

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA  
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE GANDÍA

Master en Ingeniería Acústica

---



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA



ESCUELA POLITÉCNICA  
SUPERIOR DE GANDÍA

**Estudio de la impedancia acústica de  
entrada y la directividad del resonador  
de un clarinete. Análisis numérico por  
medio del método de elementos finitos**

*TESIS DE MÁSTER*

Autor:  
*Inés María Cabo Mur*

Director:  
*D. Rubén Picó Vila*

*GANDÍA, 7 de septiembre de 2021.*

# Estudio de la impedancia acústica de entrada y la directividad del resonador de un clarinete. Análisis numérico por medio del método de elementos finitos

*Autor:* Inés María Cabo Mur

*Director:* Rubén Picó Vila

## *Resumen*

*Un instrumento musical de viento está compuesto por dos elementos: un resonador, cuyo comportamiento es principalmente lineal y un mecanismo de excitación que es un oscilador no lineal. La impedancia acústica de entrada es la magnitud fundamental que describe el comportamiento oscilatorio del resonador de un instrumento de viento. Las resonancias de éste se obtienen a partir del mínimo de la fase de la impedancia.*

*En este proyecto se propone hacer un estudio del comportamiento acústico del resonador de un clarinete. Se va a analizar por un lado el problema acústico interno por medio de la impedancia de entrada y, por otro lado, el problema acústico externo evaluando la radiación externa y la directividad del instrumento. Para ello se utilizará el método de elementos finitos y diferentes herramientas numéricas de cálculo. El estudio se realizará a partir de medidas geométricas internas de un resonador de un clarinete.*

## *Abstract*

*A wind musical instrument consists mainly of two elements: a resonating body, or "resonator", whose behaviour is fundamentally linear, and an exciting mechanism, which is a non-linear oscillating system. The input acoustic impedance is the characteristic parameter that describes the behaviour of the resonator of a wind instrument. The resonances that occur within it can be obtained from the minimum values of the impedance's phase or imaginary part.*

*The purpose of this project is to conduct a study of the acoustic behaviour of a clarinet's resonator. On one hand, the input impedance is analysed in order to solve the internal acoustic problem of the resonator. On the other hand, the external acoustic problem is evaluated using the finite element method, as well as several other numerical-computational tools. This study is carried out considering real geometrical measurements of a clarinet's resonator.*

## **ÍNDICE DE CONTENIDOS**

<b>OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL TRABAJO</b> .....	6
<b>I. INTRODUCCIÓN TEÓRICA</b> .....	7
I.1. Modelo geométrico .....	7
I.2. Impedancia acústica de entrada .....	7
I.3. Expresiones teóricas de la impedancia acústica de entrada.....	8
1. Extremo final cerrado .....	10
2. Extremo final abierto: dos casos distintos.....	10
I.4. Resonancias en un tubo cerrado-abierto. Resonancias en un tubo abierto-abierto.....	13
I.5. Resonancias en un tubo cónico .....	16
I.6. Resonancias en un tubo exponencial. Bocinas de Bessel .....	17
I.7. Radiación del sonido en los instrumentos musicales. Patrón de directividad .....	19
I.8. Modelo de pérdidas .....	20
I.9. Herramientas numéricas y software empleados: Método de Elementos Finitos (FEM) y COMSOL Multiphysics® .....	21
<b>II. SIMULACIÓN Y CÁLCULO MEDIANTE FEM</b> .....	24
II.1. Dominios.....	26
II.2. Condiciones de contorno.....	26
II.3. Parámetros .....	27
II.4. Resultados.....	28
1. ESTUDIO DE FRECUENCIA PROPIA .....	28
2. ESTUDIO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA .....	31
3. DIAGRAMAS DE DIRECTIVIDAD EN COORDENADAS POLARES.....	42
<b>III. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN</b> .....	43
III.1. Conclusiones .....	43
1. Estudio de las frecuencias de resonancia o armónicos.....	43
2. Estudio de las curvas de impedancia teóricas y numéricas .....	44
3. Estudio de los patrones de directividad polares .....	44
III.2. Futuras líneas de investigación .....	44
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	46

