



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Cálculo de la probabilidad de error por bit mínima en un receptor digital binario utilizando símbolos genéricos

Apellidos y nombre: Flores Asenjo, Santiago J. (sflores@dc.com.upv.es)¹

Departamento/Centro: ¹Departamento de Comunicaciones
Escola Politècnica Superior de Gandia
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Resumen de las ideas clave	2
2. Introducción	2
3. Objetivos	3
4. Desarrollo	3
4.1. Hipótesis de partida y condiciones de diseño del receptor	3
4.2. Receptores equivalentes	4
4.3. Niveles detectados en presencia de ruido	6
4.4. Funciones de densidad de probabilidad condicionadas	6
4.5. Elección del umbral para minimizar el error	6
4.6. Cálculo de la probabilidad de error	7
4.6.1. Función Q	8
4.7. Mínima probabilidad de error	8
4.8. Particularización para símbolos antipodales y ortogonales	9
5. Cierre	10
Bibliografía	10

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo docente se va a presentar la forma de calcular la mínima probabilidad de error que se podrá obtener en un receptor digital binario diseñado de forma óptima. Las ideas clave se resumen en la [tabla 1](#).

Ideas clave
1. ¿Cómo ha de diseñarse un receptor digital binario para que detecte de forma óptima los símbolos que le llegan?
2. ¿Qué aspectos del sistema se deberán tener en cuenta para configurar este receptor?
3. ¿Cómo puedo calcular <i>a priori</i> la probabilidad de error que tendrá este receptor?
4. ¿Se puede minimizar esta probabilidad de error?
5. ¿Es posible obtener una expresión genérica de esta probabilidad mínima de error?
6. ¿Puedo particularizar el resultado para casos conocidos?

Tabla 1: Resumen de las ideas clave

A lo largo del documento trataremos de dar respuestas a todas estas preguntas, que quedarán resumidas en la [sección 5](#).

2 Introducción

Para poder abordar el estudio que nos hemos planteado en este artículo docente, el alumno debería tener conocimientos suficientes sobre los siguientes aspectos:

- Los sistemas de comunicaciones digitales binarios, utilizados para transmitir secuencias de bits (esto es, 0 o 1), cada uno de los cuales estará representado por una de las siguientes dos formas de onda: $s_1(t)$ o $s_2(t)$.
- El modelado matemático del ruido térmico como un proceso estocástico **AWGN**.
- El **filtro adaptado** (o **acoplado**), como sistema lineal capaz de maximizar la relación señal a ruido a su salida, ante la presencia a la entrada de una forma de onda conocida afectada de ruido AWGN.

En cualquier caso, se harán referencias en el texto a la bibliografía para ampliar estos puntos, especialmente los dos últimos.

3 Objetivos

Una vez que el alumno se lea con detenimiento este artículo docente, será capaz de:

- Diseñar el esquema de un receptor digital binario apropiado para distinguir de forma óptima entre dos símbolos, cualesquiera que sean, simplemente conociendo las formas de onda que los representan.
- Calcular la probabilidad de error mínima que se podrá obtener con dicho receptor, conociendo esas formas de onda, así como el nivel de ruido en el canal.

4 Desarrollo

Consideraremos el receptor de un sistema de comunicación digital binario, es decir, en el que se espera recibir cada cierto tiempo T (denominado *periodo de símbolo*) alguno de los siguientes dos símbolos: $s_1(t)$ o $s_2(t)$. Estas dos formas de onda podrán ser arbitrarias, por lo que, en este sentido, consideraremos un caso genérico.

Estará formado por un filtro demodulador con respuesta impulsional $h(t)$, seguido de un muestreador cada T segundos y un detector que decidirá cuál de los dos símbolos ha llegado en cada momento, tal y como se muestra en la [figura 1](#)).

