Karl Inderfurth

Produktionstheoretische Überlegungen zur Berücksichtigung von Ausbeuteunsicherheit in Fertigungsprozessen

Prof. Dr. Karl Inderfurth
Professor (em.) für Betriebswirtschaftslehre
Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

H. Ahn et al. (Hrsg.), *Nachhaltiges Entscheiden,*
DOI 10.1007/978-3-658-12506-6_10, © Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

1 Einleitung

In der deutschsprachigen Betriebswirtschaftslehre hat die Produktionstheorie über lange Zeit eine bedeutende Rolle gespielt, bevor sie allmählich den Anschluss an andere betriebswirtschaftliche Teiltheorien und auch an die Problemstellungen des Produktionsmanagements verlor. Es ist insbesondere Harald Dyckhoff, der sich in seinen wissenschaftlichen Arbeiten bemüht hat, diesem Bedeutungsschwund der Produktionstheorie entgegenzuwirken. Dies zeigt sich schon in der ersten Auflage seines Buches ‘Betriebliche Produktion’ aus 1992 und später sehr dezidiert in zwei Aufsätzen zur Neukonzeption der Produktionstheorie (vgl. Dyckhoff 2003a und Dyckhoff 2003b). Diese Neuorientierung versteht die Produktionstheorie konsequent als eine transformationsbezogene Theorie betrieblicher Wertschöpfung und gibt ihr eine entscheidungsorientierte Fundierung. In diesem Rahmen lässt sich durch die Verwendung der Aktivitätsanalyse eine prozessorientierte Theorie der Produktion entwickeln.[1]

Mit der Neuorientierung der Produktionstheorie durch Dyckhoff, die mittlerweile durch ein in vielfacher Neuauflage erschienenes Lehrbuch (aktuell: Dyckhoff 2006) Eingang in die betriebswirtschaftliche Standardausbildung gefunden hat, ist es nicht nur gelungen, umweltschutzbezogene Aspekte in die Produktionstheorie zu integrieren, sondern es wurde auch eine deutlich bessere Anbindung an die Produktionsmanagementlehre wiederhergestellt.[2] Allerdings ist diese Produktionstheorie im Wesentlichen statisch-deterministisch orientiert und wird damit der Tatsache, dass viele produktionswirtschaftliche Probleme in einem dynamischen und stochastischen Umfeld auftreten, nicht gerecht.[3] So kommt Dyckhoff selbst zu dem Schluss, dass sowohl eine dynamische als auch eine stochastische Erweiterung seiner Theoriekonzeption unumgänglich ist (vgl. Dyckhoff 2006, S. 365f.). Während es mittlerweile erste fruchtbar erscheinende Ansätze zur Integration dynamischer Aspekte gibt,[4] steht eine entsprechende Erweiterung der Produktionstheorie um stochastische Phänomene noch aus. Der vorliegende Aufsatz versucht, an dieser Stelle im Rahmen der Berücksichtigung von Ausbeuteunsicherheit in der Produktion einen ersten Ansatz zu entwickeln, der die Theorie weiterführt und an entsprechende Entwicklungen im Produktionsmanagement anschlussfähig ist.

Bisherige Arbeiten zur produktionstheoretischen Berücksichtigung von Unsicherheiten in Fertigungsprozessen beziehen sich im Wesentlichen auf eine stochastische Erweiterung der Produktionsfunktion (vgl. Fandel 2010, S. 32ff. und S. 253ff., sowie die dort genannte Literatur). Allerdings handelt es sich hierbei um mikroökonomisch orientierte Beiträge,

1 Zur kurz gefassten Darstellung dieser Theoriekonzeption vgl. Dyckhoff 2006, S. 9ff.

2 Besonders gut nachvollziehbar in Dyckhoff/Spengler 2010.

3 Auf diese generelle Schwachstelle der Produktionstheorie weist auch schon Schneeweiß 2002, S. 94, hin. In Beiträgen zum Produktionsmanagement ist es hingegen schon lange Standard, dass Aspekte der Dynamik und Stochastik in entsprechende Planungsmodelle einbezogen werden.

4 Insbesondere zu finden in Dyckhoff/Spengler 2010, S. 213ff., wo Petri-Netze als Modellierungstool vorgeschlagen werden.

die nur eine globale Beschreibung der Unsicherheit beinhalten und die Produktionsfunktion nicht aus stochastischen Bedingungen einzelner Transformationsvorgänge ableiten.[5] Eine tiefergehende Analyse der Einbeziehung von stochastischen Transformationsbedingungen in ein produktionstheoretisches Konzept auf der Grundlage eines aktivitätsanalytischen Ansatzes findet sich in der Habilitationsschrift von Jahnke (1995). Dort wird zum einen herausgearbeitet, dass bei Vorhandensein interner Produktionsunsicherheit im Rahmen der Input/Output-Beziehungen des Transformationsprozesses die gebräuchliche Formulierung einer Produktionsfunktion gar nicht möglich ist (vgl. Jahnke 1995, S. 63f.). Statt dessen wird im Rahmen eines sog. steuergrößenorientierten Ansatzes mit Fokussierung auf den Unsicherheitsaspekt der Produktionsdauer versucht, im Rahmen einer stationären stochastischen Analyse – unter einer Reihe stark einschränkender Annahmen – ersatzweise das langfristig erreichbare Produktionspotenzial bei unterschiedlichen Faktoreinsatzbedingungen in einer Produktionsstelle zu ermitteln (vgl. Jahnke 1995, S. 66ff.). Da sich dieser Ansatz nicht zur Erweiterung des aktivitätsanalytischen Modells von Dyckhoff auf Basis der Beschreibung eines einzelnen Transformationsvorgangs eignet, muss nach einem anderen Weg zur Verallgemeinerung dieses Modells gesucht werden.

Zunächst einmal ist festzuhalten, dass für eine Erweiterung der Produktionstheorie um stochastische Aspekte nur diejenigen Unsicherheiten von Bedeutung sind, die sich genuin auf den Prozess der Transformation von Inputs in Outputs in einer Produktionsstelle beziehen. Damit wird die Nachfrageunsicherheit nach Outputs und die Lieferunsicherheit von Inputs, die im Rahmen von Produktionsmanagementaufgaben berücksichtigt werden müssen, im Theoriekontext nicht weiter thematisiert. Die interne Produktionsunsicherheit macht sich aus aktivitätsanalytischer Sicht generell darin bemerkbar, dass bei Vorgabe eines bestimmten Aktivitätsniveaus in einer Produktionsstelle entweder die Inputmengen einzelner Faktoren oder die Outputmengen einzelner Produkte oder beides unsichere Größen sind. Der klassische, aus dem Produktionsmanagement bekannte Fall ist derjenige, dass bei festgelegten Faktormengen im Rahmen eines Produktionsvorgangs die tatsächlichen Produktionsmengen aufgrund diverser unsicherer Einflussgrößen von den geplanten Mengen abweichen können. Dieser Sachverhalt ist als Unsicherheit der Produktionsausbeute aus vielen Produktionsbereichen von der Halbleiterfertigung über die Produktwiederaufarbeitung bis zur Agrarindustrie bekannt (vgl. z. B. Nahmias 2009, S. 392; Vogelgesang/Langella/Inderfurth 2012; Kazaz 2004). Er führt dazu, dass keine hundertprozentige Produktionsausbeute im Sinne der Erreichung technisch maximaler Ausbringung bei gegebenem Faktoreinsatz zu beobachten ist und dass diese Ausbeuteverluste zugleich zufälligen Schwankungen unterliegen können. Eine stochastische Produktionsausbeute ist also ein wirtschaftlich relevanter Sachverhalt, der in einer Theorie der betrieblichen Wertschöpfung Berücksichtigung finden sollte.

Die Ursachen solcher prozessinternen Unsicherheiten können vielfältig sein (vgl. Fandel 2010, S. 253) und basieren generell auf (unbekannten) Qualitätsschwankungen der Einsatzfaktoren im weitesten Sinne (vgl. Jahnke 1995, S. 24). Um nicht nur allgemeine, sondern auch spezielle

5 Insofern ist Jahnke 1995, S. 30, mit seiner Anmerkung Recht zu geben, dass diese Ansätze eigentlich nicht der betriebswirtschaftlichen Produktionstheorie zuzurechnen sind.

produktionstheoretische Aussagen ableiten zu können, muss man die unterschiedlichen Gründe genauer analysieren, die hinter den Ausbeuteschwankungen stecken können. Dabei stößt man im Wesentlichen auf drei Ursachenkomplexe. Zum einen sind es *prozessbezogene Ursachen*, die dann vorliegen, wenn die technischen oder natürlichen Rahmenbedingungen der Produktion nicht vollständig kontrollierbar und beherrschbar sind, wie es beispielsweise in der Landwirtschaft oder bei manchen chemischen Prozessen der Fall ist. Zu diesem Ursachentyp zählt auch die plötzliche Zustandsverschlechterung von Fertigungsanlagen, die den Herstellungsprozess von einem fehlerfreien in einen fehlererzeugenden Zustand wechseln lassen. Ein zweiter Ursachenkomplex besteht im gelegentlichen Auftreten von Fehlern auf Seiten der eingesetzten Betriebsmittel oder des Personals, die sich nur auf einzelne Produkteinheiten in einem laufenden Fertigungsprozess auswirken. Diese *betriebsmittelbezogenen Ursachen* lassen sich noch durch Ursachen ergänzen, die im Einsatz fehlerhaften Materials in Fertigungsprozessen bestehen. Solche Materialmängel, die zu *materialbezogenen Ursachen* für Ausbeuteverluste führen können, können fallweise einzelne Produkte oder auch systematisch den gesamten Produktionsprozess betreffen.