## Índice de figuras

Figura 1. Modelos de clarinete y boquilla de los que se han sacado las medidas empleadas en este estudio....	7
Figura 2. Configuración del extremo del tubo apantallado (arriba) y no apantallado (abajo) [2].....	11
Figura 3. Comparativa de los modelos teóricos para el tubo apantallado (azul) y el no apantallado (rojo). En este caso no se han considerado pérdidas. ....	13
Figura 4. Armónicos naturales para los tubos cilíndricos: abierto por ambos extremos, como la flauta (izda.), y cerrado por el extremo superior y abierto por el inferior, como el clarinete (dcha.) [6].....	14
Figura 5. Curva de impedancia vs. frecuencia para la resonancia más grave de un tubo cilíndrico de 650 mm de longitud y 15 mm de diámetro, en el caso cerrado-abierto (arriba) y en el caso abierto-abierto (abajo). Obtenida de Dickens, P. et al. [1]. ....	16
Figura 6. Geometría del tubo cónico considerado en este estudio [7]. ....	17
Figura 7. Perfil de una bocina de Bessel con una cierta tasa de ensanchamiento $\varepsilon$ [7].....	18
Figura 8. Relación de los sucesivos armónicos con la fundamental para tubos exponenciales de constante $\varepsilon$ variable [7]. ....	18
Figura 9. Comparativa de los modelos teóricos para los casos sin pérdidas (azul) y con pérdidas (rojo). ....	21
Figura 10. Elementos lineales o de 1º orden (izda.) y cuadráticos o de 2º orden (dcha.), ambos en dos dimensiones. ....	22
Figura 11. Modelos de tubo cilíndrico (izquierda), tubo cónico (centro) y tubo exponencial o bocina de Bessel (derecha) considerados en este estudio. ....	26
Figura 12. Ondas de presión para las frecuencias correspondientes a los ocho primeros armónicos o modos propios del tubo cerrado-abierto.....	30
Figura 13. Ondas de presión para las frecuencias correspondientes a los ocho primeros armónicos o modos propios del tubo abierto-abierto.....	30
Figura 14. Tubo cilíndrico radiando libremente, no apantallado y sin pérdidas, modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo). ....	32
Figura 15. Tubo cilíndrico cerrado en $z = L$ (extremo final rígido) sin dominio de radiación, modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo). ....	34
Figura 16. Tubo cilíndrico abierto en $z = L$ sin dominio de radiación, modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo).....	35
Figura 17. Comparativa de los modelos numéricos para el tubo cilíndrico radiando libremente y sin pérdidas, apantallado (azul) y el no apantallado (rojo). ....	36
Figura 18. Comparativa de los modelos numéricos para el tubo cilíndrico radiando libremente y no apantallado, considerando pérdidas (rojo) y sin considerar pérdidas (azul). ....	36
Figura 19. Tubo cilíndrico radiando libremente, no apantallado sin pérdidas; modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo). ....	37
Figura 20. Tubo cilíndrico radiando libremente, no apantallado y con pérdidas; modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo). ....	38
Figura 21. Tubo cónico radiando libremente, no apantallado y con pérdidas, de radio $a = 0.6$ cm, radio final $b = 2.8$ cm y longitud $L = 66$ cm. ....	39

Figura 22. Tubo bocina de Bessel radiando libremente no apantallado y con pérdidas, con parámetro $\varepsilon = 7$ y longitud $L = 66$ cm. ....	41
Figura 23. Nivel de presión sonora en campo lejano (en dB) a 50, 250, 750 y 1500 Hz, para el tubo cilíndrico (azul), cónico (rojo) y bocina de Bessel (amarillo), todos radiando libremente en el extremo $z = L$ , no apantallados y considerando pérdidas. ....	42

## **OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DEL TRABAJO**

El objetivo de este trabajo es presentar un estudio del comportamiento acústica del resonador del clarinete, un instrumento musical de la familia de viento-madera. Para ello, se ha empleado la siguiente metodología, que justifica la estructura de la presente memoria:

- **SECCIÓN I:** Introducción a los conceptos y los modelos relevantes para el estudio que se quiere presentar, así como las expresiones teóricas derivadas de los mismos. Éstas se emplean en el estudio para realizar una comparación entre resultados numéricos y teóricos, tal y como se comprobará en la sección II. En los apartados I.2 – I.9 se explican brevemente los siguientes aspectos:
  - El modelo real del clarinete en el que se basa la geometría construida para la simulación presentada en la sección II .
  - La magnitud física conocida como impedancia acústica.
  - Las expresiones teóricas con las que se define la misma cuando sucede el fenómeno de resonancia, contemplando los distintos casos posibles que pueden darse.
  - El modelo de pérdidas considerado en parte del estudio.
  - Método de Elementos Finitos y simulación en COMSOL *MultiPhysics*®.
- **SECCIÓN II:** Presentación de los resultados derivados de los distintos modelos y comparativa entre ellos.
- Obtención de las conclusiones oportunas a partir de la comparación entre los resultados teóricos y los obtenidos mediante el método numérico de Elementos Finitos.

## I. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

### I.1. *Modelo geométrico*

El resonador del clarinete se ha modelado como un tubo cilíndrico, con dimensiones iguales a las de un clarinete real (modelo Yamaha CG-III, boquilla Vandoren M30) de longitud de tubo  $L = 66.0 \pm 0.1$  cm y radio interior  $a = 0.6 \pm 0.1$  cm.



Figura 1. Modelos de clarinete y boquilla de los que se han sacado las medidas empleadas en este estudio. Debido a que se ha simplificado el tubo como un cilindro, el modelo presenta simetría de revolución en el eje vertical, por lo que en la geometría se han usado las coordenadas radial  $r$  y axial  $z$ .

