Leibniz Online, Nr. 21 (2016)
Zeitschrift der Leibniz-Sozietät e. V.
ISSN 1863-3285

Adalbert Feltz

Betrachtungen zum physikalisch-mathematischen Hintergrund des Phänomens Musik

(im Frühjahr und Sommer 2015)

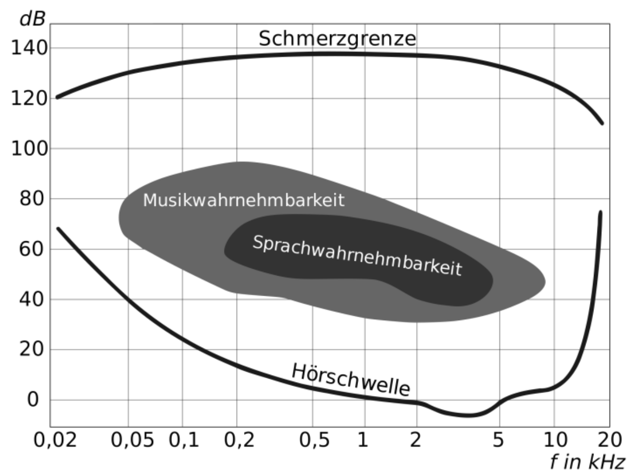
Johann Sebastian Bach war nach einem seiner Biographen, Johann Nikolaus Forkel, in der Lage, sein Clavichord innerhalb einer viertel Stunde temperiert zu stimmen. Welches der in seiner Zeit vorgeschlagenen Konzepte er verwandte oder ob er der eigenen Intuition folgte, ist umstritten.

Girlande auf dem Titelblatt des Wohltemperierten Klaviers (1722) – die darin mitgeteilte Vorschrift zum Stimmen des Quintenzirkels wird bis heute kontrovers interpretiert.

Musik als eine Kunstgattung, die durch das Gehörorgan wahrgenommen wird, deren Aufnahme und Verarbeitung aber zugleich vor allem durch das subjektive ästhetische Empfinden bestimmt ist, wie es sich in einem bestimmten Kulturkreis im Verlauf einer langen Tradition herausgebildet hat, kann, obwohl physikalisch verursacht, in ihrem Wesen kaum adäquat beschrieben werden, wenn man sie auf eine Mannigfaltigkeit von organisierten Schallereignissen reduziert. Sie wirkt auf den Menschen je nach Art und Stimmungslage motivierend oder auch ausgleichend, löst auch Ergriffenheit aus und kann identitätsstiftend sein. Musik verkörpert damit eine Ebene der Kommunikation, die aufgrund der ihr innewohnenden Harmonik geeignet ist, das Miteinander von Menschen zu fördern und Konfrontationen zu mindern. Aufgrund der betont subjektiven Bestimmung des Wesens von Musik kann der Versuch einer Ergründung durch Aufzeigen des physikalisch-mathematischen Hintergrunds von vornherein nur eine kaum zufrieden stellende Annäherung vermitteln. Es ergibt sich die Frage nach der objektiven Existenz einer solchen Ebene der Realität und deren Erkennbarkeit.

I. Anmerkungen zur Physiologie und Physik des Hörens

Der **Hörbereich** des menschlichen Ohres umfasst bekanntlich ca. 20 - 20.000 Hz. Am empfindlichsten ist unser Ohr im Bereich 1000 bis 3500 Hz. Beim Sprechen werden Frequenzen von 200 bis 8000 Hz erzeugt und empfangen (Fledermäuse 50.000 bis 80.000 Hz). Der tiefste Ton, den das menschliche Ohr noch als Ton (nicht als Brummen) empfindet, ist das Subkontra-c mit ν = 16 Hz entsprechend einer Wellenlänge von $\lambda = c/\nu$ = 343,2/16 = 21,45 m. Der höchste Ton, den das Ohr junger Menschen noch wahrnimmt, liegt ca. bei ν = 20.000 Hz (λ = 1,72 cm).



Nach http://de.wikipedia org/wiki/Hörschwelle

Die Hörgrenze sinkt beim Altern bald ab (Grillenzirpen 4000 Hz ist dann nicht mehr hörbar). **Der musikalische Bereich umfasst Töne (Klänge) zwischen 16 und ca. 4000 Hz.**

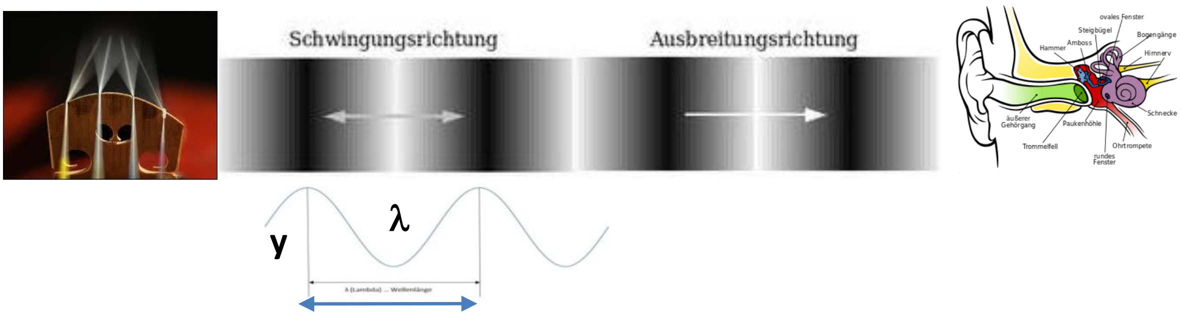
Die Hörschwelle, jene Frequenz, bei der das menschliche Ohr Töne oder Geräusche gerade noch wahrnimmt, ist frequenzabhängig. Das ist im nebenstehenden Diagramm verdeutlicht, es enthält zugleich den Lautstärkepegel der Schmerzgrenze in Abhängigkeit von der Frequenz.

Die von uns als Musik empfundenen Schwingungsfrequenzen können insbesondere in Kombination mit einer rhythmischen Abfolge Melodien ausbilden, und sie stehen zueinander im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen, sogenannten **Intervallen.**

Durch die Art der Erzeugung derartiger Schwingungsfrequenzen mit der menschlichen Stimme, mit Musikinstrumenten, elektrischen Tongeneratoren oder anderen Schallquellen bei gleichzeitiger Variation der Schwingungsamplitude (Lautstärke) lässt sich ein breites Spektrum von Empfindungen vermitteln. Die Übertragung auf das menschliche Ohr kommt durch Schallwellen, longitudinale Wellen, zustande, periodische Verdichtungen und Druckminderungen der Luft in Ausbreitungsrichtung, wobei der Zusammenhang zwischen **Frequenz** ν und der **Wellenlänge** λ durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit **c = 343,2m/s** (bei 20°C in trockener Luft) vermittelt wird:

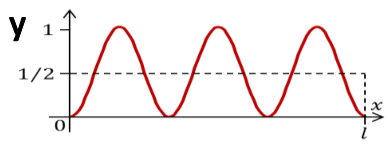
$$\mathbf{c = \nu * \lambda}$$

$$\boxed{\nu = \frac{c}{\lambda}}$$



Die Ohrmuschel bündelt den Schall aufs Trommelfell, dessen Schwingungen über Hammer, Amboss, Steigbügel auf die Außenhaut der Schnecke (ca. 30 m Länge) und von dort über die Flüssigkeit im Inneren auf ca. 30000 Haarzellen übertragen werden, die mit Nerven verbunden sind und die mechanische Schwingungen in elektrische Signale wandeln. Erst im Gehirn wird das Gehörte durch Vergleich mit erlernten Mustern verstanden. Im Hauptsprachbereich 1 bis 3 kHz wird die Intensität, der Schalldruck, im Ohr auf den 22-fachen Wert verstärkt.

Die **Tonhöhe** ist durch die Frequenz **ν = c/λ** bestimmt. Die Lautstärke bzw. **Schallintensität I** kann physikalisch anschaulich als Produkt aus Geschwindigkeit und Schalldruck interpretiert werden, und letzterer ist gleich dem halben Quadrat der maximalen Amplitude **y** der Luftverdichtung/Verdünnung einer sinusförmigen longitudinalen Schwingung:



$$\boxed{I = \frac{1}{2} c * y^2 \left(\frac{m}{s}\frac{N}{m^2}\right) bzw \left(\frac{W}{m^2}\right)}$$

$$\boxed{L_W = 10 \lg\left(\frac{W}{W_0}\right) dB}$$

Das Ergebnis ist Leistung W pro Fläche, mit der Musik an unser Trommelfell „pocht". Ein solcher Sachverhalt kann mit Hilfe der Definition einer Bezugsgröße, etwa der unteren Hörschwelle $W_0 = 10^{-12}$ Watt, auch durch die Angabe in Dezibel L_w mit der Einheit dB beschrieben werden: *Sinfonieorchester 138 dB (66,5 W), Hüsteln 10 db, Klatschen 25 dB*.

Die Erzeugung eines Tones gegebener Frequenz ν_0 basiert bekanntlich auf der periodischen mechanischen Bewegung eines elastischen Körpers, für den der lineare Kraftansatz einer **harmonischen Schwingung P = - k * L** mit P als der zur Auslenkung L entgegengesetzt gerichteten Spannkraft (k =

Kraftkonstante) sehr weitgehend erfüllt ist. Die Lösung der Differentialgleichung führt zu der bekannten Formel für den harmonischen Oszillator

$$\upsilon_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Für eine eingespannte Saite ergibt sich eine einfachere Lösung – ohne π im Nenner

$$\nu_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{L*m}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{L*\frac{m*\pi*r^2L}{\pi*r^2L}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{L^2*\rho*q}}$$

Durch Umformen erhält man einen Zusammenhang zwischen Frequenz ν_0 und der Länge L der Saite sowie ihrer Materialdichte ρ und dem Querschnitt q, und da 2L = λ, folgt

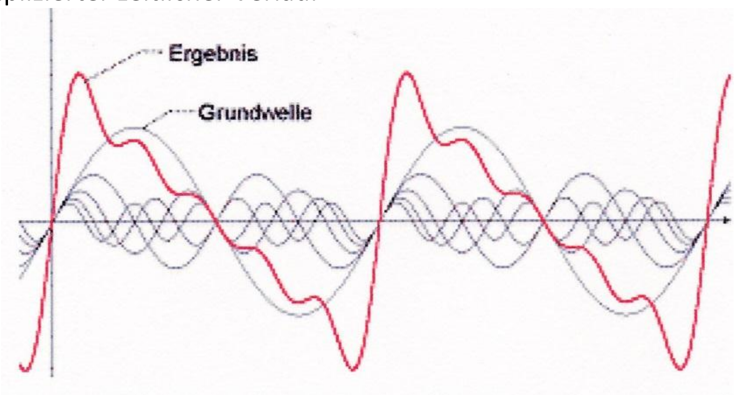
$$\nu_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{P}{\rho*q}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{P}{\rho*q}} = \frac{2}{D*\lambda}\sqrt{\frac{P}{\pi*\rho}}$$

Die Tonfrequenz ν_0 nimmt mit zunehmender Saitenlänge L und zunehmendem Durchmesser D der Saite ab, bei zunehmender Spannung mit $\sqrt{P}$ zu und ebenso bei zunehmender Materialdichte mit $\sqrt{\rho}$ ab.

Man erhält so eine Vorstellung, wie man zur Zeit des Pythagoras bei konstanter Spannung P einer Saite der Dicke D und aus einem Material bestimmter Dichte ρ durch Variation der Saitenlänge mittels Verschieben des Stegs am Monochord experimentierte. So fand man heraus, dass Längen L, die im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen stehen, in der Abfolge bzw. im Akkord als harmonisch empfunden werden und zwar umso mehr, je näher das Verhältnis an 2/1 herankommt. Die Pythagoreer spürten dabei die Zahlenverhältnisse bzw. Intervalle auf, die in Wirklichkeit Frequenzverhältnisse repräsentieren und die sich, wie wir heute wissen, aus der anharmonischen Schwingung realer elastischer Körper zwangläufig ergeben.

Die harmonische Schwingung ist nur im Grenzfall höchster Materialelastizität und auch dann nur annähernd verwirklicht (z. B. Quarz). Reale schwingungsfähige Systeme verkörpern **anharmonische Oszillatoren**, da die Beziehung zwischen Kraft P und Auslenkung L nicht streng linear ist, die Rückstellkraft P in der Auslenkungsrichtung geschwächt ist, was durch einen zusätzlichen Term im Kraftansatz $\mathbf{P = -k*L - k*L^2}$ Berücksichtigung findet. Aus der Lösung der Differentialgleichung folgt zwangsläufig die Entstehung von Obertönen, im äquidistanten Abstand ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz: $\boldsymbol{\nu_n = n*\nu_0}$. Aus der Superposition einer im Allgemeinen intensitätsmäßig dominanten Grundfrequenz mit deren Obertönen sowie der Obertöne untereinander resultieren **Klänge, deren Klangfarbe durch Unterschiede im Intensitätsverhältnis zustande kommt.**

Es resultiert infolge Überlagerung von Grundton und den ebenfalls sinusförmigen Oberschwingungen ein komplizierter zeitlicher Verlauf

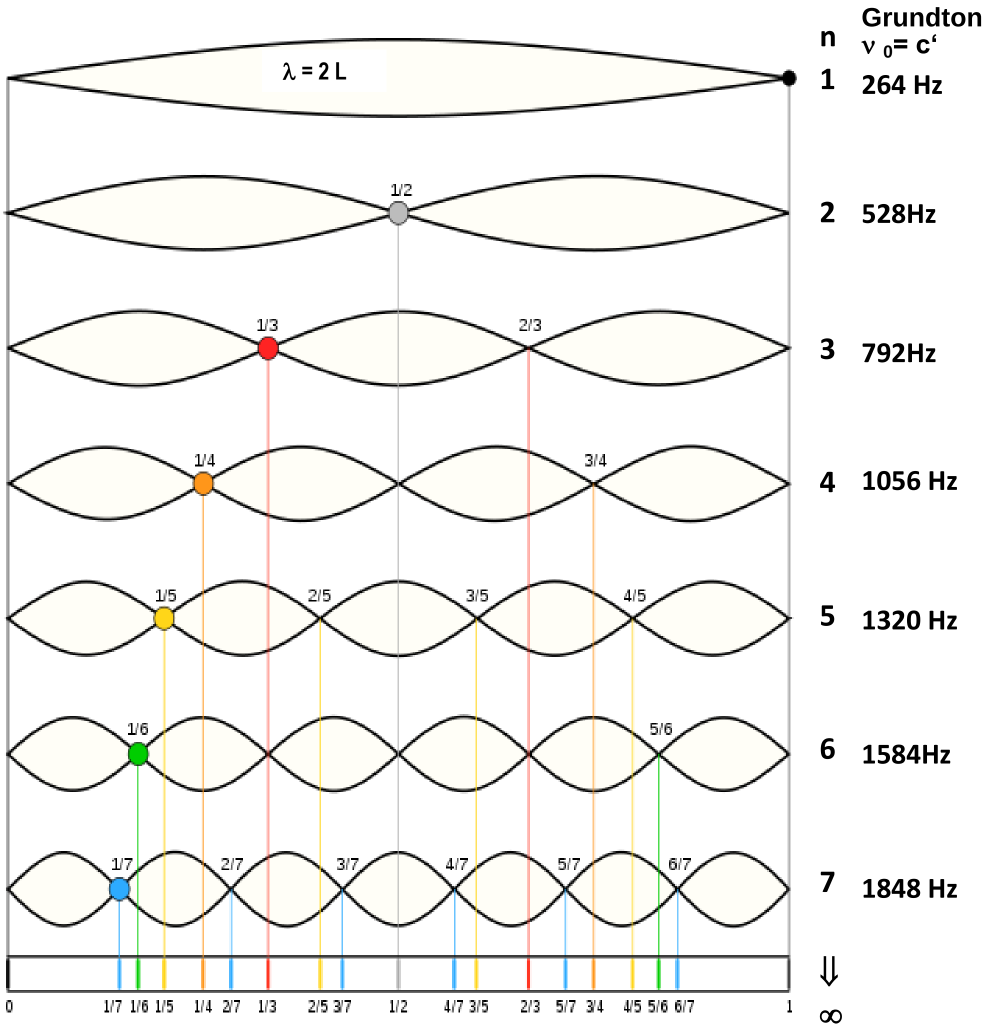


Frequenzspektrum eines Klanges, resultierend aus einem reinen Ton überwiegender Schallstärke und einer Zahl schwächerer Obertöne höherer Frequenz und die resultierende Well (nach google „grundwelle obertöne klang“).

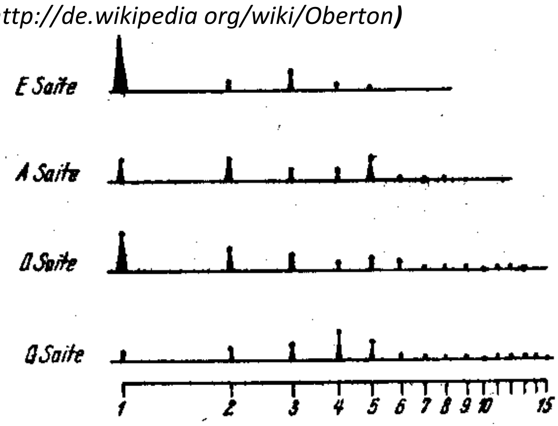
Die Tonhöhe wird allein durch die Frequenz des Grundtons bestimmt, kann aber in der Wechselwirkung mit Oberschwingungen wohl auch durch die Lautstärke beeinflusst werden. Die Klangfarbe wird durch das Intensitätsverhältnis der Oberschwingungen (Obertöne) relativ zum Grundton sowie der Obertöne untereinander bestimmt. Letzteres bestimmt den Klang verschiedener Musikinstumente.