Je nach Ursachenzusammenhang können unterschiedliche stochastische Bedingungen vorliegen, die den Zusammenhang zwischen Faktorverbrauch und Produktionsoutput beeinflussen. Im Folgenden soll analysiert werden, in welcher Form eine Stochastik in den Input-Output-Beziehungen in das Dyckhoffsche Konzept der Produktionstheorie (im Weiteren als deterministischer Ansatz bezeichnet) einbezogen werden kann. Dabei soll auch darauf eingegangen werden, inwieweit spezifische stochastische Gesetzmäßigkeiten im Ausbeuteverhalten zu spezifischen produktionstheoretischen Zusammenhängen führen, die eine Verknüpfung mit entsprechenden Produktionsmanagementmodellen (vgl. z. B. Inderfurth 2014) zulassen.

2 Produktionstheoretische Erweiterungen bei stochastischer Produktionsausbeute

2.1 Produktionsaktivität bei stochastischer Ausbeute

Im deterministischen Ansatz beschreibt eine Produktionsaktivität das Ergebnis eines Transformationsprozesses in einer Produktionsperiode in der Form, dass die mit diesem Prozess verbundenen Mengen an Input- und Outputobjekten einander gegenübergestellt werden. Dabei ist wesentlich, dass die Mengen an verbrauchten und erzeugten Objekten eindeutig gemessen werden können. Dies ist nun bei Unsicherheiten im Produktionsprozess nur noch ex post möglich, wenn das Ergebnis einer Transformation bekannt ist. Ex ante ist ein Transformationsprozess bei Unsicherheit dadurch charakterisiert, dass Input- und/oder Outputmengen nicht exakt prognostiziert werden können. Sofern aufgrund von häufigen Prozesswiederholungen Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Transformationsergebnisse geschätzt werden können, lässt sich in diesem Zusammenhang von einem stochastischen Transformationsprozess sprechen. Auf derartige Prozesse werden sich die Aussagen im Folgenden beziehen.

Der klassische Fall eines stochastischen Produktionsprozesses besteht darin, dass man bestimmte Mengen an Inputs in diesen Prozess hineingibt, aber aufgrund unvollständiger Kenntnis über wesentliche Prozessbedingungen oder Inputeigenschaften nicht für alle Outputobjekte deren mengenmäßigen Ergebnisse exakt vorherbestimmen kann. Dies ist der typische Fall stochastischer Produktionsausbeute, der, wie in Kapitel 1 beschrieben, in vielen Wirtschaftsbereichen auftritt. Auf diesen Fall der stochastischen Produktionsbedingungen werden wir uns im Folgenden konzentrieren.[6] Die Unsicherheit der Produktion macht sich dann darin bemerkbar, dass die Outputobjekte in nicht genau bekannter Menge bzw., genauer gesagt, in nicht exakt prognostizierbaren Mengenanteilen unterschiedlicher Qualitätsstufen auftreten. Dies ist dadurch bedingt, dass bei nicht exakt kontrollierbaren Produktionsbedingungen neben Erzeugnissen in Normalqualität auch solche mit verschiedenem Ausmaß an Qualitätsmängeln sowie gänzlich unbrauchbare Produkte herauskommen können.

Im einfachsten Fall eines Transformationsprozesses mit nur einer Input- und einer Outputart sowie mit nur zwei Qualitätsausprägungen (‘gut’ oder ‘schlecht’) können sich bei einer 1:1-Beziehung zwischen Input und Output und beim Einsatz einer einzigen Inputmengeneinheit ex post zwei unterschiedliche Produktionsergebnisse herausstellen, wie es in Abbildung 1 grafisch dargestellt ist. Hierbei steht I für das Inputobjekt und O_G/O_S für das Outputobjekt mit guter/schlechter Qualität als Ergebnis eines Transformationsprozesses T.

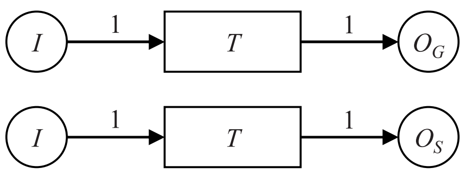

Abb. 1: Ex-post-Ergebnisse eines Transformationsprozesses

Zur Beschreibung der Produktionsbedingungen bei unsicherer Produktionsausbeute ist allerdings eine Ex-ante-Formulierung des Produktionsprozesses notwendig, in die auch die Kenntnis der Wahrscheinlichkeiten für die unterschiedlichen Produktionsergebnisse einfließen muss. Dies kann im Rahmen einer erweiterten Darstellung erfolgen, wie sie in Abbildung 2 vorgeschlagen wird, wo alle möglichen Ergebnisse des Transformationsprozesses mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten (w_G für gute und w_S für schlechte Qualität) dargestellt sind.[7]

In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob es sich bei den Outputs O_G und O_S überhaupt um die gleiche Objektart handelt. Physisch unterscheiden sich Produkte der gleichen Art bei

6 Ein Fall von Stochastik auf der Inputseite läge z. B. dann vor, wenn innerhalb einer Produktionsperiode bei vorhandenen Prozessunsicherheiten so lange Inputs in den Prozess eingebracht werden müssten, bis vorgegebene Outputmengen erreicht sind.

7 Hierbei darf die Darstellung der Produktionsstruktur in Abbildung 2 nicht mit derjenigen einer divergierenden Produktion im Sinne von Kuppelproduktion verwechselt werden, weil es sich nicht um das gleichzeitige Auftreten von verschiedenen Produktionsergebnissen handelt.

unterschiedlicher Qualitätsausprägung sicherlich,[8] für die produktionstheoretische Darstellung sollten sie aber dennoch unter einer einheitlichen Objektart subsumiert werden, da sie aus dem gleichen Produktionsprozess stammen. Eine andere Frage ist, ob die verschiedenen Outputausprägungen produktionstechnisch wirklich rein zufallsabhängig sind. Bei genauerem Hinsehen sind es ja prinzipiell messbare Unterschiedlichkeiten in den Prozessbedingungen und Inputqualitäten (Klimabedingungen, Präzisionsverluste bei Maschinen, Leistungsschwankungen bei Handarbeit oder Qualitätsmängel bei Werkstoffen), die zu ungewollter Outputvariabilität führen. Allerdings werden Inputobjekte gleicher Art, die sich nur durch (unbekannte) Qualitätsdifferenzen unterscheiden, als eine einzige Objektart verstanden.[9] Nun ließen sich die unterschiedlichen Outputqualitäten im Prinzip auf unterschiedliche Qualitäten der Inputobjekte und damit (bei engerer Betrachtungsweise) auf unterschiedliche eingesetzte Objektarten auf Inputseite zurückführen. Somit wäre bei genauer Kenntnis der entsprechenden Inputqualitäten und Zusammenhänge gar kein stochastischer Produktionszusammenhang gegeben, und eine entsprechende Erweiterung der Produktionstheorie wäre unnötig. Diese exakte Kenntnis ist aber in vielen produktionswirtschaftlichen Zusammenhängen nicht erreichbar, entweder weil bestimmte Größen (wie Witterungsbedingungen oder menschliche Leistungsfähigkeit) grundsätzlich nicht exakt prognostizierbar sind oder weil es zu kostspielig wäre, die Qualität relevanter Einflussgrößen genau zu messen (z. B. durch 100 % Stichproben des Materials oder kontinuierliche Überwachung der Maschinenzustände). Somit wird man es in der Praxis immer wieder mit Produktionsunsicherheit in relevantem Ausmaß zu tun haben, die eine entsprechende Abbildung im Rahmen produktionstheoretischer Modelle erfordert.

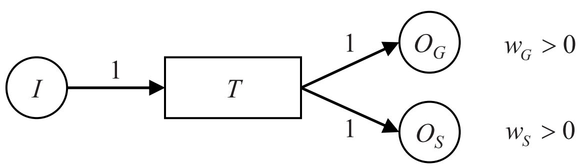

Abb. 2: Ex-ante-Beschreibung eines Transformationsprozesses

Eine solche Modellierung lässt sich durch die Formulierung einer *Produktionsaktivität* an Hand der Inputmengen und der möglichen Outputmengen unter Angabe der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten erreichen. Die Grafik in Abbildung 2 kann man dabei als Darstellung einer *Grundaktivität* interpretieren, die sich durch den Einsatz genau einer Einheit des Inputgutes auszeichnet. Für die betrachtete Produktionsstruktur würde eine generelle Aktivität mit einer allgemeinen Inputmenge x durch die möglichen Outputmengen an 'guten' (y_G) und 'schlechten' (y_S) Produkten sowie durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten $w(y_G|x)$ und $w(y_S|x)$ für das Auftreten der jeweiligen Produktmengen beschrieben werden, wie dies in Abbildung 3 in Erweiterung zum Basisfall aus Abbildung 2 dargestellt ist.