En uno de los casos se ha estudiado las resonancias en un modelo de tubo cónico, por lo que se ha considerado un tubo de radio linealmente creciente, con un valor mínimo de  $a = 0.6 \pm 0.1$  cm en  $z = 0$  y un valor máximo de  $b = 2.8 \pm 0.1$  cm en  $z = L$ , imitando los radios del tubo real del clarinete Yamaha en la boquilla, radio  $a$ , y en la campana, radio (véase apartado I.5).

En otro de los casos se ha estudiado las resonancias en un modelo de tubo de apertura exponencial, por lo que se ha considerado un tubo de radio exponencialmente creciente, con un valor mínimo de  $a = 0.6 \pm 0.1$  cm en  $z = 0$  y un valor máximo de  $b = 2.8 \pm 0.1$  cm en  $z = L$  (véase apartado I.6).

### I.2. *Impedancia acústica de entrada*

La impedancia acústica de entrada es un parámetro característico de un sistema resonador, y es una medida de la oposición al flujo de volumen de aire en el sistema cuando se aplica una presión sobre el mismo, excitándolo. Se expresa matemáticamente como el cociente entre la presión acústica  $p$  y el flujo de aire en volumen  $U$  (volumen de aire por unidad de tiempo). Sus unidades en el Sistema Internacional son  $\text{Pa}\cdot\text{s}/\text{m}^3$ .

$$Z = \frac{p}{U} \quad (\text{I.2.1})$$

Un valor elevado de  $Z$  indica que se tiene un flujo pequeño de aire y una variación de presión muy elevada, como es el caso del clarinete cuando se introduce el aire en la ranura que separa la boquilla y la caña. Por el contrario, un valor pequeño de  $Z$  corresponde a un flujo de aire muy intenso y una variación de presión muy baja; por ejemplo, este es el caso de la flauta travesera, cuando se excita la columna de aire sobre el orificio de la embocadura.

La dependencia del valor absoluto o módulo de la impedancia con la frecuencia es complicada, y que éste sea mayor o menor depende del desfase entre la amplitud de la presión y la velocidad del flujo de aire. Este desfase varía conforme varía la frecuencia, ya que cambia la forma de las ondas de presión y velocidad. Además, esto se complica más debido a las sucesivas reflexiones de las ondas estacionarias: la presión de la onda incidente no tiene por qué estar en fase con la de la onda reflejada [1]. La dependencia de la impedancia con la frecuencia se analiza con más detalle en el apartado I.5.

Es importante destacar que en el estudio presentado en la siguiente sección se ha evaluado la impedancia acústica *específica*: ésta se define con el flujo de aire en volumen *por unidad de área*, esto es, volumen por unidad de tiempo y unidad de área, lo cual equivale a la velocidad del flujo de aire. Por tanto, la impedancia acústica específica se define como el cociente entre la presión acústica  $p$  y la velocidad del flujo del aire  $u$ , y las unidades en el Sistema Internacional son Pa·s/m.

$$Z_{específica} = \frac{p}{U/S} \equiv \frac{p}{u} \quad (I.2.2)$$

En adelante, cuando se indique la magnitud  $Z$  se hace referencia a la impedancia acústica específica, por lo que se prescindirá del subíndice.

En este trabajo se realiza un estudio de la impedancia acústica específica de entrada considerando distintas condiciones de contorno y distintos parámetros que influyen en el comportamiento acústico del clarinete. Se comparan los resultados obtenidos numéricamente con los resultados derivados de las expresiones teóricas. Las expresiones teóricas utilizadas se presentan en el apartado I.3, y todas ellas están obtenidas de Kinsler *et al.*: *Fundamentals of Acoustics* [2]. En ellas se ha considerado que la longitud de onda es suficientemente grande en relación con el radio del tubo, por lo que se puede considerar que el sonido se propaga como una onda plana a lo largo del tubo. En estas circunstancias, la presión del aire a lo largo del tubo varía según un movimiento oscilatorio simple.

### I.3. Expresiones teóricas de la impedancia acústica de entrada

Si se considera una onda plana de presión acústica propagándose en la dirección  $z$  (eje longitudinal del tubo),

$$p(z, t) = A e^{i[\omega t + k(L-z)]} + B e^{i[\omega t - k(L-z)]} \quad (I.3.3)$$

Donde las constantes  $A$  y  $B$  son determinadas por las condiciones de contorno en los extremos  $z = 0$  y  $z = L$ . Por otro lado, la velocidad de la partícula se relaciona con la presión a través de la relación de Euler de mecánica de fluidos [17]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (I.3.1.)$$

Esta expresión indica que la diferencia de presión a través de un conducto de fluido es proporcional a la aceleración del fluido al atravesarlo, siendo la densidad de éste la constante de proporcionalidad. El signo menos señala que, si la partícula acelera en una cierta dirección, el gradiente de presión a lo largo de esta dirección es negativo, es decir, la presión disminuye. La ecuación (I.3.1) se resuelve integrando:



$$\mathbf{u}(z, t) = -\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \int (\partial \mathbf{p} / \partial z) dt \quad (\text{I.3.2})$$

