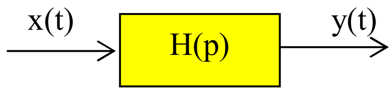
Fiche 7 : Identification d'un système de second ordre



Un système est dit du second ordre si la relation entre son entrée et sa sortie est une équation différentielle du second ordre.

$$\ddot{y}(t) + 2m\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = k\omega_0^2 x(t)$$

Avec :

- k : gain statique (rapport des unités sortie/entrée)
- m : coefficient d'amortissement (sans unité)
- ω_0 : Pulsation propre non amortie en rad/s

La fonction de transfert d'un système du second ordre est de la forme :

$$H(p) = \frac{k}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

NB : Pour le système de second ordre, seulement la réponse indicielle et la réponse harmonique sont étudiées.

Réponse indicielle :

$x(t) = au(t) \rightarrow X(p) = \frac{a}{p}$

$Y(p) = H(p)X(p) = \frac{ka}{p\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)}$

Trois cas sont à considérés en fonction du signe du discriminant (réduit) de $\left(1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$.

$\Delta' = \frac{1}{\omega_0^2}(m^2 - 1)$

• $\Delta' > 0$	$\rightarrow$	$m > 1$ $\rightarrow$ C'est le régime apériodique sans dépassement ;
• $\Delta' = 0$	$\rightarrow$	$m = 1$ $\rightarrow$ C'est le régime critique sans dépassement ;
• $\Delta' < 0$	$\rightarrow$	$m < 1$ $\rightarrow$ C'est le régime pseudopériodique avec dépassement ;
Classem-ent mathéma-tique		Classement physique des systèmes de second ordre

Régime apériodique sans dépassement : $m > 1$

Soient p_1 et p_2, les racines de $\left(1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$.

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - \sqrt{m^2 - 1}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + \sqrt{m^2 - 1}\right) \end{cases}$$

D'où :

$$1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)(p - p_2)$$

La fonction de transfert $H(p)$ peut être représentée par :

$$H(p) = \frac{k}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{k}{\frac{1}{\omega_0^2}(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

Avec :

$$\begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \\ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \\ \tau_1\tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \end{cases}$$

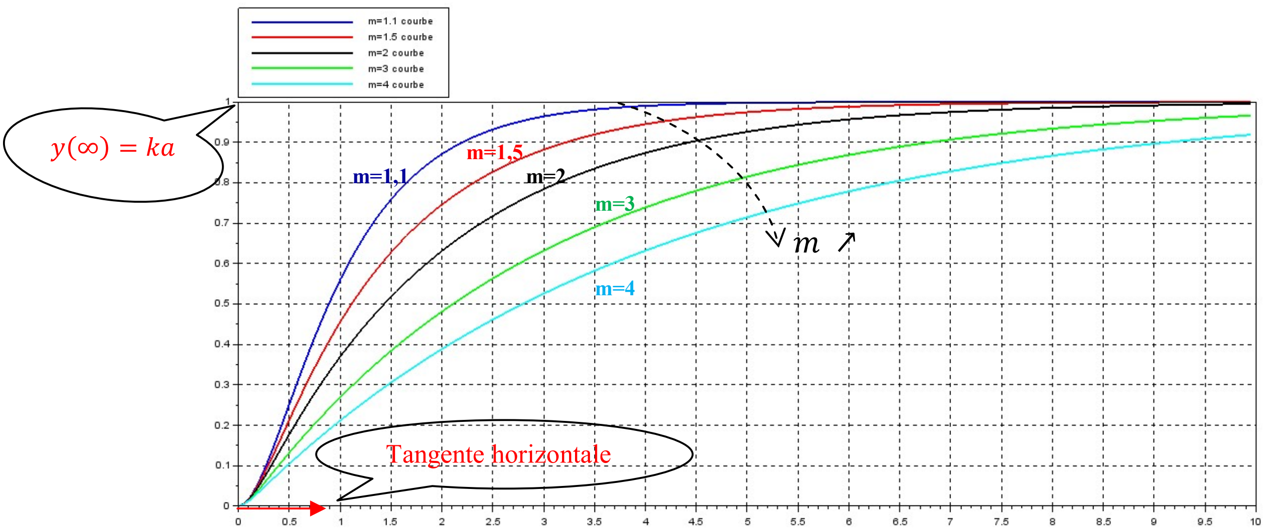
$$Y(p) = H(p)X(p) = \frac{ka}{p\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{ka}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

