},\overline{x_2}]$. Potom $f_1(x_1,x_2) \neq f_1(\overline{x_1},x_2)$, pretože funkcia f_1 má pri pevnom druhom argumente kladnú deriváciu $f_{1|x_1}$, teda je vzhľadom k prvému argumentu rastúca. Potom $\Psi(x_1,x_2) \neq \Psi(\overline{x_1},\overline{x_2})$. Majme inverzné zobrazenie $\Psi^{-1} : [y_1,y_2] \mapsto [x_1,x_2]$ tvaru $x_1 = \omega(y_1,y_2), x_2 = y_2$ pre $[y_1,y_2] \in \Psi(V)$, pričom platí identita $\Psi \circ \Psi^{-1} = \mathrm{id}_{\Psi(V)}$. Predovšetkým

$$f_1(\omega_1(y_1,y_2),y_2) = y_1 \quad \text{pre} \quad [y_1,y_2] \in \Psi(V).$$

Zobrazenie Ψ je teda prosté. Jakobián J_Ψ zobrazenia Ψ je nenulový, pretože

$$J_\Psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1.$$

Takže sme dokázali, že zobrazenie Ψ je prosté a regulárne. Množina $\Psi(V)$ je otvorená (podľa Dôsledku 1.5). Podľa Lemmy 1.4 a Dôsledku 1.6 je inverzné zobrazenie Ψ^{-1} regulárne na tejto množine.

Aby sme dokázali posledné tvrdenie, vyjadríme zobrazenie Θ ako zloženie dvoch prostých zobrazení na množine $\Psi(V)$, tj. $\Theta = F \circ \Psi^{-1}$. Teda zobrazenie Θ je prosté a tiež regulárne podľa Lemmy 1.3. Predpokladajme, že $F = \Theta \circ \Psi$ na okolí V. Nech $\Theta = [\theta_1, \theta_2]$. Pretože $\theta_1(y_1, y_2) = f_1(\omega_1(y_1, y_2), y_2) = y_1$, tak posledné tvrdenie platí; pre obe zobrazenia sme tak dokázali všetky vlastnosti. □

Lemma 1.14. *Ak A je neprázdna kompaktná podmnožina $\mathbb{R}^n$ a B je neprázdna uzavretá podmnožina $\mathbb{R}^n$, ktoré sú vzájomne disjunktné, potom ich vzdialenosť*

$$d = \inf\{\rho(x,y) : \ x \in A, \ y \in B\},$$

kde ρ je euklidovská metrika v $\mathbb{R}^n$, je kladná.

Dôkaz. Dokazujeme len pre dimenziu 2. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$, $y_n \in B$ také, že platí $d \le \rho(x_n, y_n) < d + 1/n$, kde ρ označuje vzdialenosť x_n a y_n. Postupnosť $\{x_n\} \subseteq A$ je teda ohraničená. Označme ako S začiatok súradnicovej sústavy $[0,0]$ a ako $L > 0$ konštantu, pre ktorú je $\rho(S, x_n) \le L$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Majme guľu $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(S,x) \le R\}$ so stredom $[0,0]$ a polomerom $R := L + d + 1$. Potom pre každé $n \in \mathbb{N}$ vďaka trojuholníkovej nerovnosti platí

$$\rho(S, y_n) \le \rho(S, x_n) + \rho(x_n, y_n) \le R.$$

Buď $C = B \cap K$. Množina C je uzatvorená a obmedzená, čo znamená, že je v $\mathbb{R}^n$ aj kompaktná. Z postupnosti $\{x_n\}$ sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť $\{x_{n_k}\}$ a rovnako z postupnosti $\{y_{n_k}\}$ sa dá vybrať konvergentná podpostupnosť $\{y_{n_{k_i}}\}$. Nech $x_{n_{k_i}}$ konverguje k x_0 a $y_{n_{k_i}}$ k y_0 pre $i \to \infty$. Keďže množiny A a C sú uzatvorené, tak $x_0 \in A, y_0 \in C$, kde $C \subseteq B$. Potom $\rho(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}})$ konverguje k $\rho(x_0, y_0)$ pre $i \to \infty$ a $\rho(x_n, y_n)$ konverguje k d pre $n \to \infty$, čo vyplýva zo spojitosti metriky ρ. Teda $d = \rho(x_0, y_0) > 0$, kde d je kladné, pretože A a B sú disjunktné množiny. □

V ďalšej lemme ukážeme, že ak rovnosť (1.1) vo Vete 1.1 platí pre viacrozmerné intervaly, tak tiež platí pre ľubovolné kompaktné merateľné množiny vo viacrozmernom priestore.

Lemma 1.15. *Majme prosté a regulárne zobrazenie $F : A \to \mathbb{R}^n$, kde množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená. Buď M uzatvorený interval, ktorý je podmnožinou množiny A, a f spojitá funkcia na $F(M)$. Ak pre každý interval M a každú funkciu f platí*

$$\int \cdots \int_{F(M)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cdots \int_M f(F(y))\,|J_F(y)|\,\mathrm{d}y, \tag{1.6}$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n$ a J_F je jakobián zobrazenie F, potom pre ľubovolnú množinu $B \subset A$, ktorá je uzatvorená a merateľná, a ľubovolnú funkciu f, ktorá je spojitá, platí

$$\int \cdots \int_{F(B)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int \cdots \int_B f(F(y))\,|J_F(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

Dôkaz. Dokazujeme pre $n = 2$. Najskôr dokážeme, že (1.7) platí pre množinu, ktorá je tvorená zjednotením obdĺžnikov, ktoré po dvoch nemajú žiadny spoločný bod. Označme ako $M_1,\dots,M_k$ obdĺžniky, z ktorých každé dva sú disjunktné, tj. $m(M_i \cap M_j) = 0$ pre $i \neq j$. Predpokladajme teda, že $B = M_1 \cup \dots \cup M_k$. Nech $F(B) = F(M_1) \cup \dots \cup F(M_k)$ a funkcia f je na tejto množine spojitá. Lemma 1.12 hovorí, že množina B a obdĺžniky $M_1,\dots,M_k$ sú merateľné a platí $m\left(F(M_i \cap M_j)\right) = m\left(F(M_i) \cap F(M_j)\right) = 0$ pre $i \neq j$. Potom s využitím vety o integrovateľnosti funkcie (viď [5, strana 46]) a (1.6) platí

$$\begin{aligned}
\iint_{F(B)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 &= \sum_{i=1}^{k} \iint_{F(M_i)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \\
&= \sum_{i=1}^{k} \iint_{M_i} f\left(F(y_1,y_2)\right) |J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 = \\
&= \iint_{B} f\left(F(y_1,y_2)\right) |J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Máme teda uzatvorenú merateľnú množinu B, ktorá je aj neprázdna. Nech množina B je podmnožinou obdĺžnika R a charakteristická funkcia χ_B je integrovateľná na R. Platí, že k ľubovolnému $\varepsilon > 0$ existuje delenie D obdĺžnika R také, že $S(D,\chi_B) - s(D,\chi_B) < \varepsilon$. Ak zjemníme delenie D, tak horné súčty nebudú väčšie a dolné nebudú menšie. Preto je norma delenia $\nu(D)$ „dosť malá," a teda $S(D,\chi_B) - s(D,\chi_B) < \varepsilon$ bude platiť pre všetky zjemnenia delenia D. Nech $M \subseteq B \subseteq N$, kde M je zjemnenie dielikov delenia D, ktoré sú podmnožinami B, a N je zjemnenie dielikov delenia D, ktoré nemajú prázdny prienik s B. Platí, že $M \subseteq A$, pretože $B \subset A$ a tiež $N \subseteq A$, ak $A = \mathbb{R}^2$. Ak $A \neq \mathbb{R}^2$, tak to nemusí platiť. Potom vzdialenosť d množín B a $\mathbb{R}^2 \setminus A$ je kladná, pretože sú disjunktné. Preto zvolíme delenie také, že norma delenia $\nu(D) < d$. Potom $M \subseteq B \subseteq N \subset A$. Nakoniec teda platí, že rozdiel mier N a M je menší ako ε, tj.

$$m(N) - m(M) = S(D,\chi_B) - s(D,\chi_B) < \varepsilon.$$

Nech $\varepsilon = 1$. Potom máme delenie D_1 s množinami M_1 a N_1. Existuje konštanta $L > 0$ taká, že $|J_F(y_1,y_2)| \leq L$ pre každé $[y_1,y_2] \in N_1$, keď J_F je spojité na N_1.

Nech ε je ľubovolné kladné číslo. Potom k $\varepsilon/L > 0$ existuje delenie D a množiny $M \subseteq B \subseteq N \subset A$ také, že $m(N) - m(M) < \varepsilon/L$. Môžeme požadovať, aby D bolo zjemnené delenie D_1. Preto $M_1 \subseteq M \subseteq B \subseteq N \subseteq N_1 \subset A$ a z toho vyplýva inklúzia merateľných množín $F(M) \subseteq F(B) \subseteq F(N)$. Zvoľme $f(x_1,x_2) = 1$ pre každé $[x_1,x_2] \in N$. Dostávame

$$\begin{aligned}
m(F(N)) - m(F(M)) &= \iint_{F(N)} 1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \iint_{F(M)} 1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \\
&= \iint_{N} |J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 - \iint_{M} |J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 = \\
&= \iint_{N \setminus M} |J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2 \leq \\
&\leq L m(N \setminus M) = L(m(N) - m(M)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Z toho vyplýva

$$m(F(B)) - m(F(M)) \leq m(F(N)) - m(F(M)) < \varepsilon.$$

Vieme, že množina B je kompaktná. Preto množina $F(B)$ je tiež kompaktná. Nech konštanta $K>0$ je taká, že $|f(x_1,x_2)|\le K$ pre každé $[x_1,x_2]\in F(B)$. Potom pre každé $[y_1,y_2]\in B$ platí $|f(F(y_1,y_2))J_F(y_1,y_2)|\le LK$. Pomocou

$$\iint_{F(M)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2=\iint_M f(F(y_1,y_2))\,|J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

dostávame

$$\begin{aligned}
&\left|\iint_{F(B)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2-\iint_B f(F(y_1,y_2))\,|J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\right|=\\
&=\Bigg|\iint_{F(B)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2-\iint_{F(M)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2+\\
&\quad+\iint_M f(F(y_1,y_2))\,|J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2-\iint_B f(F(y_1,y_2))\,|J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\Bigg|\le\\
&\le\left|\iint_{F(B)\setminus F(M)} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right|+\left|\iint_{B\setminus M} f(F(y_1,y_2))\,|J_F(y_1,y_2)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\right|\le\\
&\le K(m(F(B))-m(F(M)))+LK(m(B)-m(M))<K\varepsilon+LK\varepsilon/L=2K\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dokázali sme tým (1.7). □

Lemmu 1.15 teda využijeme pri dôkaze Vety 1.1. V dôkaze Lemmy 1.18 budeme ešte potrebovať modifikáciu Fubiniho vety a k tomu nám pomôžu nasledujúce lemmy.

Lemma 1.16. *Majme merateľnú množinu $P\subset\mathbb{R}^{m+n}$ a funkciu f, ktorá je integrovateľná na tejto množine. Označme $P_{(x,\cdot)}=\{y\in\mathbb{R}^n:[x,y]\in P\}$ a $P_{(\cdot,y)}=\{x\in\mathbb{R}^m:[x,y]\in P\}$ ako priemety rezov množiny P. Nech J je $(m+n)$-rozmerný kompaktný interval taký, že $J=J_1\times J_2$, $P\subseteq J$ a $J_1\subset\mathbb{R}^m$, $J_2\subset\mathbb{R}^n$. Potom pre každé $x\in J_1$ má zmysel a platí*

$$\int\cdots\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int\cdots\int_{J_1}\left(\int\cdots\int_{P_{(x,\cdot)}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

Dôkaz. Dokazujeme pre $m=1$ a $n=1$. Použijeme charakteristickú funkciu $\chi_P f$, ktorá je integrovateľná na $(m+n)$-rozmernom intervale J. Potom vieme, že platí

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_J \chi_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{J_1}\left(\overline{\int_{J_2}}\chi_P f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

Ďalej vieme, že $\chi_P f(x,y)=\chi_{P(x,\cdot)}f(x,y)$ pre $x\in J_1$ a $y\in P_{(x,\cdot)}$. Potom

$$\int_{P(x,\cdot)} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{J_2}\chi_{P(x,\cdot)}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{J_2}\chi_P f(x,y)\,\mathrm{d}y=\overline{\int_{J_2}}\chi_P f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Nakoniec dosadením do (1.10) dostaneme (1.9). □

12 Definícia. Interval $\langle a,b\rangle$ nazveme degenerovaným, ak $a=b$, tj. degenerovaný interval je jednobodová množina $\{a\}$.

