PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades.
Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por Kg son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteinas	Hidratos	Grasas	Coste/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

a) ¿Cuántos Kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?
b) ¿Cuántos Kg de cada producto deberíamos comprar si el precio de A subiera a 1.000 pts/Kg?.

- **MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	A	B	Necesidades
Proteinas	2	1	8
Hidratos	6	1	12
Grasas	1	3	9
Goste	600	400	

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**

Llamamos x al número de Kg. usados del producto A
Llamamos y al número de Kg. usados del producto B

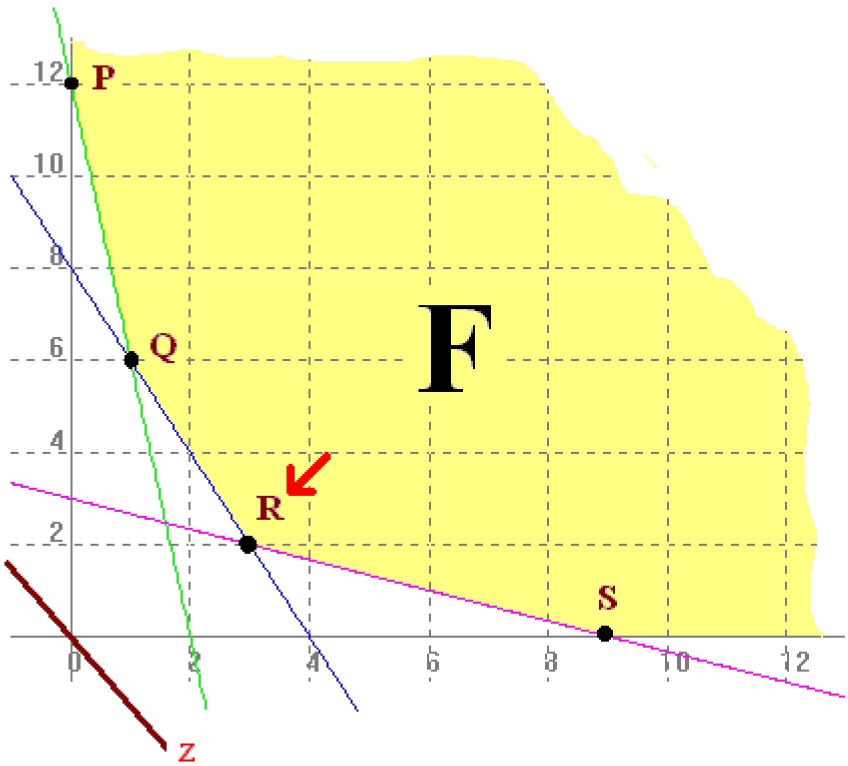
- **FUNCIÓN OBJETIVO (Minimizar)**

$F(x) = 600x + 400y$

- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y\geq 8 \\ 6x+y\geq 12 \\ x+3y\geq 9 \\ x\geq 0\,;\,y\geq 0 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

Todos los puntos que forman la región *F* son soluciones factibles, y por paralelismo con la recta de beneficio nulo *z* vemos que R(3,2) es el punto mínimo. Por tanto, deben comprarse 3 kg. de A y 2 kg. de B para que el gasto sea mínimo.

- **VALOR DEL PROGRAMA LINEAL**

Cuando la función objetivo es F(X) = 600x + 400y el valor del programa lineal (gasto) es 2.600 pts.

Si la función objetivo es F(X) = 100x + 400y la solución óptima está en el punto Q(1,6) y el valor del programa lineal (gasto) es 3.400 pts.

2. En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5g.
Además se utiliza por lo menos 1g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**

Llamamos x a la cantidad de sustancia A
Llamamos y a la cantidad de sustancia B

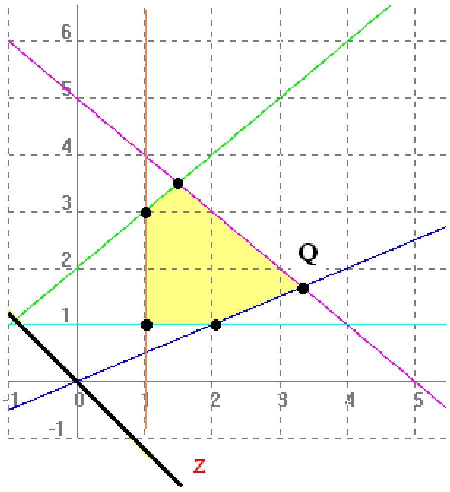
- **FUNCIÓN OBJETIVO (Maximizar)**

F(x) = 5x + 4y

- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} x \leq 2y \\ y - x \leq 2 \\ y + x \leq 5 \\ x \geq 1 \;;\; y \geq 1 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

