Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity

Katedra Aplikované matematiky

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE N-TÉHO ŘÁDU S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

Bakalářská práce

Brno 2006/2007 **Libuše Míková**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně za odborného vedení prof. RNDr. Miroslava Bartuška, DrSc. Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpala, jsou uvedeny v seznamu literatury.

V Brně dne 19. května 2007

Libuše Míková

Poděkování

Na tomto místě bych velice ráda poděkovala prof. RNDr. Miroslavu Bartuškovi, DrSc za vedení bakalářské práce, za cenné rady a připomínky a za čas strávený při konzultacích.

OBSAH

ÚVOD

Tato bakalářská práce byla vypracována jako završení tříletého studia bakalářského studijního programu Aplikovaná matematika. Cílem mé bakalářské práce na téma *“obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty“* je seznámit čtenáře s metodami řešení těchto rovnic.

Tato práce poslouží studentům vysokých škol jako pomocník při studiu, opakování a prohlubování učiva této problematiky. Mým cílem bylo vytvořit jednoduchou a přehlednou příručku, do které může každý nahlédnout při svém studiu diferenciálních rovnic.

Práce je rozdělena do 4 kapitol, přičemž první kapitola Vás zavede do problému a vysvětlí základní pojmy, druhá a třetí kapitola se týká jednotlivých druhů diferenciálních rovnic a jejich metod řešení a čtvrtá je zaměřena na aplikaci a situace, při jejichž řešení se můžete s diferenciálními rovnicemi setkat ve fyzice a v ekonomii.

Jednotlivé typy a metody řešení jsou vždy na závěr jednotlivých kapitol ujasněny v příkladech, které jsem se snažila vybrat tak, aby co nejvíce vystihovaly dané téma.

1. KAPITOLA

ZÁKLADNÍ POJMY

<u>**Definice 1.1:**</u> Lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu s konstantními koeficienty rozumíme rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \qquad (1)$$

kde $n \in \{1,2,\ldots\}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$ jsou reálná čísla, které se nazývají **koeficienty** lineární diferenciální rovnice. Předpokládáme, že funkce *f(x)* je definovaná a spojitá na intervalu $I \in R$ a nazývá se **pravá strana** lineární diferenciální rovnice.

<u>**Poznámka 1.2:**</u> V naší práci budeme předpokládat, že *I* není triviální, tj. $I \neq 0$ nebo *I* není jednotková množina.

<u>**Poznámka 1.3:**</u>

a) Můžeme se setkat s obecnější diferenciální rovnicí zadanou v **implicitním tvaru**:

$$f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) = 0,$$

nebo také v **explicitním tvaru**:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right).$$

b) Název je dán skutečností, že se na levé straně rovnice vyskytuje lineární výraz pro neznámou funkci *y(x)* a pro její derivace.

c) Řád nejvyšší derivace n neznámé funkce *y(x)* v rovnici (1) nazýváme **řádem rovnice**.

d) Jestliže funkce *f(x)* je identicky nulová funkce $f(x) \equiv 0$, rovnice (1) se nazývá **homogenní** nebo též „bez pravé strany“, pokud je funkce *f(x)* nenulová $f(x) \not\equiv 0$, jde o rovnici **nehomogenní** nebo též „s pravou stranou“. Podrobné definice probereme v dalších kapitolách.

Zavedeme stručné označení pro $y(x) \in C_n(R)$:

$$L_n(x) = a_n y^n(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x)$$

Definice 1.4: Symbol L_n se nazývá **lineární diferenciální operátor *n*-tého řádu** a výraz $L_n(y(x))$ nazýváme **lineární diferenciální výraz *n*-tého řádu**.

Poznámka 1.5: Nechť $I \subset R$. Pak symbolem $C_n(I)$ označujeme n-krát spojitě diferencovatelné funkce na neprázdném intervalu I. $C_n(I)$ je lineární prostor a L je lineární zobrazení

$$L: C_n(I) \rightarrow C_0(I),$$

tj. pro $y_1(x), y_2(x) \in C_n(I)$ a $c \in R$ platí:

$$L_n(y_1(x) + y_2(x)) = L_n(y_1(x)) + L_n(y_2(x)),$$

$$L_n(cy(x)) = cL_n(y(x)).$$

Řešit lineární diferenciální rovnici znamená určit funkce, které jí identicky vyhovují v nějakém intervalu nebo oboru.

Definice 1.6:

a) **Řešením** rovnice (1) nazýváme každou n-krát spojitě derivovatelnou funkci na intervalu I, která vyhovuje dané rovnici, takže po dosazení této funkce a jejich derivací do dané rovnice dostaneme na intervalu I identickou rovnost pro všechna $x \in I$.
b) Lineární diferenciální rovnici budeme považovat za vyřešenou, budeme-li znát všechny její řešení.
c) Křivka, která znázorňuje graf některého řešení dané rovnice, nazýváme **integrální křivkou** diferenciální rovnice. Samotné řešení nazýváme také **integrálem** diferenciální rovnice.

Definice 1.7: (Počáteční podmínky a počáteční problém)

Mějme dán libovolný, ale pevně daný bod $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in I \times R^n$. Úloha určit řešení rovnice (1), která vyhovuje ***n* počátečním podmínkám**

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \qquad (2)$$

se nazývá **počáteční problém** (nebo také **Cauchyova úloha**).

<u>Definice 1.8:</u> (Druhy řešení lineární diferenciální rovnice)

a) **Obecným řešením rovnice** (1) budeme rozumět funkci závisející na n obecných parametrech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že speciální volbou $C_1, C_2, \ldots, C_n$ lze získat řešení každého počátečního problému (2).
b) **Partikulární řešení rovnice** (1) je takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

<u>Příklad 1.9:</u>

Diferenciální rovnice $4y''(x) + 4y'(x) + y = 0$, jak lze ověřit výpočtem, má partikulární řešení $y_1 = e^{-0,5x}$ a $y_2 = xe^{-0,5x}$.

<u>Věta 1.10:</u> (O existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu I. Nechť $x_0 \in I$. Potom diferenciální rovnice (1) má na intervalu I právě jedno řešení $g(x)$ splňující počáteční podmínky (2), přičemž $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ jsou libovolná pevně daná čísla.

<u>Důkaz:</u> Viz. [4], str. 21-22.

<u>Důsledek 1.11:</u>

Řešením rovnice $L_n(y(x)) = 0$ je i funkce $y(x) = 0$. Toto řešení se nazývá triviální a nebudeme jej v dalších úvahách uvažovat. Toto řešení také jako jediné vyhovuje počátečním podmínkám $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Důkaz plyne z Věty 1.10.

<u>Poznámka 1.12:</u> Rovnici (1) můžeme zapsat také v tzv. **normovaném tvaru**

$$y_n(x) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(x) - \frac{a_{n-2}}{a_n} y^{(n-2)}(x) - \ldots - \frac{a_1}{a_n} y'(x) + \frac{f(x)}{a_n}.$$

<u>Definice 1.13:</u> Funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ se nazývají **lineárně nezávislé** na intervalu I, jestliže rovnost $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_n(x) = 0$, $x \in I$ platí právě tehdy, když konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou rovny nule. Jestliže rovnost platí i pro nějakou jinou volbu konstant, pak se funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ nazývají **lineárně závislé** na intervalu I.

O funkcích $y_i(x)$ předpokládáme, že jsou třídy $C_{n-1}(I)$ na intervalu I, tj. že jsou na tomto intervalu spojité a jejich derivace je rovněž spojitá až do řádu $n-1$ včetně.