Lemma 1.17. *Majme množinu $P \subset \mathbb{R}^n$ takú, že $P = I_1 \cup \cdots \cup I_n$, pričom P je tvorená uzatvorenými nedegenerovanými intervalmi $I_1, \ldots, I_n$. Potom existujú uzatvorené a nedegenerované intervaly $J_1, \ldots, J_k$ také, že:*

- *$P = J_1 \cup \cdots \cup J_k$, tj. množina P je tvorená uzatvorenými nedegenerovanými intervalmi $J_1, \ldots, J_k$;*
- *interval $J_i, i = 1, \ldots, k$ nemá žiadny spoločný vnútorný bod s intervalom J_j, $j = 1, \ldots, k$ a $i < j$;*
- *pre každý interval J_j, $j = 1, \ldots, k$ platí, že $J_j \subseteq I_i$ pre isté $i = 1, \ldots, n$.*

Dôkaz. Pre zjednodušenie dokážeme len pre $n = 2$. Intervaly sú tvaru $I_i = \langle a_i, b_i \rangle \times \langle c_i, d_i \rangle$ pre $i = 1, \ldots, n$. Označme obdĺžnik $R = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$, kde

$$a = \min\{a_1, \ldots, a_n\}, b = \max\{b_1, \ldots, b_n\}, c = \min\{c_1, \ldots, c_n\}, d = \max\{d_1, \ldots, d_n\}.$$

Delenie obdĺžnika R je teda $D = D_1 \times D_2$, kde D_1 je delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ s bodmi a_i, b_i a D_2 je delenie intervalu $\langle c, d \rangle$ s bodmi c_i, d_i pre $i = 1, \ldots, n$. Potom intervaly $J_1, \ldots, J_k$ sú všetky dieliky delenia D, ktoré sú podmnožinami množiny P a spĺňajú požadované vlastnosti. □

Pomocou predchádzajúcich lémm teraz dokážeme rovnosť (1.1) z Vety 1.1 pre intervaly ľubovolnej dimenzie.

Lemma 1.18. *Majme prosté a regulárne zobrazenie $F : A \to \mathbb{R}^n$, kde množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená. Nech $M \subset A$ je ľubovolný uzatvorený interval a f je ľubovolná spojitá funkcia na $F(M)$. Potom platí rovnosť (1.6).*

Dôkaz. Dokazujeme matematickou indukciou. Ak budeme uvažovať degenerovaný interval, tak miera $m_n(M) = 0$ a tiež $m_n(F(M)) = 0$ (podľa Lemmy 1.12) a obidva integrály v (1.6) nám vyjdu rovné nule. Potom lemma určite platí. Budeme teda uvažovať len nedegenerované intervaly.

Predpokladajme, že lemma platí pre n-rozmerné integrály, kde $n \in \mathbb{N}$. Teda chceme dokázať, že platí aj pre $(n+1)$-rozmerné integrály. Nech $n = 2$, teda $n + 1 = 3$. Nech množina $A \subseteq \mathbb{R}^3$ je otvorená a zobrazenie $F : A \to \mathbb{R}^3$ je prosté a regulárne. Zobrazenie $F : [x_1, x_2, x_3] \mapsto [z_1, z_2, z_3]$ je určené rovnicami

$$z_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), z_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), z_3 = f_3(x_1, x_2, x_3),$$

kde $[x_1, x_2, x_3] \in A$. Najprv dokážeme, že pre každý bod $x^* \in A$ existuje okolie $\mathscr{O}(x^*)$ také, že pre každý kváder $R \subset \mathscr{O}(x^*)$ a každú spojitú funkciu f na $F(R)$ platí

$$\iiint_{F(R)} f(z)\, \mathrm{d}z = \iiint_R f(F(x))\, |J_F(x)|\, \mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

1) Nech $x^* \in A$ je ľubovolný bod. Lemma 1.13 určuje okolie $\mathscr{O}(x^*) = V$, kde $V \subseteq A$, a prosté diferencovateľné zobrazenia $\Psi : V \to \mathbb{R}^3$ a $\Theta : \Psi(V) \to \mathbb{R}^3$, kde $\Psi : [x_1, x_2, x_3] \mapsto [y_1, y_2, y_3]$ môže mať tvar $y_1 = \psi_1(x_1, x_2, x_3), y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ a $\Theta : [y_1, y_2, y_3] \mapsto [z_1, z_2, z_3]$ zase $z_1 = y_1, z_2 = \theta_2(y_1, y_2, y_3)$, $z_3 = \theta_3(y_1, y_2, y_3)$. Potom $F = \Theta \circ \Psi$ na okolí V. Z toho vyplýva, že $f_1 = \psi_1$ na V. Podľa Lemmy 1.3 platí $J_F(x) = J_{\Theta \circ \Psi}(x) = J_\Theta(\Psi(x))\, J_\Psi(x)$ pre $x \in V$.

2) Podľa Dôsledku 1.5 je množina $\Psi(V)$ otvorená. Preto pre ľubovolné y_1 je množina $\Psi(V)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$ tiež otvorená. Pre každé y_1, pre ktoré je množina $\Psi(V)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$ neprázdna, uvažujeme zobrazenie $\Theta_{y_1} : \Psi(V)_{(y_1,\cdot,\cdot)} \to \mathbb{R}^2$ dané rovnicami $z_2 = \theta_2(y_1,y_2,y_3)$ a $z_3 = \theta_3(y_1,y_2,y_3)$. Pomocou jakobiánov overíme, že pre každé y_1 je Θ_{y_1} regulárne, kedy

$$J_{\Theta_{y_1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_2}\theta_2 & \frac{\partial}{\partial y_3}\theta_2 \\ \frac{\partial}{\partial y_2}\theta_3 & \frac{\partial}{\partial y_3}\theta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\theta_2 & \frac{\partial}{\partial y_2}\theta_2 & \frac{\partial}{\partial y_3}\theta_2 \\ \frac{\partial}{\partial y_1}\theta_3 & \frac{\partial}{\partial y_2}\theta_3 & \frac{\partial}{\partial y_3}\theta_3 \end{vmatrix} = J_\Theta.$$

Teda $J_{\Theta_{y_1}}(y_2,y_3) = J_\Theta(y_1,y_2,y_3)$ a pre $[y_2,y_3] \in \Psi(V)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$ sa obidva jakobiány nerovnajú nule. Kedže Θ je prosté na $\Psi(V)$, tak Θ_{y_1} je prosté na množine $\Psi(V)_{(y_1,\cdot,\cdot)}$.

3) Nech $R_1 \subset \Psi(V)$ je ľubovolný kváder tvaru $R_1 = \langle a_1,b_1\rangle \times \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$. Ďalej nech $R_2 = \langle a_2,b_2\rangle \times \langle a_3,b_3\rangle$. To znamená, že $R_1 = \langle a_1,b_1\rangle \times R_2$. Množina $\Theta(R_1)$ je merateľná (podľa Lemmy 1.12) a tvorená bodmi $[z_1,z_2,z_3]$, pre ktoré platí $z_1 \in \langle a_1,b_1\rangle$ a $[z_2,z_3] \in \Theta_{z_1}(R_2)$ (podľa vlastností zobrazenia Θ). Potom pre ľubovolné $z_1 \in \langle a_1,b_1\rangle$ platí $\Theta(R_1)_{(z_1,\cdot,\cdot)} = \Theta_{z_1}(R_2)$. Z časti 2) vieme, že Θ_{z_1} je prosté a regulárne zobrazenie na množine $\Psi(V)_{(z_1,\cdot,\cdot)}$, ktorá je otvorená a obsahuje R_2. Potom podľa Lemmy 1.12 je množina $\Theta_{z_1}(R_2)$ merateľná pre každé $z_1 \in \langle a_1,b_1\rangle$.

4) Nech f je ľubovolná spojitá funkcia na kompaktnej množine $\Theta(R_1)$. Podľa vety o integrovateľnosti spojitej funkcie na kompaktnej množine, (viď [5, strana 44]), existuje integrál $\iiint_{\Theta(R_1)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3$ a tiež pre $z_1 \in \langle a_1,b_1\rangle$ existuje integrál $\iint_{\Theta_{z_1}(R_2)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3$. Keď v Lemme 1.16 zvolíme za $J_1 = \langle a_1,b_1\rangle$ a za J_2 ľubovolný obdĺžnik, potom platí

$$\iiint_{\Theta(R_1)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\Theta(R_1)_{(z_1,\cdot,\cdot)}} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 \right) \mathrm{d}z_1 =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{\Theta_{z_1}(R_2)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 \right) \mathrm{d}z_1.$$

Teraz využijeme rovnosť (1.6) a dostaneme

$$\iiint_{\Theta(R_1)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 =$$
$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{R_2} f\left(z_1,\theta_2(z_1,y_2,y_3),\theta_3(z_1,y_2,y_3)\right) \left| J_{\Theta_{z_1}}(y_2,y_3) \right| \mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3 \right) \mathrm{d}z_1.$$

Pomocou Fubiniho vety pre trojný integrál cez kváder (viď [5, strana 86]) a vzťahu medzi jakobiánmi v časti 2) dostávame

$$\iiint_{\Theta(R_1)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3 =$$
$$= \iiint_{R_1} f\left(y_1,\theta_2(y_1,y_2,y_3),\theta_3(y_1,y_2,y_3)\right) |J_\Theta(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3.$$

Dokázali sme, že platí

$$\begin{aligned}&\iiint_{\Theta(R_1)} f(z_1,z_2,z_3)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3\\ &\qquad = \iiint_{R_1} f\left(y_1,\theta_2(y_1,y_2,y_3),\theta_3(y_1,y_2,y_3)\right)|J_\Theta(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3.\end{aligned}$$

Alebo stručne pre $z=(z_1,z_2,z_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$ a $\mathrm{d}z=\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\,\mathrm{d}z_3$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3$ môžeme písať

$$\iiint_{\Theta(R_1)} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint_{R_1} f\left(\Theta(y)\right)|J_\Theta(y)|\,\mathrm{d}y.$$

5) Nech $B\subset\Psi(V)$ je ľubovolná kompaktná merateľná množina a f je ľubovolná spojitá funkcia na $F(B)$. Potom podľa Lemmy 1.15 platí

$$\iiint_{\Theta(B)} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint_{B} f\left(\Theta(y)\right)|J_\Theta(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{1.12}$$

6) Zopakujme, že V je otvorená množina. Potom je otvorená aj množina $V_{(\cdot,x_2,x_3)}$ pre ľubovolné $[x_2,x_3]\in V$ také, že $V_{(\cdot,x_2,x_3)}$ je neprázdna. Definujme zobrazenie $\Psi_{(x_2,x_3)}: V_{(\cdot,x_2,x_3)}\to\mathbb{R}$ ako $\Psi_{(x_2,x_3)}=\psi(x_1,x_2,x_3)$. Zobrazenie $\Psi_{(x_2,x_3)}$ je prosté na $V_{(\cdot,x_2,x_3)}$, pretože Ψ je prosté na V. Zobrazenie $\Psi_{(x_2,x_3)}$ je tiež regulárne, pretože je

$$J_{\Psi_{(x_2,x_3)}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_1 & \frac{\partial}{\partial x_3}\psi_1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \psi_{1|x_1} = J_\Psi.$$

Teda $J_{\Psi_{(x_2,x_3)}}(x_1)=J_\Psi(x_1,x_2,x_3)$ a obidva jakobiány sa nerovnajú nule pre ľubovolné $x_1\in V_{(\cdot,x_2,x_3)}$.