$$Y(p) = ka\left(\frac{1}{p} + \frac{\tau_1^2}{(\tau_2-\tau_1)(1+\tau_1 p)} + \frac{\tau_2^2}{(\tau_1-\tau_2)(1+\tau_2 p)}\right)$$

Soit finalement :

$$y(t) = \frac{ka}{(\tau_1-\tau_2)}\left(\tau_1\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_1}}\right) - \tau_2\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau_2}}\right)\right)$$

La figure suivante représente la réponse indicielle pour m =1.1, 1.5, 2, 3 et 4.



Régime critique sans dépassement : m=1

Le polynôme $\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$ possède une racine double : $p_0 = -\omega_0$.

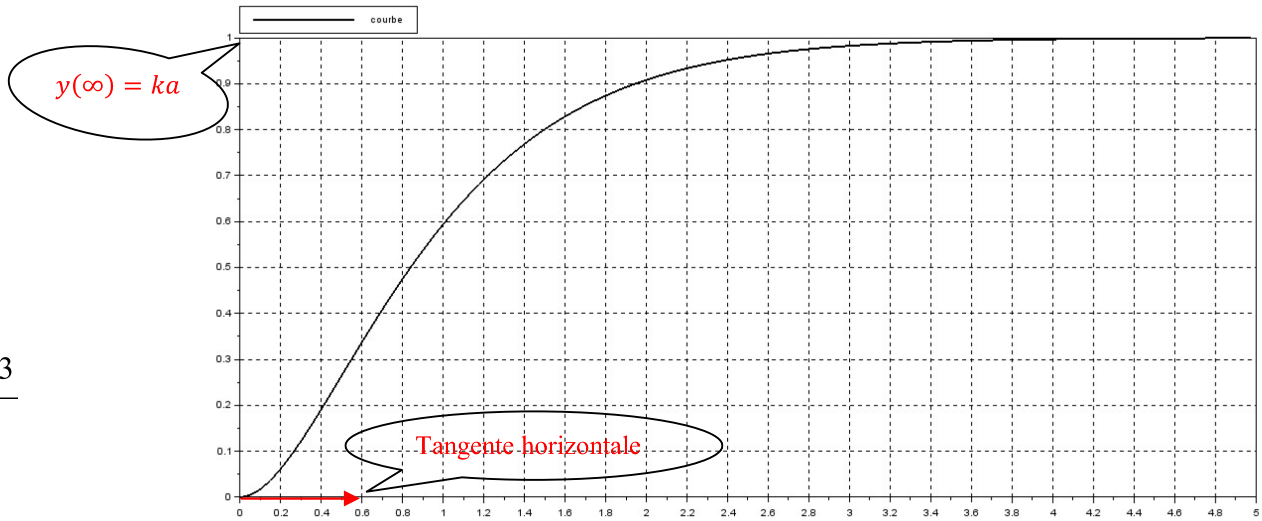
Soit $\tau_0 = \frac{-1}{p_0} = \frac{1}{\omega_0}$

D'où : $H(p) = \frac{k}{(1+\tau_0 p)^2}$

$Y(p) = \frac{ka}{p(1+\tau_0 p)^2} = ka\left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_0}{(1+\tau_0 p)^2} - \frac{\tau_0}{1+\tau_0 p}\right)$

D'où : $y(t) = ka\left(1-\left(1+\frac{t}{\tau}\right)e^{\frac{-t}{\tau_0}}\right)$

La figure suivante représente la réponse indicielle pour m=1.