Obecné řešení rovnice (1) je tedy tvaru

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

derivováním získáme soustavu

$$\begin{gathered} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x), \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \cdots + c_n y_n'(x), \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x), \end{gathered}$$

což v maticové formě je

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{pmatrix} = W(x)C.$$

Matice W se nazývá **Wronského matice** a **Wronskián** je determinant Wronského matice, tj.:

$W[y_1, y_2 \ldots, y_n](x) := \det(W[y_1, y_2 \ldots, y_n](x))$.

Wronskián je užitečný nástroj analýzy lineární nezávislosti posloupnosti funkcí, jak ukazuje následující věta.

<u>Věta 1.14:</u> Buďte $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ řešením rovnice (1) v intervalu I a W jejich wronskián.

a) Pokud existuje $x_0 \in I$ takové, že $W(x_0) = 0$, pak jsou řešení $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ lineárně závislá a $W(x) = 0$ pro každé $x \in I$.

b) Pokud existuje $x_0 \in I$ takové, že $W(x_0) \neq 0$, pak jsou řešení $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ lineárně nezávislá a $W(x) \neq 0$ pro každé $x \in I$.

<u>Důkaz:</u>

a) Nechť pro $x_0 \in I$ platí, že $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x_0) = 0$. Potom sloupce ve Wronského determinantu $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x_0) = 0$ jsou lineárně závislé, tj. existují čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne všechny rovna nule taková, že platí

$$
\begin{aligned}
&c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = 0 \\
&c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = 0 \\
&\vdots \\
&c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0
\end{aligned}
$$

Funkce $y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ je řešením rovnice $L_n(y) = 0$, která v důsledku předešlé soustavy rovnic splňuje podmínky $y^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Podle poznámky 1.11 je $y(x) \equiv 0$, a tedy $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) = 0$ pro každé $x \in I$, což znamená, že funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou lineárně závislé.

Z lineární závislosti plyne, že tato soustava má netriviální řešení pro každé $x \in I$. Z lineární algebry plyne, že $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x) = 0$ pro každé $x \in I$.

b) Nechť $y(x)$ je libovolné a $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou řešení rovnice (1). Protože $W_{y_1, y_2, \ldots, y_n}(x_0) \neq 0$, pak libovolný vektor a speciálně vektor $\left(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)\right)^T$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci, tj. existuje $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne všechny rovny nule takové, že platí

$$
\begin{aligned}
&c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) = y(x_0) \\
&c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\
&\vdots \\
&c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0)
\end{aligned}
$$

Vezmeme řešení Z takové, že

$$
\begin{aligned}
&Z(x) = y(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) \\
&Z^{(i)}(x_0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \\
&Z(x) \equiv 0
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)
$$

Tedy každé řešení se dá vyjádřit jako lineární kombinace a z lineární algebry víme, že tyto řešení jsou lineárně nezávislé.

Poznámky 1.15: Tvrzení věty 1.14 neplatí pokud jsou funkce $y_1(x)$, $y_2(x)$…, $y_n(x)$ řešením různých diferenciálních rovnic.

Věta 1.16:

a) Jsou-li funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots ,y_k(x)$ řešením rovnice $L_n(y(x))=0$, pak také jejich lineární kombinace $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_k y_k(x)$ je řešením této rovnice.

b) Jsou-li funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ lineárně nezávislé řešení rovnice $L_n(y(x))=0$, pak jejich lineární kombinace $y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$ je obecné řešení této rovnice. Funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ se nazývají **fundamentální systém řešení** rovnice $L_n(y(x))=0$ nebo **báze lineárního prostoru všech řešení**.

c) Je-li $u(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ obecným řešením rovnice $L_n(y) = 0$ a $v = v(x)$ partikulárním řešením rovnice $L_n(y(x)) = f(x)$, pak $y(x) = u(x) + v(x)$. A naopak rozdíl dvou řešení nehomogenní rovnice je řešením homogenní rovnice.

d) Je-li $y_1(x)$ řešení rovnice $L_n(y(x)) = f_1(x)$ a $y_2(x)$ řešení rovnice $L_n(y(x)) = f_2(x)$ a jsou-li C_1 a C_2 libovolné konstanty z R, pak funkce $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ je řešením rovnice $L_n(y(x)) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$.

Důkaz:

a) Jelikož $y_1(x), y_2(x), \ldots ,y_k(x)$ jsou řešením diferenciální rovnice, platí $L_n(y_i(x))=0$, pro $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

S využitím linearity (Poznámka 1.5) dostaneme $L_n\left(\sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{k} C_i L_n\left(y_i(x)\right) = 0$.

b) Plyne z a)

c) Nechť $L_n(u(x)) = 0$, $L_n(v(x)) = f(x)$, pak vzhledem k linearitě platí

$$L_n(u(x) + v(x)) = L_n(u(x)) + L_n(v(x)).$$

d) Podobně z Poznámky 1.5 plyne

$$L_n(y(x)) = L_n(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 L_n(y_1(x)) + c_2 L_n(y_2(x)) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x).$$

2. KAPITOLA

HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

V této kapitole budeme studovat homogenní diferenciální rovnici, tj. rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{3}$$

<u>Poznámka 2.1:</u> Inspirujme se případem, kdy $n = 1$, tedy rovnicí $a_1 y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$. Tato rovnice je lineární rovnicí se separovanými proměnnými a metodou separace proměnných snadno zjistíme, že obecné řešení této rovnice je ve tvaru $Ce^{\lambda x}$, $\lambda = -\dfrac{a_0}{a_n}$, tedy λ je kořenem rovnice $a_1\lambda + a_0 = 0$.

<u>Věta 2.2:</u> Nechť $\lambda \in C$ je kořenem rovnice

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0, \tag{4}$$

pak $e^{\lambda x}$ je řešením rovnice (3).

<u>Důkaz:</u> Předpokládejme, že řešení rovnice (3) je ve tvaru

$$y(x) = e^{\lambda x}, \tag{5}$$

kde λ je třeba určit. Dosazením výrazu (5) do (3) obdržíme

$$a_n\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0, \tag{6}$$

kde $x \in R$.

Vydělíme-li tuto rovnici výrazem $e^{\lambda x}$, získáme rovnici (4) a λ je jejím kořenem.

<u>Definice 2.3:</u> Rovnici (4) nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (3).

<u>Poznámka 2.4:</u> K získání λ je třeba tuto charakteristickou rovnici vyřešit. Z lineární algebry víme, že tato rovnice (4) má celkem n komplexních kořenů včetně násobností.

2.1 METODA POSTUPU ŘEŠENÍ

Postup řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty (3) objasníme na případu $n = 2$, tedy rovnicí tvaru

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 . \tag{7}$$

Charakteristická rovnice rovnice (7) je tvaru

$$a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 .$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici a hledáme její kořeny $\lambda_{1,2}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} . \tag{8}$$

V rovnici (8) mohou nastat tři situace:

I. $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$, tedy kořeny λ_1, λ_2 jsou reálné různé.

Dosazením do (7) získáme dvě partikulární řešení

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x},$$

jejichž Wronskián

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \neq 0 ,$$

jelikož dle předpokladu $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tedy funkce $y_1(x), y_2(x)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (7) a obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} ,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty.

II. $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$, tedy kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ a λ je jeden reálný dvojnásobný kořen.

Dosazením do (7) získáme partikulární řešení

$$y_1(x) = e^{\lambda x} ,$$

ale z lineární algebry víme, že rovnice má tolik kořenů kolik je její největší mocnina, v našem případě tedy 2, předpokládejme tedy druhé řešení ve tvaru $xe^{\lambda x}$. Nyní musíme dokázat, že tyto funkce

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x} ,$$

jsou řešením rovnice (7) a zároveň, že jsou lineárně nezávislé.