7) Nech $R\subset V$ je ľubovolný kváder tvaru $R=\langle c_1,d_1\rangle\times\langle c_2,d_2\rangle\times\langle c_3,d_3\rangle$. Nech $R_3=\langle c_1,d_1\rangle$ a $R_4=\langle c_2,d_2\rangle\times\langle c_3,d_3\rangle$. To znamená, že $R=R_3\times R_4$. Množina $\Psi(R)$ je merateľná (podľa Lemmy 1.12) a tvorená bodmi $[y_1,y_2,y_3]$, pre ktoré platí $y_1\in\Psi_{(y_2,y_3)}(R_3)$ a $[y_2,y_3]\in R_4$ (podľa vlastností zobrazenia Ψ). Potom pre ľubovolné $[y_2,y_3]\in R_4$ platí $\Psi(R)_{(\cdot,y_2,y_3)}=\Psi_{(y_2,y_3)}(R_3)$. Z časti 6) vieme, že $\Psi_{(y_2,y_3)}$ je prosté a regulárne na $V_{(\cdot,y_2,y_3)}$, ktoré je otvorené a obsahuje R_3. Potom podľa Lemmy 1.12 je množina $\Psi_{(y_2,y_3)}(R_3)$ merateľná pre každé $[y_2,y_3]\in R_4$.

8) Majme kompaktnú a merateľnú množinu $\Psi(R)\subset\Psi(V)$ a spojitú funkciu f na $F(R)$. Podľa (1.12) platí

$$\iiint_{F(R)} f(z)\,\mathrm{d}z = \iiint_{\Psi(R)} f\left(\Theta(y)\right)|J_\Theta(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{1.13}$$

Ďalej počítame pomocou Lemmy 1.16, v ktorej zvolíme za $J_1=R_4$ a za J_2 ľubovolný interval a tiež uvažujeme integrál

$$\int_{\Psi_{(y_2,y_3)}(R_3)} f\left(y_1,\theta_2(y_1,y_2,y_3),\theta_3(y_1,y_2,y_3)\right)|J_\Theta(y_1,y_2,y_3)|\,\mathrm{d}y_1.$$

Potom

$$\iiint_{\Psi(R)} f\left(y_1, \theta_2(y_1,y_2,y_3), \theta_3(y_1,y_2,y_3)\right) |J_\Theta(y_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}y_1 \,\mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint_{R_4} \left(\int_{\Psi(R)_{(\cdot,y_2,y_3)}} f\left(y_1, \theta_2(y_1,y_2,y_3), \theta_3(y_1,y_2,y_3)\right) |J_\Theta(y_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint_{R_4} \left(\int_{\Psi_{(y_2,y_3)}(R_3)} f\left(y_1, \theta_2(y_1,y_2,y_3), \theta_3(y_1,y_2,y_3)\right) |J_\Theta(y_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3.$$

Ďalej pomocou rovnosti (1.6), vzorca pre jakobián v časti 1), rovnosti medzi jakobiánmi v časti 6) a Fubiniho vety dostaneme

$$\iint_{R_4} \left(\int_{\Psi_{(y_2,y_3)}(R_3)} f\left(y_1, \theta_2(y_1,y_2,y_3), \theta_3(y_1,y_2,y_3)\right) |J_\Theta(y_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}y_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint_{R_4} \left(\int_{R_3} f\left[\psi_1(x_1,y_2,y_3), \theta_2\left(\psi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3\right), \theta_3\left(\psi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3\right)\right] \right) \times$$

$$\times \left(|J_\Theta(\psi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3)| \left| J_{\Psi_{(y_2,y_3)}}(x_1) \right| \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint_{R_4} \left(\int_{R_3} f\left(f_1(x_1,y_2,y_3), f_2(x_1,y_2,y_3), f_3(x_1,y_2,y_3)\right) \right) \times$$

$$\times \left(|J_\Theta(\psi_1(x_1,y_2,y_3),y_2,y_3)| \, |J_\Psi(x_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint_{R_4} \left(\int_{R_3} f\left(F(x_1,y_2,y_3)\right) |J_\Theta\left(\Psi(x_1,y_2,y_3)\right)| \, |J_\Psi(x_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 =$$

$$= \iint_{R_4} \left(\int_{R_3} f\left(F(x_1,y_2,y_3)\right) |J_F(x_1,y_2,y_3)| \,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}y_2 \,\mathrm{d}y_3 = \iiint_R f\left(F(x)\right) |J_F(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Tak sme dokázali rovnosť (1.13), a tým aj rovnosť (1.11).

Nech funkcia f je ľubovolná spojitá funkcia na $F(M)$, kde $M \subset A$ je kváder. Vieme, že ku každému $x \in M$ existuje okolie $\mathscr{O}(x)$ také, že pre ľubovolný kváder $R \subset \mathscr{O}(x)$ a ľubovolnú spojitú funkciu g na $F(R)$ platí

$$\iiint_{F(R)} g(z) \,\mathrm{d}z = \iiint_R g\left(F(x)\right) |J_F(x)| \,\mathrm{d}x. \tag{1.14}$$

V každom okolí $\mathscr{O}(x)$ vyberieme kváder R_x tak, aby x bol vnútorný bod. Otvorené pokrytie kvádra M tvoria vnútra kvádrov R_x, kde $x \in M$. Vyberieme z nich konečné podpokrytie, ktoré je tvorené vnútrami kvádrov $R_1, \dots, R_m$. Predpokladajme, že $M \cap \operatorname{int} I \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, m$. Potom platí $M \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_m$, čo znamená, že $M = (M \cap R_1) \cup \dots \cup (M \cap R_m)$, kde $M \cap R_i$, $i = 1, \dots, m$ sú kvádre. Podľa Lemmy 1.17 existujú $J_1, \dots, J_k$ tak, že $M = J_1 \cup \dots \cup J_k$, žiadne dva z nich nemajú spoločný vnútorný bod a každý je podmnožinou kvádra $M \cap R_i$ pre isté i. Potom podľa (1.14) platí

$$\iiint_{F(J_j)} f(z) \,\mathrm{d}z = \iiint_{J_j} f\left(F(x)\right) |J_F(x)| \,\mathrm{d}x, \quad j = 1, \dots, k,$$

pretože f je spojitá na $F(J_j), j = 1, \ldots, k$. Ďalej podľa druhej časti Lemmy 1.17 platí $m(J_i \cap J_j) = 0$. Teda podľa dôkazu Lemmy 1.15 je $m\left(F(J_i) \cap F(J_j)\right) = 0$, čo znamená, že $F(M) = F(J_1) \cap \cdots \cap F(J_k)$ pre $i, j = 1, \ldots, k$. Potom platí

$$\iiint_{F(M)} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \iiint_{F(J_j)} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \iiint_{J_j} f\left(F(x)\right) |J_F(x)|\, \mathrm{d}x =$$
$$= \iiint_M f\left(F(x)\right) |J_F(x)|\, \mathrm{d}x.$$

Tým je tvrdenie úplne dokázané. □

Teraz môžeme prehlásiť, že pomocou všetkých lémm a dôsledkov, ktoré sme dokázali, sme už dokázali aj tvrdenie **Vety 1.1**.

Poslednou časťou je dôkaz **Vety 1.2**.

Dôkaz. Budeme dokazovať len pre $n = 2$, lebo vzorec sa dá dokázať aj pre všeobecne $n \in \mathbb{N}$. Podľa Vety 1.2 je N merateľná množina a môžeme potvrdiť, že množina $N_1 = N \setminus (N \setminus N_1)$ je tiež merateľná, pretože je merateľná množina $N \setminus N_1$ vďaka $m(N \setminus N_1) = 0$. Ďalej je merateľná aj množina $F(N_1)$, čo sa dá rovnako zdôvodniť. Teda vieme, že platí

$$\iint_N f\left(F(v)\right) |J_F(v)|\, \mathrm{d}v = \iint_{N_1} f\left(F(v)\right) |J_F(v)|\, \mathrm{d}v + \iint_{N \setminus N_1} f\left(F(v)\right) |J_F(v)|\, \mathrm{d}v =$$
$$= \iint_{N_1} f\left(F(v)\right) |J_F(v)|\, \mathrm{d}v$$

a tiež

$$\iint_{F(N)} f(x)\, \mathrm{d}x = \iint_{F(N_1)} f(x)\, \mathrm{d}x + \iint_{F(N) \setminus F(N_1)} f(x)\, \mathrm{d}x = \iiint_{F(N_1)} f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{1.15}$$

Nech ε je ľubovolné kladné číslo. Množina $F(N_1)$ je merateľná, a preto existuje kompaktná množina $P_1 \subset F(N_1)$ taká, že $m\left(F(N_1) - P_1\right) = m\left(F(N_1)\right) - m(P_1) < \varepsilon$, kde stačí uvážiť zjednotenie konečne mnoho obdĺžnikov. Nech ku každému $v \in N_1$ existuje okolie $\mathscr{O}_r(v)$, kde $\mathscr{O}_r(v) \subseteq N_1$ a $r > 0$ je polomer. Potom $\overline{\mathscr{O}_{r/2}(v)}$ je uzatvorený kruh so stredom v bode v a s polomerom $r/2$ a platí $\overline{\mathscr{O}_{r/2}(v)} \subset \mathscr{O}_r(v)$. Okolie $\mathscr{O}_{r/2}(v)$ je zrejme merateľná množina. Označme $P_v = F\left(\mathscr{O}_{r/2}(v)\right)$ ako množiny, kde $v \in N_1$, ktoré sú tiež merateľné (podľa Lemmy 1.12). Ďalej nech okolie bodu $F(v)$ je vnútro množiny P_v (pod1a Lemmy 1.7). Nech otvorené pokrytie množiny P_1 tvoria vnútra $\operatorname{int} P_{F^{-1}(x)}$, kde $x \in P_1$. Vieme vybrať konečné podpokrytie, ktoré je tvorené vnútrami množín

$$P_{v_i} = F\left(\overline{\mathscr{O}_{r_i/2}(v)}\right), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Takže $P_{v_1} \cup \cdots \cup P_{v_k} \supseteq P_1$. Ďalej vďaka tvrdeniu, že N_1 je merateľná, existuje množina $S_1 \subset N_1$, ktorá je tvorená zjednotením konečne mnoho obdĺžnikov a pre ktorú platí $m(N_1 \setminus S_1) = m(N_1) - m(S_1) < \varepsilon$. Buď $S = S_1 \cup \overline{\mathscr{O}_{r_1/2}(v_1)} \cup \cdots \cup \overline{\mathscr{O}_{r_k/2}(v_k)}$. Množina S je kompaktná. Potom $S_1 \subseteq S \subset N$, čo znamená, že

$$m(N_1 \setminus S) = m(N_1) - m(S) \leq m(N_1) - m(S_1) < \varepsilon.$$

Ak $P = F(S)$, potom

$$P_1 \subseteq P_{v_1} \cup \cdots \cup P_{v_k} = F\overline{\left(\mathscr{O}_{r_1/2}(v_1)\right)} \cup \cdots \cup F\overline{\left(\mathscr{O}_{r_k/2}(v_k)\right)} \subseteq P.$$

Preto

$$m\left(F(N_1) \setminus P\right) = m\left(F(N_1)\right) - m(P) \leq m\left(F(N_1)\right) - m(P_1) < \varepsilon.$$

Podľa predpokladov vieme, že existuje konštanta L taká, že $|f(x)| < L$ pre $x \in F(N)$ a konštanta K taká, že $|f(F(v))J_F(v)| < K$ na $v \in N$. Potom podľa Vety 1.1 platí rovnosť

$$\iint_P f(x)\,\mathrm{d}x = \iint_S f(F(v))\,|J_F(v)|\,\mathrm{d}v,$$

a teda

$$\left|\iint_{F(N_1)} f(x)\,\mathrm{d}x - \iint_{N_1} f(F(v))\,|J_F(v)|\,\mathrm{d}v\right| =$$
$$= \left|\iint_{F(N_1)} f(x)\,\mathrm{d}x - \iint_P f(x)\,\mathrm{d}x + \iint_S f(F(v))\,|J_F(v)|\,\mathrm{d}v - \iint_{N_1} f(F(v))\,|J_F(v)|\,\mathrm{d}v\right| \leq$$
$$\leq \left|\iint_{F(N_1)\setminus P} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\iint_{N_1\setminus S} f(F(v))\,|J_F(v)|\,\mathrm{d}v\right| \leq L\varepsilon + K\varepsilon = \varepsilon(L+K).$$

Týmto sme dokázali platnosť Vety 1.2 vzhľadom k ľubovolnému $\varepsilon > 0$. □

1.4 Riešený príklad

Príklad 1.19. *Vypočítajte objem gule M o polomere $r > 0$ v šesťrozmernom priestore, teda integrál*

$$I = \int \cdots \int_M \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n$$

cez n-rozmernú guľu $M : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$, ak $n = 6$.

