

## 2. Analízis3 gyakorlat, 2022. szept. 15., 2-es csoport

**2.1.** Mi a  $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  halmaz belseje, külseje és határa  $\mathbb{R}^2$ -ben? Mi a határ határa? Mik az izolált pontok? Mi a deriválthalmaz?

**2.2.** Igaz vagy hamis?

- (a) ( $\mathbb{R}^p$ -ben) véges sok nyílt halmaz uniója nyílt.
- (b) Véges sok nyílt halmaz metszete nyílt.
- (c) Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.
- (d) Akárhány nyílt halmaz metszete nyílt.
- (e) A deriválthalmaz mindig zárt.

**2.3.** Melyik igaz egy metrikus tér tetszőleges  $A$  részhalmazára?

$$\text{int ext } A = \text{ext } A; \quad \partial\partial A \subset \partial A; \quad \partial(\text{int } A) \subset \partial A; \quad \partial(\text{int } A) = \partial(\text{ext } A)$$

**2.4.** (a) Igazoljuk, hogy tetszőleges metrikus térben a nyílt és a zárt halmazok halmazainak számsága megegyezik.

(b) Igazoljuk, hogy  $\mathbb{R}^p$ -nek kontinuum sok nyílt, és kontinuum sok zárt részhalmaza van.

**2.5.** Igazoljuk, hogy bármely metrikus térben bármely  $H$  halmazra  $H'' \subset H'$ , avagy torlódási pontok torlódási pontja torlódási pont.

**2.6.** Legyen  $A \subset \mathbb{R}^p$ . Legfeljebb hány különböző halmaz lehet az

$$A, \quad \partial A, \quad \partial\partial A, \quad \partial\partial\partial A, \dots$$

sorozatban?

**2.7.** Igazoljuk, hogy ha  $K \subset \mathbb{R}^p$  zárt halmaz, akkor a  $\{|x| : x \in K\}$  halmaz is zárt halmaz  $\mathbb{R}$ -ben.

**2.8.** HIBÁS FELADAT, TÖRÖLTÜK. (Javított változat a következő feladatsorban.)

**2.9.** (a) Igazoljuk, hogy ha egy metrikus térben teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel, akkor a tér teljes.

(b) Mutassunk példát olyan metrikus térre, ami teljes, de nem teljesül a Bolzano-Weierstrass tétel.

### Házi feladatok a fentiek közül megmaradó feladatok mellett

**2.10.** Mi az alábbi halmazok belseje, külseje és határa  $\mathbb{R}^2$ -ben? Mi a határ határa? Mik az izolált pontok? Mi a deriválthalmaz?

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, x + y < 1\};$$

**2.11.** Igaz vagy hamis? (a) Véges sok zárt halmaz uniója zárt.

- (b) Véges sok zárt halmaz metszete zárt.
- (c) Akárhány zárt halmaz uniója zárt.
- (d) Akárhány zárt halmaz metszete zárt.
- (e) Az izolált pontok halmaza zárt.

**2.12.** Igazoljuk, hogy egy metrikus tér tetszőleges  $A$  részhalmazára

$$\text{int int } A = \text{int } A; \quad \partial(\text{ext } A) \subset \partial A.$$

**2.13.** Gyűjtsünk össze minél több ekvivalens feltételt arra, hogy egy halmaz nyílt, illetve zárt.