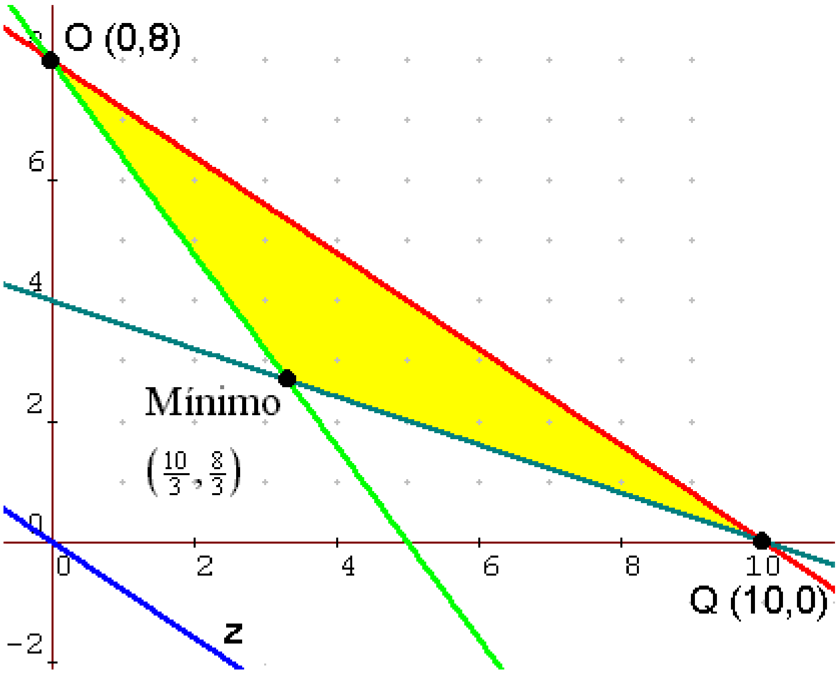
Se encuentra en el punto Q(10/3, 5/3), es decir la cantidad de sustancia B para que el beneficio sea máximo debe ser 5/3 g.

3. La región factible de un problema de programación lineal es la intersección del primer cuadrante con los tres semiplanos definidos por las siguientes inecuaciones:

$$\frac{x}{10}+\frac{y}{8}\leq 1\ ;\ \frac{x}{5}+\frac{y}{8}\geq 1\ ;\ \frac{x}{10}+\frac{y}{4}\geq 1$$

a) Dibuja dicha región y determine sus vértices.

b) Calcula el mínimo de la función objetivo F(x, y) = 4x + 5y en el recinto anterior.



Si la función objetivo es F(x,y) = 4x + 5y la solución óptima está en el punto mínimo P(10/3,8/3) y el valor del programa lineal (mínimo) es 80/3.

4. Los alumnos de un instituto pretenden vender dos tipos de lotes, A y B, para sufragarse los gastos del viaje de estudios. Cada lote de tipo A consta de una caja de mantecados y cinco participaciones de lotería; cada lote de tipo B consta de dos cajas de mantecados y dos participaciones de lotería. Por cada lote de tipo A vendido los alumnos obtienen un beneficio de 1225 Pts. y por cada lote de tipo B de 1250 Pts.

   Por razones de almacenamiento pueden disponer, a lo sumo, de 400 cajas de mantecados. Los alumnos sólo cuentan con 1200 participaciones de lotería y desean maximizar sus beneficios.

   (a) Determínese la función objetivo y exprésense mediante inecuaciones las restricciones del problema.

   (b) ¿Cuántas unidades de cada tipo de lote deben vender para que el beneficio obtenido sea máximo? Calcúlese dicho beneficio.

- **MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	LOTE A	**LOTE B**	**Disponible máximo**
Mantecados	**1**	**2**	**400**
Loteria	**5**	**2**	**1200**
beneficio	**1225 Pts**	**1250 Pts**	