Riešenie. Keďže množina M je šesťrozmerná guľa, použijeme transformáciu do sférických súradníc, ktorú spravidla používame pri oblastiach, ktoré sú časťami guľových plôch. Potom táto transformácia pre $n = 6$ so súradnicami $\rho, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_4$ je daná vzťahmi (viď (1.2))

$$\begin{aligned}
x_1 &= \rho \cos\theta_1,\\
x_2 &= \rho \sin\theta_1 \cos\theta_2,\\
x_3 &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3,\\
x_4 &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4,\\
x_5 &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \cos\varphi,\\
x_6 &= \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 \sin\varphi
\end{aligned}$$

a $|J_6| = \rho^5 \sin^4\theta_1 \sin^3\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4$. Množina N v súradniciach $\rho, \varphi, \theta_1, \ldots, \theta_4$ je zadaná rozsahmi

$$0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta_1 \leq \pi,\ 0 \leq \theta_2 \leq \pi,\ 0 \leq \theta_3 \leq \pi,\ 0 \leq \theta_4 \leq \pi.$$

Môžeme vypočítať integrál

$$I = \int \cdots \int_M \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_6 = \int \cdots \int_N \rho^5 \sin^4\theta_1 \sin^3\theta_2 \sin^2\theta_3 \sin\theta_4 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_3\,\mathrm{d}\theta_4 =$$

$$= \int_0^r \rho^5\,\mathrm{d}\rho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_4\,\mathrm{d}\theta_4 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\theta_3\,\mathrm{d}\theta_3 \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\theta_2\,\mathrm{d}\theta_2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^4\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1 =$$

$$= \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^r \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\theta_4]_0^{\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta_3 \cdot \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \sin\theta_2\,\mathrm{d}\theta_2 \cdot \frac{3}{4}\int_0^{\pi} \sin^2\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1 =$$

$$= \frac{r^6}{6} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\,[\theta_3]_0^{\pi} \cdot \frac{2}{3}\,[-\cos\theta_2]_0^{\pi} \cdot \frac{3}{8}\,[\theta_1]_0^{\pi} = \frac{r^6\pi^3}{6}.$$

Pri výpočte integrálu sme použili vzorec pre integrál z n-tej mocniny funkcie sínus, tj.

$$\int_0^{\pi} \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \quad \text{pre} \quad n \geq 2,\, n \in \mathbb{N}.$$

Odvodenie vzorca sa dá nájsť napríklad v [5, strana 160].

Kapitola 2

Transformácie dvojných integrálov

V tejto kapitole sa budeme venovať transformáciám dvojných integrálov. Najskôr sformulujeme základnú vetu o transformáciách dvojných integrálov, popíšeme vybrané transformácie a ukážeme ich využitie na niekoľkých pôvodných príkladoch.

Pre výpočet dvojného integrálu sa zväčša využíva Fubiniho veta – viď [4, strana 168], ktorá dáva návod ako sa dá previesť dvojný integrál na dvojnásobný integrál. Teda z dvojného integrálu obdržíme dva po sebe idúce jednorozmerné integrály. Ale nie na všetky integrály môžeme túto vetu bezprostredne aplikovať. Preto najskôr použijeme vhodnú transformáciu, aby sme v ďalších krokoch mohli použiť Fubiniho vetu. Pri transformácii dvojného integrálu ide hlavne o zmenu integračného oboru (a teda aj integrandu) tak, aby sme mohli použiť Fubiniho vetu.

2.1 Základná veta o transformáciách dvojných integrálov

V Kapitole 1 ako Definícia 2 je uvedená definícia regulárneho zobrazenia, ktorá je dôležitá pri nasledujúcej vete o transformáciách dvojných integrálov.

Veta 2.1. *Majme zobrazenie $F:\Omega\to\mathbb{R}^2$, ktoré je prosté na otvorenej množine $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$. Nech $N\subseteq\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ a $M=F(N)$ sú uzatvorené a merateľné množiny. Nech spojito diferencovateľné funkcie $x=h_1(u,v)$, $y=h_2(u,v)$ predstavujú vzájomne jednoznačné zobrazenia obmedzenej a uzatvorenej množiny M v rovine xy na množinu N a jakobián*

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1\\ \frac{\partial}{\partial u}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2\end{vmatrix}$$

má rovnaké znamienko na množine N, tj. je rôzny od nuly pre každé $[u,v]\in N$. Ak funkcia f je spojitá na M, potom platí vzťah

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_N f\left(h_1(u,v),h_2(u,v)\right)|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Dôkaz. Vyplýva z Viet 1.1 a 1.2. □

2.2 Typy transformácií dvojných integrálov

Medzi často používané transformácie patria nasledujúce:

- **Transformácia do polárnych súradníc** je základnou používanou transformáciou, kde zobrazenie F každej dvojici čísel (ρ, φ) priraďuje bod $[x, y]$ podľa vzťahov

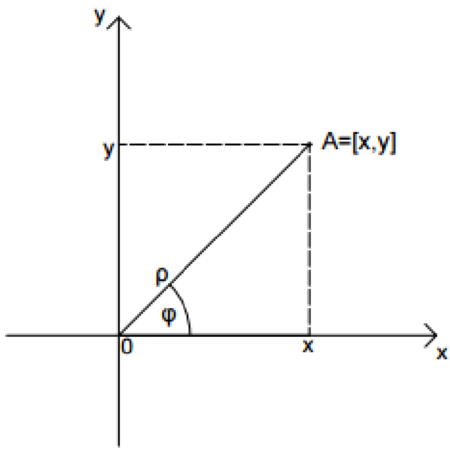
$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi, \\ y &= \rho \sin\varphi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde namiesto u a v sú nové premenné $\rho \geq 0$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Pri použití týchto súradníc polohu bodu $A = [x, y]$ (viď Obr. 2.1) zadávame tak, že určíme vzdialenosť ρ vždy od bodu $[0,0]$ a uhol φ, ktorý zviera spojnica bodov $[0,0]$ a A s kladnou poloosou x. Pre jakobián platí

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}h_1 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho,$$

a teda dostávame

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$



Obr. 2.1: Polárne súradnice

Poznámka 2.2. *Polárne súradnice sa spravidla aplikujú v prípadoch, že hranica množiny M, cez ktorú integrujeme, je časťou kružníc, ale závisí to tiež na integrovanej funkcii.*

- **Transformácia do eliptických súradníc** alebo inak nazývaná transfomácia do zovšeobecnených polárnych súradníc, kde zobrazenie F každej dvojici čísel (ρ, φ) priraďuje bod $[x, y]$ podľa vzťahov

$$\begin{aligned} x &= a\rho \cos\varphi, \\ y &= b\rho \sin\varphi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $a > 0$, $b > 0$ sú konštanty. Pre jakobián platí

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}h_1 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = ab\rho,$$

a teda dostávame

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N f(a\rho\cos\varphi,\, b\rho\sin\varphi)\,ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

Poznámka 2.3. *Eliptické súradnice sa spravidla používajú v prípadoch, že hranica množiny M, cez ktorú integrujeme, má eliptický tvar, kedy a, b sú poloosi elipsy.*

- **Transformácia do zovšeobecnených eliptických súradníc**, kde zobrazenie F každej dvojici čísel (ρ,φ) priraďuje bod $[x,y]$ podľa vzťahov

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos^n\varphi, \\ y &= b\rho\sin^n\varphi, \end{aligned} \tag{2.3}$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $a > 0$, $b > 0$ sú konštanty a $n \in \mathbb{N}$. Potom pre jakobián platí

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}h_1 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^n\varphi & -an\rho\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^n\varphi & bn\rho\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= abn\rho\sin^{n-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = abn\rho\sin^{n-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi,$$

a teda dostávame

$$\iint_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N f(a\rho\cos^n\varphi,\, b\rho\sin^n\varphi)\,abn\rho\sin^{n-1}\varphi\cos^{n-1}\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi.$$

- **Posunutie** alebo inak nazývané translácia je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= u + b_1, \\ y &= v + b_2, \end{aligned}$$

kde b_1, b_2 sú konštanty. Táto transformácia posúva bod $[x,y]$ o orientovanú vzdialenosť b_1 v smere súradnicovej osi x a o orientovanú vzdialenosť b_2 v smere súradnicovej osi y. Jakobián je

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- **Dilatácia** je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= b_1 u, \\ y &= b_2 v, \end{aligned}$$

kde $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ sú konštanty. Jakobián je

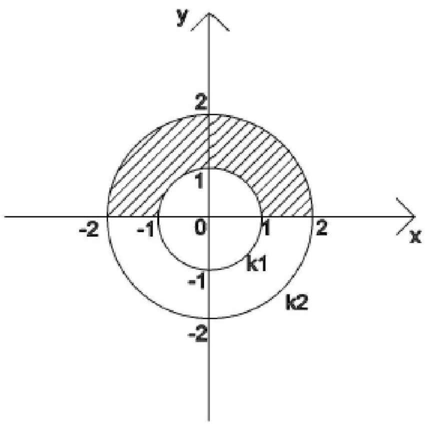
$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2.$$

2.3 Riešené príklady

Príklad 2.4. *Vypočítajte dvojný integrál*

$$I = \iint\limits_M \sin\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je daná nerovnosťami $1 \le x^2+y^2 \le 4$ a $y \ge 0$.



Obr. 2.2: $M : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\, y \ge 0$

Riešenie. Prvá podmienka $1 \le x^2+y^2 \le 4$ nám určuje medzikružie, kde $x^2+y^2=1$ a $x^2+y^2=4$ sú kružnice k_1 a k_2 so stredom v bode $[0,0]$ a s polomermi $r_1=1$ a $r_2=2$. Ďalej nám druhá podmienka $y \ge 0$ určuje, že sem patria body prvého a druhého kvadrantu. Integračnou množinou je teda polovica medzikružia (Obr. 2.2). Spôsob, ako vypočítať tento integrál, je použiť transformáciu do polárnych súradníc. Keďže polpriamky vychádzajúce zo stredu $[0,0]$ zvierajú uhol od 0 po π, tak $0 \le \varphi \le \pi$. Všetky polpriamky pretínajú hranicu množiny M v tých istých vzdialenostiach, a to v 1 a 2, teda $1 \le \rho \le 2$. Nakoniec transformáciou množiny M máme množinu N danú nerovnosťami $0 \le \varphi \le \pi$ a $1 \le \rho \le 2$.

Je dôležité, aby sme ešte overili predpoklady Vety 2.1. Vidíme, že množina N je merateľná a uzatvorená, a za $\Omega \in \mathbb{R}^2$ môžeme zvoliť ľubovolnú množinu z prvého kvadrantu s rozmermi na osiach od 0 po 2π, ktorá obsahuje množinu N. Potom je zrejmé, že zobrazenie F dané rovnicami $x=\rho\cos\varphi,\, y=\rho\sin\varphi$ na množine Ω je prosté a regulárne. Posledným predpokladom je spojitosť funkcie na množine N, ktorá je očividne splnená, a teda platí

$$I = \iint\limits_M \sin\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_N \sin\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

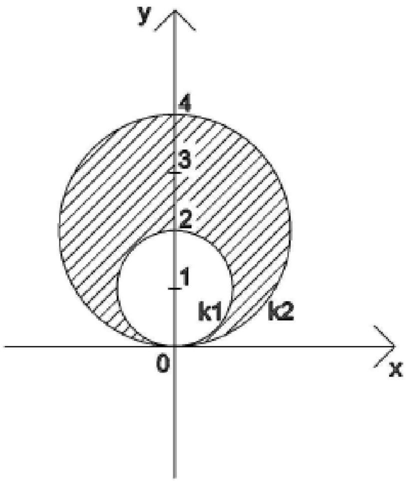
$$= \int_0^\pi\int_1^2 \rho\sin\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left|\begin{array}{c} t=\rho^2 \\ \mathrm{d}t = 2\rho\,\mathrm{d}\rho \\ 2\to 4,\ 1\to 1 \end{array}\right| = \int_0^\pi\int_1^4 \frac{\sin t}{2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi = \left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_1^4 \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \frac{\cos 1-\cos 4}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\cos 1-\cos 4}{2}\right)\cdot[\varphi]_0^\pi = \frac{(\cos 1-\cos 4)\pi}{2}.$$

Príklad 2.5. *Pomocou polárnych súradníc vypočítajte dvojný integrál*

$$I = \iint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

pre množinu M, ktorá je určená podmienkami $x^2 + y^2 \geq 2y$ *a* $x^2 + y^2 \leq 4y$.