8 Dies wird sich i. d. R. auch in unterschiedlich hohen Preisen bei der Verwertung dieser Produkte niederschlagen.

9 Dieselbe Auffassung vertritt auch Jahnke 1995, S. 24f., der eine solche einheitliche Objektart über ihre Normqualität definiert, von der es aber zufällige Abweichungen geben kann.

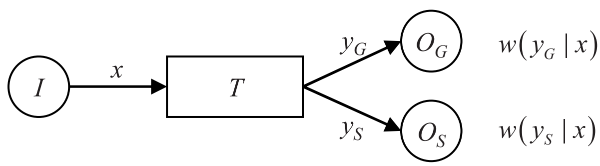

Abb. 3: Grafische Darstellung einer allgemeinen Produktionsaktivität

Somit lässt sich festhalten, dass zur Einbeziehung stochastischer Produktionsausbeute die klassische Aktivitätsdefinition nicht ausreicht, sondern um Qualitätsstufen der Outputobjekte und um zugehörige Wahrscheinlichkeitsangaben ergänzt werden muss. Eine einzelne Aktivität ist in diesem Sinne nichts anderes als eine (bedingte) Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Outputmengen unterschiedlichen Qualitätsniveaus bei gegebener Menge des Inputgutes.[10] In algebraischer Schreibweise lässt sich damit eine Aktivität A gemäß (1) kurz als Vektor der Input- und Outputmengen unter Ergänzung des Vektors der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten darstellen:[11]

$$A = [x, Y_G, Y_S] \;/\; [w(Y_G = y_G|x),\, w(Y_S = y_S|x)]. \tag{1}$$

Hierbei sind Y_G und Y_S als Zufallsvariable zu verstehen mit Realisationen y_G und y_S, die zwischen 0 und x liegen können. Unter expliziter Angabe aller möglichen Realisationen des Produktionsprozesses lässt sich eine spezifische Aktivität A_2 für den Fall $x = 2$ (d. h. Input von zwei Mengeneinheiten) beispielartig wie in (2) beschreiben, wobei für jede realisierbare Outputkombination (y_G, y_S) die zugehörige Wahrscheinlichkeit[12] $w_2(y_G, y_S) = w(Y_G = y_G|x = 2)$ mit $y_S = x - y_G$[13] angegeben ist:[14]

$$A_2 = [(-2,2,0)/w_2(2,0) = 0{,}25 \;;\; (-2,1,1)/w_2(1,1) = 0{,}50 \;;\; (-2,0,2)/w_2(0,2) = 0{,}25]. \tag{2}$$

Auf der Basis der vorgestellten Definition und Darstellungsform einer einzelnen Aktivität lässt sich nunmehr beschreiben, was bei stochastischer Produktionsausbeute unter einer Technikmenge zu verstehen ist und wie spezielle Eigenschaften einer Produktionstechnik definiert sein können.

10 Im Fall mehrerer Input- und Outputobjekte würde es sich um eine mehrdimensionale bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung handeln.

11 Diese algebraische Darstellung einer allgemeinen Produktionsaktivität wählt analog auch Jahnke 1995, S. 60ff.

12 Merkmalsausprägungen der Outputmengen, die mit Wahrscheinlichkeit Null auftreten, werden zweckmäßigerweise bei der Beschreibung einer Aktivität nicht berücksichtigt.

13 Bei genau zwei Qualitätsstufen (‘gut’ bzw. ‘schlecht’) addieren sich hier beide Outputmengen unmittelbar zur Gesamtinputmenge.

14 Zur Abkürzung wird die Wahrscheinlichkeit w für jede Outputkombination (y_G, y_S) mit der Inputmenge x indiziert und Inputmengen werden zur deutlicheren Kenntlichmachung mit negativem Vorzeichen versehen.

2.2 Technikdefinition und Technikeigenschaften bei stochastischer Ausbeute

Geht man davon aus, dass eine *Technik* die im Prinzip technisch möglichen Aktivitäten eines Produktionssystems beschreibt, so umfasst dies im Fall stochastischer Produktionsausbeute auch die Wahrscheinlichkeitsinformationen über Outputausprägungen. Somit lässt sich eine Technik algebraisch als Vektor beschreiben, der alle prinzipiell durchführbaren Aktivitäten in der Schreibweise nach (1) bzw. (2) als Elemente enthält.

In der folgenden Abbildung 4 sind beispielartig drei verschiedene Techniken $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$ und $\boldsymbol{T_3}$ (jeweils mit den ersten drei in ihnen enthaltenen Aktivitäten A_1, A_2 und A_3) dargestellt. Diese Techniken unterscheiden sich sowohl bezüglich der möglichen Outputkombinationen als auch bezüglich der Wahrscheinlichkeiten für einzelne Outputkombinationen.

	A_1	A_2	A_3	....
	$[(0,0,0)]$	$[(-1,1,0)\,;(-1,0,1)]$	$[(-2,2,0)\,;\,(-2,1,1)\,;\,(-2,0,2)]$	....
$\boldsymbol{T_1}$ **:**	$w_0(0,0) = 1$	$w_1(1,0) = 0{,}5\,;\,w_1(0,1) = 0{,}5$	$w_2(2,0) = 0{,}25\,;\,w_2(1,1) = 0{,}50\,;\,w_2(0,2) = 0{,}25$	....
$\boldsymbol{T_2}$ **:**	$w_0(0,0) = 1$	$w_1(1,0) = 0{,}5\,;\,w_1(0,1) = 0{,}5$	$w_2(2,0) = 0{,}25\,;\,w_2(1,1) = 0{,}25\,;\,w_2(0,2) = 0{,}50$	....
$\boldsymbol{T_3}$ **:**	$w_0(0,0) = 1$	$w_1(1,0) = 0{,}5\,;\,w_1(0,1) = 0{,}5$	$w_2(2,0) = 0{,}50\,;\qquad\qquad;\,w_2(0,2) = 0{,}50$	....

Abb. 4: Beispielartige Darstellung dreier Produktionstechniken[15]

Technik $\boldsymbol{T_3}$ unterscheidet sich von den anderen beiden Techniken durch das Fehlen der Input/Output-Realisation (–2,1,1), während sich Technik $\boldsymbol{T_1}$ und $\boldsymbol{T_2}$ durch verschiedene Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten möglicher Input/Output-Realisationen für die dritte Aktivität unterscheiden.

Im Prinzip lässt sich jedes Produktionssystem, in dem das Produktionsergebnis stochastischen Einflüssen unterliegt, in seinen technischen Fähigkeiten über die Darstellung der gesamten (allerdings unbeschränkten) Technikmenge wie in Abbildung 4 vollständig beschreiben. Weil sich eine derartige Beschreibung aber nur sehr bedingt zur Entscheidungsunterstützung bei der Nutzung eines Produktionssystems eignet, ist es vorteilhaft, wenn sich eine Technik auch bei Ausbeuteunsicherheit durch weitere Eigenschaften genauer spezifizieren und einfacher charakterisieren lässt. Da die *Additivität* einer Technik im klassischen Fall ohne Unsicherheit eine der besonders wichtigen Technikeigenschaften darstellt, soll im Folgenden betrachtet werden, inwieweit diese Eigenschaft auf den stochastischen Fall übertragen werden kann. Auf die Technikeigenschaft der Linearität soll nicht weiter eingegangen werden, weil sich der vorliegende Beitrag auf Systeme der Fertigung von Stückgütern bezieht, für welche die Eigenschaft der Größenproportionalität nicht vorliegt.

15 Es werden nur die ersten drei Aktivitäten (für $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$) einer jeden Technik aufgeführt, die zur gesamthaften Darstellung um weitere technisch mögliche Aktivitäten zu ergänzen wären. Jede einzelne Technik ergibt sich als Kombination aus den Input/Output-Realisationen der möglichen Aktivitäten in der ersten Zeile und den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsangaben in der jeweiligen Technikzeile.

Im klassischen Fall ist die Additivität einer Technik dadurch charakterisiert, dass jede Kombination zweier möglicher Produktionsaktivitäten wieder eine mögliche Aktivität aus der Technikmenge darstellt. Bei einer Aktivitätsdefinition gemäß (1) muss die Additivitätseigenschaft allerdings in einem erweiterten Sinne formuliert werden, um auch die zu einer Aktivität gehörende Menge an Outputrealisationen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mit zu erfassen. Insofern ist es konsequent, im Fall stochastischer Ausbeute dann von einer *additiven Technik* zu sprechen, wenn sich im Fall einer Kombination von zwei möglichen Aktivitäten alle ihre realisierbaren Input/Outputkombinationen mit positiver Wahrscheinlichkeit in einer Produktionsaktivität wiederfinden, die zur Technikmenge gehört. Dies ist z. B. in Abbildung 4 (unter Beschränkung auf den dort dargestellten Ausschnitt der Technikmenge) für die Techniken $\boldsymbol{T_1}$ und $\boldsymbol{T_2}$ der Fall, während es auf Technik $\boldsymbol{T_3}$ nicht zutrifft. Das durch zweifache Durchführung der Aktivität mit $x = 1$ realisierbare Ergebnis $(-2,1,1)$ ist in der Realisationsmenge von $\boldsymbol{T_3}$ für $x = 2$ nicht enthalten, so dass $\boldsymbol{T_3}$ als nicht-additiv zu charakterisieren ist.