Régime pseudopériodique avec dépassement : m<1

Le polynôme $\left(1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}\right)$ possède deux racines complexes conjuguées p_1 *et* p_2 tel que :

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - j\sqrt{1-m^2}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + j\sqrt{1-m^2}\right) \end{cases}$$

La réponse du système est donnée par l'équation suivante :

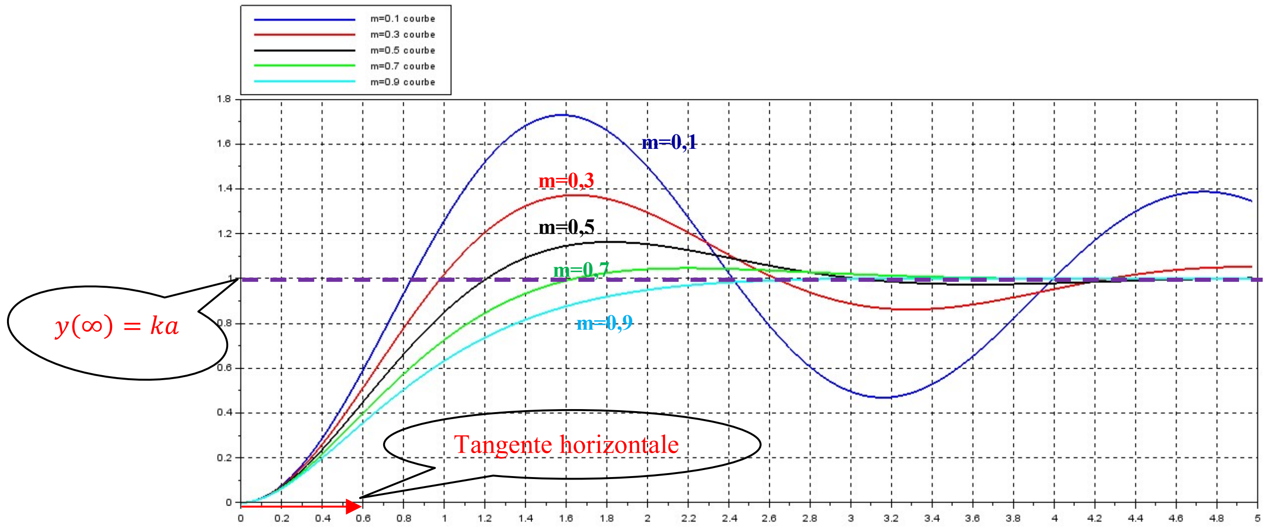
$$y(t) = ka\left(1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}}\sin(\omega t + \varphi)\right)$$

Avec :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0\sqrt{1-m^2} \\ \varphi = \operatorname{atan}\frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \end{cases}$$

La figure suivante représente la réponse indicielle pour m= 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 et 0.9

E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Bolg : https://lefiabdellaoui.wordpress.com



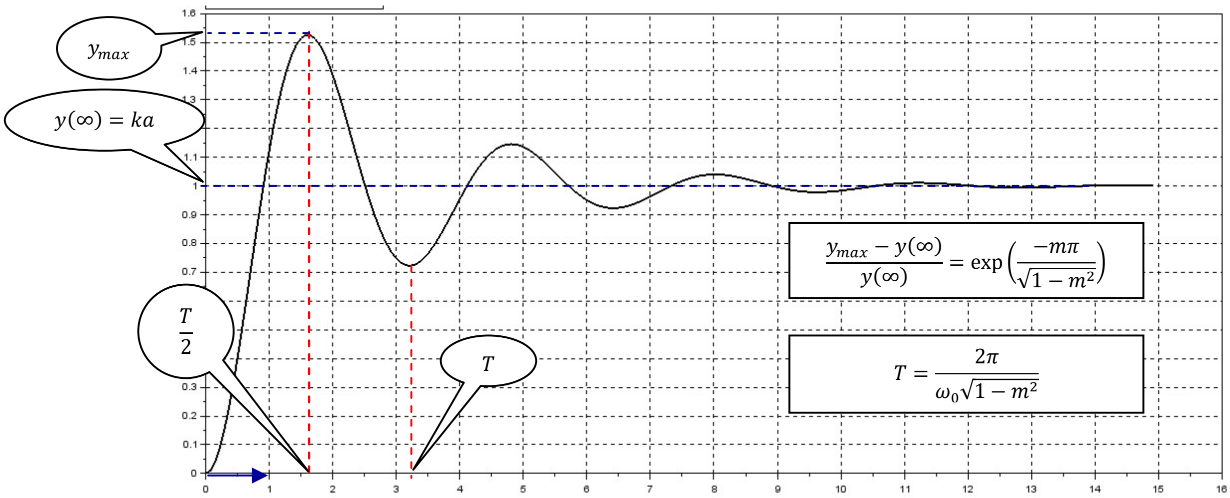
Remarques :