Obr. 2.3: $M : x^2 + y^2 \geq 2y, x^2 + y^2 \leq 4y$

Riešenie. Nerovnosť $x^2 + y^2 \leq 4y$, po úprave $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$, určuje kruh so stredom v bode $[0,2]$ a s polomerom $r_1 = 2$ a nerovnosť $x^2 + y^2 \geq 2y$, tiež doplnená na štvorec $x^2 + (y-1)^2 \geq 1$, určuje vonkajšok kruhu so stredom v bode $[0,1]$ a s polomerom $r_2 = 1$. Z Obrázku 2.3 by malo byť jasné, že použitie polárnych súradníc je vhodné. Určíme obmedzenie pre φ a ρ. V tomto prípade polpriamky vychádzajúce zo stredu $[0,0]$ zvierajú s osou x uhol od 0 po π, a preto máme $0 \leq \varphi \leq \pi$. Obmedzenie pre ρ zistíme dosadením polárnych súradníc do podmienok, tj.

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &\geq 2\rho \sin \varphi, \qquad & \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi &\leq 4\rho \sin \varphi, \\ \rho^2 &\geq 2\rho \sin \varphi, & \rho^2 &\leq 4\rho \sin \varphi, \\ \rho &\geq 2 \sin \varphi, & \rho &\leq 4 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Teda $2 \sin \varphi \leq \rho \leq 4 \sin \varphi$. Overovanie predpokladov je vo väčšine prípadoch podobné ako v predchádzajúcom príklade, a preto sa tým ďalej zaoberať nebudeme. Výpočtom integrálu dostaneme

$$I = \iint\limits_M y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint\limits_N \rho \sin \varphi \cdot \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^\pi \int\limits_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \rho^2 \sin \varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^\pi \sin \varphi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{2 \sin \varphi}^{4 \sin \varphi} \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^\pi \left(\frac{64}{3} \sin^3 \varphi - \frac{8}{3} \sin^3 \varphi \right) \sin \varphi \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \frac{56}{3}\sin^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{56}{3}\int_0^\pi \left(\sin^2\varphi\right)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{56}{3}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\varphi\right)\right)\right)^2 \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{56}{12}\int_0^\pi \left(1-\cos\left(2\varphi\right)\right)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{14}{3}\int_0^\pi \left(1-2\cos\left(2\varphi\right)+\cos^2\left(2\varphi\right)\right) \mathrm{d}\varphi =$$

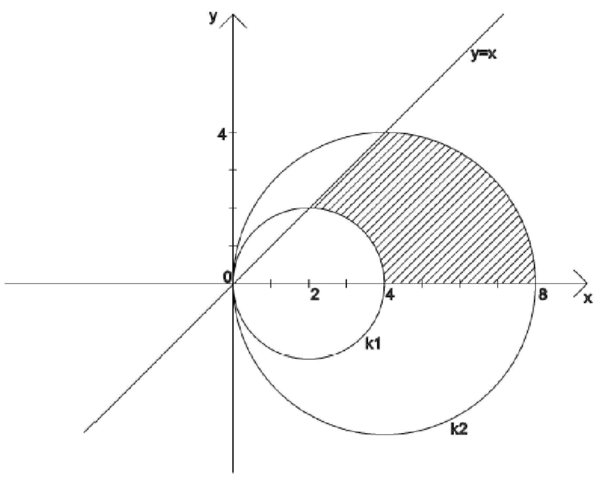
$$= \frac{14}{3}\int_0^\pi \left(1-2\cos\left(2\varphi\right)+\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(4\varphi\right)\right)\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{14}{3}\int_0^\pi \left(\frac{3}{2}-2\cos\left(2\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos\left(4\varphi\right)\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{14}{3}\left[\frac{3}{2}\varphi-\sin\left(2\varphi\right)+\frac{1}{8}\sin\left(4\varphi\right)\right]_0^\pi = \frac{14}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi = 7\pi.$$

Príklad 2.6. *Spočítajte integrál*

$$I = \iint\limits_M \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

cez množinu M, ktorá je určená podmienkami $x^2+y^2 \leq 8x$, $x^2+y^2 \geq 4x$, $y \leq x$ *a* $y \geq 0$.



Obr. 2.4: $M : x^2+y^2 \leq 8x,\, x^2+y^2 \geq 4x,\, y \leq x,\, y \geq 0$

Riešenie. Najskôr si upravíme prvú aj druhú nerovnosť doplnením na štvorec

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq 8x, & x^2+y^2 &\geq 4x, \\ x^2+y^2-8x &\leq 0, & x^2+y^2-4x &\geq 0, \\ (x-4)^2+y^2 &\leq 16, & (x-2)^2+y^2 &\geq 4. \end{aligned}$$

Ide o kruhy – jeden so stredom v bode $[4,0]$ a polomerom $r_1 = 4$, druhý so stredom v bode $[2,0]$ a polomerom $r_2 = 2$. Podmienky $y = x$ a $y = 0$ určujú priamky prechádzajúce cez $[0,0]$ a určujú nám uhol v rozmedzí 0 až $\pi/4$. Preto $0 \le \varphi \le \pi/4$. Pri určení obmedzenia pre ρ dosadíme $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do prvých dvoch podmienok. Máme

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi \le 8\rho\cos\varphi, \quad \rho \le 8\cos\varphi.$$

Rovnakým spôsobom dostaneme $4\cos\varphi \le \rho$ pri dosadení do $x^2+y^2 \ge 4x$. Obmedzenie pre ρ je tak $4\cos\varphi \le \rho \le 8\cos\varphi$. Teraz môžeme vypočítať

$$I = \iint_M \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N \frac{1}{\left(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi\right)^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/4}\int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \frac{1}{\rho^3}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

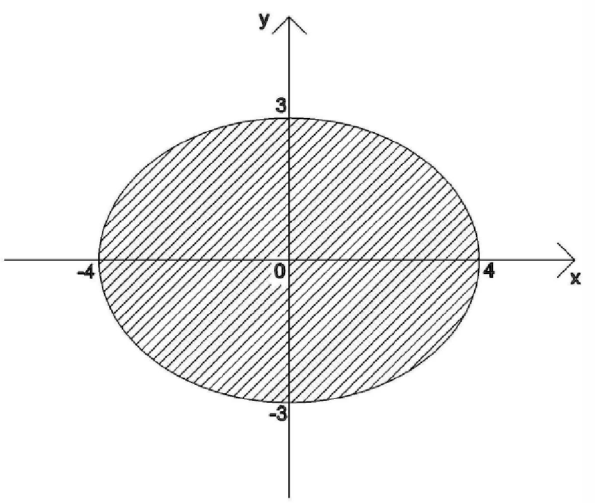
$$= \int_0^{\pi/4}\left[-\frac{1}{2\rho^2}\right]_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/4}\left(-\frac{1}{128\cos^2\varphi}+\frac{1}{32\cos^2\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{128}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{3}{128}\left[\operatorname{tg}\varphi\right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{128}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{3}{128}.$$

Príklad 2.7. *Vypočítajte integrál*

$$I = \iint_M \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde je množina $M : \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} \le 1$.



Obr. 2.5: $M : \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9} \le 1$

Riešenie. Množina M je elipsa so stredom v bode $[0,0]$. Namiesto polárnych súradníc je v tomto prípade lepšie použiť zovšeobecnené polárne súradnice, a to

$$x = a\rho\cos\varphi, \; y = b\rho\sin\varphi$$

s jakobiánom $J = ab\rho$. Podľa vzorca pre elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uvažujeme

$$x = 4\rho\cos\varphi,\, y = 3\rho\sin\varphi, \quad J = 12\rho.$$

Pri výpočte postačí, ak budeme integrovať len cez časť elipsy ležiacu v prvom kvadrante a integrál potom vynásobíme štyrmi. Obmedzenia sú $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Potom

$$I = \iint_M \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_N \left(16\rho^2\cos^2\varphi + 9\rho^2\sin^2\varphi\right)12\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 48\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \left(16\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right)\rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 48\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(16\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 12\int_0^{\pi/2} \left(16\cos^2\varphi + 9\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = 12\int_0^{\pi/2}\left(16 - 7\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 192\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi - 84\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 192\,[\varphi]_0^{\pi/2} - 84\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 192\frac{\pi}{2} - 42\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi + 42\int_0^{\pi/2}\cos(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{192}{2}\pi - 42\,[\varphi]_0^{\pi/2} + 42\left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{192}{2}\pi - \frac{42}{2}\pi = 75\pi.$$

Príklad 2.8. *Dvojný integrál*

$$I = \iint_M (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

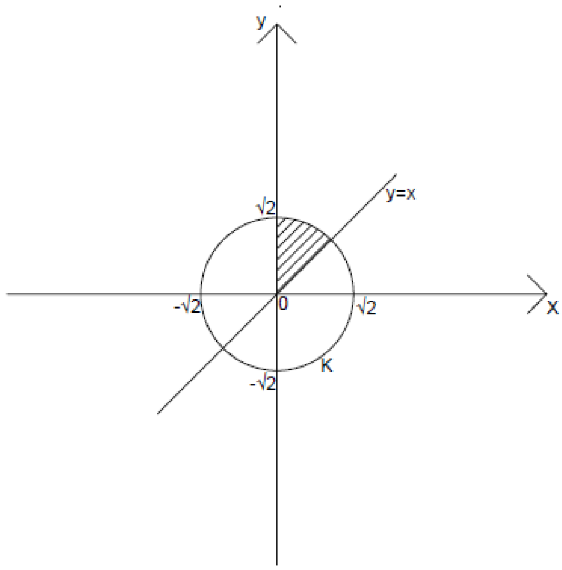
spočítajte cez množinu M danú podmienkami $x^2+y^2 \le 2$, $y \ge x$, $x \ge 0$.

Riešenie. Nerovnosť $x^2+y^2 \le 2$ určuje kruh K so stredom $[0,0]$ a polomerom $r = \sqrt{2}$. Podľa podmienok $y \ge x$ a $x \ge 0$ množinou M je kruhová výseč K (viď Obr. 2.6). Preto popíšeme množinu M v polárnych súradniciach. Keďže množinu ohraničujú priamky $y = x$ a $x = 0$, obmedzenie pre φ je $\pi/4 \le \varphi \le \pi/2$. Z Obrázku 2.6 ľahko vidíme, že vyjadrenie množiny M v polárnej súradnici ρ je dané rozsahom $0 \le \rho \le \sqrt{2}$. Môžeme teda vypočítať integrál

$$I = \iint_M (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_N (\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left([\sin\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} + [\cos\varphi]_{\pi/4}^{\pi/2}\right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}-4}{3}.$$



Obr. 2.6: $M : x^2+y^2 \leq 2,\ y \geq x,\ x \geq 0$

Príklad 2.9. *Pomocou polárnych súradníc vypočítajte dvojný integrál*

$$I = \iint\limits_M \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je daná podmienkami $(x-1)^2+y^2 \geq 1$, $y \leq 4-x$, $y \leq x$ a $x \geq 0$.