Für die beiden additiven Techniken $\boldsymbol{T_1}$ und $\boldsymbol{T_2}$ lassen sich im Zusammenhang mit der Transformation von Wahrscheinlichkeiten bei der Kombination von Einzelaktivitäten charakteristische Unterschiede feststellen. So ergeben sich für Technik $\boldsymbol{T_1}$ die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der drei Outputkombinationen bei $x = 2$ als Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Realisationen bei der Aktivität mit $x = 1$.[16] Diese Form der Transformation der Wahrscheinlichkeiten lässt sich damit erklären, dass das Ergebnis der Kombination der Aktivitäten[17] sich in wahrscheinlichkeitstheoretischer Sicht durch die Unabhängigkeit der Einzelaktivitäten erklären lässt. Eine additive Technik, deren Aktivitäten zusätzlich alle durch diese Unabhängigkeitseigenschaft charakterisiert sind, lässt sich als *unabhängig-additiv* bezeichnen. Sofern eine additive Technik bei stochastischer Produktion diese Eigenschaft nicht besitzt, wie dies beispielsweise bei Technik $\boldsymbol{T_2}$ der Fall ist, kann man sie *abhängig-additiv* nennen.

Eine starke Vereinfachung der kompletten Beschreibung einer Technik ergibt sich im deterministischen Fall, wenn eine additive Technik *endlich generierbar* ist, d. h. wenn sich alle möglichen Aktivitäten durch Kombinationen einer endlichen Anzahl von Grundaktivitäten erzeugen lassen, sodass sich die gesamten technischen Möglichkeiten eines Produktionssystems durch ein beschränkte Menge an Informationen beschreiben lassen. Übertragen auf den Fall stochastischer Produktionsausbeute bedeutet das, dass sich mithilfe einer beschränkten Zahl von Produktionsaktivitäten alle möglichen Aktivitäten einer Technik unter Einschluss der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für diese Aktivitäten generieren lassen. Im einfachsten Fall einer Produktionsstruktur mit einer einzigen Inputart wie in den obigen Beispielen würde eine endlich generierbare Technik genau dann vorliegen, wenn sich alle Aktivitäten aus der Kenntnis einer einzigen Grundaktivität wie in Abbildung 2 ableiten ließen. Dies ist dann möglich, wenn die Information über die Basiswahrscheinlichkeiten $w_1(1,0)$ und $w_1(0,1)$ ausreicht, um die Wahrscheinlichkeiten für die Outputrealisationen aller anderen Aktivitäten zu ermitteln. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn es keine stochastischen Abhängigkeiten

16 Im vorliegenden Fall bedeutet dies: $w_2(2,0) = w_1(1,0) \cdot w_1(1,0)$ sowie $w_2(1,1) = w_1(1,0) \cdot w_1(0,1) + w_1(0,1) \cdot w_1(1,0)$ und $w_2(0,2) = w_1(0,1) \cdot w_1(0,1)$.

17 Hier: zweifache Durchführung der Aktivität A_2 (mit $x = 1$).

bei mehrfacher Durchführung der Grundaktivität gibt.[18] Damit zeigt sich, dass eine endlich-generierbare additive Technik nur dann auftreten kann, wenn diese Technik in Form der obigen Charakterisierung unabhängig-additiv ist. Am Beispiel der Technik $\boldsymbol{T_1}$ aus Abbildung 4 heißt das, dass sich bei Vorliegen dieser Technikeigenschaft die Wahrscheinlichkeitsverteilungen aller Aktivitäten mit $x > 2$ ebenso aus den Basiswahrscheinlichkeiten berechnen lassen wie dies im Fall von $x = 2$ geschehen ist. Bezogen auf das Anwendungsfeld stochastischer Produktionsausbeute steht hinter dieser Technikeigenschaft der Sachverhalt, dass das zufällige Auftreten von Produktionsfehlern in einem größeren Produktionslos bei der Herstellung der einzelnen Stücke unabhängig voneinander vorkommt. Damit zeigt sich an diesem Beispiel, dass die Eigenschaften des stochastischen Ausbeuteprozesses Auswirkungen auf die Technikeigenschaften in einem Produktionssystem haben können.

2.3 Produktionserfolg bei stochastischer Ausbeute

Die Produktionstheorie befasst sich auch mit der Frage, welche der möglichen Aktivitäten aus einer Technik bei der Suche nach einer aus Erfolgssicht bestmöglichen Nutzung eines Produktionssystems überhaupt infrage kommen. Die im Rahmen der Anwendung des sog. *schwachen Erfolgsprinzips* postulierte Beschränkung auf effiziente Produktionsaktivitäten setzt lediglich die Kenntnis des Grades der Erwünschtheit der Input/Outputobjekte (Gut, Übel oder Neutrum) voraus (vgl. Dyckhoff 2006, S. 122ff.) und verzichtet in diesem Rahmen auf die Berücksichtigung dominierter Produktionsalternativen. Während für die Effizienzbetrachtung im Fall ohne Unsicherheit der Aktivitätenvergleich auf Basis der reinen Zustandsdominanz in Bezug auf die Input/Output-Mengen ausreicht, muss diese Vorgehensweise bei stochastischer Ausbeute aufgrund der Mehrdeutigkeit der Produktionsergebnisse erweitert werden. Das sich hierfür anbietende Konzept der *stochastischen Dominanz* soll anhand des folgenden Beispiels mit vier Aktivitäten (A_1 bis A_4) in Abbildung 5 erläutert werden, die wie in (2) für den Fall eines Inputs von $x = 2$ formuliert sind, wobei hier jeweils nur zwei Outputergebnisse mit positiver Wahrscheinlichkeit auftreten.

$$A_1 = \mathbf{[}(-2,2,0)/w_2(2,0) = 0{,}5\ ;\ (-2,1,1)/w_2(1,1) = 0{,}5\mathbf{]}$$
$$A_2 = \mathbf{[}(-2,1,1)/w_2(2,0) = 0{,}5\ ;\ (-2,0,2)/w_2(0,2) = 0{,}5\mathbf{]}$$
$$A_3 = \mathbf{[}(-2,2,0)/w_2(2,0) = 0{,}2\ ;\ (-2,1,1)/w_2(1,1) = 0{,}8\mathbf{]}$$
$$A_4 = \mathbf{[}(-2,2,0)/w_2(2,0) = 0{,}8\ ;\ (-2,0,2)/w_2(0,2) = 0{,}2\mathbf{]}$$

Abb. 5: Vier Produktionsaktivitäten im Vergleich

Bezüglich der Qualifizierung der Objekte sei angenommen, dass es sich bei dem Input I und dem Output O_G um Güter handelt, während der 'schlechte' Output O_S als Neutrum betrachtet

18 Übertragen auf den Fall mehrerer Grundaktivitäten bedeutet das, dass auch bei der Kombination verschiedener Grundaktivitäten keine stochastischen Abhängigkeiten auftreten dürfen.

wird. Damit ist für die Dominanzbetrachtung im Rahmen der Aktivitäten in Abbildung 5 nur das Ergebnis für das zweite Objekt (O_G) und die zugehörige Wahrscheinlichkeit von Belang.

Bei einem Vergleich von A_1 und A_2 zeigt der Blick auf den Output O_G, dass A_2 in keinem Fall zu einem höheren, aber u. U. durchaus zu einem niedrigeren Ergebnis als A_1 führen kann. Damit lässt sich unabhängig von Wahrscheinlichkeitsinformationen feststellen, dass die Aktivität A_2 von A_1 dominiert wird. Während in diesem Fall das Konzept der Zustandsdominanz zur Diskriminierung ausreicht, ist dies bei einem Vergleich von A_1 mit A_3 nicht mehr möglich. Auch hier lässt sich aber ein Ausschluss einer Aktivität vornehmen, wenn man zum Konzept der stochastischen Dominanz ersten Grades (vgl. Bamberg/Coenenberg/Krapp 2008, S. 100f.) übergeht. Bei dieser Dominanzregel wird eine Alternative einer anderen vorgezogen, wenn sie für kein (Output-)Ergebnis eine kleinere, aber für mindestens ein Ergebnis eine größere Übertreffenswahrscheinlichkeit hat. Dieses Dominanzkonzept bildet insofern eine logische Erweiterung des Konzepts der Zustandsdominanz bei Sicherheit als es, anders als z. B. die stochastische Dominanz zweiten Grades, keine spezifischen Präferenzannahmen für den Entscheider in der Risikosituation voraussetzt.[19] Auf die Beispiele in Abbildung 5 übertragen führt die Anwendung des Prinzips der stochastischen Dominanz dazu, dass die Aktivität A_1 der Aktivität A_3 (und natürlich auch der Aktivität A_2) eindeutig vorgezogen wird. Ein Vergleich von A_1 mit A_4 zeigt, dass hier keine Dominanz vorliegt, sodass unter den in Abbildung 5 aufgeführten Alternativen A_1 und A_4 als effiziente Aktivitäten übrig bleiben.