Podle Leibnizovy formule je

$$L\left(xe^{\lambda x}\right)=L\left(\frac{\partial e^{\lambda x}}{\partial \lambda}\right)=\frac{\partial}{\partial \lambda}L\left(e^{\lambda x}\right)=\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[p(\lambda)e^{\lambda x}\right]=\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}\frac{\partial p(\lambda)}{\partial \lambda^{j}}\frac{\partial^{1-1}e^{\lambda x}}{\partial \lambda^{1-j}}.$$

Protože λ_0 je n-násobný kořenem charakteristické rovnice, platí

$$\left.\frac{d^{j}p(\lambda)}{d\lambda^{j}}\right|_{\lambda=\lambda_0}=0$$

pro j = 0, 1. Vychází tedy $L\left(xe^{\lambda_0 x}\right)=0$,

což je naše tvrzení, že funkce $y_2(x)=xe^{\lambda x}$ je řešením rovnice (7).

Wronskián funkcí $y_1(x)=e^{\lambda x}, y_2(x)=xe^{\lambda x}$ je

$$W=\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+\lambda)e^{\lambda x} \end{vmatrix}=e^{2\lambda x}\neq 0.$$

Tedy tyto řešení jsou lineárně nezávislé a tvoří fundamentální systém řešení. Obecné řešení rovnice (3) je tedy

$$y(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x},$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty.

III. $a_1^2-4a_2a_0<0$, tedy kořeny λ_1,λ_2 jsou komplexní, tvaru $\lambda_1=\alpha+i\beta, \lambda_2=\alpha-i\beta$.

Tedy partikulární řešení jsou tvaru

$$y_1(x)=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x), y_2(x)=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x).$$

Podle věty 1.11 jsou řešením rovnice (1) i funkce

$$y_1^*(x)=\frac{1}{2}\left(y_1(x)+y_2(x)\right), y_2^*(x)=\frac{1}{2i}\left(y_1(x)-y_2(x)\right)$$

a tedy získáme dvě partikulární řešení tvaru

$$y_1^*(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2^*(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

jejichž Wronskián je

$$W=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x-\sin\beta x\right) & e^{\alpha x}\left(\cos\beta x+\alpha\sin\beta x\right) \end{vmatrix}=e^{\alpha x}\neq 0,$$

tedy řešení tvoří fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice (3) je ve tvaru

$$y(x)=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right).$$

Věta 2.1.1: Nechť charakteristická rovnice (4) má různé kořeny $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ s násobností $r_1, r_2, \ldots, r_m$, přičemž $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.

a) Pak funkce $x^i e^{\lambda_j x}$, $i = 0,1,\ldots, r_{j-1}$; $j = 1,2,\ldots, m$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (3).

b) Jsou-li $\lambda_i = \alpha + i\beta, \lambda_j = \alpha - i\beta$ komplexní kořeny charakteristické rovnice (3), pak místo $x^i e^{\lambda_i x}, x^i e^{\lambda_j x}$ vezmeme řešení tvaru

$$x^i e^{\alpha x} \cos \beta x, x^i = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Důkaz: Viz. [4], str. 48-49.

Příklad 1: *Určete obecné řešení rovnice* $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$.

Nejprve určíme příslušnou charakteristickou rovnici

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = 0.$$

Získali jsem kubickou rovnici, jejíž kořeny zjistíme pomocí Hornerova schématu:

	1	-9	26	-24
2	1	-7	12	0
3	1	-4	0	
4	1	0		

Tedy kořeny charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4.$$

Fundamentální systém řešení dané rovnice je

$$y_1(x) = e^{2x},\ y_1(x) = e^{3x},\ y_1(x) = e^{4x}.$$

Odtud obecné řešení rovnice je tvaru

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{4x}}}$$

Příklad 2: *Určete obecné řešení rovnice* $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$$

$$D = 36 – 52 = -16,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

Partikulární řešení je tedy $y_1(x) = e^{3x}\cos 2x$, $y_2(x) = e^{3x}\sin 2x$. Tedy obecné řešení rovnice je ve tvaru

$$\underline{\underline{y(x) = e^{3x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)}}.$$

<u>Příklad 3:</u> *Řešte Cauchyův problém* $y''' - 2y'' + y' = 0$, *kde* $y(0) = 0$, $y'(x) = -1$, $y''(x) = -3$.

Charakteristická rovnice je ve tvaru

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0,$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0,$$

$$\lambda\left(\lambda - 1\right)^2 = 0.$$

Tedy kořeny jsou $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Potom partikulární řešení je $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = xe^x$

a obecné řešení je ve tvaru

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x.$$

Abychom získali konstanty C_1, C_2, C_3 využijeme počáteční podmínky.

$$y'(x) = C_1e^x + C_2e^x + C_3xe^x$$
$$y''(x) = C_1e^x + 2C_2e^x + C_3xe^x$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_2 + C_3 &= -1 \\ C_2 + 2C_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$C_1 = -1,\ C_2 = 1,\ C_3 = -2$$

Tedy obecné řešení této rovnice je ve tvaru

$$\underline{\underline{y(x) = -1 + e^x - 2xe^x}}.$$

3. KAPITOLA

NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

V této kapitole budeme studovat nehomogenní diferenciální rovnici, tj. rovnici tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \Lambda + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad x \in I \tag{9}$$

kde $f(x)$ je není identicky rovna nule na intervalu I.

<u>Věta 3.1:</u> (Princip superpozice)

Nechť v homogenní rovnici (9) funkci $f(x)$ lze rozložit na součet funkci tvaru

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \Lambda + f_k(x) \tag{10}$$

a nechť $y_i(x)$ je partikulární řešení rovnice

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \Lambda + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_i(x), \tag{11}$$

kde $i \in \{1, 2, \ldots k\}$. Pak $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \mathrm{L} + y_k(x)$ je partikulární řešení rovnice (9).

<u>Důkaz:</u> Předpokládejme, že $y_i(x)$ je řešením rovnice (11), tedy

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \Lambda + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_i(x),$$

sečtením pro $i \in \{1, 2, \ldots k\}$

$$a_n \left(\sum_{i=1}^{k} y_i(x) \right)^{(n)} + a_{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} y_i(x) \right)^{(n-1)} + \Lambda + a_1 \left(\sum_{i=1}^{k} y_i(x) \right)' + a_0 \left(\sum_{i=1}^{k} y_i(x) \right) = f(x),$$

a tedy $\sum_{i=1}^{k} y_i(x) = y(x)$ je řešením rovnice (9).

<u>Věta 3.2:</u> (Struktura obecného řešení)

Obecné řešení rovnice (9) lze psát ve tvaru

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x), \tag{12}$$

kde $y_h(x)$ je obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice příslušné k rovnici (9), tj. obecné řešení rovnice $a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \Lambda + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$ a $y_p(x)$ je libovolné partikulární řešení rovnice (9).

Důkaz: Plyne z Věty 1.17 c).

K tomu, abychom vyřešili nehomogenní diferenciální rovnici (9) existují dvě metody, kterými se budeme zabývat a to metoda variace konstant a rovnice se speciální pravou stranou *f(x)*.

3.1 METODA VARIACE KONSTANT

Obecné schéma metody variace konstanty

Mějme lineární diferenciální rovnici tvaru

$$L_n(y) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)\,. \tag{13}$$

1. krok: Určíme fundamentální systém řešení $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, tedy obecné řešení rovnice $L_n(y)=0$ a to je $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$.

2. krok: Obecné řešení lineární diferenciální rovnice hledáme ve tvaru

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + \dots + C_n(x)\, y_n(x), \tag{14}$$

kde $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ jsou zatím neznámé funkce proměnné $x \in I$.