Nach dem Erlöschen des Einschwingvorgangs hört das Ohr den Unterschied angeblich nicht mehr, und ebenso registriert das Ohr nicht unterschiedliche Phasenbeziehungen der Teiltöne.

Als ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz bilden die Obertöne eine Reihe von Teiltönen, die die Basis für eine Art naturgegebener Musik darstellen. Von jedem beliebigen Grundton leitet sich eine Naturtonreihe bzw. Obertonreihe ab. Grundton und Oberschwingungen sind für eine beidseitig eingespannte Seite der Länge L ausgehend vom Grundton, z. B. ν_0 = c' = 264 Hz gemäß $\boldsymbol{\nu_n = n * \nu_0}$ in der folgenden Darstellung angegeben.



Grundschwingung und Oberschwingungen einer eingespannten idealisierten Saite (nach http://de.wikipedia org/wiki/Oberton)



Frequenzspektrum der leeren Saiten einer Geige nach Miller (aus Handbuch der Physik, Bd. 8)

II. Die als Reine Stimmung empfundene Naturtonreihe und die davon abgeleiteten Tonleitern

Die Obertonreihe stellt eine Aneinanderreihung der harmonischen Teiltöne (reine Sinusschwingungen) eines Klangs dar. Sie ist die wichtigste Tonleiter und Grundlage aller Musik, offenbar weil sie objektiv gegeben ist, aus den Schwingungsgesetzen der Natur hervorgeht.

Unser Harmonieempfinden, das wir mit Hilfe unseres in der Evolution entstandenen Gehörorgans in Verbindung mit einem in kultureller Tradition entwickelten Hörbewusstsein wahrnehmen, ist an ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz und deren Relation im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen geknüpft. Dass wir derartige Intervalle $\mathbf{q = \nu_{n+1}/\nu_n}$ mit mehr oder weniger Wohlklang (Konsonanz oder auch Dissonanz) wahrnehmen, diese Erkenntnis wurde von Pythagoras und seiner Schule um -500 empirisch durch systematische Variation der Länge einer über einen Resonanzkörper gespannten Saite gewonnen. Das menschliche Ohr erfasst wohl die Tonhöhe eines Klangs, die Frequenz eines benachbarten Tones bzw. Klangs aber ganz bevorzugt erst dann, wenn das Frequenzverhältnis durch ein Verhältnis kleiner ganzer Zahlen gegeben ist. Wir registrieren Musik in Intervallen, empfinden dabei eine umso größere Harmonie (Konsonanz) je größer das aus kleinen ganzen Zahlen bestehende Verhältnis der Frequenzen ist. Die Oktave mit q = 2/1 ist demnach Ausdruck einer bestmöglichen Konsonanz, und es gilt zum Beispiel

$$\nu_2 = \nu_1 * q_{2,1} = \nu_0 * q_{1,0} * q_{2,1} = \nu_0 * q_{2,0} \text{ bzw. } \nu_n = \nu_0 * q_{n,0}$$

Es ergibt sich auf diese Weise ein geordneter additiver Intervallraum: Der Addition von Intervallen entspricht die Multiplikation der Frequenzverhältnisse und da logischerweise auch die Umkehrung erlaubt sein muss, bedeutet Subtraktion von Intervallen Division der zugehörigen Frequenzverhältnisse. Der gesamte Tonumfang ist gemäß unserer europäischen Musiktradition in Oktaven strukturiert:

∗ **Oktave:** Geht man z. B. vom Grundton **c‘** aus, dann gibt das Verhältnis ν_2/ν_1 eine erste Oktave wieder, ebenso ν_4/ν_2 eine zweite und ν_8/ν_4 eine dritte usw., insgesamt also gibt es zu einem Grundton bei Multiplikation gemäß obiger Formel $\nu_n = \nu_0 * q_{n,0}$ eine Anzahl von n Oktav-Intervallen. Für den musikalisch genutzten Tonraum zwischen 20 und 4000 Hz ergeben sich 7 bis 8 Oktaven, und diese findet man ja auch in der Tastatur von Instrumenten vor.

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{528}{264} = \frac{2}{1} \quad \frac{\nu_4}{\nu_2} = \frac{1056}{528} = \frac{2}{1} \quad \frac{\nu_8}{\nu_4} = \frac{2112}{1056} = \frac{2}{1} \qquad \frac{\nu_n}{\nu_0} = 2^n \Rightarrow n = \frac{\lg(\nu_n/\nu_0)}{\lg 2} = \frac{\lg(4000/20)}{\lg 2} = 7{,}64$$

∗ **Ouinte:** Das nächste Frequenzverhältnis, das sich innerhalb der ersten Oktave einordnet, ist $\nu_3/\nu_2 = 3/2$, ist also das **1,5-fache** des Grundtons c‘ und entspricht dem Ton **g‘.**

$$\frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{792}{528} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

∗ **Ouarte:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis $\nu_4/\nu_3 = 4/3$, das **1.333-fache** des Grundtones und damit dem Ton **f‘***(4/2 wäre bereits die nächste Oktave)*

$$\frac{\nu_4}{\nu_3} = \frac{1056}{792} = \frac{4}{3} = 1{,}3333$$

∗ **Große Terz:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis $\nu_5/\nu_4 = 5/4$, das **1.25-fache** des Grundtones und damit dem Ton **e‘**.

$$\frac{\nu_5}{\nu_4} = \frac{1320}{1056} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

∗ **Große Sexte:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis $\nu_5/\nu_3 = 5/3$, das **1.667-fache** des Grundtones und damit dem Ton **a‘** (5/2 liegt bereits außerhalb der Oktave

$$\frac{\nu_5}{\nu_3} = \frac{1320}{792} = \frac{5}{3} = 1{,}667$$

∗ **Kleine Terz:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis $\nu_6/\nu_5 = 6/5$, das **1.2-fache** des Grundtones und damit dem Ton **es‘** (6/4 = 3/2)

$$\frac{\nu_6}{\nu_5} = \frac{1584}{1320} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

∗ **Kleine Sexte:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis ν_8/ν_5 **= 8/5**, das **1.6-fache** des Grundtones und damit dem Ton **as'.**

$$\boxed{\frac{\nu_8}{\nu_5}=\frac{2112}{1320}=\frac{8}{5}=1{,}6}$$

∗ **Kleine Septime:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis ν_9/ν_5 **= 9/5,** das **1.8-fache** des Grundtones und damit dem Ton **b'.**

$$\boxed{\frac{\nu_9}{\nu_5}=\frac{2376}{1320}=\frac{9}{5}=1{,}8}$$

Hier gibt es eine zweite Variante, das Frequenzverhältnis **ν_{16}/ν_9 = 16/9 = 1,778**

$$\boxed{\frac{\nu_{16}}{\nu_9}=\frac{4224}{2376}=\frac{16}{9}=1{,}778}$$

∗ **Große Septime:** Ihr entspricht das Frequenzverhältnis ν_{15}/ν_8 **= 15/8**, das **1.875-fache** des Grundtones und damit dem Ton **h'**.

$$\boxed{\frac{\nu_{15}}{\nu_8}=\frac{2376}{2112}=\frac{15}{8}=1{,}875}$$

∗ **Großer Ganzton (Große Sekunde**): Ihm entspricht das Frequenzverhältnis ν_9/ν_8 **= 9/8**, das **1.125-fache** des Grundtones und damit dem Ton **d'**.

$$\boxed{\frac{\nu_9}{\nu_8}=\frac{2376}{2112}=\frac{9}{8}=1{,}125}$$

∗ **Kleiner Ganzton (Kleine Sekunde):** Ihm entspricht das Frequenzverhältnis ν_{10}/ν_9 **= 10/9**, das **1.111-fache** des Grundtones und damit dem Ton **des'**.

$$\boxed{\frac{\nu_{10}}{\nu_9}=\frac{2640}{2376}=\frac{10}{9}=1{,}111}$$

∗ **Kleiner diatonischer Halbton:** Ihm entspricht das Frequenzverhältnis ν_{16}/ν_{15} **= 16/15**, das **1.0667-fache** des Grundtones und damit dem Ton **cis'.**

$$\boxed{\frac{\nu_{16}}{\nu_{15}}=\frac{4224}{3960}=\frac{16}{15}=1{,}0667}$$

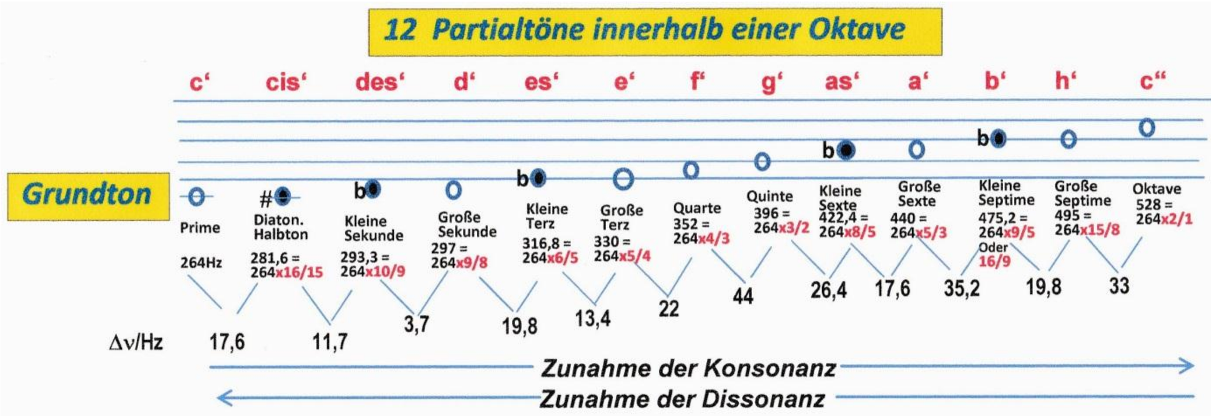
In der Tat, die Frequenzen der Obertöne, die sich von einem Grundton ableiten und die in die Intervallbildung eingehen, überstreichen quasi den gesamten musikalisch genutzten Tonraum, und so ist es nahe liegend, die Bildung von Frequenzverhältnissen mit Zahlen >16 nicht weiter zu verfolgen. Hinzu kommt, dass der Missklang, die Dissonanz, zunimmt je weiter man sich vom Verhältnis 2/1 entfernt. Die folgende Zusammenstellung zeigt, dass sich die zu jedem Grundton gehörende Naturtonreihe allein aus den Verhältnissen kleiner ganzer Zahlen ≤ 16 ohne 7, 11, 13, 14 rein formal ergibt.

Formale Ableitung der ganzzahligen Kombinationen innerhalb einer Oktave 2 : 1

2 : 1 = 2	**Oktave**	~~7 : 5 = 1,4~~		**10 : 9 = 1,111 Kleiner Ganzton**	12 : 6 = 2 : 1	
3 : 2 = 1,5	**Quinte**	~~7 : 4 = 1,75~~		10 : 8 = 5 : 4	15 : 12 = 5 : 4	
4 : 3 = 1,333	**Quarte**	~~8 : 7 = 1,143~~		~~10 : 7 = 1,428~~	15 : 10 = 3 : 2	
4 : 2 = 2 : 1		8 : 6 = 4 : 3		10 : 6 = 5 : 3	15 : 9 = 5 : 3	
5 : 4 = 1,25	**Große Terz**	**8 : 5 = 1,6**	**Kleine Sexte**	10 : 5 = 2 : 1	**15 : 8 = 1.875 Große Septime**	
5 : 3 = 1,667	**Große Sexte**	8 : 4 = 2 :1		~~Kombinationen mit 11, 13, 14~~	**16 : 15 = 1,06667 Kleiner (diatonischer) Halbton**	
6 : 5 = 1,2	**Kleine Terz**	**9 : 8 = 1,125 Großer Ganzton**		12 : 10 = 6 : 5	16 : 12 = 4 : 3	
6 : 4 = 3 : 2		~~9 : 7 = 1,284~~		12 : 9 = 4 : 3	16 : 10 = 8 : 5	
6 : 3 = 2 : 1		9 : 6 = 3 : 2		12 : 8 = 3 : 2	**16 : 9 = 1,778 nahe Kl. Septime =**	
~~7 : 6 = 1,167~~		**9 : 5 = 1,8**	**Kleine Septime**	~~12 : 7 = 1,714~~	16 : 8 = 2 : 1	**Quarte x Quarte**

Demnach führt die formale Bildung von Verhältnissen zweier ganzer Zahlen ≤ 16 innerhalb einer Oktave ≤ 2/1 zu den Intervallen von 12 Partialtönen. Dabei wurden allerdings Zahlenkombinationen mit den Zahlen 7, 11, 13 oder 14 ausgelassen, weil sich herausgestellt hat, dass Intervalle, in die eine dieser Zahlen eingeht, sich als ausgesprochen stark dissonant erweisen. Es spiegelt sich darin wohl ein tiefes Symmetrieprinzip der Natur wider. Beispielhaft sei darauf verwiesen, dass organische Ringmoleküle mit derartiger Anzahl von Gliedern symmetriebedingt weniger stabil bzw. bei der Bildung sterisch und damit kinetisch weniger begünstigt sind. Letzteres weist offenbar darauf hin, dass die Symmetrieeigenschaften der Bindungsfunktionen des Kohlenstoffatoms im lebenden organischen Gewebe als ein Urgrund für dieses erstaunliche Phänomen infrage kommen könnten.

Ordnet man die Intervalle ausgehend vom Grundton c' mit steigender Frequenz an, ergibt sich auf dem skizzierten Weg eine Tonleiter, die sich als eine Naturtonreihe darstellt, geht sie doch zwingend aus einem naturgegebenen Grundprinzip hervor, der Schallerzeugung durch die periodische Bewegung eines anharmonisch schwingenden Körpers. Man erkennt, wir hören nicht die zum Teil durch-aus stark variierenden Frequenzdifferenzen der Partialtöne, sondern Intervalle, die im Einklang mit der mathematisch-physikalischen Superposition von Schwingungen der Obertonreihe im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen zustande kommen.



Von jedem Grundton ausgehend kann in Analogie zum gezeigten Beispiel eine Naturtonreihe (Obertonreihe) aufgebaut werden. Offenbar weil wir selbst ein Teil der Natur sind, kommen Melodien und nach den Gesetzen der Harmonik zusammengestellte Akkorde, die auf einer derartigen Naturtonreihe beruhen, unserem Harmonieempfinden besonders entgegen. Man spricht daher auch von der **Reinen Stimmung**. Bei Verwendung der bereits angewandten Regeln der Kombination von Intervallen kann gezeigt werden, dass die 12 Partialtöne der Naturtonreihe auf die **Grundintervalle Oktave, Quinte und Große Terz** zurückgeführt werden können. Es ist dieses ein Wesensmerkmal der reinen Stimmung.

Aufbau der Intervalle der reinen Stimmung aus den Grundintervallen
Oktave Ok, Quinte Qi und Große Terz GT

Oktave **Ok**	**2/1**		Große Sexte **GSe = Ok – GT- Qi**	**5/3**
Quinte **Qi**	**3/2**		Großer Ganzton **GG = 2 Qi – Ok**	**9/8**
Große Terz **GT**	**5/4**		Kleiner Ganzton **KG = Ok+GT–2Qi**	**10/9**
Quarte **Qa = Ok – Qi**	**4/3**		Große Septime **GSp = Qi + GT**	**15/8**
Kleine Sexte **KSe = Ok – GT**	**8/5**		Kleine Septime **KSp = Ok – GG**	**16/9** bzw.**Ok –KG 9/5**
Kleine Terz **KT = Qi – GT**	**6/5**		Diaton. Halbton **DH = Ok–Qi–GT**	**16/15**

In der neuzeitlichen europäischen Musikkultur werden aus den Naturtonreihen, die sich jeweils von einem Grundton ableiten, je zwei Tonleitern mit jeweils 8 Tönen (Klängen) gebildet,

die Dur-Tonleiter und die Moll-Tonleiter.

Die Intervalle einer derartigen Tonleiter lassen sich

5 Ganztonschritten (1) und **2 Halbtonschritten (1/2)**

zuordnen. Deren Abfolge ausgehend vom Grundton (Prime) ist

∗ **in der Dur – Tonleiter stets**

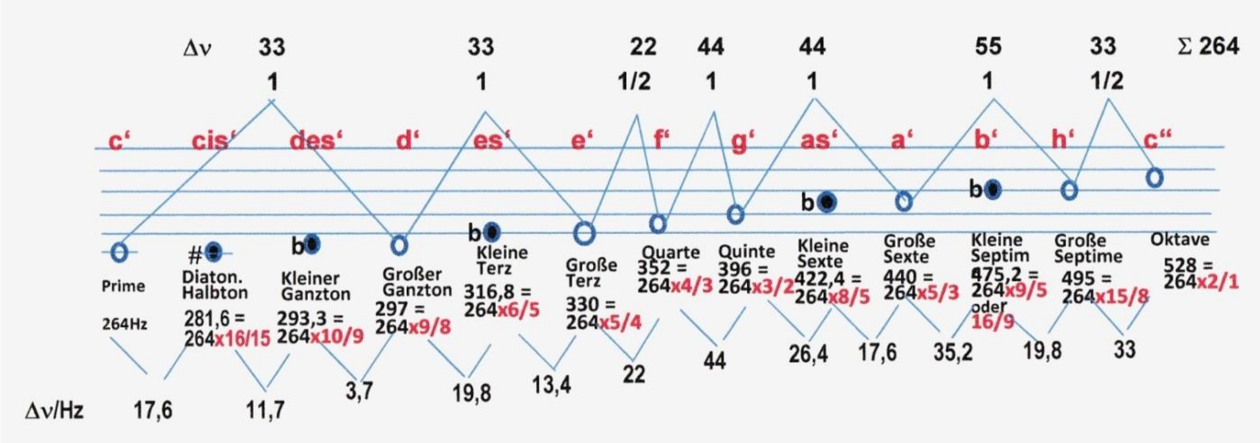
Großer Ganzton – Große Terz – Quarte – Quinte – Große Sexte – Große Septime – Oktave -
(1) (1) (1/2) (1) (1) (1) (1/2)

∗ **in der Moll – Tonleiter stets**

Großer Ganzton - Kleine Terz - Quarte - Quinte – Kleine Sexte - kleine Septime - Oktave
(1) (1/2) (1) (1) (1/2) (1) (1)

Es ist die feststehende Abfolge der Intervalle, die ausgehend vom Grundton einer Naturtonreihe die verschiedenen Tonarten erzeugt, die jeweils durch eine Tonleiter gekennzeichnet sind, deren Töne (Klänge) entweder keine oder die Vorzeichen # bzw. b aufweisen.