Insgesamt ist es so, dass bei unsicherer Produktionsausbeute auch die Anwendung der Regeln stochastischer Dominanz i. d. R. nur zu einer bedingten Einschränkung der relevanten Aktivitäten innerhalb einer Technik führen kann. Im deterministischen Fall lässt sich durch Dominanzbetrachtungen ein eindeutig abgegrenzter effizienter Rand einer Technik bestimmen, der als funktionaler Zusammenhang in einer Produktionsfunktion abgebildet ist. Unter stochastischen Bedingungen geht die Eindeutigkeit des Zusammenhangs zwischen Inputs und Outputs unter Effizienzaspekten verloren. So besteht, wie aus den Technikbeispielen in Abbildung 4 abzulesen ist, die entsprechende Produktionsfunktion aus einer Folge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche die Erreichbarkeit bestimmter Produktmengen bei unterschiedlich hohem Faktoreinsatz beschreiben. Im Fall alternativer (stochastisch) effizienter Aktivitäten mit gleichem Faktoreinsatz (wie A_1 und A_4 in Abbildung 5) ist das Input/Output-Mengenverhältnis noch unbestimmter, da hier jedem Faktor (bzw. jeder Faktorkombination) nur eine ganze Schar von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zugeordnet werden kann.[20] Das Konstrukt der Produktionsfunktion verliert mithin unter Bedingungen stochastischer Produktionsausbeute deutlich an Gehalt und bietet sich kaum als Zwischenschritt an, um eine Reduktion aller Elemente einer Technik auf eine einzige wünschenswerte Produktionsakti-

19 Es muss allerdings angemerkt werden, dass eine stochastisch (ersten Grades) dominierte Aktivität ex post durchaus zu einem besseren Ergebnis führen könnte als eine dominierende.

20 Dies macht auch deutlich, dass die in mikroökonomisch orientierten Beiträgen postulierte stochastische Produktionsfunktion in Form eines erwarteten Verlaufs, der nach oben und unten mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten abweicht (vgl. Fandel 2010, S. 258f.), nicht allgemein aus einer einzelwirtschaftlichen Betrachtung abgeleitet werden kann.

vität zu ermöglichen. Um zu einer konkreten Entscheidung für eine bestmögliche Produktionsweise zu kommen, benötigt man also gerade auch im stochastischen Fall eine Bewertung der Input- und Outputergebnisse sowie Informationen zu den Präferenzen des Entscheiders.

Die Anwendung des sog. *starken Erfolgsprinzips* dient dazu, aus den effizienten Aktivitäten einer Technik die erfolgsmaximale(n) herauszufiltern. Dazu ist zum einen eine Bewertung der Input- und Outputobjekte nötig. Entsprechend der traditionellen Vorgehensweise gehen wir hier von ökonomischen Erfolgskategorien aus und wählen als Wertmaßstäbe konstante Stückpreise für die einzelnen Inputs und Outputs. Bezogen auf unser Standardbeispiel einer Produktion in (1) werden der Input mit Stückkosten von c und die Outputs mit Stückerlösen von e_G bzw. e_S bewertet.[21] Damit lässt sich das Produktionsergebnis bei einer bestimmtem Aktivität ex post durch die Wertgröße

$$v(x, y_G, y_S) = -c \cdot x + e_G \cdot y_G + e_S \cdot y_S \tag{3}$$

ausdrücken. Da allerdings unter Bedingungen der Produktionsunsicherheit eine Ex-ante-Bewertung von Aktivitäten notwendig ist, muss sich diese auf den stochastischen Produktionserfolg

$$V(x, Y_G, Y_S) = V(-c \cdot x + e_G \cdot Y_G + e_S \cdot Y_S) \tag{4}$$

beziehen. Ausgehend von der Anwendung des Bernoulli-Prinzips als allgemein akzeptierter Entscheidungsregel unter Risiko würde sich unter Verwendung einer Risikonutzenfunktion $U(.)$ der Produktionserfolg einer Aktivität $[x, Y_G, Y_S]$ / $[w(Y_G = y_G|x), w(Y_S = y_S|x)]$ über die folgende Erwartungswertbildung

$$V(x, Y_G, Y_S) = E[\![U(-c \cdot x + e_G \cdot Y_G + e_S \cdot Y_S)]\!] \tag{5}$$

messen lassen, in die auch die Erfolgswahrscheinlichkeiten aus der Aktivitätsbeschreibung eingehen. Auf der Grundlage dieser Erfolgsfunktion kann auch bei stochastischen Produktionsbedingungen jeder Aktivität eine eindeutige Bewertung zugeordnet werden, sodass es grundsätzlich durch einen Vergleich über alle effizienten Aktivitäten möglich ist, die erfolgsmaximale Produktionsweise festzustellen.

Geht man von Risikoneutralität des Entscheiders aus oder akzeptiert man für operative Produktionsentscheidungen mit ihrer hohen Wiederholungshäufigkeit das Erwartungswertprinzip (vgl. auch Jahnke 1995, S. 11f.), dann lautet die Erfolgsfunktion

$$V(x, Y_G, Y_S) = -c \cdot x + e_G \cdot E[\![Y_G]\!] + e_S \cdot E[\![Y_S]\!] \ . \tag{6}$$

Diese Erfolgsfunktion ist nur dann linear (in der Variablen x), wenn der Zusammenhang zwischen erwarteter Ausbeute und Inputeinsatz eine lineare Form hat. Ob dies zutrifft, hängt vom spezifischen Typ des stochastischen Ausbeuteprozesses ab, wie im nächsten Kapitel noch genauer aufgezeigt wird. Damit kann bei stochastischem Produktionsergebnis selbst bei

21 Es wird davon ausgegangen, dass es sich bei keinem der Objekte um ein ‘Übel’ im Sinne eines unerwünschten Gegenstands handelt.

konstanten Preisen und Anwendung der Erwartungswert-Regel nicht unbedingt vom Vorliegen einer (vergleichsweise einfach zu handhabenden) linearen Erfolgsfunktion ausgegangen werden.

Wenn die Erfolgsfunktion vorliegt, lässt sich die erfolgsmaximale Produktionsweise grundsätzlich durch die Bestimmung der Aktivität mit dem größten Erfolgsbeitrag $V_{\max}$ finden. Für die untersuchte Produktionsstruktur heißt das:

$$V_{\max} = \max_{x \in \mathbb{N}} V\left(x, Y_G, Y_S\right). \tag{7}$$

Für den Fall einer strikt linearen Erfolgsfunktion in (6) wäre der maximale Erfolg (je nach Stückkosten und -erlösen) entweder Null oder unbeschränkt. Weil in der Praxis die Menge der effizienten Aktivitäten durch Beschränkungen auf der Input- und Outputseite (z. B. durch mengenmäßige Ober- und Untergrenzen) im Rahmen der Produktionsmöglichkeiten weiter eingeschränkt ist, sind diese Randlösungen der Erfolgsmaximierung i. d. R. nicht relevant. Im Weiteren soll auf eine im praktischen Anwendungsfall immer auftretende Restriktion näher eingegangen werden, die darin besteht, dass die Absatzmöglichkeiten für die Outputs nach oben durch die Nachfrage beschränkt sind. Diese Situation soll in Weiterführung unseres Grundmodells der stochastischen Produktion näher betrachtet werden, wobei zusätzlich die Annahme getroffen wird, dass das fehlerhafte Produkt O_S keinen Erlösbeitrag (d. h. $e_S = 0$) erzielt. Wenn die Nachfrage für das fehlerfreie Produkt O_G der Menge D entspricht, beschränkt diese Größe auch im Fall einer die Nachfrage übersteigenden Produktionsausbeute den Absatz und Erlös. Somit beträgt unter diesen Umständen der Produktionserfolg im Sinne eines erwarteten Gewinns

$$V\left(x, Y_G, Y_S\right) = -c \cdot x + e_G \cdot E\left[\!\left[\min(Y_G, D)\right]\!\right]. \tag{8}$$

Damit ergibt sich, dass selbst im Fall einer Linearität der unbeschränkten Erfolgsfunktion nach (6) die Gewinnfunktion nach (8) nicht-linear ist, was die Suche nach der Optimalproduktion gemäß (7) aufwändiger macht. Im folgenden Kapitel soll im Rahmen der Anwendung der oben beschriebenen produktionstheoretischen Erweiterungen näher auf die mit der Gewinnmaximierung im Fall der Erfolgsmessung nach (8) zusammenhängende Optimierungsaufgabe eingegangen werden, insbesondere weil dieser Aufgabentyp als Optimierungsproblem in der Literatur zum operativen Produktionsmanagement bei stochastischer Ausbeute schon seit längerem behandelt wird.[22]

22 Vgl. hierzu die Übersichtsaufsätze in Yano/Lee 1995 und Grosfeld-Nir/Gerchak 2004, wo auch deutlich wird, dass im Produktionsmanagement stochastische und dynamische Probleme häufig gleichzeitig behandelt werden.