- La sortie est une sinusoïde amortie de pseudo pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1-m^2}$;
- La pseudo-période est donnée par l'équation suivante : $T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-m^2}}$;
- Le dépassement pourcent est donné par l'équation suivante :

$$D(\%) = 100\frac{y_{max}-y(\infty)}{y(\infty)} = 100\frac{y\left(\frac{T}{2}\right)-y(\infty)}{y(\infty)} = 100\exp\left(\frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}\right) ;$$

- L'équation du dépassement $D(\%)$ permet de déduire la valeur du coefficient d'amortissement m.
- L'équation de la pseudo-période permet de déterminer la valeur de la pulsation propre ω_0 ;
- La valeur $y(\infty) = ka$ permet de déduire la valeur du gain k

La figure suivante donne une idée plus claire sur l'identification du système de second ordre si m<1.



E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Bolg : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

Réponse harmonique

La fonction de transfert d'un système de second ordre est donnée par :

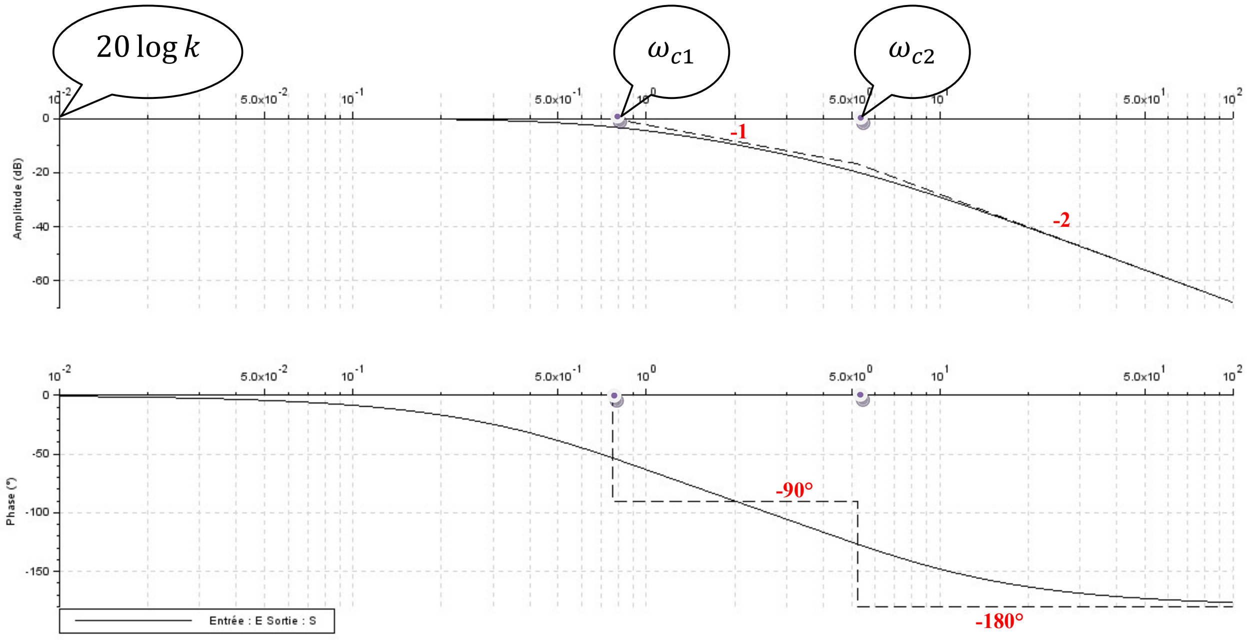
$$H(p) = \frac{k}{1 + \frac{2m}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- Si $m > 1$, $H(p) = \frac{k}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$ Avec : $\begin{cases} \tau_1 = -\frac{1}{p_1} \\ \tau_2 = -\frac{1}{p_2} \\ \tau_1\tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - \sqrt{m^2-1}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + \sqrt{m^2-1}\right) \end{cases}$

La figure suivante représente le diagramme de Bode de la fonction de transfert pour $m > 1$

Si $\tau_1 < \tau_2 \Rightarrow \frac{1}{\tau_1} > \frac{1}{\tau_2}$.