A partir de la cual, sustituyendo la presión por (I.4.3) se llega a

$$\mathbf{u}(z, t) = \frac{k}{\rho_0 \omega} [\mathbf{A} e^{i[\omega t + k(L-z)]} - \mathbf{B} e^{i[\omega t - k(L-z)]}] \quad (\text{I.3.3})$$

Con las expresiones anteriores de la presión y la velocidad, se puede obtener la impedancia acústica específica empleando la definición (I.4.2), llegando a

$$Z(z, t) = \rho_0 c \frac{\mathbf{A} e^{ik(L-z)} + \mathbf{B} e^{-ik(L-z)}}{\mathbf{A} e^{ik(L-z)} - \mathbf{B} e^{-ik(L-z)}} \quad (\text{I.3.4})$$

Donde se ha empleado la relación  $\omega = kc$ . Ésta es la expresión general de la impedancia acústica específica de entrada en cualquier punto del eje longitudinal del tubo (definido como eje  $z$ ). La impedancia acústica de entrada se obtiene de la expresión anterior simplemente multiplicando ésta por la superficie de la sección transversal del tubo,  $S$ .

Se denotan  $Z_0$  y  $Z_L$ , respectivamente, como la impedancia en  $z = 0$ , impedancia de entrada del tubo, y la impedancia en  $z = L$ , impedancia de salida del tubo. Sustituyendo ambas condiciones en (I.3.3), se obtiene:

$$Z_0 = \rho_0 c \frac{\mathbf{A} e^{ikL} + \mathbf{B} e^{-ikL}}{\mathbf{A} e^{ikL} - \mathbf{B} e^{-ikL}} \quad (\text{I.3.5})$$

$$Z_L = \rho_0 c \frac{\mathbf{A} + \mathbf{B}}{\mathbf{A} - \mathbf{B}} \quad (\text{I.3.6})$$

Combinando ambas expresiones anteriores se obtiene la ecuación simplificada para  $Z_0$ :

$$\frac{Z_0}{\rho_0 c S} = \frac{(Z_L / \rho_0 c S) + j \tan kL}{1 + j(Z_L / \rho_0 c S) \tan kL} \quad (\text{I.3.7})$$

Ahora bien, la impedancia es una magnitud compleja: su parte real es la resistencia,  $R$ , y su parte imaginaria es la reactancia,  $X$ . Si se considera, entonces, que  $Z_L = R_L + jX_L$ , la expresión (I.3.6) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{Z_0}{\rho_0 c S} = \frac{(R_L / \rho_0 c S) + j(\tan kL + X_L / \rho_0 c S)}{(1 - (\frac{X_L}{\rho_0 c S}) \tan kL) + j(R_L / \rho_0 c S) \tan kL} \quad (\text{I.3.8})$$

Así, fácilmente se pueden obtener la resistencia (parte real) y la reactancia (parte imaginaria) de  $Z_0$ :

$$\frac{R_0}{\rho_0 c S} \equiv \text{Re} \left( \frac{Z_0}{\rho_0 c S} \right) = \frac{r_L (1 - x_L \tan kL) + r_L \tan kL (\tan kL + x_L)}{(1 - x_L)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \quad (\text{I.3.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{X_0}{\rho_0 c S} \equiv \text{Im} \left( \frac{Z_0}{\rho_0 c S} \right) &= \frac{(1 - x_L \tan kL) (\tan kL + x_L) - r_L^2 \tan kL}{(1 - x_L \tan kL)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \quad (\text{I.3.10}) \\ &= \frac{x_L + (1 - r_L^2 - x_L^2) \tan kL - x_L^2 \tan kL}{(1 - x_L \tan kL)^2 + r_L^2 \tan^2 kL} \end{aligned}$$

Donde:

$$r_L \equiv \frac{R_L}{\rho_0 c S}$$

$$x_L \equiv \frac{X_L}{\rho_0 c S}$$

Cuando un sistema entra en resonancia, es resistivo puro. Como en este estudio interesan las resonancias que se producen en el sistema, se debe considerar nula la parte imaginaria de la impedancia de entrada, esto es, la reactancia. Por tanto, para todos los casos que se estudian a continuación, es correcto afirmar que  $X_0 = 0$ .