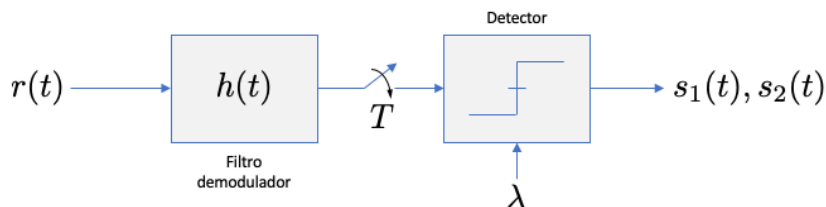


Figura 1: Esquema del receptor digital binario

4.1 Hipótesis de partida y condiciones de diseño del receptor

Para los cálculos, se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis y condiciones de diseño:

- El ruido a la entrada se modelará como un proceso estocástico de tipo AWGN (Flores 2016).
- El filtro demodulador será óptimo, es decir, la relación señal a ruido que se obtenga a la salida, justo antes del muestreador, será la máxima posible.
- El detector decidirá cada T segundos qué símbolo ha llegado comparando el valor muestreado antes de la entrada con un umbral λ elegido de forma que se minimice la probabilidad de error.

- La probabilidad de recibir el símbolo $s_1(t)$ o el $s_2(t)$ es la misma: $1/2$.

Se sabe que un **filtro correlador** cuya señal de referencia sea $s_i(t)$ será equivalente a un **filtro adaptado** a este símbolo justo en el instante de muestreo. Este filtro adaptado, además, es el que maximiza la relación señal a ruido a su salida en presencia de ruido AWGN (Sklar 2001). Por lo tanto, si lo que se desea es distinguir de forma óptima entre dos símbolos genéricos $s_1(t)$ y $s_2(t)$, el receptor más inmediato sería el de la [figura 2](#).

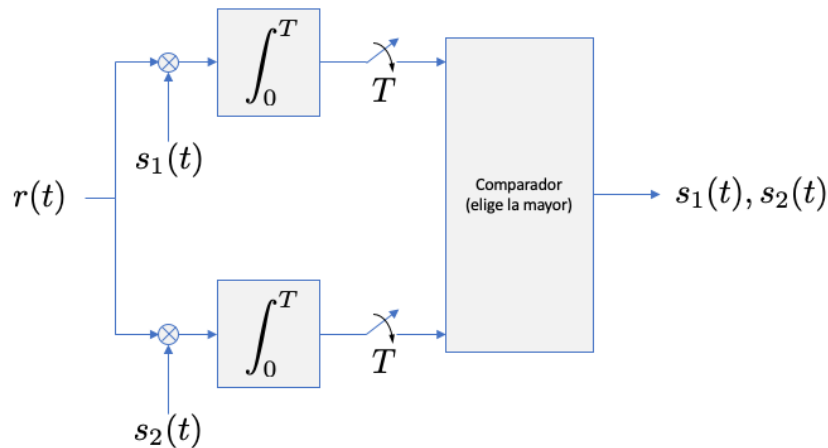


Figura 2: Receptor óptimo binario

El proceso de detección se realizará con un simple comparador que decidirá qué símbolo es el que ha llegado dependiendo de los valores a la salida de ambos correladores, eligiendo el símbolo asociado al valor más alto de los dos.

Este receptor ya valdría para distinguir de forma óptima entre ambos símbolos, pero vamos a ir simplificándolo para que sea más fácil de analizar.

4.2 Receptores equivalentes

En primer lugar, podemos sustituir la etapa de decisión mediante comparación por un bloque restador y un detector que decida qué símbolo ha llegado en función de si el valor de la resta supera un umbral determinado λ o no, tal y como se muestra en la [figura 3](#).

Claramente es un detector equivalente al anterior de la [figura 2](#), aunque aparentemente no se ha simplificado demasiado el esquema. Sin embargo, si tenemos en cuenta que el correlador es un sistema lineal, vemos que podemos obtener exactamente los mismos resultados si modificamos de nuevo el esquema para convertirlo en el que se muestra en la [figura 4](#).

Vemos que se pasa de dos correladores con sendas señales de referencia $s_1(t)$ y $s_2(t)$, a un solo correlador cuya referencia ahora es la señal diferencia $s_1(t) - s_2(t)$.