Deux pulsations de coupure : $\omega_{c1} = \frac{1}{\tau_2}$ et $\omega_{c2} = \frac{1}{\tau_1}$

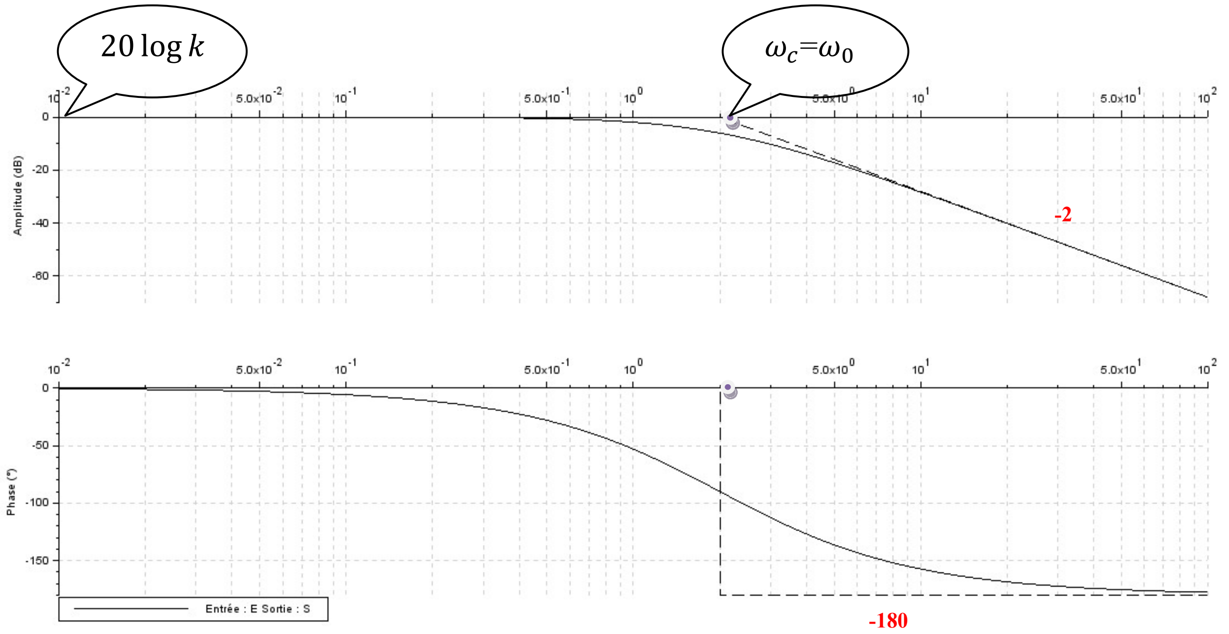


- Si $m = 1$, $H(p) = \frac{k}{(1+\tau_0 p)^2}$ avec $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$

La figure suivante représente le diagramme de Bode pour $m = 1$.

Une seule pulsation de coupure $\omega_c = \omega_0$

E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Bolg : https://lefiabdellaoui.wordpress.com

