1. **Egy Föld körüli körpályán keringő műhold pályamenti sebessége v_1 = 3,9 km/ s , távolsága a Föld felszínétől 20 000 km. A műhold pályamódosítást hajt végre, és a Föld felszíne fölött 30 000 km magasságban lévő körpályára áll. Mekkora lesz az új pályán a műhold keringési ideje és pályamenti sebessége? ($R_{Föld}$ ≈ 6400 km)**
(2008. május)

Megoldás:

Adatok: $v_1 = 3{,}9\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}$, $h_1 = 20\,000\text{ km}$, $h_2 = 30\,000\text{ km}$, $R_{\text{Föld}} \approx 6400\text{ km}$

I. megoldás: Kepler törvényének alkalmazása

A műhold pályasugarának kiszámítása a két esetben:

1 + 1 pont

$r = h + R_{\text{Föld}}$, amiből $r_1 = 26\,400\text{ km}$, illetve $r_2 = 36\,400\text{ km}$

Az első keringési idő és pályamenti sebesség összefüggésének felírása:

2 pont

$$v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$$

Az első keringési idő kiszámítása:

1 + 1 pont

$T_1 = 42\,500\text{ s}$
(rendezés és számítás)

Kepler III. törvényének felírása a két pályára:

3 pont

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

Az új pálya keringési idejének kiszámítása:

2 + 1 pont

$T_2 = \sqrt{T_1^2 \cdot \dfrac{r_2^3}{r_1^3}}$ ebből $T_2 = 68\,800\text{ s}$
(rendezés és számítás)

Az új pályamenti sebesség felírása és kiszámítása :

2 + 2 pont

$$v_2 = \frac{2\cdot\pi\cdot r_2}{T_2} = 3{,}3\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Összesen 16 pont

II. megoldás: A bolygókra vonatkozó összefüggések alkalmazása:

A szükséges adatok megadása:

1 + 1 pont

$$f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

$$M_{Föld} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

A második pálya sugarának felírása és kiszámítása:

1 + 1 pont

$$r_2 = h_2 + R_{Föld} = 36\,400\ \mathrm{km}$$

A keringési idő felírása:

4 pont

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{f \cdot M_{Föld}}}$$

(A teljes pont csak akkor jár, ha itt vagy később egyértelműen kiderül, hogy a képletben a Föld tömege szerepel. Ellenkező esetben az összefüggésre csak 1 pont jár.)

A keringési idő kiszámítása:

4 pont
(bontható)

$$T_2 = 69\,100\ \mathrm{s}$$

A sebesség felírása és kiszámítása:

2 + 2 pont

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \quad \text{ebből}$$

$$v_2 = 3{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Összesen 16 pont

III. megoldás: A körmozgás dinamikai egyenleteinek alkalmazása:

A szükséges adatok megadása:

1 + 1 pont

$$f = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

$$M_{Föld} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

A második pálya sugarának felírása és kiszámítása:

1 + 1 pont

$$r_2 = h_2 + R_{Föld} = 36\,400\ \mathrm{km}$$

A körmozgás dinamikai feltételének megfogalmazása:

2 pont

$$F_{cp} = F_{grav}$$

A megfelelő összefüggések megadása:

2 + 2 pont

$$F_{cp} = m \cdot \frac{v^2}{r} \quad \text{illetve} \quad F_{grav} = \frac{f \cdot m \cdot M_{Föld}}{r^2}$$

A sebesség kiszámítása:

2 pont

$$v_2 = 3{,}3 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

A keringési idő felírása és kiszámítása:

2 + 2 pont

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \quad \text{ebből}$$

$$T_2 = 69300\ \mathrm{s}$$

Összesen 16 pont

2. **Egy, a GPS (helymeghatározó) rendszerhez tartozó műhold 20180 km sugarú körpályán egyenletesen kering a Föld körül az Egyenlítő síkjában, a Föld tengely körüli forgásával megegyező irányban. Egy másik műholdnak kétszer akkora a tömege és geostacionárius pályán kering a Föld körül 35786 km magasságban. (A geostacionárius műholdak mindig az Egyenlítő síkjában keringenek, és a Föld ugyanazon pontja felett vannak.)**
a) Lemarad-e a kisebb tömegű műhold a Föld egy kiválasztott, Egyenlítőn fekvő pontjához képest?
b) Mekkora utat tesz meg pályáján a kisebb tömegű műhold 1 óra alatt?
(A Föld sugara 6380 km, forgásának periódusideje 24 óra.) (2008. május)

Megoldás:

a) Annak felismerése, hogy a Kepler-törvények a műhold–Föld viszonylatban is érvényesek:

3 pont

(Kepler III. törvényének formális fölírása e felismerést mutatja, ezért külön megfogalmazás nélkül is megadható a pontszám.)

Kepler III. törvényének megfogalmazása:

2 pont

$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$, ahol T a keringési időket, r a pályasugarakat jelenti.

(A 2 pont csak akkor adható meg, ha a vizsgázó megoldásából – pl. a behelyettesítésből – a betűk jelentése kiderül, de emellett a pontszám megadható akkor is, ha az értékek hibásan vannak megállapítva.)

A geostacionárius műhold keringési idejének és pályasugarának meghatározása:

$T_2 = 24$ óra

2 pont

$r_2 = 6380\text{ km} + 35\,786\text{ km} = 42\,166\text{ km}$

2 pont

A kisebb tömegű műhold keringési idejének kiszámítása:

4 pont
(bontható)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}; \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{20180}{42166}\right)^3 = 0{,}1096\,; \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{0{,}1096} = 0{,}331\,;$$

$$T_1 = 0{,}331 \cdot 24\ \mathrm{h} = 7{,}94\ \mathrm{h} \approx 8\ \mathrm{h}$$

Válasz az a) kérdésre:

2 pont

A keringési idők összehasonlítása alapján megállapítható, hogy a kisebb műhold nem marad le a Föld egy kiválasztott, Egyenlítőn fekvő pontjához képest, sőt, gyorsabban kering, mint ahogy a Föld forog.
(Ha a vizsgázó Kepler III. törvénye alapján az arányosságokra hivatkozva a fenti számítások nélkül adja meg a választ, a 2 pont megadható.)

b) A kisebb tömegű műhold 1 óra alatt megtett útjának kiszámítása

3 pont
(bontható)

$T = 8$ h alatt $2r\pi$ utat tesz meg, ezért 1 h alatt ennek nyolcadrészét, vagyis

$$s = \frac{2 \cdot 20\,180\ \mathrm{km} \cdot 3{,}14}{8} = 15\,841\ \mathrm{km}\ \text{utat tesz meg.}$$

(Ha a vizsgázó az előző részben nem számolt, és a számításokat a *b)* részben végzi el, az arra járó pontszámot itt kell megadni.)

Összesen: 18 pont