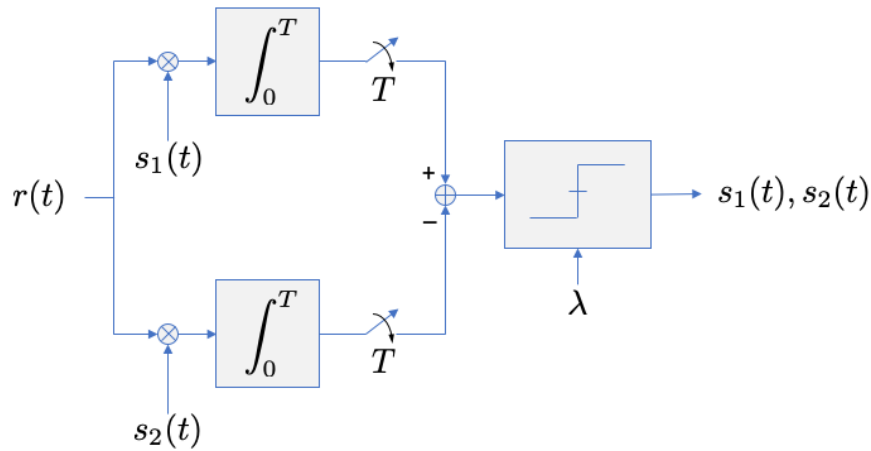


Figura 3: Receptor óptimo binario con decisión por umbral

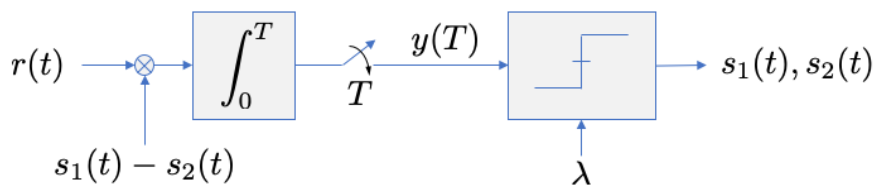


Figura 4: Receptor óptimo binario usando como referencia la señal diferencia

Nota 1 Si nos fijamos, el esquema de la figura 4 equivale a un filtro adaptado a la señal diferencia $s_1(t) - s_2(t)$. Teniendo esto en cuenta, se sabe que también serviría utilizar cualquier señal de referencia igual a $K \cdot [s_1(t) - s_2(t)]$, siendo K cualquier constante no nula (Sklar 2001), aunque en este caso tendría que ajustarse el umbral de detección en el caso de que, por ejemplo, $s_1(t)$ y $s_2(t)$ no fuesen antipodales.

4.3 Niveles detectados en presencia de ruido

Trabajaremos, por tanto, con el esquema final de la [figura 4](#). Consideraremos que el nivel $y(T)$ obtenido tras el muestreador, justo a la entrada del detector, será el siguiente, en función de si el símbolo recibido en ese instante es $s_1(t)$ o $s_2(t)$:

- Si el símbolo que llega es $s_1(t)$, el nivel de salida será: $y|_{s_1(t)} = a_1 + n(T)$
- Si el símbolo que llega es $s_2(t)$, el nivel de salida será: $y|_{s_2(t)} = a_2 + n(T)$

Los valores a_1 y a_2 son los que se recibirían en ausencia de ruido, mientras que con $n(T)$ representamos el valor de ruido muestreado a la salida del correlador. Como comentamos en las hipótesis de partida, el ruido a la entrada lo consideramos como un proceso estocástico AWGN, por lo que $n(T)$ será una variable aleatoria de tipo gaussiano de media nula y varianza σ_0^2 igual a su potencia (Flores 2016). En consecuencia, trataremos este nivel de salida $y(T)$ como una **variable aleatoria condicionada**.

4.4 Funciones de densidad de probabilidad condicionadas

Al ser $n(T)$ una variable aleatoria gaussiana de media nula, la función de densidad de probabilidad de $y(T)$, condicionada a que ha llegado el símbolo $s_1(t)$ o el símbolo $s_2(t)$, será igual a una gaussiana de la misma varianza σ_0^2 que $n(T)$, pero ahora centrada en el valor esperado a_1 o a_2 , respectivamente.