3. krok: Musíme stanovit *n-1* podmínek pro tyto funkce, abychom je mohli následně vypočítat. Ty určíme derivací rovnice (14) a opět dosazením do rovnice (13). Tedy

$$\begin{aligned} y'(x) = {} & C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \dots + C_n'(x) y_2(x) + \\ & + C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + \dots + C_n(x) y_n'(x)\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Volíme-li

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0,$$

pak získáme první podmínku

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \dots + C_n y_n'(x)\,.$$

Tento postup opakujeme až do $y^{(n)}(x)$ derivace

$$\begin{aligned} y^{(n)}(x) = {} & C_1'(x) y_1^{(n)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n)}(x) + \\ & + C_1(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2(x) y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n(x) y_n^{(n-1)}(x)\,, \end{aligned} \tag{16}$$

kde obdržíme *n-1* podmínku

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = 0\,.$$

Zbývá nám určit poslední n-tou podmínku a to dosazením $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ do (13). Obdržíme

$$\begin{aligned}
&a_n\left(C_1'(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n)}(x) + C_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n(x)y_n^{(n-1)}\right) + \\
&\vdots \\
&a_1\left(C_1'(x)y_1(x) + \cdots + C_n'(x)y_2(x) + C_1(x)y_1'(x) + \cdots + C_n(x)y_n'(x)\right) + \\
&a_0\left(C_1(x)y_1(x) + \cdots + C_n(x)y_n(x)\right) = f(x)
\end{aligned} \tag{17}$$

Protože funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ jsou řešením příslušné homogenní diferenciální rovnice, je součet všech členů rovnice obsahující $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ roven nule. Tedy z rovnice (17) získáme

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_n}\,. \tag{18}$$

4. krok: Sestavíme pomocí námi stanovených podmínek a rovnice (18) soustavu n rovnic o n neznámých $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$.

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \cdots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\
&C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \cdots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\
&\vdots \\
&C_1'(x)y_1^{(n)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n)}(x) = \frac{f(x)}{a_n}\,.
\end{aligned}$$

Determinant této soustavy je Wronského determinant a tento determinant je různý od nuly.

5. krok: Tuto soustavu vyřešíme a integrací $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$ získáme vyjádření pro hledané funkce $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$.

6. krok: Dosadíme zpětně tyto funkce do rovnice (14) a obdržíme obecné řešení rovnice (9).

Poznámka 3.1.1: Nesmíme opomenout na integrační konstantu při integraci. Pokud bychom ji vynechali, pak bychom po dosazení do rovnice (14) obdrželi pouze jedno partikulární řešení rovnice (9).

Příklad 1: *Určete řešení lineární diferenciální rovnice* $y'' - 2y' = e^{3x} \sin e^{x}$.

Charakteristická rovnice přidružené homogenní je

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Tedy obecné řešení přidružené homogenní rovnice je ve tvaru

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}$$

Použijeme-li k určení partikulárního řešení zadané nehomogenní rovnice metody variace konstant, hledáme obecné řešení ve tvaru

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

a funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ určíme z následující soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x) e^{2x} &= 0 \Rightarrow C_1'(x) = -C_2'(x) e^{2x} \\ 0 + 2C_2'(x) e^{2x} &= e^{3x} \sin e^{x} \end{aligned}$$

odtud tedy

$$C_2(x) = \int \frac{1}{2} e^{x} \sin e^{x} dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cos e^{x} + C_1}}$$

a pro $C_1(x)$ platí

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{2} e^{3x} \sin e^{x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{2x} \cos e^{x} - e^{x} \sin e^{x} - \cos e^{x} + C_2}}$$

Obecné řešení rovnice je ve tvaru $\underline{\underline{y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \cos e^{x} \left(\frac{e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \right) - e^{x} \sin e^{x}}}$.

Tato univerzální metoda je však velmi náročná na početní operace. Pokud máme diferenciální rovnici takovou, že funkce *f(x)* má speciální tvar můžeme pro řešení této rovnice použít jinou metodu, která je početně jednodušší a tou je metoda speciální pravé strany.

3.2 METODA SPECIÁLNÍ PRAVÉ STRANY

Na rozdíl od metody variace konstant je tato metoda použitelná pouze pro rovnice se speciální pravou stranou tvaru

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{19}$$

kde $P_n(x), Q_m(x)$ jsou polynomy stupně *n, m* a číslo $\alpha + i\beta$ je tzv. **kritické číslo** pravé strany.

__Poznámka 3.2.1:__ Podle Věty 3.2 je obecné řešení rovnice se speciální pravou stranou (19) opět ve tvaru

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

kde $y_h(x)$ je obecné řešení homogenní rovnice a $y_p(x)$ je partikulární řešení nehomogenní rovnice, jehož tvar odhadneme na základě tvaru pravé strany diferenciální rovnice (9).

__Věta 3.2.2:__ **(o odhadu řešení pro speciální pravou stranu)**

Máme-li lineární diferenciální rovnici *n*-tého řádu s konstantními koeficienty tvaru

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \Lambda + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{20}$$

a nechť její pravá strana je ve tvaru

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

kde $P_n(x), Q_m(x)$ jsou polynomy stupně *n, m*. Pak existuje partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right),$$

kde *A(x)* a *B(x)* jsou polynomy stupně $s = max\ \{st(P_n(x), st(Q_m(x)\}$ a *k* je násobnost kritického čísla $\alpha + i\beta$ jako kořene charakteristické rovnice dané diferenciální rovnice (9).

__Důkaz:__ Viz. [4], str. 52.

__Nyní si probereme jednotlivé speciální typy pravé strany:__

I. *f(x)* = $P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně *n*

V takovém případě je tedy kritické číslo $\alpha + i\beta = 0$

a) je-li 0 k-násobným kořenem charakteristické rovnice a *k* = {1, 2, 3 …, *n*}, pak výše uvedená rovnice (20) má partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = x^k A(x),$$

kde *A(x)* je polynom stupně *n* s neznámými koeficienty a číslo *k* je násobnost kořene.

b) není-li 0 kořenem charakteristické rovnice, pak výše uvedená rovnice (20) má partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = A(x),$$

kde *A(x)* je polynom stupně n s neznámými koeficienty.

II. *f(x)* = $P_n(x)e^{\alpha x}$, kde $P_n(x)$ je polynom stupně *n* a $\alpha \in R$ je kritické číslo;

a) je-li *α k*-násobným kořenem charakteristické rovnice a *k* = {1, 2, 3 …, n}, pak výše uvedená rovnice (20) má partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} A(x),$$

kde *A(x)* je polynom stupně *n* s neznámými koeficienty a *k* je násobnost kořene.

b) není-li *α* kořenem charakteristické rovnice, pak výše uvedená rovnice (20) má partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = e^{\alpha x} A(x),$$

kde *A(x)* je polynom stupně *n* s neznámými koeficienty.

III. *f(x)* = $e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)$, kde $P_n(x), Q_m(x)$ jsou polynomy stupně *n, m,* a $\alpha + i\beta$ je kritické číslo, přitom *α, β* ∈ *R.*

a) je-li $\alpha + i\beta$ *k*-násobný kořen charakteristické rovnice a *k* = {1, 2, 3 …, n}, pak výše uvedená rovnice (20) má partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right),$$

kde *A(x)* a *B(x)* jsou polynomy stupně *s* = *max* $\{st(P_n(x), st(Q_m(x)\}$ s neznámými koeficienty a *k* je násobnost kritického čísla $\alpha + i\beta$ jako kořene charakteristické rovnice dané diferenciální rovnice, přitom $st(P_n(x))$ značí stupně polynomu $P_n(x)$.

b) není-li $\alpha + i\beta$ kořen charakteristické rovnice, pak výše uvedená rovnice má partikulární řešení tvaru

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right),$$

kde opět *A(x)* a *B(x)* jsou polynomy stupně s = *max* $\{st(P_n(x)), st(Q_m(x))\}$ s neznámými koeficienty.