3 Theorieanwendung auf spezielle Typen stochastischer Produktionsausbeute

3.1 Überblick über Ausbeutetypen

Im Zusammenhang mit den in Kapitel 1 beschriebenen verschiedenartigen Ursachen für Ausbeuteverluste in Produktionsprozessen lassen sich im Wesentlichen drei unterschiedliche Modelltypen des Ausbeuteverhaltens finden, auf die sich die entsprechende Produktionsmanagementliteratur konzentriert (vgl. Yano/Lee 1995; Grosfeld-Nir/Gerchak 2004). Zum einen können sich betriebsmittel- und materialbezogene Ursachen für Ausbeuteverluste dergestalt ergeben, dass Prozessfehler oder Materialmängel einzeln und unabhängig voneinander auftreten und dabei zu Produktionsfehlern führen. In diesem Fall hat man es mit einem spezifischen Typ von Ausbeuteprozess zu tun, der sich dadurch auszeichnet, dass es keine Korrelation der fehlerhaften Teile in einem Produktionslos gibt. Ist die Fehlerwahrscheinlichkeit bei der Fertigung jedes einzelnen Stücks konstant, so folgt die Gesamtausbeute aus einem Produktionslos mit vorgegebener Inputmenge einer Binomialverteilung. Da sich der Ausbeutevorgang bei jedem einzelnen Produkt innerhalb eines Loses unabhängig wiederholt, hat man es unter diesen Umständen gerade mit dem Fall einer unabhängig-additiven Technik zu tun, bei der sich aus der Grundaktivität ‘Input eines einzigen Stücks’ ($x = 1$) alle weiteren Aktivitäten der gesamten Technik mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus der Binomialverteilung generieren lassen. Technik $\boldsymbol{T_1}$ in Abbildung 4 ist ein Beispiel für diesen Typ der *binomialverteilten Ausbeute*.

Ein anderer Ausbeutetyp liegt vor, wenn betriebsmittel- oder materialbezogene Ursachen in der Form unvorhergesehen auf das Betriebsgeschehen einwirken, dass der Produktionsprozess von einem bestimmten Produktionsschritt an von einem ‘in control’ in einen ‘out of control’-Zustand übergeht. Dieses Fehlerverhalten zeichnet sich im Grenzfall dadurch aus, dass nach dem Zustandswechsel nur noch defekte Stücke produziert werden, während vorher alle Produkte ‘gut’ waren. Wenn ein solcher Wechsel nach jedem einzelnen Produktionsvorgang mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit auftreten kann, so lässt sich die Gesamtausbeute aus einem Los durch eine sog. abgebrochen geometrische Verteilung[23] beschreiben. Ein Ausbeuteprozess, der in diesem Zusammenhang durch eine positive Korrelation der Produktionsfehler in einem Los charakterisiert ist, lässt jede Kombination von Gut/Schlecht-Teilen in einem Los zu und ist insofern mit einem abhängig-additiven Typ von Technik verknüpft. Ein Beispiel für eine solche *abgebrochen geometrische Ausbeute* und zugehöriger Technik findet sich in Abbildung 4 in $\boldsymbol{T_2}$ wieder.

Ein dritter Ausbeutetyp, der wiederum grundsätzlich anders geartet ist, liegt dann vor, wenn ein Produktionslos als Ganzes durch nicht beherrsch- oder vorhersehbare Umweltbedingungen gleichmäßig von Ausbeuteeinbußen betroffen ist. Eine einfache Modellierung eines solchen Zusammenhangs besteht darin, anzunehmen, dass der Anteil der Gutteile (Ausbeuterate)

23 Im Englischen: ‘interrupted geometric distribution’; vgl. auch Grosfeld-Nir/Gerchak 2004.

in einem Produktionslos einer festen Wahrscheinlichkeitsverteilung gehorcht, die unabhängig von der Größe des Loses ist, sodass die Gesamtausbeute (stochastisch) proportional der Losgröße ist. Diese Wahrscheinlichkeiten charakterisieren die Häufigkeit des Auftretens verschiedener Rahmenbedingungen samt ihren Auswirkungen auf die Ausbeuterate. Da bei diesem *stochastisch proportionalen Ausbeutetyp* der gesamte Produktionsprozess einheitlich von stochastischen Außeneinflüssen tangiert wird, sind die Produktionsergebnisse in einem Los vollständig positiv korreliert. Ein Beispiel für eine von solchem Ausbeuteverhalten charakterisierte Produktionstechnik bildet Technik $\boldsymbol{T_3}$ aus Abbildung 4, die auch zeigt, dass diese Form der stochastischen Ausbeute nicht unbedingt zu einer additiven Technik führen muss.[24]

Zur Abbildung realer Ausbeuteprozesse werden neben den drei oben dargestellten reinen Typen in manchen Fällen auch Kombinationsformen oder komplexere Modelle spezifischen Ausbeuteverhaltens notwendig sein. Für die weiteren Betrachtungen zur Anwendung unserer produktionstheoretischen Ausführungen beschränken wir aber auf die drei Grundtypen, welche die Breite des gesamten Spektrums unterschiedlicher Gesetzmäßigkeiten und Ergebniskorrelation bei stochastischer Ausbeute abdecken.

Dabei soll im Weiteren insbesondere gezeigt werden, wie bei diesen unterschiedlichen Grundtypen die zu einer Produktionstechnik gehörigen Wahrscheinlichkeiten generiert werden und welch unterschiedliche Produktionsstrategien verschiedenartige Ausbeutetypen mit sich bringen. Eine zentrale Rolle spielt dabei die unterschiedliche Form der Abhängigkeit der stochastischen Ausbeute an Gutteilen Y_G von der Inputmenge x, die im Folgenden mit $Y_G(x)$ bezeichnet wird.

3.2 Anwendung auf binomialverteilte Ausbeute

Bei binomialverteilter Ausbeute (kurz: *BI-Ausbeute*) besteht die relevante Prozessinformation in der Wahrscheinlichkeit p, mit der ein einzelnes Stück die Produktion in gutem Qualitätszustand verlässt. Wegen der Unabhängigkeit bei diesem Ausbeutetyp folgt die Gesamtausbeute aus einem Produktionslos der Größe x einer Binomialverteilung, sodass für die Wahrscheinlichkeiten der Anzahl an Gutteilen $Y_G(x)$ gilt:

$$Pr\left\{Y_G\left(x\right)=k\right\}=\binom{x}{k}\cdot p^k\cdot\left(1-p\right)^{x-k}\ \text{für } k=0,1,2,\ldots,x. \tag{9}$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten lässt sich die Gewinnfunktion aus (8) auswerten und über die gewinnmaximale Inputmenge x^* die optimale Produktionsweise bestimmen. Dies würde im vorliegenden diskreten Fall bei ganzzahligen Produktionsvariablen über ein mathematisches Suchverfahren erfolgen.

24 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausbeuterate für Technik T_3 ist eine Zwei-Punkt-Verteilung mit jeweils 50 % Wahrscheinlichkeit für eine Rate von 0 und 1. Nur diese Verteilung besitzt im vorliegenden Fall für die Ausbeuterate Y_G/x konstante Verteilungsparameter (Erwartungswert und Varianz) für $x = 2$ und $x = 3$.

Zu einem eleganteren Lösungsverfahren mit allgemeineren Aussagen gelangt man, wenn man die Variablen als stetige Größen betrachten kann. Dies ist möglich, wenn die Produktionsmenge x (bzw. die eine Produktion auslösende Nachfrage D) hinreichend groß ist, wobei man in diesem Fall den Sachverhalt ausnutzen kann, dass sich nach dem Theorem von Moivre-Laplace die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 der Binomialverteilung annähern lässt. Damit wäre die Ausbeute $Y_G(x)$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\mu(x) = p \cdot x$ und $\sigma^2(x) = p \cdot (1-p) \cdot x$, deren Dichtefunktion mit $\varphi_x(y)$ bezeichnet werden soll. Die Gewinnfunktion (8) lässt sich unter diesen Bedingungen für *BI-Ausbeute* (unter Verzicht auf die irrelevante Outputgröße Y_S) folgendermaßen ausdrücken:

$$V(x, Y_G) = -c \cdot x + e_G \cdot \left(\int_0^D y \cdot \varphi_x(y)\, dy + D \cdot \int_D^x \varphi_x(y)\, dy \right). \tag{10}$$

Diese Gewinnfunktion bezieht sich auf den Fall, dass der Produktionsinput nicht kleiner gewählt wird als die Nachfrage (d. h. $x \geq D$), was unter regulären Erlös/Kosten-Bedingungen in Form von $e_G \geq c/p$ immer der Fall sein wird.[25] Es lässt sich zeigen, dass die Gewinnfunktion in (10) konkav ist und dass sich die optimale Produktions(input)menge x^* aus der Gleichung

$$\frac{p}{2} \cdot \left(2\Phi_S\left(\frac{D-\mu(x^*)}{\sigma(x^*)} \right) - \frac{\sigma(x^*)}{\mu(x^*)} \cdot \varphi_S\left(\frac{D-\mu(x^*)}{\sigma(x^*)} \right) \right) = \frac{c}{e_G} \tag{11}$$

ergibt, in der $\Phi_S(.)$ und $\varphi_S(.)$ für Verteilungs- und Dichtefunktion der Standardnormalverteilung stehen.[26]

Gleichung (11) kann zwar nicht explizit nach x^* aufgelöst werden, es lassen sich allerdings verschiedene Eigenschaften der optimalen Produktionsstrategie $x^*(D)$ ableiten. Hierzu gehört z. B., dass sich das Verhältnis x^*/D, das einem Nachfrageinflationsfaktor zur Kompensation von Ausbeuteverlusten entspricht, mit zunehmender Nachfrage D permanent ändert und für $D \to \infty$ gerade dem Reziproken der erwarteten Ausbeuterate, d. h. $1/p$, entspricht. Letzteres beinhaltet, dass man bei hinreichend großer Nachfrage unabhängig von Erlös/Kosten-Verhältnissen praktisch nur die durchschnittlich zu erwartenden Ausbeuteverluste kompensieren muss, was sich dadurch erklärt, dass bei *BI-Ausbeute* die Varianz der Ausbeuterate für sehr große Produktionsmengen gegen null geht.