C - Dur

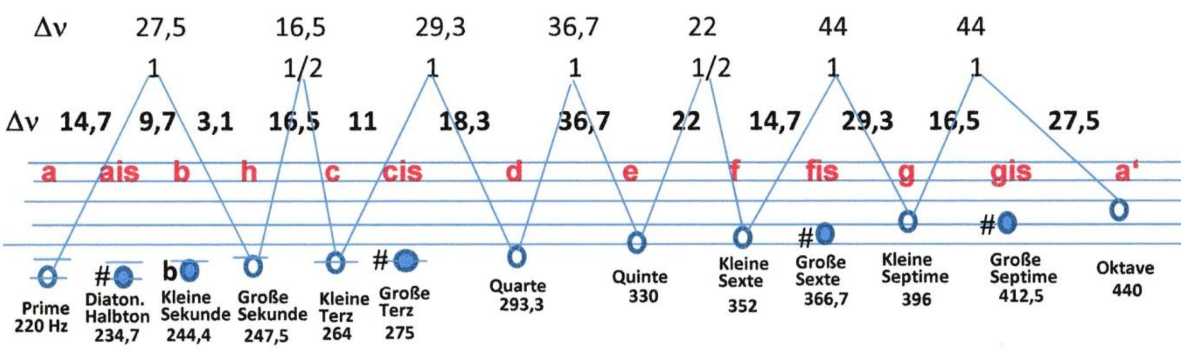


C-Dur Tonleiter: Ausschnitt von 8 Partialtönen der Naturtonreihe mit Start vom Grundton c‘ in der Intervallabfolge (1) (1) (1/2) (1) (1) (1) (1/2)

Man kann nun ausgehend von der C-Dur Tonleiter in 2 Varianten die für eine Moll-Tonart einzuhaltende Intervallabfolge realisieren:

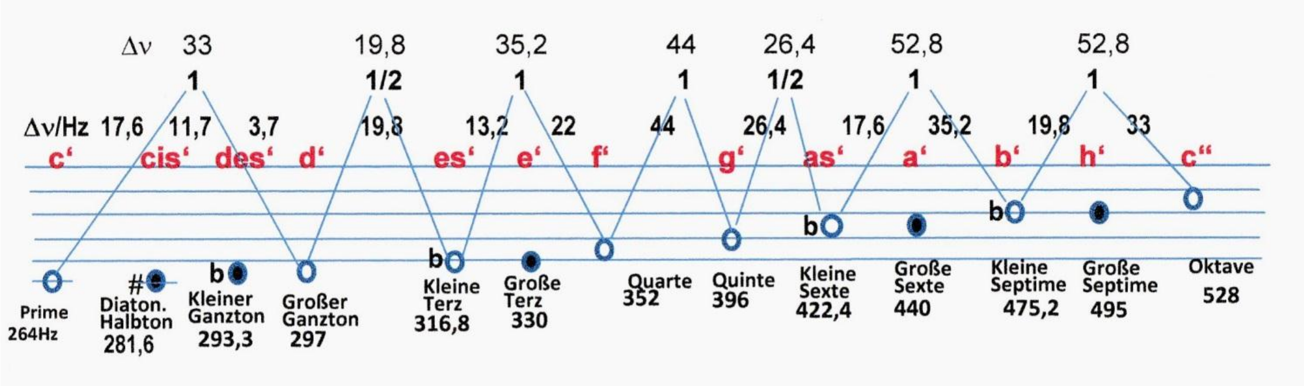
- Die Intervalle der C-Dur Tonleiter bleiben unverändert, dann erfordert die einzuhaltende Intervallabfolge den Start bei a‘ bzw. eine kleine Terz tiefer bei a. ⇒ Es entsteht die Tonart a-moll (ohne Vorzeichen wie C Dur).
- Der Start beim Grundton c‘ bleibt bestehen, und es werden nach Maßgabe der einzuhaltenden Intervallabfolge die von C-Dur bzw. a-moll nicht beanspruchten Töne aus der zugrunde liegenden Naturtonreihe verwendet. ⇒ Es entsteht die Tonart c–moll (mit 3 Tönen, die jeweils ein b als Vorzeichen aufweisen).

a-moll



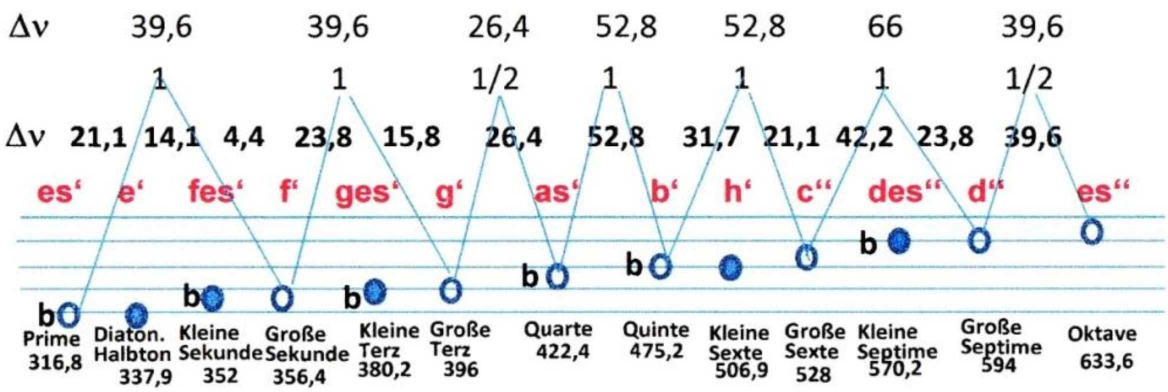
In der zu C-Dur gehörenden Moll-Tonart a-moll ist die Abfolge der Ganz- und Halbtonschritte verändert, weil eine kleine Terz tiefer mit der Tonleiter begonnen wurde. Bis auf eine Ausnahme stimmen die Tonhöhen in der C-Dur- und a-moll-Tonart überein: Der Ganzton in C-Dur bildet die Quarte in a-moll, ist aber um einen kleinen Betrag, das **Syntonische Komma**, erniedrigt: **(297/293,3) = (81/80). Hier müsste, um die reine Stimmung korrekt aufrecht zu erhalten, bei der Intonation für den Ton d‘ eine Korrektur angebracht werden, d.h. man müsste bei Instrumenten mit fixierten Intervallen ein zusätzliches Intervall einfügen, wenn die reine Stimmung gewährleistet bleiben soll.**

c-moll



Man erkennt, dass in diesem Fall gegenüber der C-Dur-Tonleiter keine Intervalle auftreten, die nicht bereits in der auf den Grundton c' gegründeten Naturtonreihe vorhanden wären. Es ist daher naheliegend, die c-moll Tonart nun auch noch durch die zugehörige Dur-Tonleiter Es-Dur zu ergänzen, die eine kleine Terz höher beginnt.

Es-Dur



Folgerichtig ist in Es-Dur der Große Ganzton, es handelt sich um den Ton f, gegenüber der Quarte in der c-moll Tonart um ein syntonisches Komma erhöht: (356,4/352) = (81/80).
Zusammenfassend kann man feststellen: Auf der Basis einer auf den Grundton c gegründeten Naturtonreihe könnte man in den Tonarten C-Dur, a-moll sowie Es-Dur und c-moll in **reiner Stimmung** musizieren, wenn man zusätzliche Töne zur Korrektur von d und f einrichtet und diese einbezieht, je nach dem man in Dur oder Moll intoniert: Dazu würde bei Instrumenten mit fixierten Tönen eine Tastatur von (12 + 2) x 7,5 Oktaven = ca. 105 Tasten ausreichen.

Solche Musik wäre aber wohl langweilig. Man möchte auch Naturtonreihen musikalisch in reiner Stimmung nutzen, die sich aus den anderen Grundtönen innerhalb einer Tonleiter ableiten, und das schließt dann zugleich die Forderung ein, von einer Tonart in eine andere überleiten zu können.

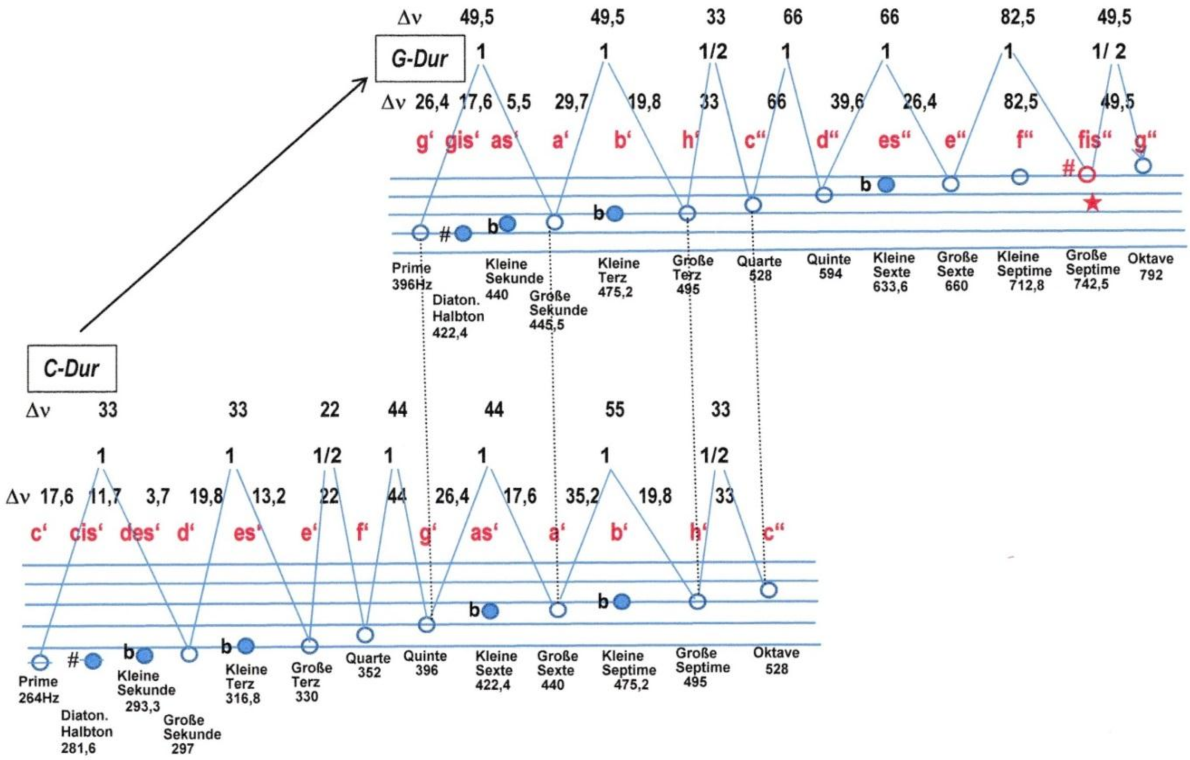
Dur	**Ces**	**Ges**	**Des**	**As**	**Es**	**B**	**F**	**C**	**G**	**D**	**A**	**E**	**H**	**Fis**	**Cis**
	(7b)	***(6b)***	***(5b)***	***(4b)***	***(3b)***	***(2b)***	***(b)***		***(#)***	***(2#)***	***(3#)***	***(4#)***	***(5#)***	***(6#)***	***(7#)***
moll	**as**	**es**	**b**	**f**	**c**	**g**	**d**	**a**	**e**	**h**	**fis**	**cis**	**gis**	**dis**	**ais**

III. Modulation von einer Tonart in eine benachbarte Tonart

∗ Der Übergang von C Dur nach G Dur in reiner Stimmung

Multiplikation der Intervalle der C Dur Tonleiter mit dem Intervall der Quinte (3/2) liefert sämtliche Töne der G-Dur-Tonleiter.

Man startet also mit der Quinte der C-Dur–Tonleiter, dem „g" als Prime der G-Dur-Tonleiter und hat nun der für Dur-Tonarten geltenden Vorschrift zur Abfolge von Ganz- und Halbtonschritten zu folgen.



Es ergeben sich an 2 Intervallen Verstimmungen, und es tritt ein neuer Ton auf, der in der C-Dur Tonleiter nicht enthalten ist.

1. Ausgehend von g' als Grundton verlangt die Dur-Abfolge die große Septime fis" (in C-Dur nicht enthalten): ★
396∗15/8 = 742.5 Hz

2. Ausgehend von c' wird a' durch die große Sexte gebildet:
a' = 264 ∗ 5/3 = 440 (Kammerton)
Ausgehend von g' = 264 ∗3/2 = 396 wird a' durch den großen Ganzton gebildet: a' = 396 ∗ 9/8 = 445.5 Hz

⇒ Syntonisches Komma $\dfrac{445{,}5}{440} = \dfrac{81}{80} = 1{,}0125$

3. Das in G-Dur nicht verwendete f" ist mit 712,8 Hz etwas höher als f"mit 704 Hz in C-Dur

⇒ Syntonisches Komma $\dfrac{712{,}8}{704} = \dfrac{81}{80} = 1{,}0125$

Die beim Übergang von C nach G-Dur eintretende Verstimmung bei zwei Intervallen wird durch das Syntonische Komma beschrieben.
Es ergibt sich aus der Differenz zwischen großem und kleinem Ganzton:
Großer Ganzton GG - Kleiner Ganzton KG: (9/8) : (10/9) = 81/80
Das Produkt der Frequenzverhältnisse bzw. das Aneinanderfügen der Intervalle von GG und KG ergibt die Große Terz GT: (9/8) x(10/9) = 90/72 = 5 : 4

Zusammenfassend kann man feststellen:

In der reinen Stimmung erklingen Oktaven und Quinten rein. Das schließt beim Übergang in eine nächste Tonart (Tetrachord-Folge) ein:

- Ausgehend von C- nach G-Dur Aufkommen eines neuen Tones, „fis", der in der Ausgangstonart nicht vorhanden ist,
- Verstimmung des Ganztones in G Dur gegenüber der Großen Sexte in C Dur, im obigen Fall a' um ein syntonisches Komma in der Folgetonart
- Verstimmung der Quarte in der nächsten Oktave von C Dur durch die Kl. Septime in G Dur, f''/f' (f'' wird aber musikalisch in G Dur nicht beansprucht)

∗ Der Übergang von G Dur nach D Dur in reiner Stimmung

Multiplikation der Intervalle der G Dur Tonleiter mit dem Intervall der Quinte (3/2) liefert sämtliche Töne der D-Dur-Tonleiter.

Man startet also mit der Quinte der G-Dur-Tonleiter, dem „d", als Prime der D-Dur-Tonleiter und hat nun der für Dur-Tonarten geltenden Vorschrift zur Abfolge von Ganz- und Halbtonschritten wiederum zu folgen. Es ergeben sich erneut an 2 Intervallen Verstimmungen, von denen nur einer in D-Dur musikalisch wirksam ist: Ausgehend vom „d'' " ist der Große Ganzton, das „ e'' ", mit 668,25 Hz in der D-Dur-Tonleiter höher als „e'' der G-Dur-Tonleiter". Diese Verstimmung ist das syntonische Komma. Außerdem tritt in Ergänzung zum „fis" ein neuer Ton auf, der in der G-Dur-Tonleiter nicht enthalten ist, „cis".

∗ Der Übergang von C Dur nach F Dur in reiner Stimmung

Multiplikation der Intervalle der C-Dur-Tonleiter mit dem Intervall der Quarte (4/3) liefert sämtliche Töne der F-Dur-Tonleiter.

Man startet also mit der Quarte der C-Dur-Tonleiter, dem „f' " als Prime der F-Dur-Tonleiter und hat nun wiederum der für Dur-Tonarten geltenden Vorschrift zur Abfolge von Ganz- und Halbtonschritten zu folgen. Es ergeben sich erneut an 2 Intervallen Verstimmungen, von denen nur einer in F Dur musikalisch wirksam ist. Ausgehend vom „f' " ist die Große Sexte, „d'' " mit 586,67 Hz in der F-Dur-Tonleiter gegenüber dem Großen Ganzton „d'' " in der C-Dur-Tonleiter mit 594 Hz um ein syntonisches Komma erniedrigt. Außerdem tritt ein neuer Ton auf, der in der C-Dur-Tonleiter nicht enthalten ist, „b" "anstelle von „h'' ".

Zusammenfassend ist festzuhalten: In der reinen Stimmung schließt die Modulation in eine benachbarte Tonart folgende Veränderungen ein:

- Aufkommen eines neuen Tones, der in der Ausgangstonart nicht vorkommt.
- Verstimmung eines Ganztones um ein syntonisches Komma in der Folgetonart – in obigen Beispielen
  - von der Großen Sexte in C Dur zum Großen Ganzton in G Dur (Erhöhung)
  - von der Großen Sexte in G-Dur zum Großen Ganzton in D Dur (Erhöhung)
  - vom Großen Ganzton in C-Dur zur Großen Sexte in F-Dur (Erniedrigung).