Es decir, esta será la expresión de la función de densidad de probabilidad de $y(T)$ condicionada a la llegada del símbolo $s_1(t)$:

$$f_Y(y|s_1) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - a_1}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (1)$$

mientras que la función de densidad de probabilidad de $y(T)$ condicionada a la llegada del símbolo $s_2(t)$ será:

$$f_Y(y|s_2) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - a_2}{\sigma_0} \right)^2 \right] \quad (2)$$

En la [figura 5](#) se representan las dos funciones. Como se puede apreciar, ambas tienen la misma forma de campana de Gauss, pero desplazada cada una de ellas a su valor medio a_1 o a_2 . Se ha asumido que $a_1 > a_2$.

4.5 Elección del umbral para minimizar el error

El detector tiene que tomar una decisión en función del valor que sale del muestreador. Supongamos que ese valor detectado es el $y_d(T)$ marcado en la abscisa de la gráfica de la [figura 5](#). Los valores v_1 y v_2 se denominan **verosimilitudes** y, en el ejemplo, se ve claramente que es más verosímil que el símbolo recibido haya sido el s_1 a que haya sido el s_2 . Esto se debe a que $y_d(T)$ está claramente más cerca de a_1 que de a_2 .

Por tanto, podemos seguir el criterio de fijar el umbral λ en el punto donde se igualen las verosimilitudes. Este método para elegir el umbral se denomina **criterio de máxima verosimilitud**, y determinaría el umbral en el punto en el que se igualan ambas funciones de densidad de probabilidad condicionadas.

Por otro lado, se podría fijar el objetivo de minimizar el error. En la [figura 5](#) se ha sombreado el área de $f_Y(y|s_1)$ hasta el umbral λ , la cual representa la probabilidad de que, habiendo recibido el símbolo s_1 , el valor detectado se hubiese desplazado por culpa del ruido hasta un punto por debajo del umbral, dando lugar a un error de detección. Para minimizar este error, se habría

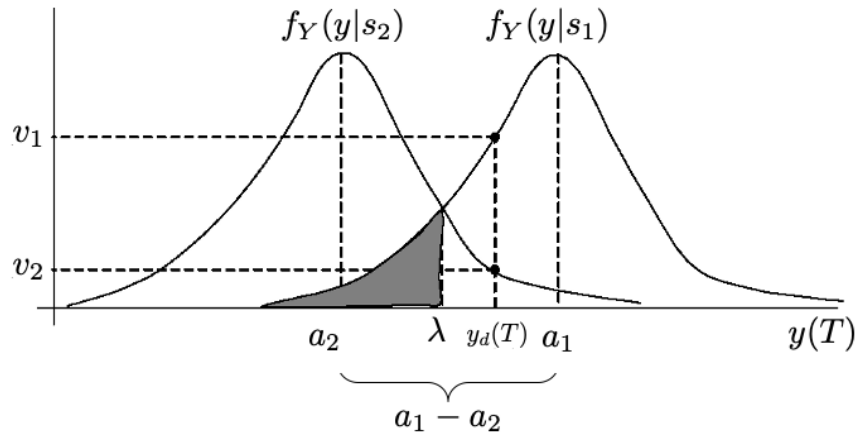


Figura 5: Funciones de densidad de probabilidad condicionadas

de ubicar el umbral λ en el punto medio entre a_1 y a_2 . Este método se denomina **criterio de mínimo error** y queda claro que, bajo las condiciones marcadas al inicio de este artículo, se llega al mismo valor que en el caso anterior:

$$\lambda = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad (3)$$

Nota 2 Existe otro método denominado **criterio de máxima probabilidad a posteriori** en el que se fija el umbral igualando los valores $f_Y(y|s_1)p(s_1)$ y $f_Y(y|s_2)p(s_2)$, siendo $p(s_1)$ y $p(s_2)$ las probabilidades de recibir el símbolo s_1 y el s_2 , respectivamente, pero dado que se ha supuesto al inicio que ambas probabilidades son iguales, también dará lugar al mismo umbral.