Riešenie. Rovnica $(x-1)^2+y^2 = 1$ zadáva kružnicu so stredom v bode $[1,0]$ a polomerom $r = 1$. Ostatné krivky $y = 4-x$, $y = x$, $x = 0$ sú priamky, ktoré spolu určujú množinu M. Z Obrázku 2.7 vidíme, že podmienky $y \leq x$ a $x \geq 0$ určujú uhol v rozmedzí 0 až $\pi/4$. Preto obmedzenie pre uhol φ je $0 \leq \varphi \leq \pi/4$. Dosadením polárnych súradníc $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do podmienok $(x-1)^2+y^2 \geq 1$ a $y \leq 4-x$ zistíme obmedzenie pre ρ, kde

$$\begin{aligned} x^2-2x+1+y^2 &\geq 1,\\ \rho^2\cos^2\varphi - 2\rho\cos\varphi + \rho^2\sin^2\varphi &\geq 0,\\ \rho^2 &\geq 2\rho\cos\varphi,\\ \rho &\geq 2\cos\varphi \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} y &\leq 4-x,\\ \rho\sin\varphi &\leq 4-\rho\cos\varphi,\\ \rho(\sin\varphi+\cos\varphi) &\leq 4,\\ \rho &\leq \frac{4}{\sin\varphi+\cos\varphi}. \end{aligned}$$

Celkom

$$2\cos\varphi \leq \rho \leq \frac{4}{\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

Integrál vychádza

$$I = \iint\limits_M \frac{x+y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_N \frac{\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

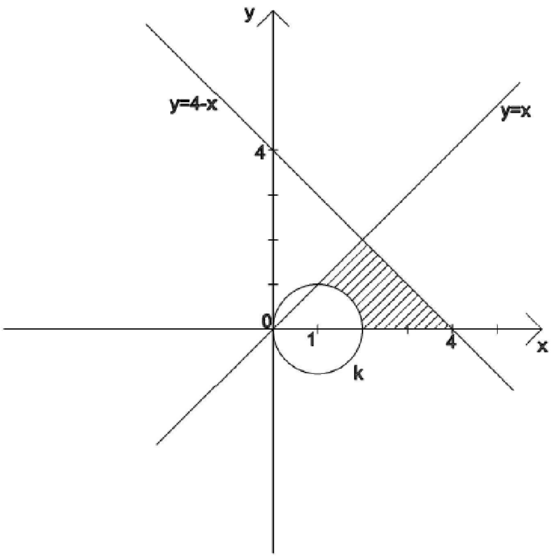
$$= \iint\limits_N (\cos\varphi + \sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} [\rho]_{2\cos\varphi}^{4/(\sin\varphi+\cos\varphi)} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi)\left(\frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi} - 2\cos\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} (\cos\varphi + \sin\varphi) \times$$

$$\times \left(\frac{4 - 2\sin\varphi\cos\varphi - 2\cos^2\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\pi/4} \left(4 - 2\sin\varphi\cos\varphi - 2\cos^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi = \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\pi/4} (3 - \sin(2\varphi) - \cos(2\varphi))\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= [3\varphi]_0^{\pi/4} + \left[\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/4} - \left[\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi - 1.$$



Obr. 2.7: $M : (x-1)^2 + y^2 \geq 1,\, y \leq 4-x,\, y \leq x,\, x \geq 0$

Príklad 2.10. *Pomocou dvojného integrálu vypočítajte obsah ohraničenej množiny M, ktorá je vymedzená krivkou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ pre isté $a > 0$.*

Riešenie. Uvedenú krivku poznáme pod názvom asteroida (viď Obr. 2.8) a prechádza bodmi $[3,0], [0,3], [-3,0], [0,-3]$. Pre výpočet integrálu použijeme transformáciu do zovšeobecnených eliptických súradníc

$$x = a\rho\cos^n\varphi,\; y = b\rho\sin^n\varphi$$

s jakobiánom $J = abn\rho\cos^{n-1}\varphi\sin^{n-1}\varphi$. V tomto prípade uvažujme $a = b = 1$ a $n = 3$. Potom

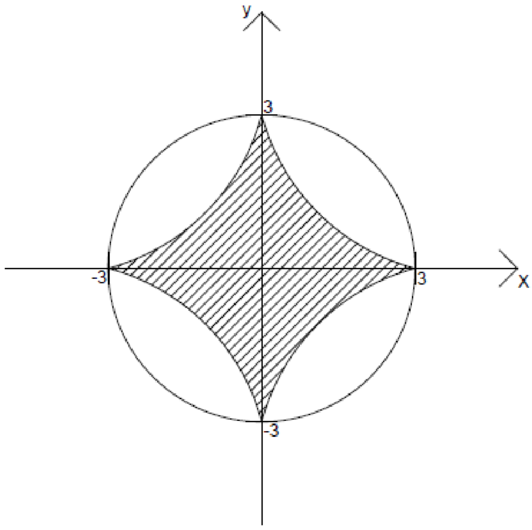
$$x = \rho\cos^3\varphi,\ y = \rho\sin^3\varphi, \quad J = 3\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Aby sme zistili obmedzenia pre ρ, dosadíme súradnice do zadania a obdržíme

$$\begin{aligned} x^{2/3} + y^{2/3} &= a^{2/3}, \\ (\rho\cos^3\varphi)^{2/3} + (\rho\sin^3\varphi)^{2/3} &= a^{2/3}, \\ \rho^{2/3} &= a^{2/3}. \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že $\rho^{2/3} = a^{2/3}$, a preto $0 \le \rho \le a$. Obmedzenie pre φ vidíme z Obrázku 2.8, a to $0 \le \varphi \le 2\pi$. Počítame integrál

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_N 3\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^a 3\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= 3\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^a \cdot 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 6a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left|\sin^2(2\varphi) = 4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right| = 6a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(2\varphi)}{4}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2}a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \frac{3}{2}a^2\left(\left[\frac{1}{2}\varphi\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin(4\varphi)}{8}\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{3}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}a^2\pi. \end{aligned}$$



Obr. 2.8: $M : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

Kapitola 3

Transformácie trojných integrálov

Táto kapitola sa zaoberá transformáciami trojného integrálu. Pre trojný itegrál platia podobné úvahy ako pre dvojný, rozdiel je len v priestore, v ktorom transformácie prebiehajú. Podobne ako pri dvojných integráloch sa pre výpočet používa Fubiniho veta – viď [4, strana 204], ktorá prevádza trojný integrál na dva do seba vnorené integrály, a to jeden jednorozmerný a jeden dvojný. Ďalej pomocou už spomínanej Fubiniho vety pre dvojné integrály môžeme trojný integrál napísať ako trojnásobný integrál – ako tri po sebe idúce jednorozmerné integrály. Často je však najskôr potrebné použiť transformáciu. Podobne ako v predchádzajúcej kapitole sformulujeme základnú vetu transformácie trojného integrálu, ukážeme niekoľko typov transformácii a ich použitie v príkladoch.

3.1 Základná veta o transformáciách trojných integrálov

V Kapitole 1 ako Definícia 2 je uvedená definícia regulárneho zobrazenia, ktorá je dôležitá pri nasledujúcej vete.

Veta 3.1. *Majme zobrazenie $F:\Omega\to\mathbb{R}^3$, ktoré je prosté na otvorenej množine Ω. Nech $N\subseteq\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ a $M=F(N)$ sú uzatvorené a merateľné. Nech obmedzená a uzatvorená podmožina N priestoru uvw je vzájomne a jednoznačne zobrazená na množinu M priestoru xyz pomocou spojito diferencovateľných funkcií $x=h_1(u,v,w)$, $y=h_2(u,v,w)$, $z=h_3(u,v,w)$ a nech jakobián*

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1 & \frac{\partial}{\partial w}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2 & \frac{\partial}{\partial w}h_2 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_3 & \frac{\partial}{\partial v}h_3 & \frac{\partial}{\partial w}h_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

pre každé $[u,v,w]\in N$. Ak funkcia f je spojitá na M, potom platí vzťah

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint_N f\left(h_1(u,v,w),\,h_2(u,v,w),\,h_3(u,v,w)\right)|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

Dôkaz. Vyplýva z Viet 1.1 a 1.2. □

3.2 Typy transformácií trojných integrálov

Medzi často používané transformácie patria nasledujúce:

- **Transformácia do valcových súradníc** alebo inak nazývaných cylindrických súradníc, kde zobrazenie F každému bodu $[\rho, \varphi, z]$ priraďuje bod $[x, y, z]$ podľa vzťahov

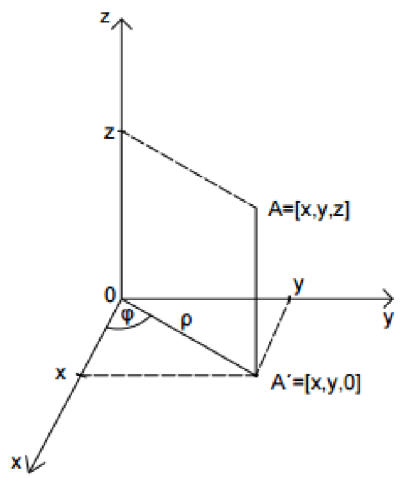
$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde namiesto u, v a w sú „nové" premenné $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $z \in \mathbb{R}$. Pri použití týchto súradníc polohu bodu $A = [x, y, z]$ (viď Obr. 3.1) zadávame tak, že určíme jeho kolmý priemet $A' = [x, y, 0]$ do roviny xy. Potom v rovine xy určíme ρ ako vzdialenosť od bodu $[0, 0]$ po bod A' a uhol φ, ktorý zviera spojnica bodov $[0, 0]$ a A' s kladnou poloosou x. Nakoniec z zadáva dĺžku úsečky AA'. Pre jakobián platí

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} h_1 & \frac{\partial}{\partial \varphi} h_1 & \frac{\partial}{\partial z} h_1 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} h_2 & \frac{\partial}{\partial \varphi} h_2 & \frac{\partial}{\partial z} h_2 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} h_3 & \frac{\partial}{\partial \varphi} h_3 & \frac{\partial}{\partial z} h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \rho \left(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right) = \rho,$$

a teda dostávame

$$\iiint_M f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_N f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z.$$



Obr. 3.1: Valcové súradnice

Poznámka 3.2. *Transformáciu do valcových súradníc spravidla používame, ak teleso, cez ktoré integrujeme, je časťou valca.*

- **Transformácia do zovšeobecnených valcových súradníc** je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos\varphi, \\ y &= b\rho\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $z \in \mathbb{R}$ a $a > 0$, $b > 0$ sú konštanty. Jakobián je rovný

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}h_1 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_1 & \frac{\partial}{\partial z}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_2 & \frac{\partial}{\partial z}h_2 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_3 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_3 & \frac{\partial}{\partial z}h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= ab\rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = ab\rho,$$

a teda dostávame

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_N f\left(a\rho\cos\varphi,\, b\rho\sin\varphi,\, z\right) ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z.$$

- **Transformácia do sférických súradníc**, kde zobrazenie F každému bodu $[\rho, \varphi, \vartheta]$ priraďuje bod $[x, y, z]$ podľa rovníc

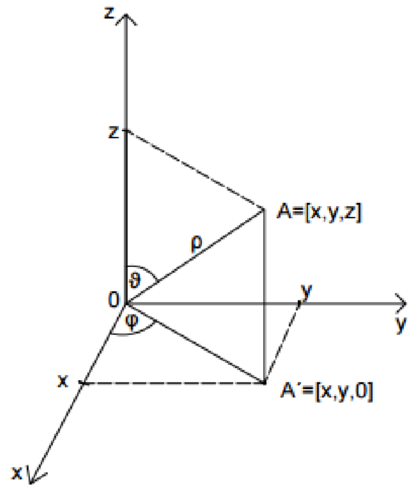
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= \rho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= \rho\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde namiesto u, v a w sú nové premenné $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$. Pri použití súradníc najskôr určíme kolmý priemet $A' = [x, y, 0]$ do roviny xy bodu $A = [x, y, z]$ (viď Obr. 3.2). Potom v rovine xy určíme uhol φ, ktorý zviera spojnica bodov $[0, 0]$ a A' s kladnou poloosou x. Ďalej ρ zadáva vzdialenosť vždy od bodu $[0, 0, 0]$ po bod A. Nakoniec určíme uhol ϑ, ktorý zviera spojnica bodov $[0, 0, 0]$ a A s kladnou poloosou z. Pre jakobián platí

$$J(\rho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}h_1 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_1 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_2 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}h_2 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_3 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_3 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\rho\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$
$$= -\rho^2\sin^3\vartheta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) - \rho^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) =$$
$$= -\rho^2\sin\vartheta\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right) = -\rho^2\sin\vartheta.$$

Absolútna hodnota jakobiánu je $|J| = \rho^2\sin\vartheta$, a teda dostávame

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint_N f\left(\rho\cos\varphi\sin\vartheta,\, \rho\sin\varphi\sin\vartheta,\, \rho\cos\vartheta\right)\rho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta.$$



Obr. 3.2: Sférické súradnice

Poznámka 3.3. *Transformáciu do sférických súradníc spravidla používame, ak hranica telesa, cez ktoré integrujeme, je časťami guľových ploch.*

Poznámka 3.4. *Niekedy sa transformácia do sférických súradníc udáva rovnicami*

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= \rho\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= \rho\sin\vartheta. \end{aligned}$$