Nach diesem Befund erscheint es möglich, einstimmig und bei <u>freier Tonbildung</u> wie z. B. im Gesang und ebenso mit bestimmten Blasinstrumenten unter Aufrechterhaltung der reinen Stimmung stufenweise durch sämtliche Tonarten zu modulieren; denn je nach Tonart, in der gerade intoniert wird, sollten sich die Verstimmungen, die aus der Verknüpfung der auf verschiedenen Grundtönen basierenden Naturtonreihen resultieren, zumindest sehr weitgehend korrigieren lassen**.**

Ebenso wären in Oktaven gestimmte Saiteninstrumente theoretisch denkbar, die eine zu jeder Tonart angepasste Intonation durch freie Wahl der Töne, ggf. unter Verwendung der Finger beider Hände, zulassen. Es sind dann aber nach Maßgabe der reinen Stimmung recht viele Einzeltöne in Betracht zu ziehen: Jeder der 12 Partialtöne innerhalb einer Oktave wäre mindestens durch einen um ein syntonisches Komma größeren und einen ebenso verminderten Ton zu ergänzen, und außerdem kommt pro Tonart noch ein weiterer Ton hinzu, je Oktave also 36 +14 = 50 Intervalle, die der Musiker innerhalb einer Oktave treffsicher zu intonieren hätte.

Es ist dann in einem nächsten Schritt noch der Frage nachzugehen, ob und inwieweit die reine Stimmung im Fall mehrstimmiger Musik bei der Modulation in benachbarte Tonarten aufrecht erhalten werden kann, etwa unter Verwendung von harmonisch klingenden Akkorden in der einen Tonart und ob diese ohne Verletzung der reinen Stimmung in die neue Tonart transponiert werden können.

∗Als Grundlage der tonalen Harmonik (Rameau 1683-1764) gelten die Basisdreiklänge

Tonika, Subdominante und Dominante,

<u>in C-Dur</u> mit

- **c als Grundton** der darauf gegründete **Tonika**-Dreiklang **c – e – g :** Große Terz (5/4)∗Kleine Terz(6/5) ⇒ (3/2) Quinte,
- **g als Quinte** vom Grundton und dem darauf gegründeten Dreiklang **Dominante g – h – d:** Große Terz (5/4) ∗ Kleine Terz (6/5) ⇒ (3/2) Quinte,
- **f als Quarte** vom Grundton und dem darauf gegründeten Dreiklang **Subdominante f –a – c:** Große Terz (5/4)∗Kleine Terz (6/5) ⇒ (3/2) Quinte

<u>in c moll</u> mit

- c als Grundton und darauf gebildetem Dreiklang Tonika c – es – g : Kleine Terz (5/4)∗Große Terz (6/5) ⇒ (3/2) Quinte,
- g als Quinte vom Grundton und dem darauf gegründeten Dreiklang Dominante g – b – d: Kleine Terz (5/4)∗Große Terz (6/5)⇒ (3/2) Quinte,
- f als Quarte vom Grundton und dem darauf gegründeten Dreiklang Subdominante f –as – c: Kleine Terz (6/5) ∗Große Terz (5/4) ⇒ (3/2) Quinte

In Erweiterung lässt sich die folgende Zusammenstellung aufschreiben

Tonika =	**Dominante =**	**Subdominante =**
∗ Grundton der Tonart (Stufe I),	**∗ Quinte vom Grundton (Stufe V)**,	**∗ Quarte vom Grundton (Stufe IV)**,
c für C-Dur, a für a-moll	g für C-Dur, e für a-moll	f für C-Dur, d für a-moll
g für G Dur, e für e moll	d für G Dur, h für e moll	c für G Dur, a für e moll
f für F Dur, g für d moll	c für F Dur, a für d moll	b für F Dur, g für d moll
∗ Der darauf errichtete Dreiklang	**∗ Der darauf errichtete Dreiklang**	**∗ Der darauf errichtete Dreiklang**
c-e-g (GT +KT = Qi) für C Dur	g-h-d (GT +KT = Qi) für C Dur	f-a-c (GT +KT = Qi) für C Dur
a-c-e (KT+GT = Qi) für a moll	e-g-h (KT+GT = Qi) für a moll	d-f-a (KT+GT = Qi) für a moll
g-h-d (GT +KT = Qi) für G Dur	d-fis-a (GT +KT = Qi) für G Dur	c-e-g (GT +KT = Qi) für G Dur
e-g-h (KT +GT = Qi) für e moll	h-d-fis (KT+GT = Qi) für e moll	a-c-e (KT+GT = Qi) für e moll
f-a-c (GT +KT = Qi) für F Dur	c-e-g (GT +KT = Qi) für F Dur	b-d-f (GT +KT = Qi) für F Dur
d-f-a (KT +GT = Qi) für d moll	a-c-e (KT +GT = Qi) für d moll	g-b-d (KT +GT = Qi) für d moll

*Durch die von den Intervallen **I, V** und **IV** abgeleiteten Dreiklänge Tonika, Dominante und Subdominante werden sämtliche Töne einer Tonleiter in Terzschichtung in Beziehung gebracht. Bei der Modulation in eine Nachbartonart ändern sich 2 Töne, einer mit Vorzeichenwechsel, der andere um ein syntonisches Komma*

⇒ ***Die Modulation erfolgt in zwei Stufen:***

<u>Modulation von C Dur über e moll nach G Dur</u>

1. Stufe: Übergang von C-Dur in die zu G Dur gehörende Paralleltonart e-moll mit Erhöhung von f auf fis.
2. Stufe: Übergang in die Zieltonart mit Erhöhung von a = 440 Hz um syntonisches Komma auf a = 445,5 Hz

c-e-g	⇒	g-h-d	⇒	h-d-**fis**	⇒	d-fis-$\mathbf{a_{445,5}}$	⇒	g-h-d
Tonika(C-Dur)		*Dominate(C-Dur)*		*Dominante (e-moll)*		*Dominante (g-Dur)*		*Tonika (G-Dur)*

<u>Modulation von C Dur über a moll nach F Dur</u>

1. Stufe: Übergang von C-Dur in die Paralleltonart a-moll mit Erniedrigung von d = 297 Hz um synt. Komma auf 293,33 Hz
2. Stufe: Übergang in die Zieltonart mit Erniedrigung von h auf b

c-e-g	⇒	f-a-c	⇒	$\mathbf{d_{293,33}}$-f-a	⇒	**b**-$d_{293,33}$-f	⇒	f-a-c
Tonika(C-Dur)		*Subdominate(C-Dur)*		*Subdominante (a-moll)*		*Subdominante (F-Dur)*		*Tonika (F-Dur)*

Es handelt sich in der Zusammenstellung um reine Dreiklänge, und es sollte demnach problemlos möglich sein, den Übergang von einer Tonart in eine benachbarte zu realisieren, ohne dass die reine Stimmung einer Einschränkung unterliegt.

Bei freier Tonbildung wie im Gesang sowie mit bestimmten Blasinstrumenten erscheint die stufenweise Modulation nicht nur einstimmig, sondern auch mehrstimmig in Akkorden (also auch in Chören und Kapellen von Blasinstrumenten mit frei bestimmbarer Intonation) durch sämtliche Tonarten unter Aufrechterhaltung der reinen Stimmung möglich; denn je nach Tonart sollten sich die Verstimmungen, die aus der Verknüpfung der auf verschiedenen Grundtönen basierenden Naturtonreihen resultieren, zufriedenstellend korrigieren lassen.

Ebenso wären in Oktaven gestimmte Saiteninstrumente theoretisch denkbar, die eine zu jeder Tonart angepasste Intonation durch freie Wahl der Töne ggf. unter Verwendung der Finger beider Hände zulassen. Es sind dann aber nach Maßgabe der reinen Stimmung recht viele Einzeltöne in Betracht zu ziehen: Es sei hier nochmals hervorgehoben, dass offenbar jeder der 12 Halbtöne innerhalb einer Oktave mindestens um einen um ein syntonisches Komma größeren und einen ebenso verminderten Ton zu ergänzen wäre, und außerdem kommt pro Tonart noch ein weiterer Ton hinzu, je Oktave also 36 + 14 = 50 Intervalle, die der Musiker treffsicher zu beherrschen hätte.

Bei Instrumenten mit durchgängig fixierten Intervallen (Klavier, Cembalo, Orgel) erscheint bei 7,5 Oktaven mit dann nahezu 400 Tasten eine Konstruktion unter konsequenter Aufrechterhaltung der reinen Stimmung wohl kaum realisierbar, und auch die Bedienung wäre doch wohl extrem anspruchsvoll.

Ausgehend von den Erkenntnissen der Griechen nahm die Entwicklung im Mittelalter zunächst einen anderen Verlauf

IV. Die Pythagoreische Stimmung

Die Abstände der Töne, die Intervalle, sind durch reine Quinten definiert

<u>Pythagoras (-570 bis -510)</u>

fand aus seinen Experimenten am Monochord heraus, dass

- Oktaven mit einer höchst möglichen Konsonanz wahrgenommen werden,
- ausgehend von einem Grundton harmonisch klingende Tonstufen innerhalb einer Oktave durch das Verhältnis kleiner ganzer Zahlen beschrieben werden können,
- sich die Tonstufen, die innerhalb einer Oktave auftreten, durch eine Abfolge reiner Quinten erzeugen lassen, wenn man sie durch Re-Oktavierung immer wieder in die Ausgangsoktave zurückversetzt,

- der **Ditonus = 2 Ganztöne** mit dem Zahlenverhältnis $(9/8)^2$ =81/64 in der seinerzeit überwiegend einstimmigen Melodienführung Akzeptanz findet – die große Terz mit dem Zahlenverhältnis 5/4 = 1,25 lag damals nicht im Blickfeld. Vermutlich resultierte der **Ditonus** auch aus dem Bedürfnis, den großen Ganzton als Untereinheit der Oktave in die Hand zu bekommen, was unter Einbeziehung des Limma als Halbton auf Grund einer speziellen Definition ja auch gelang.

Aristoxenos (-360 bis -300), Schüler des Aristoteles und wohl erster Musiktheoretiker,

- schuf Begriffe wie Tondauer und Rhythmus,
- erkannte die Oktave als Summe von Quinte und Quarte: **Ok = Qi + Qa = (4/3)∗(3/2) = 2/1,**
- erkannte den Ganzton als Differenz zwischen Quinte und Quarte: **GG = Qi–Qa= (3/2):(4/3) = 9/8,**
- definierte den **Ganzton GG mit (9/8) als eine Grundeinheit GG = 2 Qi – Ok =** $\mathbf{(3/2)^2 * (1/2) = 9/8}$,
- definierte den **pythagoreischen Halbton**, das **Limma**, als **Qa – Ditonus = 3 Ok - 5 Qi =** $\mathbf{2^3 * (2/3)^5 = 256/243}$ und ersetzte einen Ganzton durch 2 derartige Halbtöne in dem Bestreben, die Oktave auf diese Weise aus 5 Ganztönen und 2 Halbtönen, insgesamt also aus 6 großen Ganztönen **GG** zu konstruieren: 6 Ganztöne sind aber etwas größer als eine Oktave:

  $\mathbf{(9/8)^6 = 2{,}0272865}$, das heißt **6 GG > Ok,**

  und da das Limma nicht korrekt ein halber Ganzton ist, folgt daraus ein weiterer Halbton, die **Apotome, der pythagor. chromat. Halbton: GG – Limma = 7Qi - 4 Ok =** $\mathbf{(3/2)^7 * 2^{-4} = 2187/2048}$ und für die Korrekturgröße, das **Pythagoreische Komma = Apotome – Limma = 12Qi–7 Ok:** $\mathbf{(3/2)^{12} : 2^7 = 1{,}0136433}$,
- definierte den **Tritonus als halbe Oktave = 3 GG =** $\mathbf{(9/8)^3 = 729/512}$, allerdings ist **3 GG > 1,**
- schrieb für die **Quinte = 3 GG + Limma** $\mathbf{(9/8)^3 * (256/243) = 3/2}$**, woraus**
- für die **Quarte = 2 GG + Limma oder Ok – Qi = 4/3** folgt.

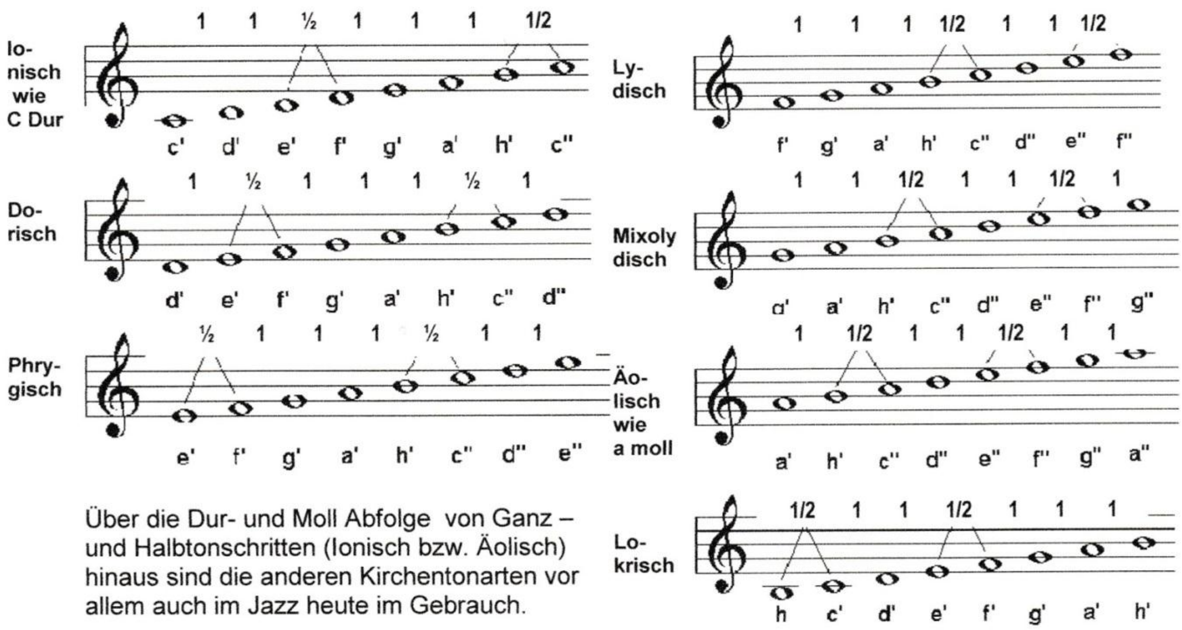
Die Zusammenstellung der Intervalle der pythagoreischen Tonleiter lässt erkennen:

- **Grundintervalle der Pythagoreischen Tonleiter sind Oktave Ok und Quinte Qi.**
- **Aus diesen beiden Intervallen lassen sich sämtliche Töne dieser Tonleiter konstruieren. Demgegenüber ist in der reinen Stimmung (Naturtonreihe) zusätzlich noch die Große Terz GT essenziell.**

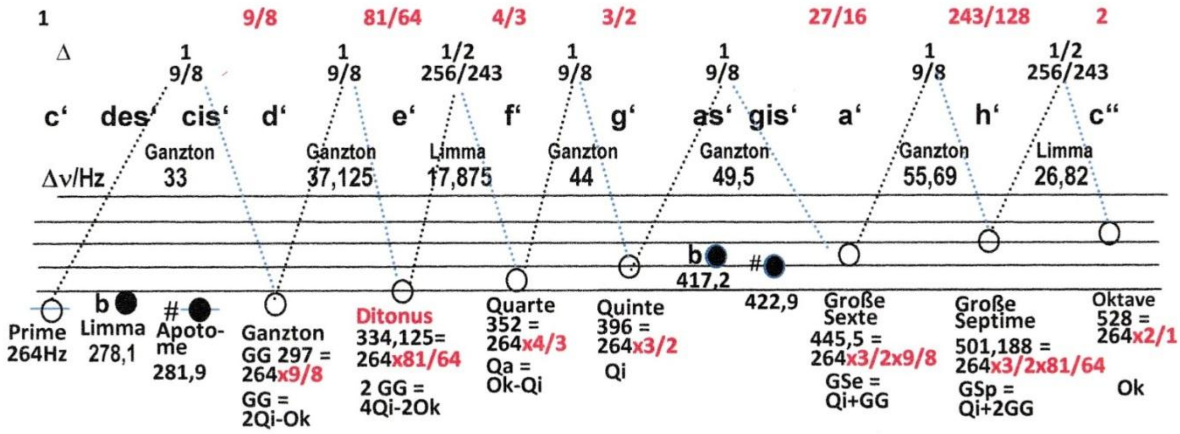
Die Pythagoreische Tonleiter weist wie die Dur-Tonleiter der reinen Stimmung die gleiche Abfolge von Ganz- und Halbtonschritten auf:

1 1 ½ 1 1 1 ½

In den **Kirchentonarten des Gregorianischen Chorals** ist eine solche Abfolge von Ganz- und Halbton-Schritten stets befolgt, wenn man die Intervalle der Oktave nacheinander als Grundton wählt. Mit Start von c als Grundton ergibt sich eine pythagoreische Tonleiter (Ionisch), die zwar in der Folge der Ganz- und Halbtonschritte der C Dur Tonleiter der reinen Stimmung entspricht, sich von dieser jedoch markant unterscheidet, da Mehrstimmigkeit mit harmonischen Dreiklängen nicht gegeben ist. Ebenso besteht zwischen der Tonleiter mit Start von a (äolisch) nur eine formale Analogie zur a moll Tonleiter der reinen Stimmung.



Es handelt sich um einstimmige Musik, auch wenn ein Bordun hinzutritt. In den Klosterschulen der Gregorianik wurde jahrhundertelang nach dieser Ordnung intoniert.
Im Folgenden ist die pythagoreische Tonleiter in C Dur mit Einfügung von Limma und Apotome an zwei Stellen dargestellt.