3.3 Anwendung auf abgebrochen geometrische Ausbeute

Auch bei einem stochastischem Produktionsprozess mit abgebrochen geometrischer Ausbeute (*AG-Ausbeute*) lässt sich die gesamte Ausbeuteverteilung mit einem einzigen stochastischen

25 Nur für $e_G \geq c/p$ können Verluste ausgeschlossen werden, wobei für $x < D$ der Gewinn aus (10) zu $V(x, Y_G) = (-c + e_G \cdot p) \cdot x$ wird, also einen positiven Grenzgewinn ausweist. Im Fall $e_G < c/p$ wäre die optimale Produktionsmenge $x^* = 0$.

26 Zu entsprechenden Ableitungen und Auswertungen vgl. Clemens/Inderfurth 2014.

Prozessparameter p beschreiben, der wie bei der BI-Ausbeute die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Gutteils in einer Fertigungsoperation darstellt. Da aber anders als bei *BI-Ausbeute* nach einer Fehlteilproduktion nur noch Fehlteile folgen, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für die Gesamtausbeute aus einem Produktionslos des Umfangs x als (vgl. Grosfeld-Nir/Gerchak 2004, S. 47):

$$Pr\{Y_G(x)=k\}=\begin{cases} p^k\cdot(1-p) & \text{für } k=0,1,\ldots,x-1 \\ p^x & \text{für } k=x \end{cases}. \tag{12}$$

Bei dieser Verteilung führt eine Erhöhung der Produktionsmenge x nicht zu einer Änderung der Wahrscheinlichkeiten für Ausbeutemengen, die kleiner als x sind. Daraus folgt, dass beim *AG-Ausbeutetyp* die Wahl einer Inputmenge oberhalb der Nachfrage (d. h. $x > D$) nicht optimal sein kann. Damit vereinfacht sich die Gewinnfunktion aus (8) zu

$$V(x,Y_G) = -c\cdot x + e_G\cdot E[\![Y_G]\!] = -c\cdot x + e_G\cdot\frac{p}{1-p}\cdot\left(1-p^x\right) \quad \text{mit } x\leq D. \tag{13}$$

Die optimale Produktionsmenge x^* lässt sich zwar durch ein einfaches Suchverfahren ermitteln, wie im *BI-Fall* kommt man bei Behandlung von x als stetiger Größe aber zu einem eleganteren Lösungsverfahren, das in diesem Fall sogar eine geschlossene Lösung für die optimale Produktionsstrategie liefert.[27] Diese Lösung lautet:

$$x^*(D)=\begin{cases} x^+ & \text{für } x^+\leq D \\ D & \text{für } x^+\geq D \end{cases} \quad mit \quad x^+ = \frac{1}{\ln p}\cdot\ln\left(-\frac{1-p}{p\cdot\ln p}\cdot\frac{c}{e_G}\right). \tag{14}$$

Aus dem Zusammenhang in (14) wird deutlich, dass die Produktions(input)menge bei *AG-Ausbeute* nicht nur das Nachfrageniveau nicht übersteigt, sondern in vielen Fällen (d. h. für $x^+ \leq D$) völlig unabhängig von der Nachfrage festgelegt wird. Hierbei entspricht x^+ der Produktionsmenge, die ohne Berücksichtigung der Nachfragerestriktion optimal wäre. Für $x^+ > D$ entspricht die Produktion genau der Nachfrage. Mit dieser Strategie lässt sich optimal auf den Sachverhalt reagieren, dass nach Auftreten des ersten Fehlprodukts das gesamte restliche Produktionslos fehlerhaft ist.

3.4 Anwendung auf stochastisch proportionale Ausbeute

Die Auswirkungen externer Störfaktoren auf ein Produktionslos als Ganzes wird so modelliert, dass die stochastische Ausbeuterate $Z = Y_G(x)/x$ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt, die – anders als bei *SP*- und *AG-Ausbeute* – unabhängig von der Inputmenge x ist. Damit erhält man einen stochastischen Produktionsoutput von $Y_G(x) = Z\cdot x$, sodass man von stochastisch proportionaler Ausbeute (*SP-Ausbeute*) spricht. Die Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Ausbeutemengen ergeben sich somit wie folgt aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\{z_i, p_i \mid i=1,\ldots,n\}$ der Ausbeuterate $Z = Y_G(x)/x$

27 Zu entsprechenden Ableitungen und Auswertungen vgl. Inderfurth 2015.

$$Pr\{Y_G(x) = k\} = Pr\{Y_G(x) = z_i \cdot x\} = p_i \quad \text{für } k = 0,1,2,\dots,x \tag{15}$$

mit $z_i = k/x$ als Realisation von *Z*. Zur Beschreibung dieses Ausbeutetyps bedarf es also der Angabe einer vollständigen Wahrscheinlichkeitsverteilung anstelle eines einzigen Parameters wie bei *BI*- und *AG-Ausbeute*.

Auch für diesen Fall der *SP-Ausbeute* lässt sich über die numerische Auswertung der Gewinnfunktion (8) die optimale Produktionsmenge x^* finden. Die Suche vereinfacht sich wieder, wenn man von einer stetigen Produktionsvariablen ausgeht und die Ausbeuterate nicht durch diskrete Wahrscheinlichkeiten, sondern durch eine stetige Dichtefunktion $f(z)$ beschreibt. Dann erhält man aus (8) die folgende stetig differenzierbare, konkave Gewinnfunktion

$$V(x, Y_G) = \int_0^{D/x} z \cdot x \cdot f(z)\,dz + \int_{D/x}^{1} D \cdot f(z)\,dz\,. \tag{16}$$

Die Auswertung dieser Zielfunktion führt auf eine geschlossene Lösung für die optimale Produktionsstrategie $x^*(D)$ bei *SP-Ausbeute*, die sich in folgender Form wiedergeben lässt:[28]

$$x^*(D) = m \cdot D \quad \text{mit } m \text{ aus: } \int_0^{1/m} z \cdot f(z)\,dz = \frac{c}{e_G}\,. \tag{17}$$

Aus dieser Lösung folgt, dass die optimale Produktions(input)menge proportional der Nachfrage ist, wobei der Faktor *m* im Zusammenhang mit (17) immer größer als eins ist und damit einen konstanten Nachfrageinflationsfaktor darstellt, der einer Kompensation für die unsicheren Ausbeuteverluste dient.

Es zeigt sich somit, dass der Typ der *SP-Ausbeute* wiederum eine gegenüber den bisherigen Ausbeutetypen völlig andere Produktionsstrategie mit sich bringt. Statt eines nachfrageabhängigen Inflationsfaktors wie bei *BI-Ausbeute* oder eines möglichen Deflationsfaktors wie im *AG-Ausbeute* besteht die erfolgsoptimale Produktionsweise im SP-Fall in der Wahl einer Inputmenge, die einem fixen Mehrfachen der Nachfrage entspricht.

4 Resümee

4.1 Zusammenfassung

Die von Dyckhoff entwickelte Neukonzeption der Produktionstheorie bedarf bezüglich mehrerer Aspekte einer Weiterentwicklung, um noch unberücksichtigte produktionswirtschaftliche Sachverhalte von relevanter praktischer Bedeutung in die Theoriekonzeption einzubeziehen. Zu diesen Aspekten zählt insbesondere das Auftreten von Unsicherheiten im Produktionsprozess, das in Problemstellungen des Produktionsmanagements insbesondere in Form von Stochastik der Produktionsausbeute in Erscheinung tritt. Für den Basisfall einer Produktion mit

28 Zu entsprechenden Ableitungen und Auswertungen vgl. Inderfurth/Clemens 2014.

nur einem Inputfaktor und einem Outputgut, das den Transformationsprozess aufgrund von Prozessunsicherheit zufallsabhängig in guter oder schlechter Qualität verlässt, ist darstellbar, wie sich der deterministische Ansatz der Produktionstheorie auf stochastische Produktionsbedingungen erweitern lässt. Von der Unterscheidung einer Ex-ante- und Ex-post-Sicht des Transformationsprozesses über die Neufassung der Messbarkeitseigenschaften einer Objektart bei stochastischer Qualitätsausprägung bis hin zur Neudefinition des Aktivitätsbegriffs unter Einbeziehung von Wahrscheinlichkeitsinformationen sind Änderungen und Ergänzungen der traditionellen Konzeption notwendig. Dies trifft auch auf die Beschreibung der Technikmenge eines Produktionssystems unter stochastischen Bedingungen zu. Eine entsprechend erweiterte aktivitätsanalytische Konzeption ermöglicht neue Einblicke in Technikeigenschaften wie diejenigen der Additivität und endlichen Generierbarkeit.