- **Transformácia do zovšeobecnených sférických súradníc** je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= b\rho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= c\rho\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde $\rho \geq 0$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$ a $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ sú konštanty. Jakobián je rovný

$$J(\rho,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}h_1 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_1 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_2 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_2 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}h_2 \\ \frac{\partial}{\partial\rho}h_3 & \frac{\partial}{\partial\varphi}h_3 & \frac{\partial}{\partial\vartheta}h_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos\varphi\sin\vartheta & -a\rho\sin\varphi\sin\vartheta & a\rho\cos\varphi\cos\vartheta \\ b\sin\varphi\sin\vartheta & b\rho\cos\varphi\sin\vartheta & b\rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ c\cos\vartheta & 0 & -c\rho\sin\vartheta \end{vmatrix} = \cdots = -abc\rho^2\sin\vartheta.$$

Absolútna hodnota jakobiánu je $|J| = abc\rho^2\sin\vartheta$, a teda dostávame

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint_N f\left(a\rho\cos\varphi\sin\vartheta, b\rho\sin\varphi\sin\vartheta, c\rho\cos\vartheta\right) abc\rho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Poznámka 3.5. *Transformáciu do zovšeobecnených sférických súradníc spravidla používame, ak telesá, cez ktoré integrujeme, sú časti elipsoidu.*

- **Posunutie** alebo inak nazývané translácia je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= u + b_1, \\ y &= v + b_2, \\ z &= w + b_3, \end{aligned}$$

kde b_1, b_2, b_3 sú konštanty. Pre jakobián platí

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1 & \frac{\partial}{\partial w}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2 & \frac{\partial}{\partial w}h_2 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_3 & \frac{\partial}{\partial v}h_3 & \frac{\partial}{\partial w}h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- **Dilatácia** je daná rovnicami

$$\begin{aligned} x &= b_1 u, \\ y &= b_2 v, \\ z &= b_3 w, \end{aligned}$$

kde b_1, b_2, b_3 sú nenulové konštanty. Jakobián je

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}h_1 & \frac{\partial}{\partial v}h_1 & \frac{\partial}{\partial w}h_1 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_2 & \frac{\partial}{\partial v}h_2 & \frac{\partial}{\partial w}h_2 \\ \frac{\partial}{\partial u}h_3 & \frac{\partial}{\partial v}h_3 & \frac{\partial}{\partial w}h_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_1 b_2 b_3.$$

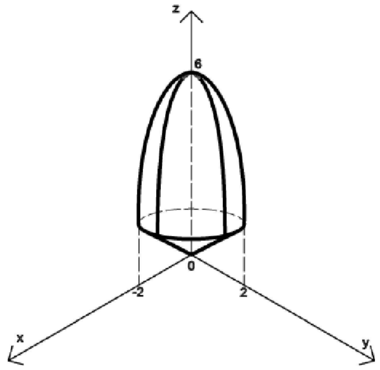
3.3 Riešené príklady

Príklad 3.6. *Spočítajte integrál*

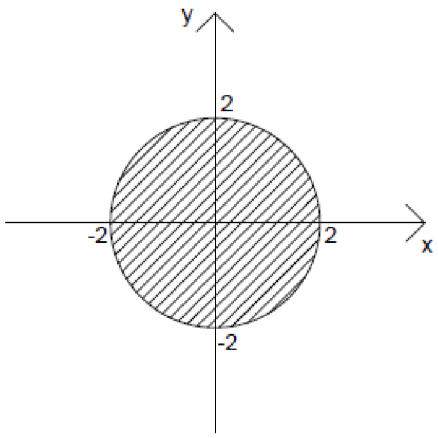
$$I = \iiint_M z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina M je určená nerovnosťami $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6-(x^2+y^2)$.

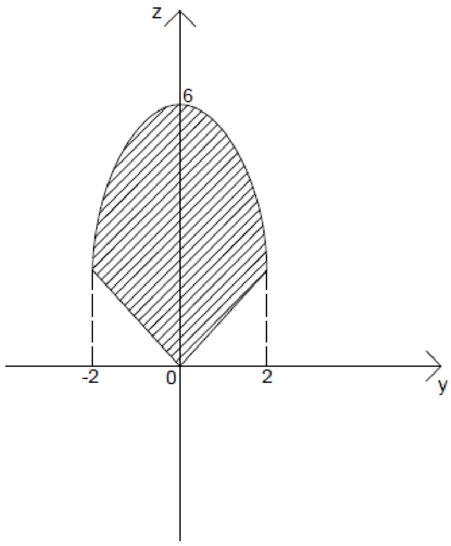
Riešenie. Množina M je zdola ohraničená (na osi z) kužeľom $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a zhora rotačným paraboloidom $z = 6-(x^2+y^2)$ (viď Obr. 3.3). Najskôr musíme zistiť, kde presne sa kužeľ s paraboloidom pretnú. Preto riešime rovnicu $\sqrt{x^2+y^2} = 6-(x^2+y^2)$. Máme rovnicu tvaru $\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2-6=0$, kde si zavedieme substitúciu $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Potom dostaneme $z^2+z-6=0$ a $(z+3)(z-2)=0$. Vyhovuje len jedno riešenie, a to $z=2$. Teda pre $z=2$ sa kužeľ s paraboloidom pretnú. Použijeme transformáciu do valcových súradníc pri výpočte integrálu. Podľa Obrázku 3.4 vidíme, že obmedzenie pre ρ je $0 \le \rho \le 2$ a pre φ je $0 \le \varphi \le 2\pi$. Dosadením rovníc $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ do podmienok dostaneme obmedzenie pre z, a to $\rho \le z \le 6-\rho^2$.



Obr. 3.3: $M : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6-(x^2+y^2)$



Obr. 3.4: Súradnicové osi x a y



Obr. 3.5: Súradnicové osi y a z

Môžeme počítať

$$I = \iiint\limits_M z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_N z\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2\int\limits_\rho^{6-\rho^2} z\rho^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_\rho^{6-\rho^2}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \left(\frac{(6-\rho^2)^2}{2}-\frac{\rho^2}{2}\right)\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \left(18-\frac{13}{2}\rho^2+\frac{1}{2}\rho^4\right)\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

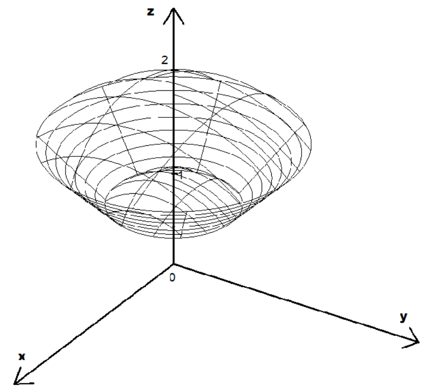
$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^2 \left(18\rho^2-\frac{13}{2}\rho^4+\frac{1}{2}\rho^6\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{18}{3}\rho^3-\frac{13}{10}\rho^5+\frac{1}{14}\rho^7\right]_0^2\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{544}{35}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{544}{35}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1088}{35}\pi.$$

Príklad 3.7. *Vypočítajte integrál*

$$I = \iiint_M \left(x^2+y^2+z^2\right)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z,$$

kde množina M je daná podmienkami $x^2+y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$.

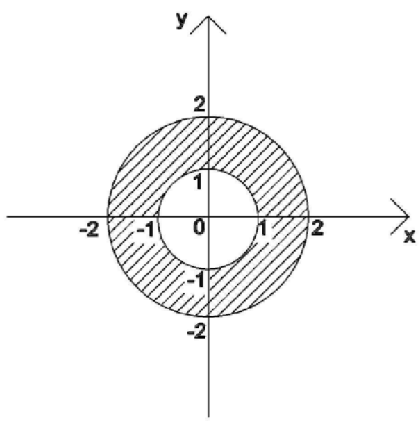


Obr. 3.6: $M: x^2+y^2 \leq z^2$, $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$

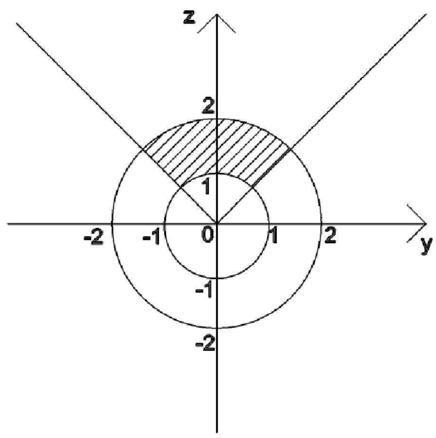
Riešenie. Z Obrázku 3.6 vidíme, že množina M je ohraničená kužeľom $z = \sqrt{x^2+y^2}$, zdola a zhora je ohraničená dvomi guľovými plochami $x^2+y^2+z^2 = 1$ a $x^2+y^2+z^2 = 4$. Použijeme transformáciu do sférických súradníc danú rovnicami

$$x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = \rho\cos\vartheta$$

s $|J| = \rho^2\sin\vartheta$. Obmedzenia pre ρ a φ ľahko určíme z Obrázku 3.7. Všetky polpriamky vychádzajúce z bodu $[0,0]$ zvierajú s osou x uhol 0 až 2π, a preto $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Množinu M pretínajú v rovnakých vzdialenostiach, tj. $1 \leq \rho \leq 2$. Nakoniec v Obrázku 3.8 polpriamky vychádzajúce z bodu $[0,0]$ zvierajú s osou z uhol 0 až $\pi/4$, tj. $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$.



Obr. 3.7: Súradnicové osi x a y



Obr. 3.8: Súradnicové osi y a z

Teraz už môžeme počítať integrál

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_M \left(x^2+y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\
&= \iiint\limits_N \left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+\rho^2\cos^2\vartheta\right)\rho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned}
$$

Môžeme zo zátvorky vyňať ρ^2. Potom využitím

$$\cos^2\varphi\sin^2\vartheta+\sin^2\varphi\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta=\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\vartheta=1$$

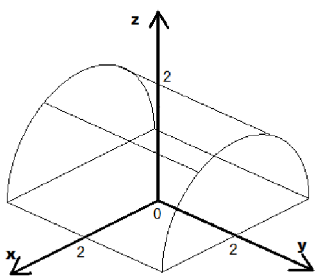
obdržíme

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{2}\int\limits_0^{\pi/4}\rho^4\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{2}\rho^4\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/4}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{2}\rho^4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2\int\limits_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}\varphi = \\
&= \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{31}{5}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{31}{5}-\frac{31}{5\sqrt{2}}\right)2\pi = \left(\frac{62-31\sqrt{2}}{5}\right)\pi.
\end{aligned}
$$

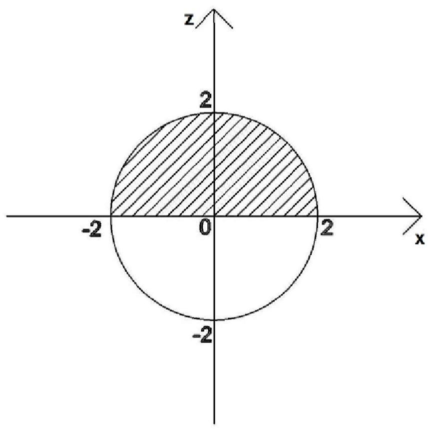
Príklad 3.8. *Vypočítajte integrál*

$$I = \iiint\limits_M 3x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina M je daná nerovnosťami $-2\le y\le 2$, $x^2+z^2\le 4$, $z\ge 0$.



Obr. 3.9: $M: -2\le y\le 2,\ x^2+z^2\le 4,\ z\ge 0$



Obr. 3.10: Súradnicové osi x a z

Riešenie. Všetky nerovnosti určujú spolu polovicu valca, ktorého os splýva s osou y (viď Obr. 3.9). Nerovnosť $-2\le y\le 2$ definuje dĺžku valca na osi y. Použijeme transformáciu do valcových súradníc, ale využijeme tvar $x = \rho\cos\varphi$, $y = y$ a $z = \rho\sin\varphi$. Jakobián bude rovný ρ. Obmedzenie pre y poznáme zo zadania a obmedzenia pre ρ a φ určíme z Obrázku 3.10. Teda máme množinu N, kde

$$0 \le \rho \le 2, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad -2 \le y \le 2.$$

Integrál potom vychádza

$$I = \iiint_M 3x^2y^2z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_N 3\rho^2\cos^2\varphi\, y^2\rho\sin\varphi\,\rho\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 3\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2}\rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = 3\left(\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\right)\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

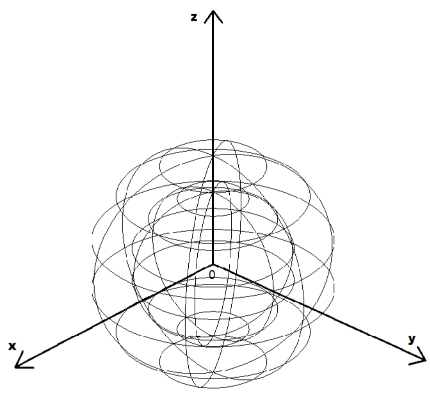
$$= \frac{512}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \left|\begin{array}{l} t = \cos\varphi \\ \mathrm{d}t = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ \pi \to -1, 0 \to 1 \end{array}\right| = -\frac{512}{5}\int_1^{-1} t^2\,\mathrm{d}t = -\frac{512}{5}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{-1} =$$

$$= -\frac{512}{5}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{512}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1024}{15}.$$

Príklad 3.9. *Spočítajte integrál*

$$I = \iiint_M \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde je množina $M : 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$.