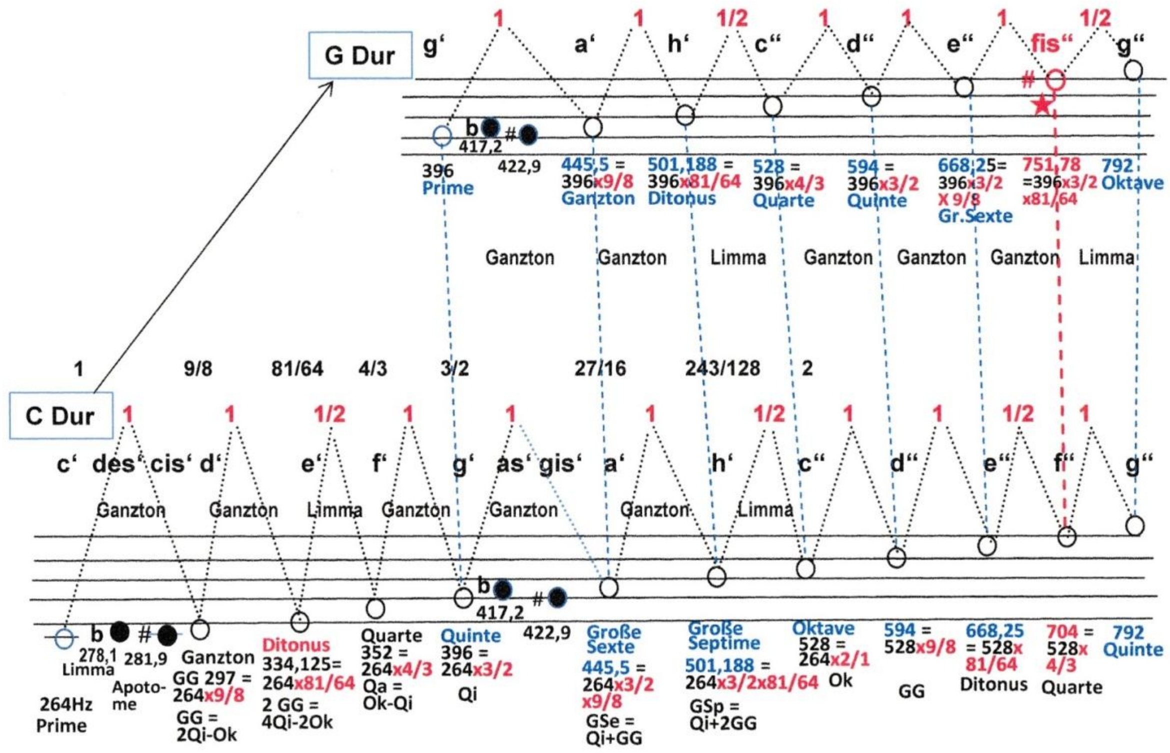
Da der pythagoreische Halbton, das **Limma,** durch die Differenz **Qa – Ditonus = 3Ok – 5Qi** definiert ist und der chromatische Halbton, die **Apotome = GG – Limma**, zusammen mit Limma den **Großen Ganzton GG = 2 Qi – Ok** bilden, sämtliche Intervalle aber durch die Oktave und Quinte bestimmt sind, folgt zwangsläufig: **Apotome – Limma = 12 Qi – 7 Ok, was gleichbedeutend ist mit 12 Qi – 6 Ok = 6∗(2Qi – Ok) > Ok.** Nach dem Einfügen der Intervalle in die Oktave besteht eine Fehlanpassung zwischen Ok und Qi. Durch die Definition des Limma wird die Fehlstellung in den Großen Ganzton verlagert, um zu gewährleisten, dass die Summe (Multiplikation) der Intervalle die Oktave = 2/1 ergibt.

Pythagoreisches Komma = Apotome – Limma = 12 Qi – 7 Ok

$$Pythag.Komma = \frac{Apotome}{Limma} = \frac{2187}{2048} * \frac{243}{256} = \frac{531441}{524288}$$ bzw. $$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} * 2^{-7} = \frac{531441}{524288} = 1{,}01364326$$

Bei einer Stimmung in reinen Quinten, z. B. bei einem Saiteninstrument, sind die Oktaven um ein pythagoreisches Komma vermindert, um etwa 1/5 eines diaton. Halbtons; denn $(1{,}0136733)^5 = 1{,}0703 \approx 16/15 = 1{,}0667$ ***oder 1/8 Großer Ganzton GG*** $(9/8)^{1/8} = 1{,}0148$

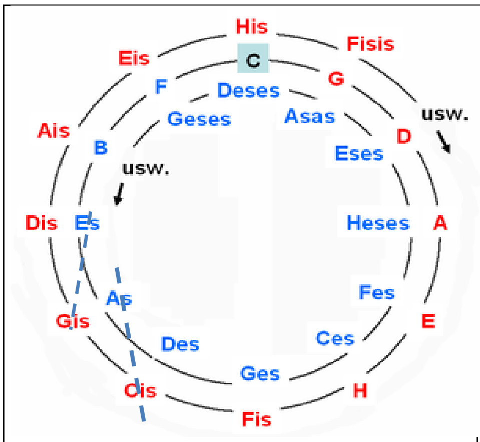
Die Modulation der pythagoreischen Tonleiter erhellt eine Reihe interessanter Befunde



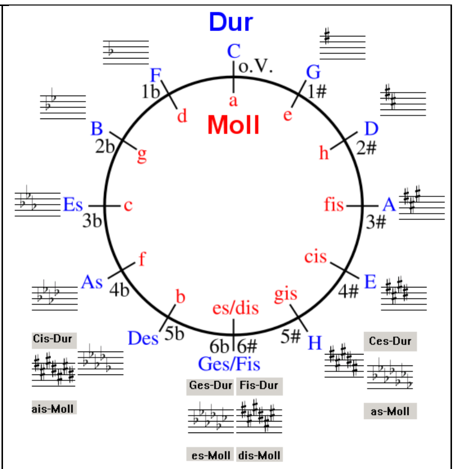
- Es tritt beim Übergang von einer Tonart in eine Nachbartonart nur ein neuer Ton auf, im obigen Beispiel „fis“, der in der Ausgangstonart nicht enthalten ist. **Im Unterschied zur reinen Stimmung unterbleibt die Verstimmung eines weiteren Tones durch ein syntonisches Komma.** Sämtliche Intervalle der C-Dur Tonart werden in G Dur reproduziert mit der Ausnahme, dass „f“ durch „fis“★ ersetzt ist.
- Die bei der Modulation durch die Tonarten realisierte Abfolge reiner Quinten lässt erkennen, dass dabei sämtliche Töne der pythagoreischen Tonleiter generiert werden, zwar in verschiedenen Oktaven, und da letztere mit 2/1 fixiert sind, erhält man bei Re-Oktavierung tatsächlich die innerhalb einer Oktave liegenden Intervalle – es wurden bisher nicht alle Halbtonschritte in die Tonleiter eingetragen:

‚as ‚es b f c‘ g‘ d“ a“ e‘‘‘ h‘‘‘ fis ‘‘‘‘ cis‘‘‘‘‘ gis‘‘‘‘‘

- Die pythagoreische Tonleiter impliziert eine Stimmung in reinen Quinten, und diese erzeugt gemäß **12 Qi > 7 Ok** nach 12 Quinten über den Tonraum von 7 Oktaven eine Differenz zwischen „gis“ und „as“ bzw, „cis“ und „des“ oder „dis“ und „es“ etc. In jedem Ganztonschritt stecken Limma und Apotome und die Differenz ist ein pythagoreisches Komma. **Verrückt ist, dass hier „gis > „as“ und „cis“ > „des“ sowie „dis > „es“ etc.**, aber das liegt daran, dass mit 12 Qi das Intervall von 7 Ok überschritten wird



Der Sachverhalt wird anschaulich durch die Quintenspirale beschrieben. Ausgehend von **„c“** landet man beim **„his“,** das eine höhere Frequenz aufweist als **„c“ !** **Man muss sich entscheiden, gis = as setzen, his = c, cis = des und eines von beiden Intervallen verwenden oder anderweitig das pythagoreische Komma aufteilen, um von der Quintenspirale zum Quintenzirkel zu gelangen.**



- Die pythagoreische Tonleiter impliziert damit eine Reihe von als dissonant empfundenen Akkorden

⇒ **die Wolfsquinte: 7 Ok > 11 Qi,**
z B. **„cis“/“as“ oder „gis“/“es“**

$$\boxed{2^7 * (2/3)^{11} = 1{,}47981 = \frac{262144}{177147}}$$

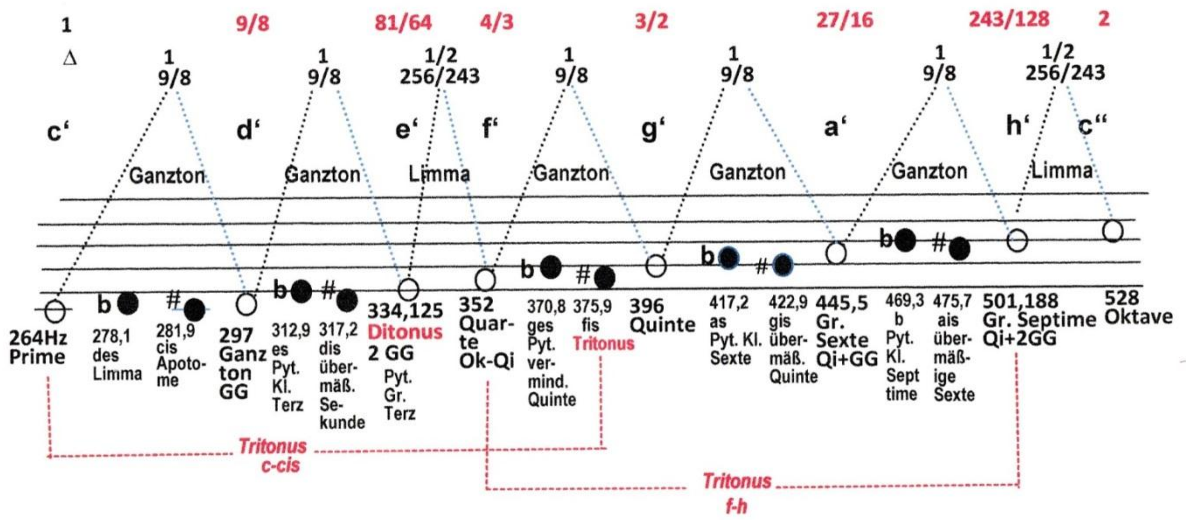
Die Wolfsquinte ist eine um das pythagoreische Komma verminderte Quinte

$$\boxed{\mathbf{(3/2) : 1{,}01364326 = 1{,}47981}}$$

⇒ **den Tritonus = 3 Große Ganztöne GG = halbe Oktave (1 < 3 GG)** $\mathbf{(9/8)^3}$**= 729/512, z. B. das Teufelsintervall f/h** (nicht Bestandteil der Naturtonreihe), *kommt im Dominantseptakkord vor, auch in Zigeunertonleiter, wird verwendet, um Dämonisches auszudrücken: Fidelio Paukenmotiv Kerkerszene, Mussorgski Baba Yaga, Wagner Fliegender Holländer, Chopin Etüde 10/3, Chromatischer Tritonus*

⇒ **den Ditonus = 2 Große Ganztöne GG** anstelle der **Terz** der Naturtonleiter – letzterer wurde erst ab der Renaissance im Zusammenhang mit dem Wunsch nach harmonischer Mehrstimmigkeit zugunsten der Großen Terz aufgegeben: **(81/64) = 1,2656** klingt schärfer als die Große Terz der reinen Stimmung **(5/4 = 1,25).**

Die Pythagoreische Tonleiter mit Eintragung sämtlicher Halbtöne

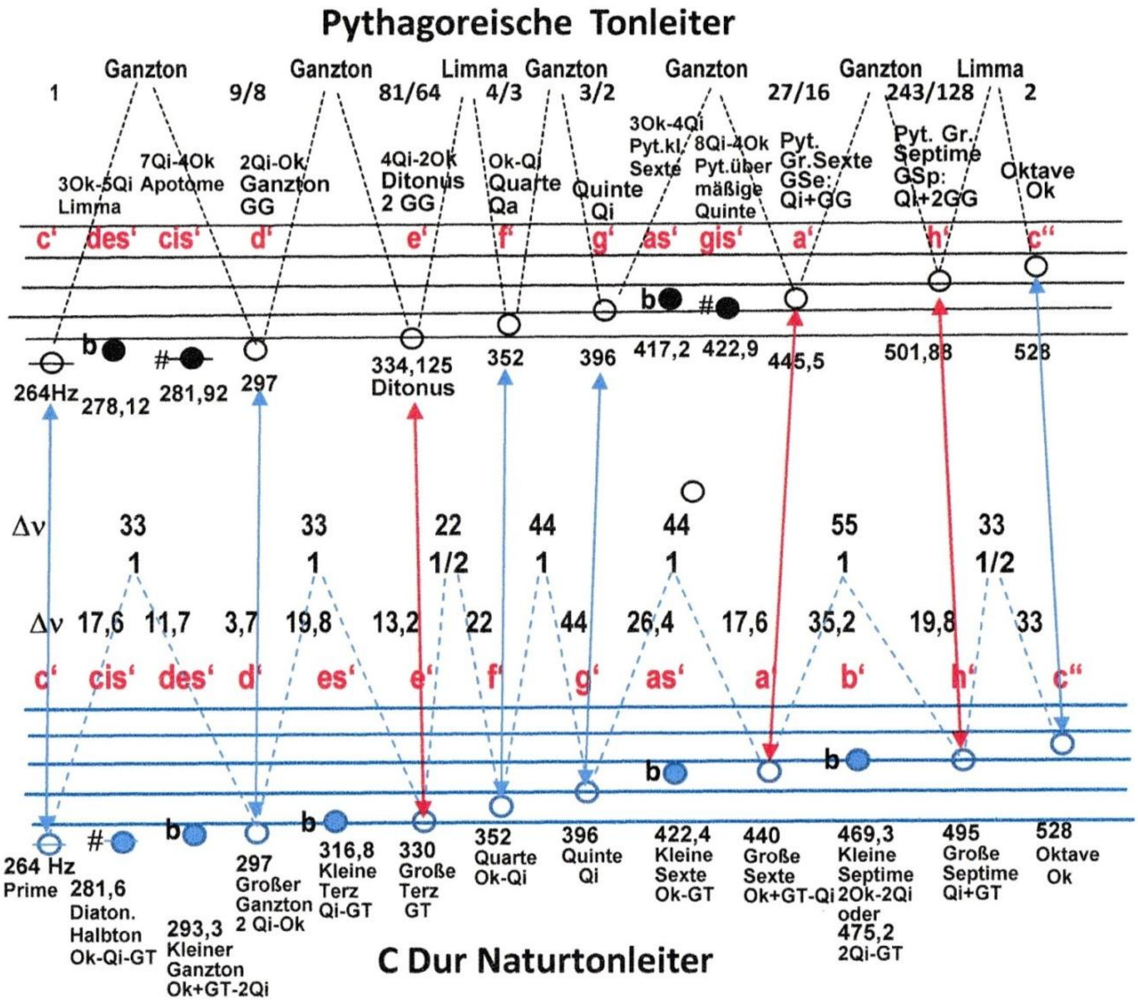


- Offenbar wird beim Übergang von einer Tonart zur nächsten jeweils einer der Halbtöne in die neue Tonleiter einbezogen, zum Beispiel beim Übergang von C nach G Dur der Tritonus fis 375,9 x 2 = 751,8 Hz. Es kommt demnach zu den auch hier 12 Halbtönen der Tonleiter einer Oktave bei 14 Tonarten mit Vorzeichen jeweils ein Intervall dazu, pro Oktave ergeben sich so insgesamt 12 + 14 = 26 Intervalle, woraus bei 7,5 Oktaven bei fixierten Tönen eines Clavichords oder eines Cembalo 195 Tasten resultieren. Das ist etwa die Hälfte gegenüber der Anforderung, die sich aus der Modulation in reiner Stimmung (Naturtonleiter) infolge der zusätzlichen Verstimmung mindestens eines Tones durch das syntonische Komma ergibt.
  Bei Beschränkung des Tonraumes auf weniger Oktaven ist die pythagoreische Stimmung wohl auch bei Tasteninstrumenten instrumentell und spielerisch bewältigt worden. Unbefriedigend blieb dabei das Auftreten dissonanter Intervalle, umso mehr als zur Zeit der Renaissance im Zusammenhang mit dem Aufkommen des Wunsches nach mehrstimmiger Musik unter Verwendung von Akkorden die reine große Terz gegenüber dem Ditonus im Interesse eines Wohlklangs den Vorzug erhielt.
- Bei in Quinten gestimmten Saiteninstrumenten Violine, Viola, Violoncello ist mit 4 Saiten der Tonumfang auf 4 Quinten und wenig mehr als 3 Oktaven beschränkt. Hier lässt sich durch geeigneten Fingersatz eine weitgehende Anpassung an die rein klingende Stimmung herbeiführen. Problematisch erscheint dann nach wie vor die Anpassung beim Zusammenspiel mit einem Clavichord oder Cembalo.
- Abschließend ist noch anzumerken, dass aufgrund des Zusammenhangs **Qi = Ok – Qa** und damit **5 Ok > 12 Qa** bei einer Stimmung in reinen Quarten (Gitarre, Kontrabass) eine Umkehr in der Abfolge von Limma und Apotome eintritt, da 12 Quarten etwas kleiner als 5 Oktaven sind. ***Daher sind bei einer Stimmung in reinen Quarten die Oktaven um ein pythagoreisches Komma erhöht***

5 Oktaven dividiert durch 12 Quarten ergeben ebenfalls das pythagoreische Komma	$2^5 > \left(\frac{4}{3}\right)^{12} = 31{,}569292 \rightarrow 2^5 : \left(\frac{4}{3}\right)^{12} = 1{,}0136733$

Es bleibt, die Frage zu beantworten, warum sich bei der Modulation von Tonart zu Tonart in der Naturtonreihe bei reiner Stimmung, der gleichfalls eine Abfolge von Quinten zugrunde liegt, die in gleicher Weise wie bei der pythagoreischen Tonleiter die Intervalle der Tonleiter generiert, nicht gleichfalls ein pythagoreisches Komma auftritt.