4.6 Cálculo de la probabilidad de error

Llamaremos P_{21} a la probabilidad de confundir el símbolo s_2 con el s_1 , y P_{12} a la probabilidad de confundir el símbolo s_1 con el s_2 . Teniendo en cuenta las hipótesis de partida, ambas probabilidades son idénticas y podrán calcularse mediante el área sombreada en la gráfica de la [figura 5](#):

$$P_{12} = \int_{-\infty}^{\lambda} f_Y(y|s_1)dy = P_{21} = \int_{\lambda}^{\infty} f_Y(y|s_2)dy = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] dy \quad (4)$$

Para simplificar la [ecuación 4](#), podemos hacer el cambio $u = \frac{y-a_2}{\sigma_0}$, con lo cual tendremos:

$$P_{12} = P_{21} = \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right] du \quad (5)$$

4.6.1 Función Q

Lamentablemente, la integral de la [ecuación 5](#) no puede resolverse analíticamente, pero podemos hacer uso de la función Q de la que se pueden encontrar fácilmente tablas y gráficas:

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right] du \quad (6)$$

Nota 3 En MATLAB® puedes calcular el valor de $Q(x)$ con la ayuda de la función de error complementario utilizando el comando `0.5*erfc(x/sqrt(2))`, ya que $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Con todo esto, y teniendo en cuenta de nuevo que las probabilidades P_{21} y P_{12} son iguales y que los símbolos son equiprobables, estamos en condiciones de calcular la probabilidad de error por bit que tendrá el receptor:

$$P_B = \frac{1}{2}P_{12} + \frac{1}{2}P_{21} = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \quad (7)$$

Nota 4 Esta [ecuación 7](#) es válida para cualquier receptor binario, incluso si no fuera óptimo. Resulta útil cuando se pueda calcular con facilidad los niveles a_1 y a_2 en ausencia de ruido y se disponga de la potencia de ruido σ_0^2 a la entrada del detector, lo cual no suele ser tan evidente.

4.7 Mínima probabilidad de error

Vamos a analizar el resultado obtenido en la [ecuación 7](#). El término $a_1 - a_2$ da idea del nivel de la señal diferencia $s_1(t) - s_2(t)$ en ausencia de ruido, y cuanto mayor sea ese nivel, menor probabilidad de error se tendrá (recordemos que la función Q es monótona decreciente). Esto queda corroborado en la propia gráfica de la [figura 5](#) pues, cuanto más alejados estén a_1 y a_2 , menor será el área sombreada. El término σ_0 representa el nivel de dispersión del ruido (y, por tanto, de la gaussiana que lo caracteriza) y, cuanto mayor sea, mayor será también la probabilidad de error.

Por lo tanto, el cociente $\frac{a_1 - a_2}{\sigma_0}$ representa la relación señal a ruido en términos de tensión. Si la quisiéramos expresar en términos de potencia (suponiéndola medida sobre una impedancia de 1Ω), tendríamos:

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} \quad (8)$$

Como ya se ha comentado anteriormente, la relación señal a ruido será máxima utilizando un filtro adaptado, y esa cota máxima se demuestra en (Sklar 2001) que es:

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{(a_1 - a_2)^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{2E_d}{N_0} \quad (9)$$

donde N_0 es la densidad espectral de potencia del ruido (en W/Hz), y E_d es la energía de la señal para la cual el filtro está adaptado, es decir, la utilizada como referencia en el correlador, que en nuestro caso es la señal diferencia $s_1(t) - s_2(t)$.