### 1. *Extremo final cerrado*

Consideremos primero el caso en el que el extremo final del tubo ( $z = L$ ) está cerrado. En este caso la resistencia es máxima ( $Z_L \rightarrow \infty$ ), por lo que la expresión de la impedancia de entrada (I.3.7) se reduce a:

$$\frac{Z_0}{\rho_0 c S} = -j \cot kL \quad (\text{I.3.11})$$

Como se ha visto, cuando ocurren las resonancias,  $X_0$  se anula. Como en (I.3.11) se ha obtenido que  $Z_0$  es imaginario puro, se concluye que las resonancias se producirán cuando  $\cot kL = 0$ :

$$k_n L = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (\text{I.3.12})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

De la expresión anterior, sustituyendo  $k_n = \lambda_n / 2\pi = (c/f_n) / 2\pi$ , se obtienen las frecuencias de resonancia:

$$f_n = (2n - 1) \frac{c}{4L} \quad (\text{I.3.13})$$

### 2. *Extremo final abierto: dos casos distintos*

Consideremos ahora el caso de un tubo resonador abierto en  $z = L$ . Esto es equivalente a hablar del tubo cerrado-abierto considerado en el apartado I.5.

Si no se considera el medio al que se radia el sonido, resulta evidente que la impedancia de salida del tubo se hace nula en el extremo final, ya que la presión cae a cero:  $Z_L = 0$ . Entonces la expresión (I.3.7) se reduce a:

$$\frac{Z_0}{\rho_0 c S} = j \tan kL \quad (\text{I.3.14})$$

Como se ha visto, cuando ocurren las resonancias,  $X_0$  se anula. Como en (I.3.11) se ha obtenido que  $Z_0$  es imaginario puro, se concluye que las resonancias se producirán cuando  $\tan kL = 0$ :

$$k_n L = n\pi \quad (\text{I.3.15})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

De esta expresión se derivan las frecuencias de resonancia:

$$f_n = n \frac{c}{2L} \quad (\text{I.3.16})$$

Ahora bien, en el caso real, la radiación se produce de un medio a otro, por lo que hay que tener en cuenta la diferencia de impedancias entre ellos. En cuanto se considera que se radia el sonido en un medio (dominio de radiación), hay que considerar una cierta *impedancia de carga* del medio, la cual hace que  $Z_L$  no se anule por completo, y que los armónicos se alejen de la armonicidad.

Las resonancias se producen dentro de un tubo resonador debido a las ondas estacionarias que se generan en el mismo. La onda se refleja en ambos extremos, sucesivamente. Según el denominado *efecto de extremo final del tubo*, el punto en el que sucede la reflexión al final del tubo es mayor que  $L$  ( $z > L$ ), y es tanto mayor cuanto más alta sea la frecuencia de resonancia. Esto es debido a que, cuanto mayor es la frecuencia de la onda, mayor es la aceleración que ésta ejerce sobre la masa de aire. Por tanto, las ondas con mayor frecuencia tenderán a seguir viajando a lo largo del tubo, y alcanzarán una distancia algo mayor que la distancia a la que esté el extremo abierto (situado en  $z = L$ ), antes de darse la reflexión. Es por ello que, frecuentemente, en vez de *longitud de resonancia*, se emplea el término *longitud efectiva*, para explicitar que la resonancia ocurre a una longitud mayor que la longitud real del tubo.

Para el tubo **abierto en  $z = L$  y radiando libremente**, se estudian dos casos:

- Extremo final apantallado (*flanged* en inglés): contorno rígido o pantalla infinita en el plano ( $r, z = L$ ).
- Extremo final no apantallado (*unflanged* en inglés): radiación libre en el extremo  $z = L$ .

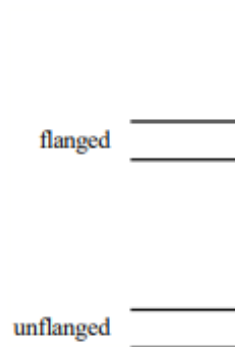


Figura 2. Configuración del extremo del tubo apantallado (arriba) y no apantallado (abajo) [2].

Para estudiar estos dos casos, se emplea el modelo de radiación del pistón circular plano en el límite de bajas frecuencias (se entiende aquí por bajas frecuencias que  $\lambda \gg a$ ), donde el patrón de directividad de éste es casi omnidireccional [2].

#### a) *Extremo final apantallado*

La impedancia mecánica de radiación de un pistón en pantalla infinita viene dada por:

$$\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} = 1 - \frac{2J_1(2ka)}{ka} + j \frac{2H_1(2ka)}{2ka} \quad (I.3.17)$$

Siendo  $a$  el radio del tubo. La resistencia y la reactancia vienen dadas, respectivamente, por la función de Bessel de orden 1,  $J_1$ , y la función de Struve de orden 1,  $H_1$ :

$$r_L = 1 - \frac{2J_1(x)}{x} = \frac{x^2}{2 \cdot 4} - \frac{x^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} - \dots \quad (\text{I.3.18})$$

$$x_L = \frac{2H_1(x)}{x} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2 \cdot 5} + \frac{x^5}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} - \dots \right)$$

Donde:

$$x \equiv 2ka$$

Aplicando la aproximación  $ka \ll 1$  (equivalente a  $\lambda \gg a$ ) a las expresiones (I.3.18) y sustituyendo en (I.3.17), se obtiene el factor  $\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S}$ :

$$\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} = \frac{1}{2} (ka)^2 + j \frac{8}{3\pi} ka \quad (\text{I.3.19})$$