Vergleich der pythagoreischen Tonleiter mit der Naturtonleiter in reiner Stimmung



Syntonisches Komma
Ditonus - GT = 2 GG – GT

$$\left(\frac{9}{8}\right)^2 : \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{81}{80}$$

$$\frac{334{,}125}{330} = \frac{445{,}5}{440} = \frac{501{,}188}{495} = \frac{81}{80}$$

Ditonus/GT **Gr.Sexte** **Gr.Sept.**

Wie der Vergleich zeigt, ist in der C Dur-Tonleiter in reiner Stimmung der Ton gegenüber der pythagoreischen Tonleiter an <u>drei Stellen</u> um ein syntonisches Komma erniedrigt.

In jeder beliebigen Dur-Tonart der reinen Stimmung sind gegenüber der pythagoreischen Tonleiter

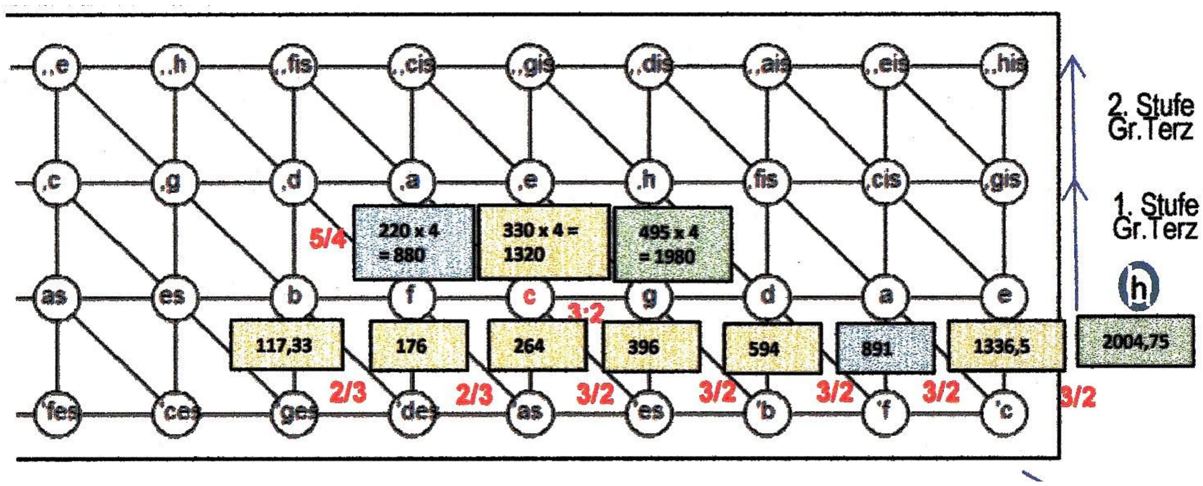
- **Große Terz, Große Sexte und Große Septime um das syntonische Komma erniedrigt –** das sind die Intervalle, die **eine Große Terz GT enthalten,**

und in **Moll-Tonarten** der reinen Stimmung sind **gegenüber der pythagoreischen Tonleiter**

- **Prime, Großer Ganzton, Quinte und Kleine Septime um ein syntonisches Komma erniedrigt** – das sind die Intervalle, die **keine Große Terz GT enthalten**.

Der Zusammenhang wird im Eulerschen Tonnetz verdeutlicht.

Es handelt sich um eine Darstellung des Quint-Terz-Systems in Quinten-Reihen, die sich jeweils um eine Große Terz GT und ein syntonisches Komma unterscheiden.
Da die Große Terz GT nicht mit Quinten Qi darstellbar ist, stellte <u>Leonhard Euler</u> das Beziehungsgeflecht der reinen Stimmung und pythagoreischen Stimmung mit Hilfe von Quinten-Reihen dar, die sich jeweils um ein syntonisches Komma unterscheiden.



Die Quinten reihen sich in horizontaler und die Terzen in vertikaler Richtung.

Ausgehend vom c = 264 Hz gelangt man nach 4 Stufen reiner Quinten zum e = 1336,5 Hz, dessen Re-Oktavierung 334,125 Hz ergibt, und diese Frequenz ist um ein syntonisches Komma größer als e = 330 Hz, das vom c aus durch die große Terz in reiner Stimmung erreicht wird.
Analog folgt ausgehend von f = 176 Hz nach 4 reinen Quinten a = 891 Hz, dessen Re-Oktavierung zu a = 222,75 Hz führt, und diese Frequenz ist wiederum um ein syntonisches Komma höher als das durch eine große Terz zugängliche a = 220 Hz der reinen Stimmung.
Ebenso kann man vom Ton g = 396 Hz starten, gelangt nach 4 Stufen reiner Quinten zum h = 2004,75 Hz, woraus nach Re-Oktavierung h = 501,19 Hz folgt. Die große Terz der reinen Stimmung ausgehend von g zu h = 495 ist um ein syntonisches Komma niedriger.

Qinten-
reihen

Die reinen Tonleitern schreiben sich dann folgendermaßen:

…																	
Es-Dur	es	f	,g	as	b	,c	,d	es	,c-moll	,c	,d	es	,f	,g	as	b	,c
B-Dur	b	c	,d	es	f	,g	,a	b	,g-moll	,g	,a	b	,c	,d	es	f	,g
F-Dur	f	g	,a	b	c	,d	,e	f	,d-moll	,d	,e	f	,g	,a	b	c	d
C-Dur	c	d	,e	f	g	,a	,h	c	**,a-moll**	,a	,h	c	,d	,e	f	g	a
G-Dur	g	a	,h	c	d	,e	,fis	g	,e-moll	,e	,fis	g	,a	,h	c	d	e
D-Dur	d	e	,fis	g	a	,h	,cis	d	,h-moll	,h	,cis	d	,e	,fis	g	a	,h
A-Dur	a	h	,cis	d	e	,fis	,gis	a	,fis-moll	,fis	,gis	a	,h	,cis	d	e	,fis
…																	
Alternativ z.B.									c-moll	c	d	'es	f	g	'as	'b	c

Tonleitern

,x = um ein syntonisches Komma tiefer 'x = um ein syntonisches Komma höher

$$\frac{891}{880} = \frac{1365{,}5}{1320} = \frac{2004{,}75}{1980} = \frac{81}{80}$$

Auf Grund der Erniedrigung von 3 Tönen einer Dur-Tonleiter in reiner Stimmung um je ein syntonisches Komma gegenüber der pythagoreischen Stimmung wird der durch das pythagoreische Komma hervorgerufene Überhang um nahezu 92 % vermindert, wohl aber nicht vollständig kompensiert. Das zeigt folgende Betrachtung:

Da bei der pythagoreischen Tonleiter in der Oktave neben 5 Großen Ganztönen ein weiterer Großer Ganzton durch zwei Halbtöne, das Limma, ersetzt und letzteres etwas kleiner als ein halber Ganzton ist, folgt für das **pythagoreische Komma = GG – 2 Limma**

$$\boxed{\frac{9}{8}:\left(\frac{256}{243}\right)^2 = 1{,}0136433 = \frac{531441}{524288}}$$

Ebenso ergibt sich aus der Bildung des Großen Ganztons gemäß **GG = 2 Qi – Ok** unter der Gültigkeit von **6 GG > Ok** und damit von **12 Qi > 7 Ok** das **pythagoreische Komma,** indem man **12 Qi – 7 Ok** berechnet

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : 2^7 = \frac{129{,}746}{128} = \frac{531441}{524288} = 1{,}0136433}$$

Aus den Formeln lässt sich eine Beziehung zwischen dem syntonischen Komma und dem pythagoreischen Komma herleiten. Da für das **pythag. Komma = 12Qi – 7Ok** gilt und für das **synton. Komma = 2 GG-GT** bzw. mit **GG = 2Qi – Ok** die Kombination **4Qi – 2Ok – GT** erhalten wird, folgt aus einer einfachen Umstellung

Pythag. Komma = 12Qi - 7Ok - (4Qi – 2Ok – GT) + Synton. Komma bzw.
Pythag. Komma = 8Qi – 5 Ok + GT + Synton. Komma

Pythag. Komma = $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^8 * 2^{-5} * \frac{5}{4}\right]$ ***Synton. Komma** $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{Pyt.Komma}{Synt.Komma} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^8 * 2^{-5} * \frac{5}{4}\right] = 1{,}0011291504}$

Man nennt diese restliche *Fehlanpassung* das Schisma **Schisma**

Das Schisma bedeutet, dass die durch das pythagoreische Komma bedingte Unstimmigkeit, die eine Konsequenz aus der Abfolge reiner Quinten und deren „Einpassung“ in Oktaven darstellt, in der reinen Stimmung infolge des Auftretens einer Intervallverminderung durch das syntonische Komma weitgehend, bis auf einen Restbetrag von 8,3 % kompensiert wird

Man kann zeigen, dass ein solcher Befund ebenso durch die folgende Beziehung wiedergegeben wird.

$$\boxed{\frac{Pyt.Komma}{Synt.Komma} = 10 - 8Qa = 10 * \left(\frac{4}{3}\right)^{-8} = 1{,}0011291504}$$

V. Die ¼ Komma mitteltönige Stimmung

Sie ist eine empirische Abwandlung der pythagoreischen Stimmung, die in der Renaissance aufkam, als das Bedürfnis nach Mehrstimmigkeit und damit die Einbeziehung von Dreiklängen Gestalt annahm. Dreiklänge unter Einbeziehung der pythagoreischen Großen Terz (Ditonus mit 81/64 = 1,26563) erweisen sich als nicht konsonant. Erst der Rückgriff auf die Große Terz der Naturtonreihe mit 5/4 = 1,25 erbrachte in Dreiklängen die als Wohlklang empfundene Harmonie. Diese Anpassung wurde offenbar rein empirisch vollzogen,

- indem **4 Quinten Qi je um ¼ eines syntonischen Kommas vermindert** sind, wodurch genau **4 dieser mitteltönigen Quinten Qi_m den 5. Partialton, die große Terz der reinen Stimmung, ergeben,**

- indem sämtliche Intervalle weiterhin durch **Ok** und **Qi**$_m$, jetzt aber alternativ auch unter Einbeziehung der Großen Terz beschrieben werden können (in der reinen Stimmung ist die Einbeziehung der großen Terz als Grundintervall allerdings keine Option, sondern unverzichtbar)
- **und dadurch die gegenüber der reinen Stimmung vorteilhafte Modulation in pythagoreischer Stimmung weiterhin bestehen bleibt.**

Die 1/4 Komma mitteltönige Stimmung bezieht also die große Terz anstelle des Ditonus in die Intervall-Folge der Tonleiter ein, und die Quinten sind bei dieser mitteltönigen Stimmung der pythagoreischen Tonleiter um ein **Viertel des syntonischen Kommas** verkleinert

, as ,es b f c‘ g‘ d“ a“ e‘‘‘ h‘‘‘ fis ‘‘‘‘ cis‘‘‘‘ gis‘‘‘‘

264 Hz **334,125 Hz**

Ausgehend vom Grundton **c‘** ergeben 4 Quinten aufwärts ein Intervall **e‘‘‘**, das im Vergleich zum Partialton **e‘**, der großen Terz der reinen Stimmung, um ein syntonisches Komma höher ist, und dieser Betrag wird bei den 4 Quinten zu je einem Viertel in Abzug gebracht. $\Rightarrow$ **Ditonus = 4 Qi – 2 Ok**

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^4 : 4 = 1{,}265625}$$

Im Vergleich zu 5/4=1,25

$$\boxed{\frac{1{,}265625}{1{,}25} = 1{,}0125 = \frac{81}{80} = \frac{334{,}125}{330}}$$

Das syntonische Komma wird zu je ¼ von der Quinte Qi subtrahiert,

und dadurch wird exakt die Große Terz GT der reinen Stimmung gebildet

$$\boxed{Qi_m = Qi - (syntonKomma)^{1/4}}$$

$$\boxed{Synt.Komma = Ditonus - GT}$$

$$\boxed{synt.Ko. = 2GG - GT = \frac{81}{64} * \frac{1}{GT}}$$

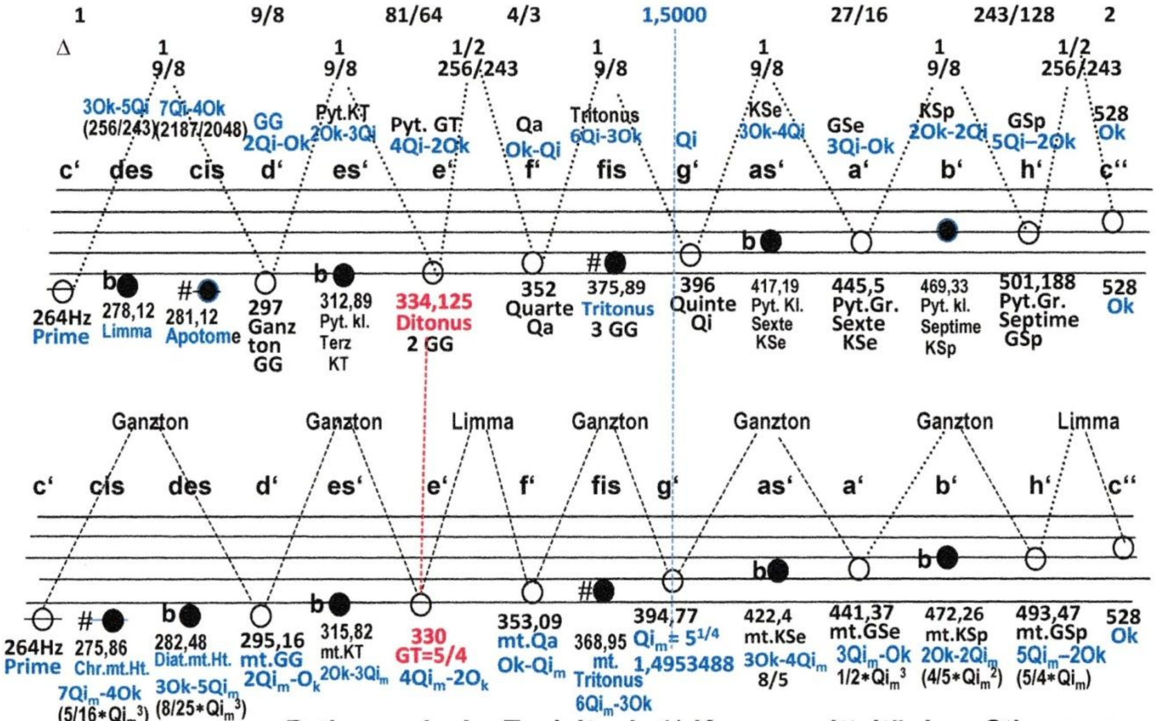
$$\boxed{Qi_m = \frac{3}{2} - \left(\frac{81}{64 * GT}\right)^{1/4} = \frac{3}{2} : \left(\frac{81 * 4}{64 * 5}\right)^{1/4} = \sqrt[4]{5} = 1{,}495349}$$

$$\boxed{\mathbf{GT = 4\,Qi_m - 2Ok}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{GT = \left[5^{1/4}\right]^4 : 4 = \frac{5}{4}}$$

Wie der Vergleich der pythagoreischen mit der ¼ Komma mitteltönigen C Dur Tonleiter zeigt, besteht eine homologe Beziehung zwischen beiden Tonleitern. Werden die Intervalle im ersteren Fall durch Kombinationen von **Ok (2/1)** und **Qi (3/2)** beschrieben, so im Fall der mitteltönigen Stimmung durch Oktave **Ok (2/1)** und mitteltönige Quinte **Qi**$_m$ **(**$5^{1/4}$**)**. Alternativ lassen sich die Intervalle der mitteltönigen Stimmung auch unter Einbeziehung der großen Terz GT = 5/4 konstruieren. Im Unterschied dazu ist in der reinen Stimmung das Grundintervall GT neben Qi und Ok essenziell.

Im Folgenden ist die pythagoreische Tonleiter mit einer Auswahl von Halbtönen der Tonleiter in 1/4 Komma mitteltöniger Stimmung gegenübergestellt. Man erkennt, die Intervalle in beiden Stimmungen bleiben homolog, wenn man **Qi** der pythagoreischen Stimmung durch die verminderte Quinte **Qi**$_m$ ersetzt, und es wird die Große Terz der Naturtonreihe exakt realisiert.