<u>Poznámka 3.2.3:</u>

1) Koeficienty u polynomů *A(x)* a *B(x)* zjistíme dosazením do původní rovnice (20) a porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin.
2) Je-li $P_n(x) = 0$, pak $s = n$ a je-li $Q_m(x) = 0$, pak $s = m$ a Věta 3.2.2 platí.

<u>Postup odvození neznámých koeficientů u polynomů A(x) a B(x) pro f(x) = $P_n(x)e^{\alpha x}$:</u>

a) f(x) = $P_n(x)e^{\alpha x}$ a kritické číslo $\alpha + i\beta$ není kořen charakteristické rovnice tedy musí platit

$$L_n\left(e^{\alpha x} A(x)\right) = e^{\alpha x} P_n(x). \tag{21}$$

Uvažme rovnici (21) ve tvaru

$$e^{-\alpha x} L_n\left(e^{\alpha x} A(x)\right) = P_n(x) \tag{22}$$

S využitím Leibnitzovy formule a po dosazení do rovnice (9) obdržíme

$$L_n(A(x)) = a_n\left\{x^n L_n(x) + \binom{n}{1} x^{n-1} L_n'(x) + \cdots + L_n^{(n)}(x)\right\} +$$
$$+ a_{n-1}\left\{x^{n-1} L_n(x) + \binom{n-1}{1} x^{n-2} L_n'(x) + \cdots + L_n^{(n-1)}\right\} + \cdots + a_1\left\{x L_n(x) + L_n'(x)\right\} + a_0 L_n(x).$$

Je-li $P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$ pak porovnáním koeficientů obdržíme soustavu n-rovnic o n-neznámých

$a_n L_n(x) = p_n$,

$a_{n-1} L_n(x) + a_n \binom{n}{1} L_n'(x) = p_{n-1}$,

$\vdots$

$a_0 L_n(x) + a_1 L_n'(x) + \cdots + a_n L_n^{(n)}(x) = p_0$.

Číslo $\alpha + i\beta$ není kořenem charakteristické rovnice, tedy $L_n(\alpha + i\beta) \neq 0$, proto ze soustavy snadno zjistíme neznámé koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$a_n = \frac{p_n}{L_n(x)},$$

$$a_{n-1} = \frac{1}{L_n(x)}\left(p_{n-1} a_m \binom{n}{1} L_n'(x) \right),$$

$$\vdots$$

Tato soustava má jednoznačné řešení, jelikož její determinant je roven $\left(L_n(x)\right)^{n-1} \neq 0$.

b) f(x) = $P_n(x)e^{\alpha x}$ a kritické číslo $\alpha + i\beta$ je k-násobný kořen charakteristické rovnice tedy musí platit $L_n(\alpha + i\beta) = L_n'(\alpha + i\beta) = \dots = L_n^{k-1}(\alpha + i\beta) = 0$, ale $L_n^k(\alpha + i\beta) \neq 0$. Pak předpokládáme řešení ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} A(x),$$

tedy $e^{-\alpha x} L_n\left(e^{\alpha x} x^k A(x)\right) = P_n(x)$.

Opět z Leibnitzovy formule obdržíme

$$P_n(x) = a_n \left\{ \binom{n-k}{k} x^n L_n^{(k)}(x) + \binom{n+k}{k+1} x^{n-1} L_n^{k+1} + \dots + L_n^{n+k}(x) \right\} +$$
$$+ a_{n-1} \left\{ \binom{n+k-1}{k} x^{n-1} L_n^{(k)}(x) + \binom{n+k-1}{k+1} x^{n-2} L_n^{(k+1)}(x) + \dots + L_n^{(n+k-1)}(x) \right\} +$$
$$+ \dots + a_1 \left\{ \binom{k+1}{k} x L_n^{(k)}(x) + L_n^{(k+1)}(x) \right\} + a_0 L_n^{(k)}(x).$$

Opět porovnáním koeficientů obdržíme soustavu n-rovnic o n-neznámých

$$\binom{n+k}{k} L_n^{(k)}(x) a_n = p_n,$$

$$\binom{n+k-1}{k} L_n^{(k)}(x) a_{n-1} + \binom{n+k-1}{k+1} L_n^{(k+1)}(x) a_m = p_{n-1},$$

$$\vdots$$

Determinant této soustavy je roven $\binom{n+k}{k}\binom{n+k-1}{k} \dots \binom{k}{k} \left(L_n^{(k)}(x)\right)^{n+1} \neq 0$. Tedy koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou jednoznačně určeny.

Poznámka 3.2.4:

1) Je-li $f(x) = f_1(x) + i\, f_2(x)$ a pro $L_n(x) = f_1(x)$ má rovnice (9) partikulární řešení $y_{p_1}(x) = \Theta(x)$ a pro $L_n(x) = f_2(x)$ má rovnice (9) partikulární řešení $y_{p_2}(x) = \Theta(x)$, pak $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$. Tento postup je vhodné použít zejména je-li $f_1(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \cos \beta x$ a $f_2(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) \sin \beta x$.

2) To, že $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ a obecně $a_p(x) = \sum_{i=1}^{l} y_{p_i}(x)$, kde l je počet funkcí na pravé straně vyplývá z věty 3.1 o principu superpozice.

3) Pokud je na pravé straně pouze jedna z funkcí *f(x) = cosβx* či *f(x) = sinβx*, musíme partikulární řešení hledat ve tvaru obsahujícím obě tyto goniometrické funkce.

<u>Příklad 1:</u> *Řešte rovnici* $y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)e^{3x}$.

Charakteristická rovnice přidružené homogenní rovnice je ve tvaru

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

tedy kořeny jsou $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ a obecné řešení přidružené homogenní rovnice je

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Ze zadané rovnice nyní označíme jednotlivé parametry:

$$\alpha = 3,\ \beta = 0,\ P_n(x) = 20\text{x},\ Q_m(x) = 29.$$

Jelikož kritické číslo α + iβ není kořenem charakteristické rovnice přidružené rovnice homogenní, budeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = e^{3x}(Ax + B),$$

kde A a B jsou konstanty, které obdržíme po dosazení následujících rovnic do zadání.

$$y'(x) = 3e^{3x}(Ax + B) + Ae^{3x},$$
$$y''(x) = 9e^{3x}(Ax + B)) + 6Ae^{3x}.$$

Odkud obdržíme

$$20e^{3x}(Ax + B) + 9e^{3x} = 20x + 29,$$

pro naše konstanty platí A = 1 a B = 1.

Tedy partikulární řešení je ve tvaru

$$y(x) = e^{3x}(x + 1)$$

a obecné řešení rovnice je ve tvaru

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{3x}(x + 1)}}.$$

4. KAPITOLA

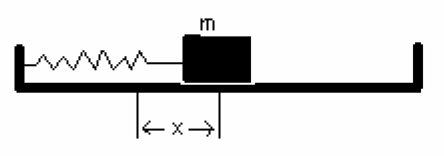
APLIKACE

Nejčastější oblastí, kde se využívají lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty je fyzika a to zejména v oblasti mechanického kmitání a elektrického odporu.

4.1 MECHANICKÉ KMITÁNÍ

Nejjednodušším příkladem obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty je rovnice síly, která uvádí těleso na pružině do pohybu.