Über einen erweiterten, stochastischen Dominanzbegriff lassen sich auch unter Bedingungen der Produktionsunsicherheit Technikmengen auf effiziente Aktivitäten beschränken, wobei aber der effiziente Rand einer Technik 'verschwommener' wird und nur noch in Form von einzelnen oder Gruppen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschrieben werden kann. Entsprechend verliert auch das Konstrukt der Produktionsfunktion an Eindeutigkeit sowie an Relevanz als Mittel zur Schaffung von Transparenz bezüglich sinnvoller Produktionsmöglichkeiten. Dies zeigt, dass unter stochastischen Bedingungen die Generierung einer Erfolgsfunktion zur Unterstützung bei Produktionswahlentscheidungen von noch größerer Bedeutung ist als im deterministischen Fall. Auf der Grundlage des entscheidungstheoretisch orientierten Ansatzes der Produktionstheorie lässt sich in eine solche Erfolgsmessung über die Anwendung einer entsprechenden Risikonutzenfunktion auch das Risikoverhalten des Entscheiders einbeziehen. Dabei zeigt sich, dass lineare Erfolgsfunktionen im stochastischen Fall nur eine untergeordnete Rolle spielen, weil selbst bei Risikoneutralität und damit verbundenem linearen Risikonutzen die Erfolgsfunktion von Nicht-Linearität geprägt sein kann, sobald Mengenrestriktionen auf der Faktor- oder Produktseite zu berücksichtigen sind.

Am Beispiel der aus Arbeiten zum Produktionsmanagement bekannten Entscheidungsmodelle zur Wahl der optimalen Produktionsstrategie bei stochastischer Ausbeute lässt sich zeigen, dass die in diesem Aufsatz vorgeschlagene Erweiterungskonzeption der Produktionstheorie mitsamt der dabei weiterentwickelten Erfolgsfunktion voll anschlussfähig an managementorientierte Ansätze ist. Darüber hinaus wird deutlich, wie sich spezifische Typen von Ausbeuteverhalten in spezifischen Eigenschaften der Produktionstechnik niederschlagen können.

4.2 Ausblick

Bei den hier vorgestellten produktionstheoretischen Überlegungen kann es sich nur um einen ersten Ansatz handeln, der darlegen soll, in welcher Form eine Erweiterung des deterministischen Ansatzes der Produktionstheorie vorgenommen werden könnte, um auch Unsicherheiten im Produktionsgeschehen mit einzubeziehen. Dieser Ansatz müsste noch in viele Richtungen ausgebaut und verallgemeinert werden, um der Vielfalt der Aspekte stochastischer Produktionsbedingungen gerecht zu werden. Diese Bedingungen können über den in diesem Aufsatz behandelten Basisfall weit hinausgehen.

So ist zum Beispiel zu berücksichtigen, dass es als Ergebnis eines Prozessschritts bei Produktionsrisiken mehr als zwei verschiedene Qualitätsniveaus auf der Outputseite geben kann. Während sich dieser Aspekt noch einfach in den hier beschriebenen Ansatz integrieren lassen sollte, wird eine Berücksichtigung komplexerer Produktionsstrukturen, die über den hier behandelten Fall einer einstufigen, inputseitig determinierten Produktion mit einer einzigen Grundaktivität vom 1:1-Typ hinausgeht,[29] zusätzliche Anforderungen an eine sachgerechte Erweiterung der Theorie mit sich bringen. Selbst bei Beschränkung auf einstufige Strukturen können bei allgemeineren Strukturtypen neben Output- auch Inputkoeffizienten von Unsicherheit betroffen sein und es werden mögliche stochastische Abhängigkeiten zwischen Risiken auf der Input- und Outputseite Berücksichtigung finden müssen.

Die beschriebene Produktionsunsicherheit mit zufallsabhängiger Outputqualität legt es nahe, den Blick über einstufige Systeme hinauszulenken und einzubeziehen, in welcher Form defekte Produkte oder solche minderer Qualität weiter behandelt werden (Beseitigung, Recycling, Aufarbeitung etc.). Damit ist man bei der Betrachtung mehrstufiger Produktionsstrukturen, in denen bei unsicheren Produktionsbedingungen als neuer Gesichtspunkt die Problematik hinzukommt, dass Prozessunsicherheit mit stochastischen Outputmengen auf einer Stufe automatisch zu stochastischen Inputmengen auf der Folgestufe führt. Damit stellt sich im mehrstufigen Fall produktionstheoretisch die Herausforderung, neben Stochastik im engeren Transformationsprozess auch Stochastik auf der Inputseite berücksichtigen zu müssen und dabei die Fortpflanzung der Unsicherheit über mehrere Stufen korrekt abzubilden. Noch herausfordernder ist es, diesen Fortpflanzungseffekt nicht nur innerhalb einer einzigen Produktionsperiode, sondern unter Berücksichtigung von dynamischen Bedingungen über einen mehrperiodigen Zeitraum zu modellieren.

Es lässt sich somit festhalten, dass mit den hier vorgestellten Ideen zur Erweiterung der Produktionstheorie zur Erfassung von Unsicherheitsphänomenen nur ein erster Anstoß gegeben wurde. Um die innerhalb von Produktionssystemen auftretende Stochastik umfassend in die Produktionstheorie zu integrieren, bedarf es noch vieler weiterer Schritte.

Literaturverzeichnis

Bamberg, G./Coenenberg, A. G./Krapp, M.: Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre, 15. Aufl., München 2012.

Clemens, J./Inderfurth, K.: Supply Chain Coordination by Contracts under Binomial Production Yield, Working Paper No. 11/2014, Fakultät für Wirtschaftswissenschaft, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 2014.

Dyckhoff, H.: Betriebliche Produktion – Theoretische Grundlagen einer umweltorientierten Produktionswirtschaft, Berlin/Heidelberg 1992.

Dyckhoff, H.: Eine moderne Konzeption der Produktionstheorie, in: Wildemann, H. (Hrsg.): Moderne Produktionskonzepte für Güter- und Dienstleistungsproduktionen, München 2003a, S. 13–32.

29 Zur Typisierung der Technikformen vgl. Dyckhoff (2006), S. 91ff.

Dyckhoff, H.: Neukonzeption der Produktionstheorie, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft (73) 2003b, S. 705–732.

Dyckhoff, H.: Produktionstheorie – Grundzüge industrieller Produktionswirtschaft, 5. Aufl., Berlin/Heidelberg 2006.

Dyckhoff, H./Spengler, T. S.: Produktionswirtschaft – Eine Einführung, 3. Aufl., Berlin/Heidelberg 2010.

Fandel, G.: Produktion I – Produktions- und Kostentheorie, 8. Aufl., Berlin/Heidelberg 2010.

Grosfeld-Nir, A./Gerchak, Y.: Multiple Lotsizing in Production to Order with Random Yields – Review of Recent Advances, in: Annals of Operations Research (126) 2004, S. 43–69.

Inderfurth, K.: Zum Einfluss unsicherer Produktionsausbeute auf Losgrößen und Sicherheitsbestände, in: Gössinger, R./Zäpfel, G. (Hrsg.): Management integrativer Leistungserstellung, Berlin 2014, S. 507–524.

Inderfurth, K.: Safety Stocks in Centralized and Decentralized Supply Chains under Different Types of Random Yields, Working Paper No. 7/2015, Fakultät für Wirtschaftswissenschaft, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 2015.

Inderfurth, K./Clemens, J.: Supply Chain Coordination by Risk Sharing Contracts under Random Production Yield and Deterministic Demand, in: OR Spectrum (36) 2014, S. 525–556.

Jahnke, B.: Produktion bei Unsicherheit – Elemente einer betriebswirtschaftlichen Produktionslehre bei Unsicherheit, Heidelberg 1995.

Kazaz, B.: Production Planning under Yield and Demand Uncertainty with Yield-Dependent Cost and Price, in: Manufacturing & Service Operations Management (6) 2004, S. 209–224.

Nahmias, S.: Production and Operations Analysis, 6. Aufl., Boston 2009.

Schneeweiß, C.: Einführung in die Produktionswirtschaft, 8. Aufl., Berlin/Heidelberg 2002.

Vogelgesang, S./Langella, I. M./Inderfurth, K.: How Yield Process Misspecification Affects the Solution of Disassemble-to-order Problems, Working Paper No. 29/2012, Fakultät für Wirtschaftswissenschaft, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg 2012.

Yano, C. A./Lee, H. L.: Lot Sizing with Random Yields: A Review, in: Operations Research (43) 1995, S. 311–334.