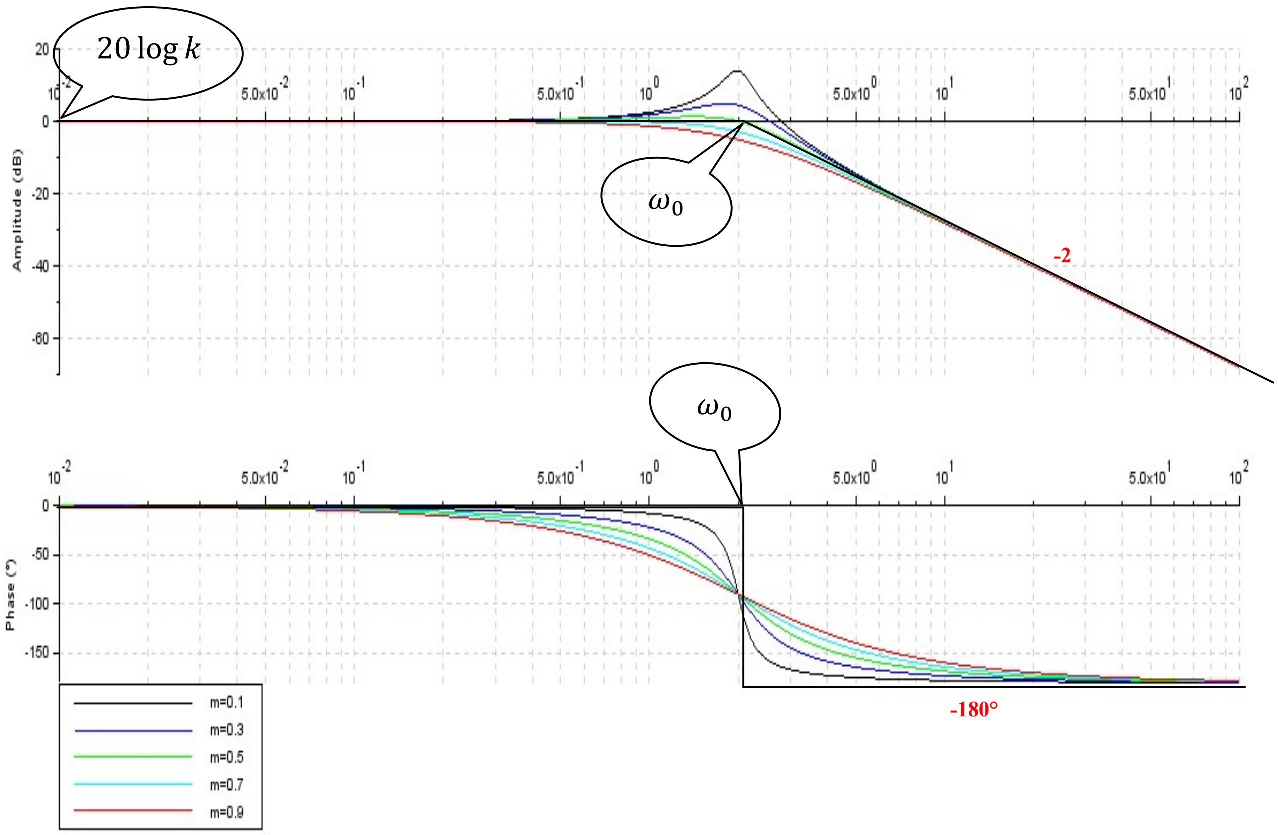


- Si $0 < m < 1$, $H(p)$ possède deux pôles complexes conjugués : $\begin{cases} p_1 = \omega_0\left(-m - j\sqrt{1-m^2}\right) \\ p_2 = \omega_0\left(-m + j\sqrt{1-m^2}\right) \end{cases}$

✓ La figure suivante représente le diagramme de bode pour $m = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 0.9 ;

✓ On remarque que le tracé réel du gain est en dessous de l'asymptote pour $m = 0.7$ et 0.9 ;

✓ On remarque que le tracé réel passe par un maximum pour $m = 0.1, 0.3$ et 0.5. Cela veut dire qu'il existe une pulsation de résonnance pour ces valeurs de m ;



Comment déterminer la pulsation de résonnance ?

$H(j\omega) = \frac{k}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+\frac{2jm}{\omega_0}}$

Posons $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite ;

$H(ju) = \frac{k}{1-u^2+2jmu} = \frac{k(1-u^2-2jmu)}{(1-u^2)^2+4m^2u^2}$

Pour la pulsation de résonance, le gain passe par un maximum c-à-d $|H(ju)|$ passe par un maximum ou encore $|H(ju)|^2$ passe par un maximum.