La longitud efectiva de la resonancia resulta ser:

$$L_{ef} = L + \frac{8}{3\pi} a \quad (\text{I.3.20})$$

*b) Extremo final no apantallado*

Para este tipo de tubo, se ha estudiado teórica y empíricamente [4, 5] que la longitud efectiva de la resonancia es  $L_{ef} = L + 0.6a$ , donde  $L$  es la longitud real del tubo. El factor  $\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S}$  de la ecuación (I.3.6) viene dado esta vez por:

$$\frac{Z_{mL}}{\rho_0 c S} = \frac{1}{4} (ka)^2 + j 0.6 ka \quad (\text{I.3.21})$$

Con  $\lambda \gg a$ .

Este segundo caso, no apantallado, es el más parecido al caso real del clarinete: al final del tubo no hay un reborde rígido, sino que radia libremente en todas direcciones.

En este estudio se cumple la condición  $\lambda \gg a$ : Para la frecuencia más grave del clarinete (147 Hz),

$$\lambda = c/f = 343.37 \text{ m/s} / 147 \text{ Hz} \approx 2.34 \text{ m}$$

Por otra parte, el radio interior del tubo mide 0.6 cm (véase apartado I.1):

$$a = 0.006 \text{ m}$$

Por lo que está justificado el uso de las expresiones (I.3.19) y (I.3.21).

En la siguiente gráfica se muestra una comparativa entre las curvas del módulo de la impedancia de entrada para el tubo cilíndrico de longitud  $L = 0.66 \text{ m}$ , en los casos de final apantallado o no apantallado en  $z = L$ . Se presenta su dependencia en función de la frecuencia, entre 50 y 1500 Hz. Han sido obtenidas con el programa COMSOL *MultiPhysics*<sup>®</sup>, a partir de las expresiones teóricas (I.3.19) y (I.3.21), respectivamente. En este caso no se han considerado pérdidas (véase apartado I.8).

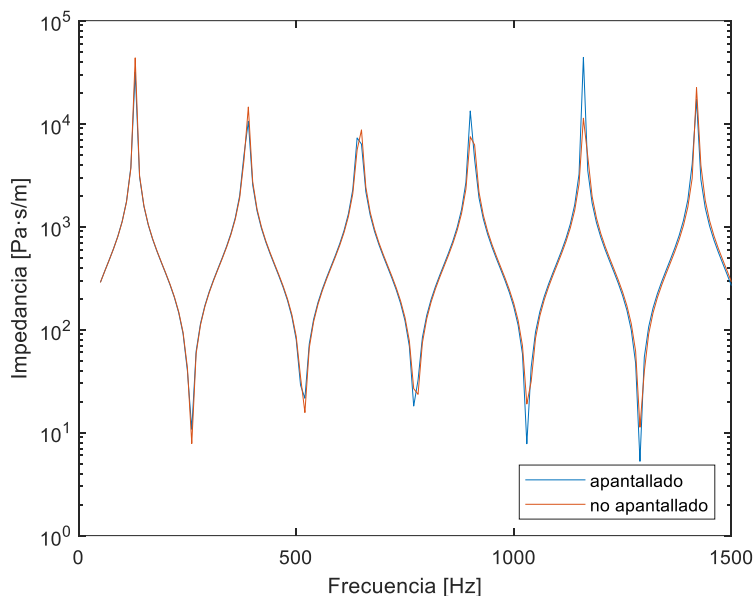


Figura 3. Comparativa de los modelos teóricos para el tubo apantallado (azul) y el no apantallado (rojo). En este caso no se han considerado pérdidas.

#### I.4. Resonancias en un tubo cerrado-abierto. Resonancias en un tubo abierto-abierto

En la sección II se comparan las resonancias que se producen en dos casos distintos:

- Tubo abierto-abierto. Ambos extremos están abiertos al exterior tanto en  $z = 0$  como en  $z = L$ . El instrumento más ilustrativo de este diseño es la flauta travesera.
- Tubo cerrado-abierto. El extremo  $z = 0$  está cerrado al exterior, mientras que el extremo  $z = L$  está abierto al exterior. Este es el caso del clarinete, el oboe, el fagot, el saxofón (todos ellos excitados mediante una lengüeta, simple o doble, conocida como *caña*) o los instrumentos de viento-metal (en este caso también se habla de boquilla, si bien en este caso el excitador lo conforman los mismos labios del instrumentista).

Las resonancias acústicas en el tubo de cada instrumento se producen gracias a que las ondas están casi totalmente confinadas en su interior. Se generan, o bien en la caña, en el caso de los instrumentos de lengüeta como el clarinete, el saxofón, el oboe o el fagot, o bien en el orificio de la embocadura, como es el caso de la flauta travesera o los instrumentos de viento-metal. Se propagan a través del tubo y se reflejan en la campana. La onda incidente y la reflejada se superponen (se suman) y conforman la onda estacionaria, cuyas características vienen determinadas por las condiciones en los extremos del tubo, que son distintas en función del instrumento musical que se considere.