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**

Llamamos x al número de lotes tipo A
Llamamos y al número de lotes tipo B

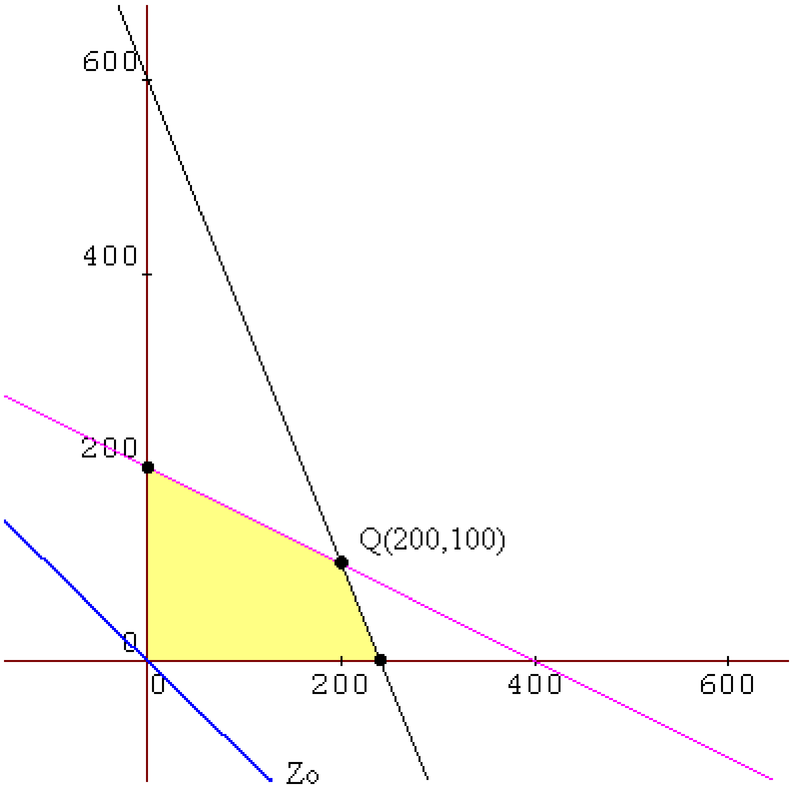
- **FUNCIÓN OBJETIVO** (Maximizar)

F(x) = 1225x + 1250y

- **RESTRICCIONES**

$$\left.\begin{array}{r} x+2y\leq 400 \\ 5x+2y\leq 1200 \\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

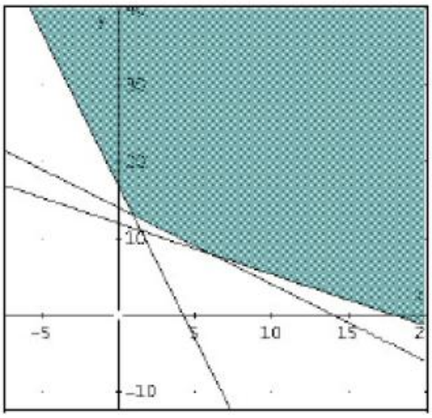
Observamos que el máximo se alcanza en el punto Q(200,100) (*solución óptima*)
Por tanto deben vender 200 lotes A y 100 lotes B.

- **VALOR DEL PROGRAMA LINEAL**

El beneficio máximo será :
F(X) = 1225·200 + 1250·100 = 370.000 Pts.

5. Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son un mínimo de 36 mg de vitamina A, 28 mg de vitamina C y 34 mg de vitamina D. Estas necesidades se cubren tomando pastillas de la marca *Energic* y de la marca *Vigor*. Cada pastilla de la marca *Energic* cuesta 0,03 € y proporciona 2 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 8 mg de vitamina D. cada pastilla de la marca *Vigor* cuesta 0,04 € y proporciona 3 mg de vitamina A, 2 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D ¿Cuántas pastillas de cada marca se han de tomar diariamente si se desean cubrir las necesidades vitamínicas básicas con el menor coste posible? Determinar dicho coste.

Las restricciones son $\begin{cases} 2x+3y \geq 36 \\ 2x+2y \geq 28 \\ 8x+2y \geq 34 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ y determinan la región factible:



Los puntos posibles son *A(18,0), B(6,8), C(1,13), D(0,17)*.

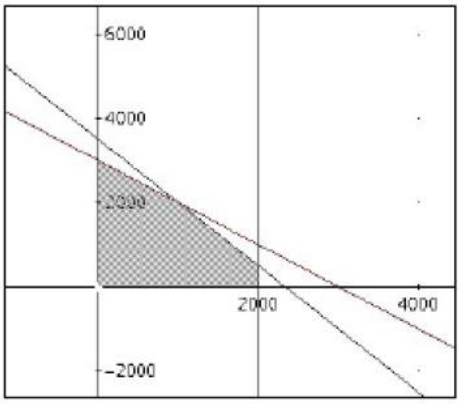
Sustituyendo en la función objetivo *f(x,y)=0,03x+0,04y* se obtiene:

f(18,0)=0,54 €, f(6,8)=0,50 €, f(1,13)=0,55 € y f(0,17)=0,68 €.. Luego debe tomar 6 pastillas de *Energy* y *8* de Vigor para cubrir sus necesidades vitamínicas con el mínimo coste.