$|H(ju)|^2 = \frac{k^2(1-u^2)+4k^2m^2u^2}{((1-u^2)^2+4m^2u^2)^2} \rightarrow \frac{d|H(ju)|^2}{du} = 0 \rightarrow u = \sqrt{1-2m^2} \rightarrow \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$

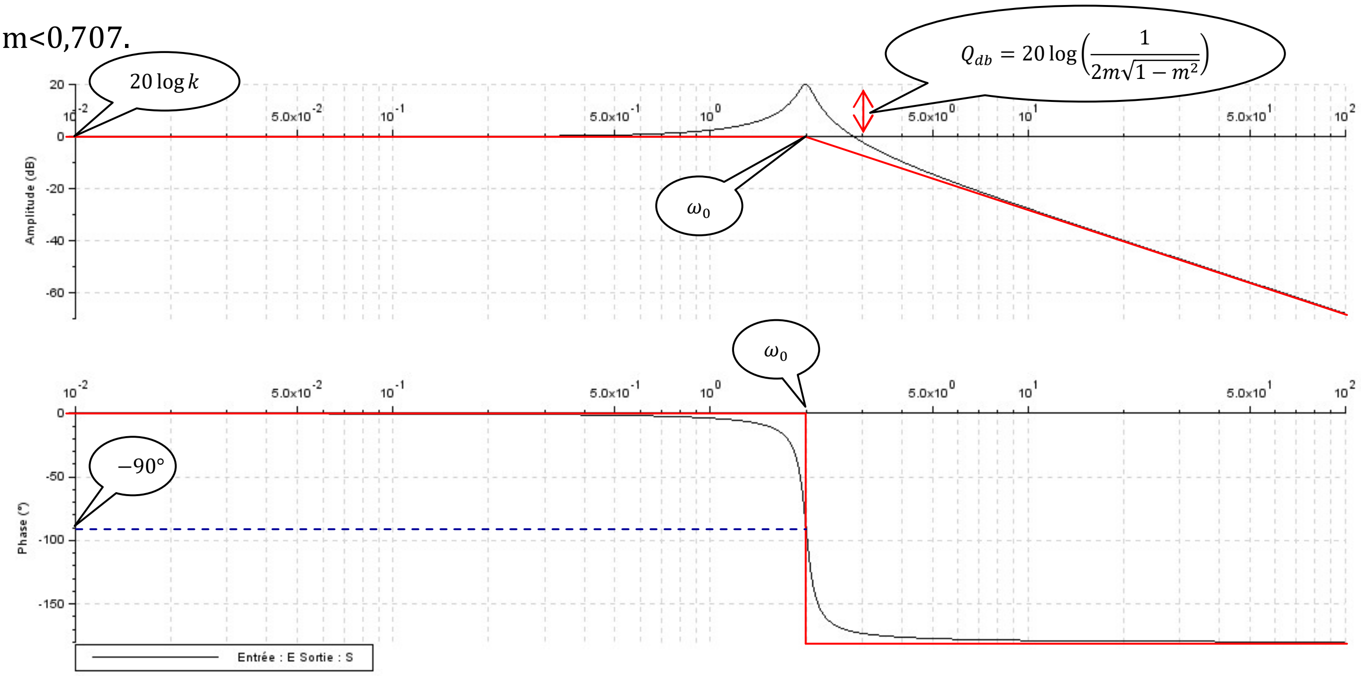
- Il est à noter que la pulsation de résonance est définie pour $1-2m^2 > 0 \rightarrow m < \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

Le facteur de surtension est défini par :

$Q = \frac{|H(j\omega_r)|}{|H(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}} \rightarrow Q_{db} = 20\log|H(j\omega_r)| - 20\log k$

Le facteur de surtension Q permet de déterminer la valeur du coefficient d'amortissement m.

La figure suivante donne une idée plus claire sur l'identification d'un système de second ordre avec m<0,707.



E-mail : lefiabdellaoui2015@gmail.com | Bolg : https://lefiabdellaoui.wordpress.com