Mějme těleso, které je připojené na pružinu a tato pružina je spojená s pevnou zdí, tak jak ukazuje obr. 1. Tato pružina se může pohybovat pouze vodorovným směrem a předpokládejme nulové tření.



obrázek 1

Síla, která uvádí toto těleso do pohybu je součtem tahové síly *Fs*, vnější síly *Fv* a tíhová síly *Fg*, $F(t) = Fs + Fv + Fg$, pro které platí

- **tahová síla** $Fs = -kx$, kde k je konstanta zvaná tuhost pružiny a x je vzdálenost pružiny v klidu od pevné zdi,
- **vnější síla** $Fv = cv = c(\frac{dx}{dt})$,
- **tíhová síla** $Fg = mg = m(\frac{d^2x}{dt^2})$,

tedy

$$F(t) = mx'' + cx' + kx.$$

Pokud se budeme zabývat situací, že těleso je v klidu, tedy výsledná síla je nulová, můžeme psát

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{23}$$

a tato rovnice se nazývá **rovnicí elastických kmitů**.

Pokud na těleso nepůsobí žádná vnější síla můžeme psát tuto rovnici ve tvaru

$$mx'' + kx = 0 \tag{24}$$

Obdobná rovnice platí i pro **visící pružinu,** jen s tím rozdílem, že x je vzdálenost tělesa, na kterou nepůsobí žádné síly, od pevné zdi.

Upravíme-li rovnici (23) do tvaru

$$x'' + 2ax' + b^2 x = 0,$$

kde $2a = \frac{c}{m}$ a $b^2 = \frac{k}{m}$ a a a b jsou kladné konstanty, můžeme tuto diferenciální rovnici začít řešit.

Najdeme její obecné řešení, tedy nejprve hledáme řešení charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0,$$

pro diskriminant této rovnice platí

$$D = \sqrt{4a^2 - 4b^2},$$

a v závislosti na parametrech a a b musíme rozlišit všechny případy výsledku D:

I. Jestliže $a > b$, pak $D > 0$ a kořeny jsou

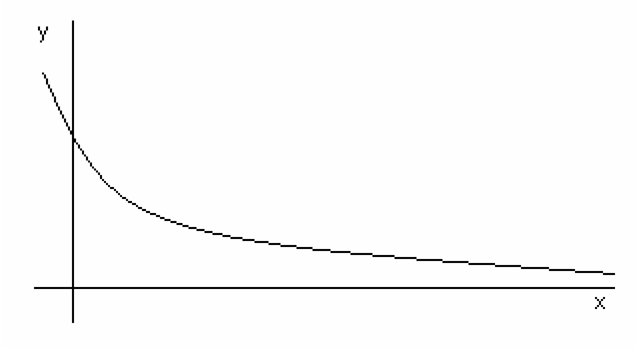
$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Tyto kořeny jsou reálné různé a obecné řešení má tedy tvar

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Tento pohyb není periodický, jelikož oba kořeny charakteristické rovnice jsou záporná čísla. Tato rovnice popisuje **silně tlumené kmity**, které jsou znázorněné na obrázku č.2



obrázek 2

II. Jestliže $b < a$, pak $D < 0$ a kořeny této charakteristické rovnice jsou ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2},$$

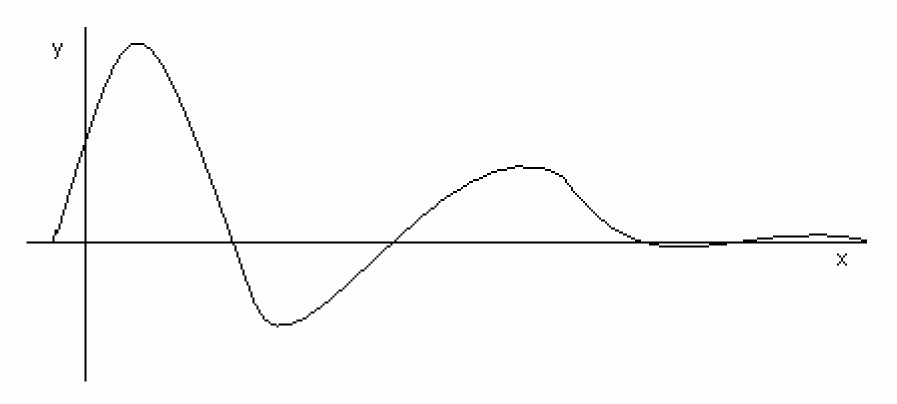
tedy jde o komplexně sdružená čísla.

Obecné řešení má pak tvar

$$x(t) = e^{-ax}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{b^2 - a^2}\right)x + C_2 \sin\left(\sqrt{b^2 - a^2}\right)x\right],$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

Tato rovnice popisuje **slabě tlumené kmity** (obrázek č.3).



obrázek 3

III. Jestliže $a = 0$, pak $D < 0$ a kořeny této charakteristické rovnice jsou ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = \pm ib,$$

tedy jde opět o komplexně sdružené čísla.

Obecné řešení má tvar

$$x(t) = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx,$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

A tuto rovnici můžeme upravit i na jiný tvar.

Je-li *x(t)* netriviální řešení, je $C_1^2 + C_2^2 > 0$ a *x(t)* lze psát jako

$$x(t) = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos bx + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin bx\right).$$

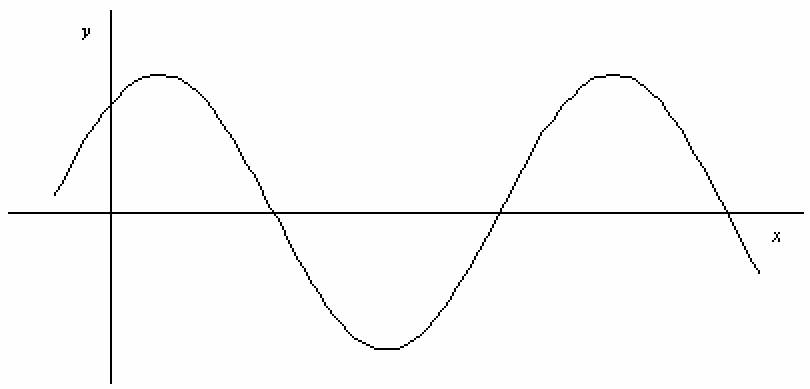
Zvolíme-li úhel α tak, aby platilo

$$\sin\alpha = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},\ \cos\alpha = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

a označíme-li si $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A > 0$. Pak

$$x(t) = A(\sin\alpha\cos bx + \cos\alpha\sin bx) = A(\sin bx + \alpha).$$

Tato rovnice popisuje **harmonické kmitání** (obrázek č.4).



obrázek 4

IV. Jestliže $a^2 = b^2$, pak $D = 0$ a charakteristická rovnice má kořeny

$$\lambda_{1,2} = -a,$$

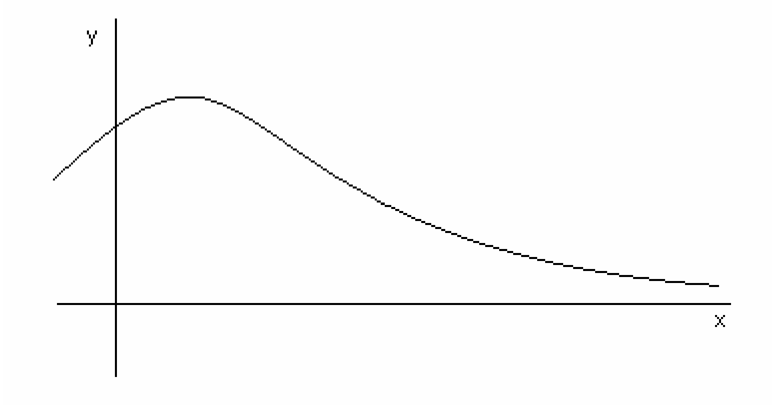
tedy jde o jeden dvojnásobný kořen.

A obecná rovnice je ve tvaru

$$x(t) = e^{-ac}(C_1 + C_2 x),$$

kde C_1 a C_2 jsou libovolné konstanty.