En el caso de prácticamente todos los instrumentos musicales de viento (definitivamente, todos los instrumentos de viento de la orquesta sinfónica), debido a que están abiertos al exterior en su extremo inferior ( $z = L$ ), la presión en ese extremo es aproximadamente igual a la presión en el exterior, es decir, la atmosférica. En otras palabras, la variación de presión acústica en dicho extremo es cero (se

dice entonces que existe un “nodo” de presión). La diferencia entre unos instrumentos y otros se encuentra en la condición de contorno en el extremo superior ( $z = 0$ ).

En el caso del clarinete, el saxofón, el oboe o el fagot, cuando el instrumentista introduce el aire en el extremo superior, que en una primera aproximación se considera cerrado, se tiene una presión mucho más elevada que la del exterior. Así, pues, en este extremo la variación de presión acústica se considera máxima (se da un “vientre” de presión). Esto implica, suponiendo por simplicidad que la onda de presión es sinusoidal, que ésta tiene amplitud máxima en  $z = 0$  y mínima (cero) en  $z = L$ . Las longitudes de onda para las que se satisfacen estas condiciones de contorno y sus correspondientes frecuencias se muestran en la figura 5 derecha, si bien esto es únicamente válido en el caso de que el tubo sea cilíndrico. Tanto el saxofón como el oboe y el fagot tienen tubos de sección cónica, por lo que las ondas de presión tienen una forma distinta y por consiguiente las longitudes de onda no cumplen las mismas relaciones que las mostradas en la figura 5, derecha. Las resonancias en tubos de sección cónica se analizan en el apartado I.5.

En el caso de la flauta travesera, tanto el extremo superior como el inferior están abiertos al exterior, por lo que en los dos existen nodos de presión. Las longitudes de onda para las que se satisfacen estas condiciones de contorno y sus correspondientes frecuencias se muestran en la figura 5 izquierda.

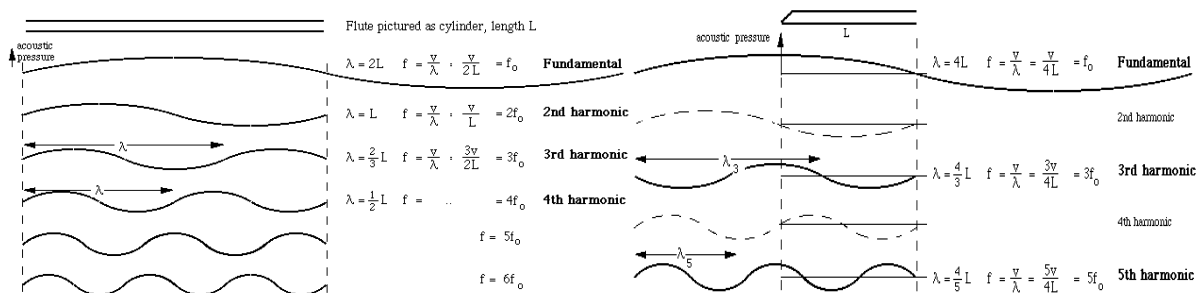


Figura 4. Armónicos naturales para los tubos cilíndricos: abierto por ambos extremos, como la flauta (izda.), y cerrado por el extremo superior y abierto por el inferior, como el clarinete (dcha.) [6].

Estas frecuencias son denominadas “armónicos”. Los armónicos son sonidos puros (su onda es sinusoidal) cuya frecuencia es un número entero de veces la frecuencia fundamental. Nótese que, si se imponen las condiciones de tubo cerrado-abierto, sólo aparecen los armónicos impares, con una frecuencia igual a un número impar de veces la fundamental (figura 5 derecha). En el caso de la flauta, que se aproxima por un tubo abierto por los dos extremos, y que por tanto en ambos se impone la condición de nodo de presión, aparecen tanto los armónicos pares como los impares (figura 5 izquierda). Al conjunto de las sucesivas frecuencias de todos los armónicos se le conoce con el nombre de “serie armónica”.