Nota 5 Esta energía E_d nos da una idea de la distancia entre ambos símbolos, es decir, cuán distintos son uno del otro. Recordemos que se puede calcular, suponiendo símbolos de duración T , de la siguiente forma:

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$

Así pues, sustituyendo la [ecuación 9](#) en la [ecuación 7](#), se obtiene la **mínima probabilidad de error por bit** que se puede conseguir en un receptor digital binario:

$$P_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right) \geq Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2E_d}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right) \quad (10)$$

Nota 6 De la [ecuación 10](#) se deduce que la mínima probabilidad de error que se puede alcanzar en un receptor binario digital no depende en absoluto de las formas de onda elegidas para $s_1(t)$ y $s_2(t)$, sino sólo de la distancia entre ambas, aparte, claro está, del nivel del ruido en el canal.

4.8 Particularización para símbolos antipodales y ortogonales

Aunque se ha obtenido una expresión general de la probabilidad de error mínima que se puede conseguir en un receptor digital binario sean cuáles sean las formas de onda utilizadas para ambos símbolos, conviene hacer alguna particularización para dos casos especiales.

En primer lugar supondremos símbolos **antipodales**, es decir, en los que se cumple que $s_1(t) = -s_2(t)$, como podría ser el caso de una señalización polar o una modulación BPSK, por ejemplo. En este caso, ambos símbolos tendrán la misma energía y será igual a la energía media por bit E_B , y la energía de la señal diferencia vendrá dada por:

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \int_0^T [2s_1(t)]^2 dt = 4E_B \quad (11)$$

La mínima probabilidad de error que se obtendrá en este caso será:

$$P_{B_{\min}} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_B}{N_0}}\right) \quad (12)$$

El segundo caso particular que vamos a considerar, será cuando se cumpla que $\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$ valga cero, bien porque uno de los dos símbolos sea nulo (como en el caso de una señalización unipolar), o bien porque se trate de símbolos **ortogonales** de la misma energía E_B (como en una modulación BFSK, por ejemplo). Tanto en un caso como en el otro se llega a:

$$P_{B_{\min}} = Q \left(\sqrt{\frac{E_B}{N_0}} \right) \quad (13)$$

Nota 7 Es conveniente que el alumno haga como ejercicio el desarrollo para el caso de señalización unipolar, ya que en este caso la energía media por bit E_B no coincide con la energía de ninguno de los dos símbolos, pero aún así se llega al mismo resultado de la [ecuación 13](#).

Nota 8 Comparando la [ecuación 12](#) con la [ecuación 13](#) se aprecia que, a igualdad de condiciones (mismo gasto energético promedio y mismo nivel de ruido), resulta más conveniente en términos de probabilidad de error utilizar símbolos antipodales que ortogonales, lo cual era de esperar pues la distancia entre los primeros es mayor.

5 Cierre

Es el momento de repasar las ideas claves de la [tabla 1](#) del principio del artículo para ver si han quedado aclaradas y respondidas las preguntas que se presentaron:

1. El esquema genérico del receptor digital binario se ha introducido en la [figura 4](#) en su forma más simple.
2. Para el diseño de este receptor tan sólo es necesario conocer las formas de onda $s_1(t)$ y $s_2(t)$, que representan en el sistema a cada uno de los dos símbolos utilizados.
3. Se ha dado en la [ecuación 7](#) una expresión que permite calcular, para cualquier receptor digital binario, su probabilidad de error.
4. Si en la [figura 4](#) se elige un umbral λ adecuado, esta probabilidad se puede minimizar, tal y como se ha explicado en la [subsección 4.5](#).
5. La expresión general para esta probabilidad mínima de error se ha dado en la [ecuación 10](#). Tan sólo depende de la energía E_d del símbolo diferencia $s_1(t) - s_2(t)$ y del nivel del ruido N_0 en el canal.
6. Como ejemplos, se ha particularizado el cálculo para símbolos antipodales y ortogonales en la [subsección 4.8](#).

Bibliografía

Flores, Santiago J. (jun. de 2016). *Modelado del ruido en sistemas de comunicación*. RiuNet, repositorio UPV. URL: <https://hdl.handle.net/10251/66720> (vid. págs. 3, 6).

Sklar, Bernard (2001). *Digital Communications. Fundamental and Applications*. Prentice Hall. ISBN: 978-0-13-084788-1 (vid. págs. 4, 5, 8).