A tato rovnice popisuje **kriticky tlumené kmity** (obrázek č.5).



obrázek 5

<u>Poznámka 4.1.1:</u> Další veličiny, které charakterizují pohyb kmitu jsou **perioda** $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,

frekvence $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$, kde ω_0 je úhlová rychlost [rad/s] a platí pro ni $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

<u>Příklad 1:</u> *Těleso o hmotnosti 0,5kg je zavěšeno na kyvadle, které bylo vychýleno silou 100N. Její vychýlení o proti původní poloze bylo o 0,5 metrů a její rychlost je* $v_0 = -10\left[m/s\right]$. *Nalezněte funkci charakterizující tento pohyb a dále frekvenci, periodu oscilátoru a úhel vychýlení kyvadla.*

Tuhost pružiny je $k = \frac{100}{2} = 50\left[N/m\right]$, tedy dosazením zadaných hodnot do rovnice (24) obdržíme rovnici elastických kmitů

$$\underline{\underline{x'' + 100x = 0}}.$$

Úhlová frekvence je ω_0 =10 [rad/s]. Tedy frekvence oscilátoru je

$$f = \frac{10}{2\pi} = \underline{\underline{1{,}59 Hz}}$$

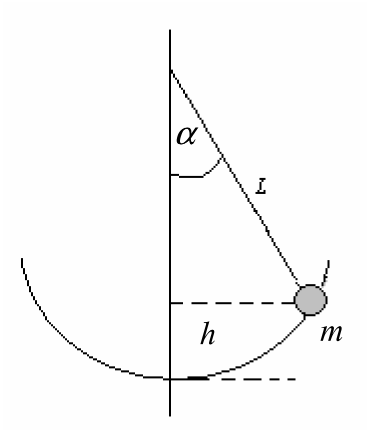
a perioda

$$T = \frac{2\pi}{10} = \underline{\underline{0{,}63 s}}.$$

4.2 JEDNODUCHÉ KYVADLO

Dalším příkladem je jednoduché kyvadlo, kde L je délka provázku, kterém visí těleso o hmotnosti m a toto těleso je vychýleno silou o úhel α. Vzdálenost mezi tělesem a polohou nula po vychýlení je $s = L\alpha$. Pro rychlost pohybu tělesa platí $v = \frac{ds}{dt} = L\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ a tedy **kinetická (pohybová) energie** $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$.

Nyní si vybereme polohu tělesa, tak jak je zobrazena na obr.6. Pak jeho **potencionální (polohová) energie** Ep je součin jeho tíhy mg a vertikální výšky $h = L(1-\cos\alpha)$ na nulovou polohou, tedy $E_p = mgL(1-\cos\alpha)$.



obrázek 6

Platí skutečnost, že suma kinetické a potencionální energie je konstanta C, tedy

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\alpha) = C\,,$$

obě strany této rovnice derivujeme podle t a obdržíme

$$mL^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + mgL(\sin\alpha)\frac{d\alpha}{dt} = 0\,,$$

tedy po vydělení výrazem $mL^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ obdržíme

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0\,.$$

Víme, že je-li α malé, pak platí vztah $\sin \alpha \approx \alpha$, to platí pokud $|\alpha|$ je nanejvýš $\frac{\pi}{12}$ (15°). V převážné většině pokusů s jednoduchým kyvadlem nepřesahuje úhel výkyvu více jak 15° tedy můžeme naši rovnici přepsat do tvaru

$$\alpha'' + k\alpha = 0,$$

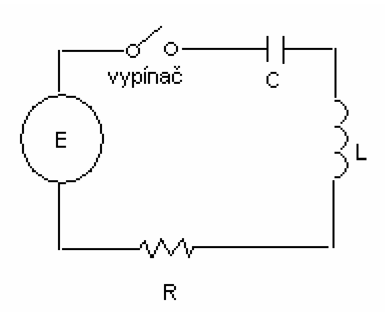
a přidáme-li do rovnice výraz $c\alpha'$ pro smyšlený odpor kolem tělesa, obdržíme opět lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty

$$\alpha'' + c\alpha' + k\alpha = 0,$$

kde $k = \frac{g}{L}$.

4.3 RLC OBVOD

RLC obvod je základní stavebním kamenem ve většině komplikovaných elektrických obvodech a sítích.



obrázek 7

Na obrázku č.7 je znázorněn RLC obvod a ten se skládá z:

- **rezistoru** s odporem R,
- **cívky** o indukčnosti *L [H],*
- a **kondenzátoru** o kapacitě *C [F].*

Rezistor, cívku a kondenzátor si můžeme představit jako body, které jsou charakterizovány konstantami *R, L* a *C.* Zdroj je popsán napětím *E(t)* a obvodem probíhá proud *I(t)* pouze tehdy, je-li vypínač uzavřený, pak je i v kondenzátoru náboj *Q(t).* Tento RLC obvod je zapojen v sérii spolu se zdrojem elektromotorické síly (jako např. baterie nebo generátor), který dodává napětí *E(t) [V]* v čase *t*.

Vztah mezi funkcí proudu a funkcí náboje v cívce je

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) \tag{25}$$

Podle základních pravidel elektřiny je napětí na jednotlivých částech obvodu závislé na velikosti proudu (či jeho změně), jak ukazuje Tabulka 1. S využitím Kirchhoffova druhého zákona (pro jednoduchou smyčku elektrické sítě): „(Algebraický) součet napětí na rezistorech je v uzavřené smyčce roven součtu elektromotorických napětí zdrojů zapojených ve smyčce“ a Tabulky 1 můžeme analyzovat chování elektrického obvodu.

Složka obvodu	**Napětí**
Rezistor	RI
Cívka	$L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$
Kondenzátor	$\dfrac{1}{C}Q$

Tabulka č.1

Z tabulky plyne, že náboj a proud v RLC obvodu splňuje rovnici

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t)\,. \tag{26}$$

Jestliže využijeme rovnosti (25) dostaneme lineární diferenciální rovnici druhého řádu

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)\,. \tag{27}$$

V běžné praxi nás ale zajímá spíše proud *I(t)* než náboj *Q(t).* Tedy derivujeme rovnici (27) a místo *Q´(t)* dosadíme *I(t),* pak získáme

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)\,.$$

Pro funkci střídavého napětí platí vztah $E(t) = \omega E_0 \cos \omega t$ (28)

Pak pro rovnici (27) obdržíme tvar

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}Q = E(t) = \omega E_0 \cos \omega t \tag{29}$$

Obecné řešení rovnice (29) je součtem tzv. *„transient current"* (měnivého proudu) $I_{tr}(t)$, která se pro t blížící se k nekonečnu blíží k nule (za podmínky, že koeficienty v rovnici (29) jsou všechny kladné) a *„steady periodic current"* (stálého periodického proudu) $I_{sp}(t)$ (jeho střední hodnota je nulová). Tedy obecné řešení má tvar

$$I(t) = I_{tr}(t) + I_{sp}(t)\,. \tag{30}$$

Pro $I_{sp}(t)$ platí

$$I_{xp}(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\,, \tag{31}$$

kde α je **fázový rozdíl**, pro který platí

$$\alpha = arctg\left(\frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right),\ 0 \le \alpha \le \pi\,. \tag{32}$$

Zavedeme novou charakteristickou veličinu tzv. **impedance** jejímiž jednotkami jsou ohmy a pro niž platí

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,. \tag{33}$$

Pro stálý proud taktéž platí

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z}\cos(\omega t - \alpha)\,, \tag{34}$$

jehož amplituda je

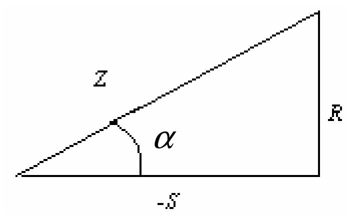
$$I_0(t) = \frac{E_0}{Z}\,.$$

K tomu abychom převedli funkci $I_{sp}(t)$ na sinusovou funkci, jelikož napětí je taktéž sinusová funkce, musíme zavést další charakteristickou veličinu a to reaktanci

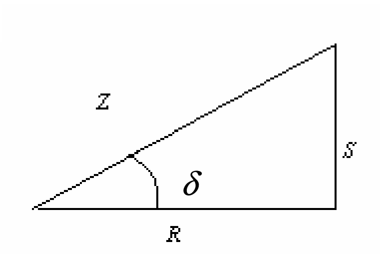
$$S(t) = \omega - \frac{1}{\omega C}\,, \tag{35}$$

jejímiž jednotkami jsou také ohmy.