Pythagoreische Tonleiter mit Halbtönen (Auswahl)



Pythagoreische Tonleiter in ¼ Komma mitteltöniger Stimmung

In pythagoreischer Tonleiter gilt

$$\boxed{Ok < \left(\frac{Qi^2}{Ok}\right)^6}$$ **denn** **Ok < 6 GG** **GG = 2 Qi - Ok** **12 Qi > 7 Ok**

In mitteltöniger Tonleiter gilt

$$\boxed{Ok > \left(\frac{Qi_m^2}{Ok}\right)^6}$$ **denn**

Qi = Qi$_m$ + (synt. Komma)$^{1/4}$
= Qi$_m$ + (4Qi – 2 Ok – GT)$^{1/4}$

$$Qi = Qi_m * \left(\frac{Qi^4}{Ok^2 * GT}\right)^{1/4}$$

Qi$_m$ = (2 Ok + GT)$^{1/4}$ = (4*GT)$^{1/4}$ = 5$^{1/4}$

$$Ok > \left(\frac{(4GT)^{1/2}}{Ok}\right)^6 = GT^3 = 1{,}953125$$

3GT < Ok **Drei große Terzen < Oktave**

Der misfit zur Oktave ist jetzt nicht mehr das Pythagoreische Komma, sondern in der mitteltönigen Stimmung die Große Diesis

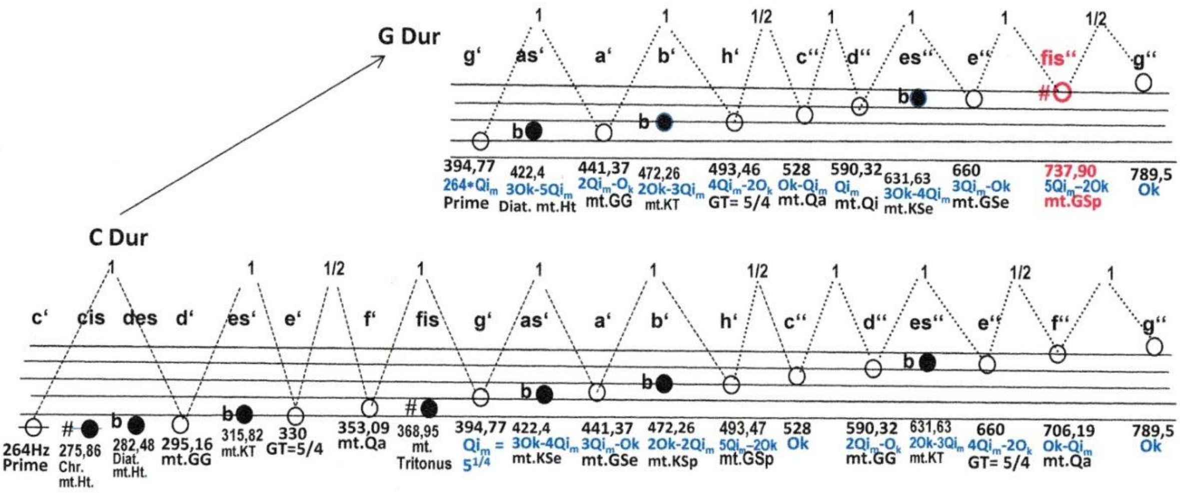
Große Diesis

$$\boxed{\frac{Ok}{3GT} = \frac{2}{(5/4)^3} = 1{,}024}$$

$$\frac{diat.mittl.Halbton}{chromat.mittl.Halbton} = \frac{(8/25) * Qi_m^3}{(5/16) * Qi_m^3} = 1{,}024$$

Das Beispiel der **Modulation von C nach G-Dur in der ¼ Komma mitteltönigen Stimmung** zeigt, dass nur ein zusätzlicher Ton generiert wird, der in der Ausgangstonart nicht vorkommt, das „fis“, das heißt der Vorteil geringerer Änderungen bei der Modulation in pythagoreischer Stimmung gegenüber der Modulation in reiner Stimmung bleibt erhalten. Die Nichtübereinstimmung der Oktave mit 3 großen Terzen, die in der Diesis zum Ausdruck kommt, ist allerdings größer als die Nichtübereinstimmung in der pythagoreischen Stimmung mit dem pythagoreischen Komma. An die Stelle des Ditonus ist in der mitteltönigen Stimmung die reine große Terz getreten und mit ihr die Möglichkeit der Bildung von Akkorden, die wir mittels unseres Gehörorgans als angenehm (harmonisch) empfinden. **Letzteres war wohl ein vorrangiges Anliegen bei der Konzipierung dieser Stimmung,** die zur Zeit Johann-Sebastian Bachs in der Stimmung von Orgeln vielfach angewendet worden sein soll.

Modulation von C nach G-Dur in der ¼ Komma mitteltönigen Stimmung



VI. Die Intervalle in Cent und der Vergleich der drei Stimmungen

Um die Intervalle der verschiedenen Stimmungen besser vergleichen und die Unterschiede klarer hervortreten lassen zu können, wurde das „Cent“ als eine quantitative Maßzahl für Intervalle eingeführt. Danach ist für die **Oktave *per definitionem*** ein Wert von **1200 cent** festgelegt, woraus sich für die Oktav - Obertöne zum Grundton folgende Reihe ergibt

Intervall	ν_k/ν_0 **= q**	**Größe**
1 Oktave	2	1200 Cent
2 Oktaven	4	2400 Cent
3 Oktaven	8	3600 Cent
4 Oktaven	16	4800 Cent
k Oktaven	2^k	**1200 ∗ k Cent**

Damit lässt sich auch das **Frequenzverhältnis = Intervall q** in Einheiten der Oktave **k** ausdrücken

$$q = 2^k \; bzw. \log_2 q = k$$

Für Intervalle gilt 1200 ∗ $\log_2 q$

Für die Berechnung wird $\log_2 q = \log_{10} q / \log_{10} 2$ **verwendet**

<u>Beispiele:</u>

Qi = 1200∗log₂(3/2) = 702 cent Qi_m = 1200∗log₂5^{1/4} = 696,6 cent GG = 1200∗log₂(9/8) = 203,9 cent

Pythagoreisches Komma	Syntonisches Komma	Diesis
$1200 * \log_2\left(\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right) = 23{,}46 cent$	$1200 * \log_2 \frac{(3/2)^4}{2^2 * (5/4)} = 21{,}51$	$1200 * \log_2 \frac{2}{(5/4)^3} = 41{,}06 cent$

Vergleich der Reinen Stimmung mit Pythagoreischer und Mitteltöniger Stimmung in Cent

Mitteltönige Stimmung			Pythagoreische Stimmung			Reine Stimmung (Naturtonleiter)		
Intervall	**Frequenzverhältnis q**	**Angabe in Cent**	**Intervall**	**Frequenzverhältnis q**	**Angabe in Cent**	**Intervall**	**Frequenzverhältnis q**	**Angabe in Cent**
Prime	1	0	**Prime**	1	**0**	**Prime**	1/1	**0**
(Chr.Halbton)$_m$	$(25/16)*5^{-1/4}$	**76,049**	**Limma**	256/243=1,0535	**90,22**	**Diat.Hlbt. c-cis**	16/15=1,0667	**111,73**
Diat.Halbton	$(8/5)*5^{-1/4}$	**117,11**	**Apotome**	2187/2048=1,0679	**113,69**	**Kl.Gnzt. c-des**	10/9 = 1,1111	**182,4**
Ganzton	$(1/2)*(5^{1/4})^2$	**193,2**	**Ganzton c-d**	9/8=1,125	**203,9**	**Ganzton c-d**	9/8=1,125	**203,9**
Kl. Terz	$4*(5^{1/4})^{-3}$	**310,3**	**Py.kl.Terz c-es**	32/27=1,1852	**294,14**	**Kl. Terz c-es**	6/5 = 1,2	**315,64**
Gr. Terz	**5/4 = 1,25**	**386,3**	**Ditonus c-e**	81/64=1,2656	**407,82**	**Gr. Terz c-e**	**5/4 = 1,25**	**386,3**
Quarte	$2*5^{-1/4}$	**503,40**	**Quarte c-f**	4/3 = 1,3333	**498,045**	**Quarte c-f**	4/3 =1,333	**498,04**
Tritonus	$(5/8)*(5^{1/4})^2$	**579,47**	**Tritonus c-fis**	729/512=1,42383	**611,73**	**c-fis**	45/32=1,4063	**590,22**
(Quinte)$_m$	$5^{1/4}$ = 1,495349	**696,6**	**Quinte c-g**	**3/2 = 1,5**	**701,955**	**Quinte c-g**	**3/2 = 1,5**	**701,955**
Kl.Sexte	8/5 = 1,6	**813,69**	**Pyt kl. Sexte c-as**	128/81=1,580	**792,18**	**Kl. Sext c-as**	8/5 = 1,6	**813,69**
Gr. Sexte	$(1/2)*(5^{1/4})^2$	**889,74**	**P.g.Sexte c-a**	27/16=1,6875	**905,865**	**Gr. Sext c-a**	5/3 = 1,6667	**884,36**
Kl. Septim	$4*(5^{-1/4})^2$	**1006,8**	**Pyt.Kl. Sept c-b**	16/9 = 1,77778	**996,09**	**Kl.Sept c-b**	16/9=1,7778 9/5 = 1,8000	**996,11** **1017,6**
Gr.Septim	$(5/4)*5^{1/4}$	**1082,9**	**Pyt.Gr. Sept c-h**	243/128=1,8984	**1109,775**	**Gr. Sep. c-h**	15/8 = 1,875	**1088,27**
Oktave	2/1 = 2	**1200**	**Oktave**	**2/1 = 2**	**1200**	**Oktave**	**2/1 = 2**	**1200**
Gr. Diesis	**1,024**	**41,06**	**Pythag. Komma**	531441/524288 =1,0136433	**23,46**	**Synt. Komma**	81/80=1,0125	**21,51**

Vergleich der Abweichungen zwischen Reiner und Pythagoreischer sowie Reiner und Mitteltöniger Stimmung (% mit Bezug auf Reine Stimmung)

Intervall Δ/cent	**Prim**	**Diaton. Halbton**	**Gr. Gzton**	**Kl. Terz**	**Gr. Terz**	**Quarte**	**Tritonus**	**Quinte**	**Kl. Sexte**	**Gr. Sexte**	**Kl. Septim**	**Gr. Septime**	**Oktave**	**Σ**
Reine.St - Pyth.St	**0**	**+ 21,51 +19,25%**	**0**	**+ 21,5 + 6,81%**	**- 21,52 - 5,57%**	**0**	**- 21,51 - 3,64%**	**0**	**+21,51 +2,64%**	**-21,51 -2,43%**	**0**	**- 21,51 - 2,0%**	**0**	**- 21,51 + 15,1 %**
Reine.St– Miltteltö.	**0**	**- 5,38 - 4,81%**	**+ 10,7 +5,25%**	**+ 5,34 + 1,7%**	**0**	**- 5,36 - 1,08%**	**+ 10,75 + 1,82%**	**+ 5,36 +0,76%**	**0**	**- 5,38 - 0,61%**	**0**	**+ 5,37 + 0,49%**	**0**	**+ 21,4 + 3,5 %**

Man erkennt, von den 12 Halbton-Intervallen der reinen Stimmung

- stimmen 5 mit der pythagoreischen Tonleiter überein und 7 andere weichen um den Betrag von 21.5 cent mit alternierendem Vorzeichen von den entsprechenden Intervallen der pythagoreischen

Tonleiter ab: +21,5 cent stehen in der ersten Tetrachordfolge -21,5 cent in der zweiten Tetrachordfolge gegenüber, unkompensiert bleibt offenbar der Betrag von -21,51 cent des Tritonus,

- weist das Limma gegenüber dem diatonischen Halbton die größte Abweichung auf, ist um 19,25% gegenüber der reinen Stimmung erniedrigt, die große Septime die geringste Abweichung, sie ist um 2 % erhöht, und prozentual ergibt sich in der Summe eine positive Abweichung von 15,1 %, um die die pythagoreischen Intervalle im Mittel gegenüber der reinen Stimmung vermindert sind;

von den 12 Halbton-Intervallen der ¼ Komma mitteltönigen Tonleiter

- stimmen 4 mit der reinen Stimmung überein, die Abweichungen bei den anderen 8 Intervallen sind geringer als beim Vergleich mit der pythagoreischen Tonleiter, dabei resultiert sowohl in der ersten wie in der zweiten Tetrachordfolge eine positive Abweichung, ebenso beim Tritonus, so dass sich auch in der Summe eine positive Abweichung von + 21,4 cent ergibt, die dem Betrag nach mit der Abweichung zwischen reiner und pythagoreischer Stimmung vergleichbar ist,
- fällt die Summe der prozentualen Abweichungen mit 3,5 % wesentlich geringer aus als beim Vergleich der reinen Stimmung mit der pythagoreischen Tonleiter, wobei im letzteren Fall der größere Betrag ja nur durch den Tritonus verursacht wird – entscheidend ist offenbar die geringere Schwankungsbreite der Abweichungen.

VII. Die gleichstufige Stimmung und Werckmeister Stimmung (III)

Die **gleichstufige Stimmung, auch gleich schwebend genannt**, teilt das pythagoreische Komma auf die 12 Halbtöne der pythagoreischen Tonleiter so auf, dass jedem der 12 Halbtöne 1/12 des Intervalls der Oktave zugeordnet ist: Die Oktave wird in 12 gleiche Stufen eingeteilt, und durch eine solche Art von Verstimmung der pythagoreischen Intervalle wird die Quintenspirale zum Quintenzirkel geschlossen. Es entsteht ein **gleichstufiger Halbton $HT_{gl.st.}$** Der Zusammenhang mit den pythagoreischen Intervallen ist wie folgt:

Gleichstufiger Halbton $HT_{gl.st.}$ = 1/12 Oktave mit Frequenzverhältnis $q = 2^{1/12} = \sqrt[12]{2} \Rightarrow 100cent$

$HT_{gl.st}$= Limma + (5/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{256}{243}*\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{5}{12}}\right\}=100cent$$

$GG_{gl.st.}$= GG – (2/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{9}{8}:\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{2}{12}}\right\}=200cent$$

$KT_{gl.st.}$ = $KT_{pyt.}$+ (3/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{32}{27}*\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{3}{12}}\right\}=300cent$$

$GT_{gl.st}$= 2 GG - (4/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{81}{64}:\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{4}{12}}\right\}=400cent$$

$Qa_{gl.st.}$= Qa + (1/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{4}{3}*\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{1}{12}}\right\}=500cent$$

$Trit_{gl.st.}$ = 3GG - (6/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{729}{512}:\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{6}{12}}\right\}=600cent$$

$Qi_{gl.st}$= Qi - (1/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{3}{2}:\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{1}{12}}\right\}=700cent$$

$KSex_{gl.st.}$= $KSex_{pyt.}$+(4/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{128}{81}*\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{4}{12}}\right\}=800cent$$

$GSex_{gl.st}$=$GSex_{pyt.}$- (3/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{27}{16}:\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{3}{12}}\right\}=900cent$$

$KSep_{gl.st}$=$KSep_{pyt.}$+ (2/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{16}{9}*\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{2}{12}}\right\}=1000cent$$

$GSep_{gl.st.}$=$GSep_{pyt.}$- (5/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{243}{128}:\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{5}{12}}\right\}=1100cent$$

$Ok_{gl.st.}$ = Ok + (0/12)Pyt.Ko.

$$1200*\log_2\left\{\frac{2}{1}*\left[\frac{(3/2)^{12}}{2^7}\right]^{\frac{0}{12}}\right\}=1200cent$$

Die Zusammenstellung zeigt, dass die Korrekturen um Anteile des pythagoreischen Kommas zur Überführung der Intervalle der pythagoreischen Tonleiter in gleichstufige Intervalle alternierend symmetrisch auftreten und sich mit Ausnahme der am Tritonus vorzunehmenden Korrektur kompensieren.

Gleich-stufig.	Pythag	Korrekt. Pyt.Ko.	Gleich-stuf.	Pythag	Korrekt Pyt.Ko.	Gleich-stuf.	Pythag	Korrekt Pyt.Ko.	Gleich-stuf.	Pythag	Korrekt Pyt.Ko.	Gleich-stuf.	Pythag	Korrekt Pyt.Ko.
$Qi_{gl.st.}$	**Qi**	**- (1/12)**	**$GG_{gl.st.}$**	**GG**	**- (2/12)**	**$GSex_{gl.st}$**	**$GSex_{PY}$**	**- (3/12)**	**$GT_{gl.st}$**	**Ditonus**	**- (4/12)**	**$GSep_{gl.}$**	**$KSep_{pyt}$**	**- (5/12)**
$Qa_{gl.st.}$	**Qa**	**+ (1/12)**	**$KSep_{gl.st}$**	**$KSep_{pyt}$**	**+ (2/12)**	**$KT_{gl.st.}$**	**KT_{pyt}**	**+ (3/12)**	**$KSex_{gl.st}$**	**$KSex_{pyt}$**	**+ (4/12)**	**$HT_{gl.st.}$**	**Limma**	**+ (5/12)**

Es ist von vornherein einleuchtend, dass mit einer derartig gleichförmigen Einordnung der Intervalle in den Quintenzirkel bei der Modulation nach anderen Tonarten keine zusätzlichen Verstimmungen auftreten. Lediglich ein Intervall tritt in der Folgetonart anstelle eines in der Ausgangstonart vorhandenen neu auf. Ohne näher zu prüfen, wird davon ausgegangen, dass die gegenüber der Modulation in reiner Stimmung auftretenden Verstimmungen, wie sie durch das syntonische Komma verursacht werden, unterbleiben. Die Vorteile des pythagoreischen Systems bei der Modulation, wie bereits bei der ¼ Komma mitteltönigen Stimmung, bleiben also auch in der gleichstufigen Stimmung erhalten. **Die gleichstufige Stimmung basiert ebenfalls auf den Grundintervallen Quinte und Oktave, kann daher als eine weitere Abwandlung der pythagoreischen Stimmung (Abfolge reiner Quinten) aufgefasst werden.**

Die konsequente Umsetzung der gleichstufigen Stimmung vermittelt aber in der Wahrnehmung und Verarbeitung von Musik beim Hörer eine gewisse Gleichförmigkeit, lässt die Unterschiede in der Klangfarbe, die den verschiedenen Tonarten eigen ist, weniger hervortreten. Diesen Nachteil versuchen die im Barockzeitalter entwickelten Stimmungen auszugleichen.

Die 1681 von Andreas Werckmeister für Tasteninstrumente eingeführten „Wohltemperierten Stimmungen“, von denen vor allem die Version III weite Verbreitung gefunden hat, sind durch die Kombination von Intervallen der gleichstufigen Stimmung und einer eigens definierten mittleren pythagoreischen Quinte Qi_{pm} gekennzeichnet, die sich von der ¼ Komma mitteltönigen Stimmung dadurch unterscheidet, dass sie um ¼ eines pythagoreischen Kommas vermindert ist. Für diese Stimmung ist charakteristisch, dass die häufig gespielten Tonarten reinere Terzen enthalten, die entfernteren Tonarten „schärfere“.