6. Un vendedor dispone de 350000 € para invertir en dos tipos de microondas. El que dispone de más accesorios tiene un coste de 150 € y reporta un beneficio de 1 € por unidad vendida, mientras que el otro modelo sólo proporciona un beneficio de 11 € por unidad vendida y tiene un coste de 100 €. Sabiendo que sólo se pueden almacenar 3000 microondas y que no se venderán más de 2000 del modelo más caro, determinar cuántos microondas de cada clase se deben comprar para maximizar el beneficio y calcular éste.

Las restricciones son $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 150x + 100y \leq 350000 \\ x + y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \end{cases}$

:



Los puntos posibles son *A(2000,0)*, *B(2000,500)*, *C(1000,2000)*, *D(0,3000)*.

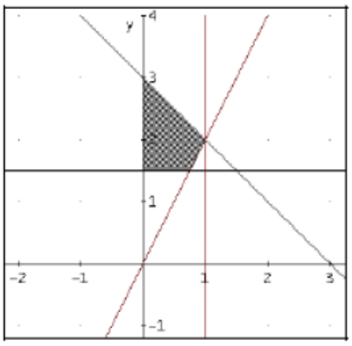
Sustituyendo en la función objetivo *f(x,y)=15x+11y* se obtiene:

f(2000,0)=30000, *f(2000,500)=35500*, *f(1000,2000)=37000*, *f(0,3000)=33000*.

Luego debe comprar 1000 microondas caros y 2000 microondas baratos, obteniendo un beneficio de 37000 €.

7. Una empresa farmacéutica tiene en la actualidad dos líneas de investigación,la de medicamentos antiinflamatorios no esteroides y la de fármacos ansiolíticos. Desea invertir en la investigación a lo sumo tres millones de euros, con la condición de dedicar por lo menos 1,5 millones de euros a los ansiolíticos, con los que espera obtener un beneficio del 10%. En cambio en la investigación sobre medicamentos antiinflamatorios, aunque se calcula un beneficio del 25%, no debe invertir más de un millón de euros. ¿Qué cantidad debe dedicar a cada línea de investigación para maximizar beneficios, si además debe dedicar a los ansiolíticos al menos el doble de dinero que a los antiinflamatorios?. ¿Qué beneficio obtendrá de esta forma la empresa?

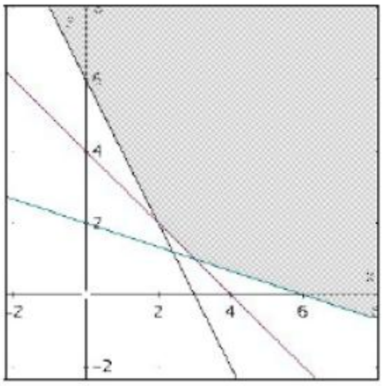
Las restricciones son $\begin{cases} x+y\leq 3 \;\; y\geq 1{,}5 \\ x\leq 1 \;\; y\geq 2x \\ x\geq 0 \;\; y\geq 0 \end{cases}$ y determinan la región factible:



Los puntos posibles son *A(1,2)*, *B(0,3)*, *C(0,1.5)* y *D(0.75, 1.5)*. Se obtienen los valores *f(1,2)=45000 €*, *f(0,3)=30000 €*, *f(0,1.5)=15000 €*, *f(0.75,1.5)=33750 €*. Luego el máximo beneficio es de 45000 € dedicando 1 millón de euros a la investigación de los antiinflamtorios y 2 millones de euros a los ansiolíticos.

8. Un fabricante produce en 2 talleres 3 modelos distintos de archivado-res, el A, el B y el C. Se ha comprometido a entregar 12 archivadores del modelo A, 8 del B y 24 del C, Al fabricante le cuesta 720 € al día el funcionamiento del primer taller y 960 € del segundo. El 1º taller produce diariamente 4 archivadores del mo-delo A, 2 del B y 4 del C, mientras que el 2º produce 2, 2 y 12 archivadores, respectivamente ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para conseguir reducir al máximo los costes de funcionamiento? ¿Cuál es el valor de dicho coste? ¿Quedaría algún excedente de algún producto en los talleres? En caso afirmativo, determinar cuánto.

Las restricciones son $\begin{cases} 4x+2y\geq 12 \\ 2x+2y\geq 8 \\ 4x+12y\geq 24 \end{cases}$ y determinan la región factible:



Los puntos posibles son *A(6,0), B(3,1), C(2,2), D(0,6).*

Sustituyendo en la función objetivo *f(x,y)=720x+960y* se obtiene: *f(6,0)=4.320 €, f(3,1)=3.120 €, f(2,2)=3.360 € y f(0,6)=5.760.* Luego debe trabajar cada taller 3 y 1 días y así el coste será sólo de *3.120 €*. En este caso, del modelo A produce 14, del modelo B produce 8 y del modelo C produce 24. Se observa que le sobran 2 del modelo A.