Platí vztah $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$ a z rovnice (32) vyplývá, že úhel α je určen z trojúhelníku na obrázku č.8.



obrázek 8



obrázek 9

Nyní ještě zavedeme úhel δ, který určíme z trojúhelníku na obrázku č.9. Tedy platí

$$\delta = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

Rovnici (34) nyní můžeme zapsat ve tvaru

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z}(\cos\alpha\cos\omega t + \sin\alpha\sin\omega t) = \frac{E_0}{Z}\left(-\frac{S}{Z}\cos\omega t + \frac{R}{Z}\sin\omega t\right) =$$

$$= \frac{E_0}{Z}(\cos\delta\sin\omega t - \sin\delta\cos\omega t).$$

Tedy můžeme psát

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z}\sin(\omega t - \delta), \tag{36}$$

kde

$$\delta = arctg\frac{S}{R} = arctg\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega RC}. \tag{37}$$

Odsud obdržíme zpoždění stálého periodického proudu za vstupním napětím, jehož jednotky jsou sekundy a které je definováno jako $\dfrac{\delta}{\omega}$.

<u>Příklad 1:</u> *Mějme RLC obvod kde R = 50 ohmů, L = 0,1 henry a C = 5x10^{-4} faradů. V čase t = 0 byl I(0) a Q(0) rovny nule. Obvod je zapojen do 110V a 60Hz generátoru. Najděte proud který prochází obvodem a zpoždění stálého periodického proudu před napětím.*

Frekvence 60 Hz znamená že ω = (2π)60 rad/s tedy přibližně 377 rad/s.Tedy vezmeme *E(t) = 110sin377t*. Diferenciální rovnice (25) je ve tvaru

(0,1)I´´+50I´+2000I=(377)(110)cos377t.

Zadané hodnoty pro R, L a C dosadíme do (33) a obdržíme impedanci

$$Z = 1,846\ A$$

Takže amplituda stálého elektrického proude je

$$I_{xp}(t) = \frac{110}{\sqrt{50^2 + (377 \cdot 0,1 - \frac{1}{377 \cdot 5 \cdot 10^{-4}})^2}} \approx \underline{\underline{1,846A}}$$

a podle (37) obdržíme sinového posunu

$$\delta = arctg \frac{0,1 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 377^2 - 1}{377 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,575$$

tedy zpoždění proudu za napětím je

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{0,575}{377} = \underline{\underline{0,001525s}}$$

a stálý periodický proud je

$$\underline{\underline{I_{sp}(t) = 1,846 \sin\left(377t - 0,575\right)}}$$

4.4 APLIKACE V EKONOMII – PHILLIPSŮV MODEL

Ve Phillipsově modelu hospodářské regulace jsou poptávka Z a produkt Y sledovány odděleně a zároveň se jedna zpožďuje za druhou. Další podmínkou jsou pevně dané autonomní výdaje A na investice a spotřební zboží, které mohou být buď konstantní, nebo se mění určitým způsobem v čase.

Model multiplikátoru – jeden z Phillipsova modelu je:

Poptávka $Z = C + A$, kde $C = (1-s)Y$ a $(1-s)$ je sklon ke spotřebě.

Nabídka $Y = \frac{\lambda}{\lambda + D} Z$, kde D je diferenciální operátor $D = \frac{d}{dt}$.

Opožděná reakce nabídky na změnu poptávky má rychlost reakce λ a je spojitého exponenciálního typu. Rychlost reakce λ odpovídá časové konstantě $T = \frac{1}{\lambda}$. Dosadíme za Z a obdržíme

$$Y = \frac{\lambda}{\lambda + D}\left\{(1-s)Y + A\right\},$$

tedy

$$DY + \lambda s Y = \lambda A .$$

Pro počáteční podmínky $Y = Y_0$ pro $t = 0$ a pro konstantní A, má řešení tvar

$$Y = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-\lambda s t}\right) + Y_0 e^{-\lambda s t} . \tag{38}$$

Toto řešení zobrazuje průběh důchodu Y od počáteční hodnoty Y_0 směrem k úrovni dané statickým multiplikátorem $Y = \frac{A}{s}$.

Model multiplikátoru-akcelerátoru:

Poptávka $Z = C + I + A$, kde $C = (1-s)Y$ a $I = \frac{\kappa}{\kappa + D} vDY$, v je síla akcelerátoru a κ je rychlost zpožděné reakce spojitého exponenciálního tvaru. Nabídka $Y = \frac{\lambda}{\lambda + D} Z$.

Opět dosadíme za Z a obdržíme

$$(D + \kappa)(D + \lambda)Y = \lambda\left\{(\kappa v + 1 - s)DY + \kappa(1-s)Y + (D + \kappa)A\right\} .$$

Sečtením členů obdržíme diferenciální rovnici

$$D^2Y + aDY + bY = \lambda(D + \kappa)A,$$

kde $a = \lambda s + \kappa(1 - \lambda v),\ b = \kappa\lambda s$.

Řešení této rovnice je ve tvaru

$$Y = \frac{A}{s} + B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t},$$

kde $p_1,\ p_2$ jsou kořeny kvadratické rovnice $p^2 + ap + b = 0$ a $B_1,\ B_2$ jsou libovolné konstanty.

<u>Příklad 1:</u> *Nechť je s = 0,2;* λ *= 4; Y = 0* pro *t = 0; A = konstanta*.

Řešíme rovnici ve tvaru $DY + Y = 4A$, kde *Y = 0* pro *t = 0.* Dosazením do rovnice (38) obdržíme řešení ve tvaru

$$\underline{\underline{Y = 5A\left(1 - e^{-t}\right)}}.$$

Tedy tato rovnice popisuje průběh důchodu Y od počáteční hodnoty Y_0.

LITERATURA

[1] ALLEN, R.G.D.. *Matematická ekonomie*, Praha: Academia, 1971. 782s.

[2] FRANK, Ludvík, a kol. *Matematika*. Praha : SNTL, 1973. 750 s.

[3] HLAVÁČEK, Antonín. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky*. Praha : SPN, 1965. 611 s.

[4] KALAS, Josef, RÁB, Miloš. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 1995. 207 s. ISBN 80-210-1130-0.

[5] KURZWEIL, Jaroslav. *Obyčejné diferenciální rovnice. Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru*. 1. vydáni, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1978. 418 s.

[6] *Lineární ODR n-tého řádu* [online]. 2005 [cit. 2006-12-18]. Dostupný z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/UploadedFiles/187.pdf>.

[7] PLCH, Roman. *Příklady z matematické analýzy*. 1. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2002. 31 s.

[8] RÁB, Miloš. *Metody řešení diferenciálních rovnic*. 3. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2004. 96 s. ISBN 80-210-3416-5.

[9] THOMAS, G.B. jr., FINNEY, R.L.. *Calculus and analytic geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading aj, 1990.1253 s.

[10] ZINDULKA, Ondřej. *Matematika 3* [online], 20.2.2006 [cit. 2007-11-12]. Dostupný z WWW: <http://mat.fsv.cvut.cz/ma3g/MA3Text.pdf>.