Die wohltemperierte Stimmung nach Werckmeister III verwendet

- für den **Halbton HT** das **pythagoreische Limma 256/243,**
- für den wohltemperierten Großen Ganzton **GG_{pm} = 2 Qi_{pm} – Ok** mit einer eigens definierten mittleren **Quinte Qi_{pm}**, die gegenüber der reinen Quinte Qi um ¼ eines pythagoreischen Kommas vermindert ist: **Qi_{pm} = [Qi - $(12Qi\text{-}7Ok)^{1/4}$]** – dabei ist bemerkenswert, dass sich **GG_{pm}** auch durch die Differenz von 6 gleichstufigen Halbtönen **$HT_{gl.st.}$** und 2 reinen bzw. pythagoreischen Ganztönen **GG** generieren lässt: **GG_{pm}= 6$HT_{gl.st.}$–2 GG,** so dass man die Definition einer besonderen mittleren Quinte eigentlich nicht benötigt,
- für die **kleine Terz KT_{pyt}** wird wieder die durch die pythagoreische Stimmung definierte kleine Terz genommen, die mit der reinen Quinte gemäß **KT = 2Ok – 3Qi**, gebildet wird,
- für die wohltemperierte **große Terz GT_{pm}** gilt **GT_{pm} = 3$HT_{gl.st.}$+Limma,** und da **Limma = 3 Ok-5Qi** und der gleichstufige Halbton **$HT_{gl.st.}$ = $Ok^{1/12}$,** ist auch die große Terz wie in der mitteltönigen Stimmung durch die pythagoreischen Grundintervalle generierbar,
- für die **Quarte Qa** gilt wie in der reinen und in der pythagoreischen Stimmung **Qa = Ok – Qi,**

- für den **Tritonus Trit,** die Hälfte der Oktave, werden nicht 3 GG, wie in der pythagoreischen Tonleiter, sondern Quarte Qa und Limma gemäß **Trit = Qa + Limma** kombiniert, das heißt auch hier erweisen sich die Grundintervalle Ok und Qi des pythagoreischen Systems als hinreichend,
- für die **wohltemperierte pythagoreische mittlere Quinte** $\mathbf{Qi_{pm}}$ wird die reine Quinte um ¼ eines pythagoreischen Kommas vermindert $\mathbf{Qi_{pm} = [Qi - (12Qi\text{-}7Ok)^{1/4}]}$, woraus mit **GG = 2Qi-Ok die** Beziehung $\mathbf{Qi_{pm} = [3Ok - 4\,GG]^{1/4}}$ folgt, und da $\mathbf{Ok = HT_{gl.st}{}^{12}}$ **ist,** kann man auch schreiben

  $$\mathbf{Qi_{pm} = 9\,HT_{gl.st.} - GG = Ok^{9/12} - 2Qi + Ok = Ok^{7/4} - 2Qi = 1{,}49492696}$$

  Die so definierte Quinte $\mathbf{Qi_{pm}}$ ist also ebenso gut durch gleichstufigen Halbton „$\mathbf{HT_{gl.st.}}$“ und den großer Ganzton **„GG“** zu beschreiben und damit wieder auf die Grundintervalle Oktave und reine Quinte rückführbar,
- für die **kleine Sexte** wird wieder das Intervall der pythagoreischen Stimmung unverändert übernommen **KSex= 3Ok - 4Qi = 1,580,**
- für die **große Sexte** gilt $\mathbf{GSex = 4Ok - 6Qi + 3HT_{gl.st.}}$ = 1,670436,
- für die **kleine Septime** wird auf das mit der pythag. und reinen Stimmung übereinstimmende Intervall **KSep = 16/9** zurückgegriffen,
- für die **große Septime** gilt $\mathbf{GSep = Ok - 2GG + 3HT_{gl.st.} = 1{,}879.}$

Auch die Werckmeister-Stimmungen sind Abwandlungen der pythagoreischen Tonleiter.

Vergleich der Reinen Stimmung mit Gleichstufiger und Wohltemperierter Stimmung in Cent

Gleichstufige Stimmung			Reine Stimmung (Naturtonleiter)			Wohltemperierte Stimmung Werckmeister III		
Intervall	Frequenzverhältnis q	Angabe in Cent	Intervall	Frequenzverhältnis q	Angabe in Cent	Intervall Frequ.verh. q	Anmerkungen	Angabe in Cent
Prime	1	0	Prime	1/1	0	Prime	1/1	0
Halbton	$\sqrt[12]{2}$	100	Diat.Ht.c-cis	16/15=1,0667	111,73	Halbton c-cis 256/243	3Ok-5Qi Pythag. Limma	**90,22**
			Kl.Gt. c-des	10/9=1,1111	182,4			
Ganzton	$\sqrt[12]{2^2}$	200	Ganzton c-d	9/8=1,125	203,9	Ganzton c-d (64/81)∗√2	Wohltemp.GG 2 Qi_{pm}-Ok $[Qi-(12Qi-7Ok)^{1/4}]^2$-Ok	**192,18**
Kl. Terz	$\sqrt[12]{2^3}$	300	Kl.Terz c-es	6/5 = 1,2	315,64	Kl. Terz c-es 32/27	Pythagor. kleine Terz GG+ Lim = 2Ok - 3Qi	**294,13**
Gr. Terz	$\sqrt[12]{2^4}$	400	Gr. Terz c-e	5/4 = 1,25	386,31	Gr. Terz c-e $(256/243)*2^{3/12}$	Pythagor.mittl.große Terz 3$HT_{gl.st.}$+Limma	**390,22**
Quarte	$\sqrt[12]{2^5}$	500	Quarte c-f	4/3 =1,333	498,04	Quarte c-f (4/3)	Quarte = Ok - Qi	498,04
Tritonus	$\sqrt[12]{2^6}$	600	Tritonus c-fis	45/32=1,406	590,22	Tritonus c-fis (4/3)(256/243)	Quarte + Limma	588,27
Quinte	$\sqrt[12]{2^7}$	700	Quinte c-g	3/2 = 1,5	701,96	Quinte c-g $Qi_{pm}=(8/9)2^{9/12}$ = 1,49492696	Pythag.mittlere Quinte 9$HT_{gl.st.}$–GG =$Ok^{7/4}$–2Ok	696,09
Kl.Sexte	$\sqrt[12]{2^8}$	800	Kl. Sexte c-as	8/5 = 1,6	813,69	Kl. Sext c-gis $8*(2/3)^4$	Kleine Sexte 3Ok-4Qi = 1,580	792,18
Gr. Sexte	$\sqrt[12]{2^9}$	900	Gr. Sexte c-a	5/3 = 1,6667	884,36	Gr. Sext c-a $(2^{10}/3^6)*2^{3/12}$	Pythag.mittlere Gr. Sexte 4Ok-6Qi+3$HT_{gl.st.}$ = 1,67044	888,27
Kl. Septime	$\sqrt[12]{2^{10}}$	1000	Kl.Sept c-b	16/9=1,7778	996,11	Kl.Sept c-b 16/9	Kleine Septime 2Ok-2Qi = 1,77778	996,09
				9/5 = 1,8000	1017,6			

Gr.Septim	$\sqrt[12]{2^{11}}$	1100	**Gr.Sept. c-h**	15/8 = 1,875	1088,3	**Gr. Sept. c-h (128/81)∗$2^{3/12}$**	**Pythag.mittl.Gr. Septim Ok-2GG+3$HT_{gl.st}$=1,8792**	1092,2
Oktave	$\sqrt[12]{2^{12}} = 2$	1200	**Oktave**	2/1 = 2	1200	**Oktave**		1200

Vergleich der Abweichungen zwischen Reiner und Gleichstufiger sowie Reiner und Wohltemperierter Stimmung (Werckmeister III) (% mit Bezug auf reine Stimmung)

Intervall Δ/cent	Prim	Diaton. Halbton	Gr. Gzton	Kl. Terz	Gr. Terz	Quarte	Tritonus	Quinte	Kl. Sexte	Gr. Sexte	Kl. Septime	Gr. Septime	Oktave	Σ
Reine.St.- Gleichst.St	0	+ 11,73 +10,5%	+ 3,9 +1,9%	+15,64 +4,96%	-13,69 -3,55%	-1,96 -0,39%	-9,78 -1,66%	+1,96 +0,28%	+13,69 +1,68%	-15,64 -1,77%	- 3,89 - 0,39%	-11,7 -1,08%	0	- 9,74 + 10,5%
ReineSt.- WerckmSt.	0	+21,51 +19,25%	+11,72 +5,75%	+21,51 +6,81%	-3,91 -1,01%	0	+ 1,95 +0,33%	+5,87 +0,84%	+21,51 +2,64%	-3,91 -0,44%	0	- 3,9 - 0,36%	0	+72,35 + 33,8%

Bei den 12 Halbton-Intervallen der gleichstufigen Stimmung

- ergeben sich erwartungsgemäß gegenüber der reinen Stimmung bei allen Intervallen Abweichungen, die im Unterschied zur mitteltönigen Stimmung in der Summe zu einem negativen Wert von -9,74 cent führen, der dem Betrag nach weniger als halb so groß ausfällt und dabei im Wesentlichen durch die Tritonus-Abweichung zustande kommt; denn + 15,6 cent als Summe in der ersten Tetrachordfolge steht ein Betrag von -15,6 cent in der zweiten gegenüber,
- erweist sich auch hier der Unterschied zwischen Halbton und diatonischem Halbton der reinen Stimmung von 10,5% in der Summe als dominant.

Bei den 12 Halbton-Intervallen der wohltemperierten Stimmung nach Werckmeister III

- stimmen Quarte und kleine Septime mit der reinen Stimmung überein, bei den anderen Intervallen überwiegen zum Teil beträchtliche negative Abweichungen, das heißt sie liegen tiefer als die der reinen Stimmung, und eine Systematik ist kaum feststellbar.
- Aufschlussreicher erscheint die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen den Intervallen einer Oktave und deren Bildung durch die Abfolge reiner Quinten, die dem pythagoreischen System zugrunde liegt. Sämtliche Intervalle der pythagoreischen Tonleiter sind durch eine Abfolge reiner Quinten mittels Re-Oktavierung generierbar. Die Intervalle in einem Ausschnitt der Quintenspirale sind noch einmal aufgeführt:

,as	**,es**	**b**	**f**	**c‘**	**g‘**	**d“**	**a“**	**e“‘**	**h“‘**	**fis ““**	**cis““‘**	**gis““‘**

12 Intervalle	KT	KSep	Qa	Pr	Qi	GG	GSex	GT	GSep	Tritonus	HT	KSex
reine Quinten	,es	b	f	c‘	g‘	d“	a“	e“‘	h“‘	fis““	cis (des)““‘	gis(as)““‘
W III - Pythag	294,1 – 294,1 = 0 ct	996,1 – 996,1= 0 ct	498,0 – 498,0 = 0 ct	0	696,1 – 702 = -5,9 ct	192,2 – 203,9 = -11,7 ct	888,3 - 905,9 = -17,6 ct	390,2 – 407,8 = -17,6 ct	1092,2 – 1109,8 = -17,6 ct	588,3 – 611,7 = -23,1 ct	90,22 – 113,69 = - 23,5 ct	792,2 - 792,2 = 0 ct
W III - Gl.stufig.	294,1 – 300 = -5,9ct	996,1 – 1000 = -3,9 ct	498,0 – 500 = -2,0 ct	0	696,1 – 700 = -3,9 ct	192,2 – 200 = -7,8 ct	888,3 - 900 = -11,7 ct	390,2 – 400 = -9,8 ct	1092,2 – 1100 = -7,8 ct	588,3 – 600 = -11,7 ct	90,22 – 100 = -9,78 ct	813,7- 800= -13,7
W III-Reine St.	294,1 – 315,6 = -21,5 ct	996,1 – 996,1 (1017,6) = 0 (-21,5)	498,0 – 498,0 = 0	0	696,1 – 702,0 = -5,9 ct	192,2 – 203,9 = -11,7 ct	888,3 - 884,4 = +3,9 ct	390,2 – 386,3 = +3,9 ct	1092,2 – 1088,3 = +3,9 ct	588,3 – 590,2 = -1,9 ct	90,22 – 111,7 = -21,5 ct	792,2 - 813,7= -21,5

Der Vergleich **„Werckmeister III – Pythagoreische Stimmung“** lässt die mit der Erweiterung der Anzahl der Oktaven zunehmend engere Wahl der Quinten in der Tendenz deutlich hervortreten, wie sie auch in der eingangs erwähnten Girlande auf dem Titelblatt des Wohltemperierten Klaviers von Johann Sebastian Bach aus dem Jahr 1722 angezeigt ist.

Der Vergleich **„Werckmeister III – Gleichstufige Stimmung“** macht den Ausgleich deutlich, der durch die gleichstufige Stimmung zustande kommt.

Nach der mitteltönigen Stimmung zeigt die Werckmeister III Stimmung die beste Annäherung der Großen Terz GT an die reine Stimmung, und in den höheren Tonarten (mehr Vorzeichen) sind die Quinten in der Tendenz erkennbar vermindert.

VIII. Zusammenfassung und Schlussbetrachtung

Leitgedanke der Abhandlung war der Versuch nachzuvollziehen, auf welche Weise es bei der im europäischen Kulturkreis gepflegten orchestralen Musik gelingt, eine möglichst weitgehende Annäherung an die Naturtonreihe der reinen Stimmung zu erreichen und dabei die Kompromisse aufzuhellen, die einzugehen sind, um ein Zusammenspiel auf Instrumenten mit fixierten Intervallen sowie mit in Quinten bzw. in Quarten gestimmten Instrumenten und ggf. in Kombination mit Gesang, auch in Chören, zu ermöglichen. Dabei wird davon ausgegangen, dass zwischen der naturgegebenen reinen Stimmung und unserem in der Evolution herausgebildeten Harmonieempfinden eine Wechselbeziehung besteht.

Die Modulation durch sämtliche Tonarten erweist sich in der Naturtonreihe der reinen Stimmung auf Instrumenten mit fixierten Intervallen wie Klavier, Cembalo, Orgel als praktisch nicht realisierbar. Bei Transformation in eine benachbarte Tonart tritt jedes Mal neben einem neuen Intervall an einem weiteren Ton (eigentlich an zwei), bedingt durch das syntonische Komma, eine Verstimmung auf. Letztere unterbleibt, wenn man auf die pythagoreische Tonleiter zurückgreift.

Die Intervalle der pythagoreischen Tonleiter lassen sich durch eine Folge reiner Quinten generieren, was eine Fehlanpassung an die Oktave, das pythagoreische Komma, einschließt.

Es zeigt sich, dass Schritte einer Annäherung an die reine Stimmung der Naturtonreihe stets vom Konzept der pythagoreischen Tonleiter starten. Das gilt für die

- ¼ Komma mitteltönige Stimmung,
- gleichstufige Stimmung,
- Werckmeister III Stimmung und vermutlich ebenso für andere wohltemperierte Stimmungsansätze.

Die Konzepte einer Annäherung an die reine Stimmung unterscheiden sich in Art und Umfang der Korrektur von Quinten, um die durch das pythagoreische Komma gegebene Fehlanpassung an die Oktave mehr oder weniger zu kompensieren. Der Vorteil des pythagoreischen Tonsystems bei der Modulation, der Überleitung in andere Tonarten, bleibt dabei erhalten.

Die Intervalle der reinen Stimmung gründen sich auf die drei Grundintervalle Oktave, Quinte und Große Terz. Die Intervalle der pythagoreischen Tonleiter lassen sich demgegenüber bereits durch Oktave und Quinte generieren, und das bleibt so bei den Abwandlungen, die auf eine Annäherung an die reine Stimmung gerichtet sind.

Unberücksichtigt geblieben ist in der vorliegenden Abhandlung die Beeinflussung der gehörten Tonhöhe durch die Lautstärke, die Artikulation und die damit verbundene Differenzierung in der Klangfarbe. So ist zum Beispiel der obere Ton einer Oktave höher zu intonieren, wenn er lauter gespielt wird als der untere und im umgekehrten Fall tiefer bei leiserer Spielweise. Ein und derselbe Klavierton, zum Beispiel a‘ = 440 Hz klingt in einer Tonfolge in F-Dur tiefer als in A Dur. Derartige Befunde bedeuten Relativierung einer allein auf Zahlenarithmetik gegründeten Darlegung von Zusammenhängen.

Mit der hier vorgenommenen Gegenüberstellung der verschiedenen Stimmungen soll daher keineswegs der Anspruch erhoben werden, die Komplexität unserer Klangrezeption in ihrem Kern bereits hinreichend erfasst zu haben.

Das Wesen von Musik ausgehend von der physikalisch-mathematischen Beschreibung akustischer Schwingungen und deren Zusammenwirken zu erfassen, ist vermutlich ähnlich vermessen, als wollte man eine Blume mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung begreifen, wie sie der chemischen Bindung zugrunde gelegt werden kann. Obwohl die objektive Existenz einer Rose zweifelsfrei auf einer molekularen Struktur basiert, die in ihr eine enorme Mannigfaltigkeit ausbildet, erweist sich eine andere Ebene mit übergreifenden Begriffsbildungen als erforderlich, um sich im Erkennen eines derartigen Gebildes der objektiven Realität anzunähern.

In der Musik ist dagegen die Rezeption einer physikalisch-mathematisch und damit objektiv definierbaren Klangkonfiguration vom musikalischen Umfeld abhängig, in das diese eingefügt ist, denn die Wahrnehmung und Verarbeitung folgt subjektiv bestimmten erlernten Mustern. Das musikalische Erlebnis einer Sinfonie oder eines Klavierkonzerts ist damit dem Wesen nach ein subjektiver Vorgang, der außerhalb unseres Bewusstseins wohl kaum existent ist. Erst das gemeinschaftliche Erlebnis des Musikschaffens und Musikhörens schafft wohl wieder eine Ebene, die objektive Realität ist.

Meinem Bruder Eberhard Feltz und meinem Enkel Daniel Teichert danke ich für wertvolle Hinweise und Korrekturen bei der Abfassung des Manuskripts.

Adresse des Verfassers: adalbert.feltz@aon.at