Obr. 3.11: $M : 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9$

Riešenie. Rovnice $x^2+y^2+z^2 = 4$ a $x^2+y^2+z^2 = 9$ sú obe guľové plochy so stredom v bode $[0,0,0]$ a polomermi $r_1 = 2$ a $r_2 = 3$. Kedže množina M je ohraničená dvomi guľovými plochami, viď Obr. 3.12 a Obr. 3.13, použijeme transformáciu do sférických súradníc, kde množina N má súradnice

$$2 \le \rho \le 3, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \vartheta \le \pi.$$

Dostávame integrál

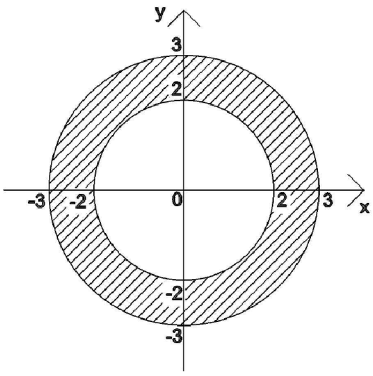
$$I = \iiint\limits_M \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint\limits_N \frac{\rho^2 \sin\vartheta}{\left(\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta\right)^3}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Môžeme upravovať

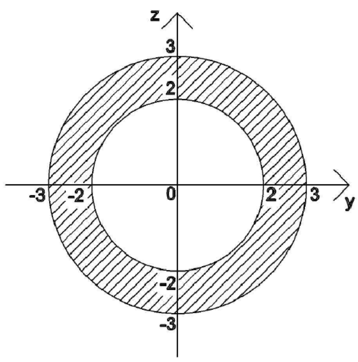
$$\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \rho^2\cos^2\vartheta =$$
$$= \rho^2(\cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) =$$
$$= \rho^2\left(\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta\right) = \rho^2$$

a obdržíme

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \frac{\rho^2\sin\vartheta}{\rho^6}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \frac{1}{\rho^4}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= [-\cos\vartheta]_0^{\pi}\cdot[\varphi]_0^{2\pi}\cdot\left[-\frac{1}{3\rho^3}\right]_2^3 = 2\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{81}+\frac{1}{24}\right) = \frac{19}{162}\pi.$$



Obr. 3.12: Súradnicové osi x a y



Obr. 3.13: Súradnicové osi y a z

Príklad 3.10. *Vypočítajte integrál*

$$I = \iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

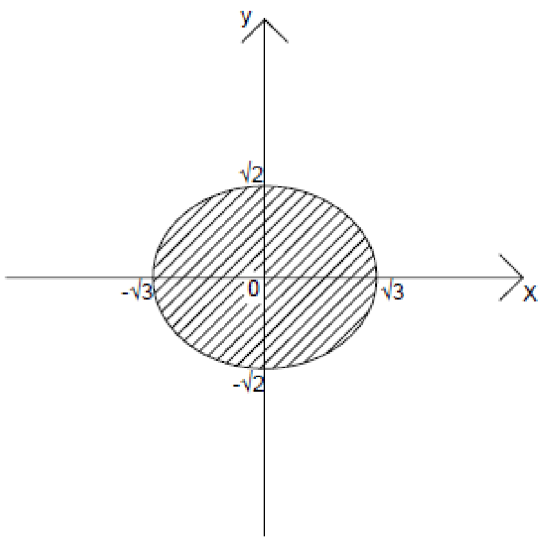
teda objem telesa M, kde množina M je ohraničená plochami $(z-2)^2 = x^2/3 + y^2/2$, $z = 0$, $z = 2$.

Riešenie. Množina M je časťou eliptického kužeľa. Pri takejto množine použijeme transformáciu do zovšeobecnených valcových súradníc. Zvolíme za $a = \sqrt{3}$ a $b = \sqrt{2}$. Potom súradnice sú

$$x = \sqrt{3}\rho\cos\varphi,\ y = \sqrt{2}\rho\sin\varphi,\ z = z$$

a jakobián je $J = \sqrt{6}\rho$. Obmedzenie pre z je $0 \leq z \leq 2$. Z Obrázku 3.14 vidíme, že obmedzenie pre φ je $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Dosadením transformačných súradníc do $(z-2)^2 = x^2/3 + y^2/2$ dostaneme $(z-2)^2 = \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = \rho^2$. Potom $0 \leq \rho \leq z-2$. Môžeme počítať integrál

$$I = \iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_N \sqrt{6}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{z-2} \sqrt{6}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{\sqrt{6}\rho^2}{2}\right]_0^{z-2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (z-2)^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(z-2)^3}{3}\right]_0^2 \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{8}{3}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{6}}{3}\pi.$$



Obr. 3.14: $x^2/3 + y^2/2$

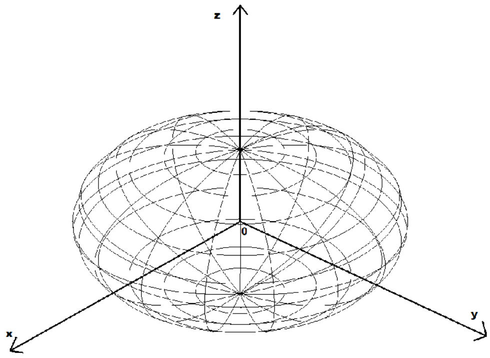
Príklad 3.11. *Vypočítajte objem telesa M, kde je* $M : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$.

Riešenie. Podmienku $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$ upravíme na tvar $x^2/4 + y^2/4 + z^2 \leq 1$. Množinou M je teda elipsoid s poloosami $a = 2$, $b = 2$ a $c = 1$. Ak je integračným oborom elipsoid, dá sa použiť transformácia do zovšeobecnených sférických súradníc, ktoré sú v tomto prípade tvaru

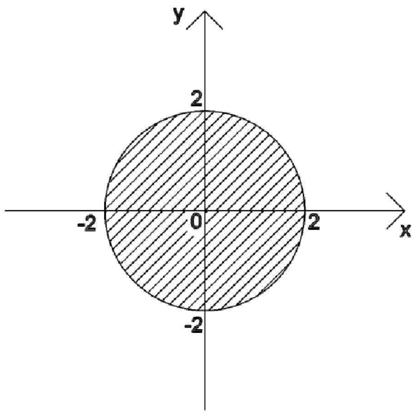
$$x = 2\rho\cos\varphi\sin\vartheta,\; y = 2\rho\sin\varphi\sin\vartheta,\; z = \rho\cos\vartheta$$

s $|J| = 4\rho^2\sin\vartheta$. Podľa Obrázkov 3.16 a 3.17 môžeme vidieť, že obmedzenia pre ρ, φ a ϑ sa jednoducho určia, a to

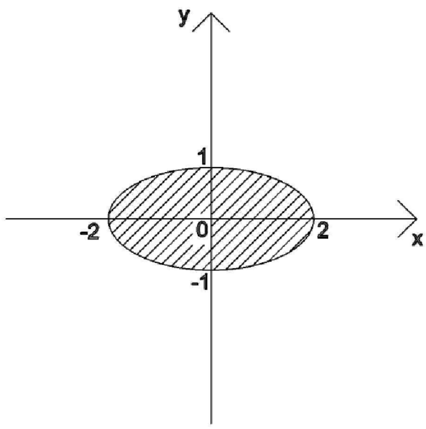
$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi.$$



Obr. 3.15: $M : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$



Obr. 3.16: Súradnicové osi x a y



Obr. 3.17: Súradnicové osi y a z

Dostávame

$$I = \iiint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_N 4\rho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} 4\rho^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\rho^3\right]_0^1 \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\rho^3 \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{16}{3}\pi.$$

Záver

Táto bakalárska práca ucelene pojednáva o transformáciách viacrozmerných integrálov. Prácu sme rozdelili do troch kapitol, v ktorých sme sa postupne venovali transformáciám n-rozmerných integrálov pre $n > 3$, dvojným integrálom a nakoniec trojným integrálom. V každej kapitole sme uviedli základné vety o substitúciách, popísali rôzne typy substitúcií a túto teóriu sme doplnili pôvodnými riešenými príkladmi. Navyše v prvej kapitole sme prezentovali dôkaz viet o transformáciách n-rozmerných integrálov.

Zamerali sme sa na transformácie z dôvodu ukázať ich dôležitosť a hlavne praktickosť. Riešenie viacrozmerných integrálov len pomocou Fubiniho vety môže byť niekedy veľmi náročné a zdĺhavé, ak množina, cez ktorú integrujeme, je zadaná zložitými funkciami. Vďaka transformáciám sme schopní výpočet oveľa zjednodušiť tým, že zmeníme integračný obor aj za cenu, že integrand sa niekedy skomplikuje.

Ukázali sme tiež príklady, kde využívame transformácie na výpočet obsahov a objemov. Môžeme teda vidieť, že integrály samy o sebe majú veľkú využiteľnosť v rôznych aplikáciách.

Zoznam použitej literatúry

[1] DANĚČEK, Josef; DLOUHÝ Oldřich a Oto PŘIBYL. *DVOJNÝ a TROJNÝ INTEGRÁL* [online]. VUT v Brně, 2004 [cit. 2017-04-17]. Dostupné z: http://lences.cz/domains/lences.cz/skola/subory/Skripta/BA02-Matematika%20II/M01-Dvojny%20a%20trojny%20integral.pdf

[2] DEMIDOVIČ, Boris Pavlovič. *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003. ISBN 80-720-0587-1.

[3] JARNÍK, Vojtěch. *Integrální počet (II)*. 2. vyd. Praha: Academia, 1976.

[4] JIRÁSEK, František; VACEK Milan a Stanislav ČIPERA. *Sbírka řešených příkladů z matematiky*. Praha: STNL, 1989. ISBN 80-030-0187-0.

[5] KALAS, Josef a Jaromír KUBEN. *Integrální počet funkcí více proměnných: Funkce více proměnných*. Brno: Masarykova univerzita, 2009. ISBN 978-80-210-4975-8.

[6] KLAŠKA, Jiří. *Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných* [online]. VUT v Brně, 2009 [cit. 2017-03-28]. Dostupné z: mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1021

[7] MAŘÍK, Robert. Polární souřadnice [online]. 2007–2012 [cit. 2017-04-17]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/in-mat-web/in-mat-webse21.html

[8] MOJSEJ, Ivan. *Metrický priestor* [online]. Košice, 2013 [cit. 2017-04-20]. Dostupné z: https://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/eMAN3b/MetrickyPriestor.pdf

[9] PLCH, Roman; ŠARMANOVÁ Petra a Petr SOJKA. *Integrální počet funkcí více proměnných: Interaktivní sbírka příkladů a testových otázek* [online]. 2012 [cit. 2017-04-17]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~plch/main/maple/sbirka/f.pdf

[10] ŘEHÁK, Pavel. *Pár informací o integrálním počtu funkcí více proměnných* [online]. Brno, 2016 [cit. 2017-04-17]. Dostupné z: http://users.math.cas.cz/~rehak/soubory/int_p_n.pdf

[11] SIKORSKI, Roman. *Diferenciální a integrální počet: Funkce více proměnných*. Praha: Academia, 1973.

[12] ŠKRÁŠEK, Josef. *Základy vyšší matematiky*. 4. vyd. Praha: SNTL, 1970.

[13] VODSTRČIL, Petr a Jiří BOUCHALA. *Integrální počet funkcí více proměnných* [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2017-04-17]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/integralni_pocet_interaktivni.pdf