La onda de presión se considera por simplicidad sinusoidal. La distancia entre un máximo y un mínimo consecutivos en una onda sinusoidal equivale a un cuarto de longitud de onda, mientras

que la distancia entre dos mínimos consecutivos equivale a la mitad de la longitud de onda. Por tanto, la longitud del tubo cerrado-abierto es igual a un cuarto de la longitud de onda fundamental, mientras que la del tubo abierto-abierto equivale a la mitad de la longitud de onda fundamental. Expresando la frecuencia en función de la longitud del tubo  $L$ , se obtienen las expresiones para las series armónicas:

$$f_{n \text{ tubo cilíndrico, cerrado-abierto}} = (2n + 1) \frac{c}{4L} \quad (\text{I.4.1})$$

$$f_{n \text{ tubo cilíndrico, abierto-abierto}} = n \frac{c}{2L}$$

Donde  $n = 0$  para la frecuencia fundamental, y  $c$  es la velocidad del sonido en el interior del tubo. Se pueden comprobar empíricamente con facilidad, como se verá más adelante en la sección experimental. De cualquier forma, si se toma  $L$  como la longitud total del clarinete, y la velocidad del sonido como  $c \approx 350$  m/s (más elevada que el valor estándar debido a que el aire en el interior del tubo es más caliente y húmedo que en el exterior), se puede comprobar que se genera una onda de una frecuencia de 147 Hz aproximadamente. Ésta corresponde a la nota  $\text{Re}_3^1$ , que es el sonido más grave que puede producir el clarinete en Si bemol [6]. Si se realizan los cálculos análogos para la flauta, se comprueba que el sonido más grave que puede producir es el  $\text{Do}_4$ , de frecuencia 262 Hz. Esto es aproximadamente lo que se espera teóricamente, a partir de las expresiones (I.4.1): la frecuencia fundamental del tubo cerrado-abierto es una octava más grave que la frecuencia fundamental de un tubo abierto-abierto de la misma longitud. Entre el  $\text{Re}_3$  del clarinete y el  $\text{Do}_4$  de la flauta existe un intervalo de séptima, no de octava, y esto es debido a que las longitudes de los instrumentos reales no son exactamente iguales.

La diferencia en el comportamiento acústico entre un tubo cerrado-abierto y uno abierto-abierto también se pueden interpretar mediante las curvas del módulo de la impedancia de entrada.

Para el primer caso, los instrumentos que entran dentro de esta categoría funcionan en los “máximos” de impedancia, ya que en el extremo de excitación ( $z = 0$ ) presentan una variación máxima de la presión y además una variación nula de la velocidad del flujo del aire, ya que es un extremo cerrado y no hay corriente de aire a través de éste. Como la impedancia se define como el cociente entre presión y velocidad, esto se traduce en que la impedancia de entrada es máxima.

Para el segundo caso, los instrumentos que entran dentro de esta categoría funcionan en los “mínimos” de impedancia, ya que en el extremo de excitación ( $z = 0$ ) presentan una variación mínima de la presión y además una variación máxima de la velocidad del flujo del aire, ya que es un extremo abierto y existe corriente de aire a través de éste, de hecho, es gracias a ella que se produce la

<sup>1</sup> El clarinete es un instrumento transpositor, afinado un tono por debajo de la flauta, el oboe o el fagot. Esto quiere decir que cuando el clarinete emite la nota de frecuencia  $\text{Re}_3$  (147 Hz), nota real, en la partitura dicha nota está escrita como un  $\text{Mi}_3$  (nota escrita). En este trabajo, siempre que se mencione el nombre de una nota musical, se hará referencia a la nota real, para evitar confusiones.

excitación. Como la impedancia se define como el cociente entre presión y velocidad, esto se traduce en que la impedancia de entrada es mínima.

Un tubo cerrado-abierto y otro abierto-abierto que tengan la misma longitud presentarán la misma curva de impedancia. Dicha curva mostrará la dependencia típica con la frecuencia que sigue la impedancia acústica de entrada de un tubo resonador: habrá unos máximos y mínimos alternados, más o menos equiespaciados. Las frecuencias que coincidan con los máximos de impedancia serán las frecuencias *a las que funciona* el tubo cerrado-abierto, esto es, las frecuencias de resonancia de éste. Lo análogo ocurre con las frecuencias relativas a los mínimos de impedancia: son las frecuencias de resonancia del tubo abierto-abierto. Esto se ilustra en la figura siguiente.

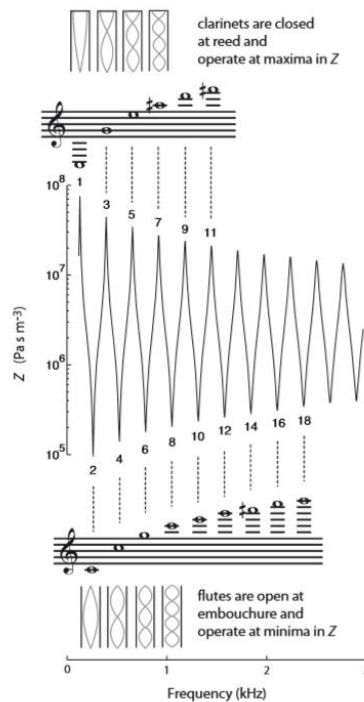


Figura 5. Curva de impedancia vs. frecuencia para la resonancia más grave de un tubo cilíndrico de 650 mm de longitud y 15 mm de diámetro, en el caso cerrado-abierto (arriba) y en el caso abierto-abierto (abajo).

Obtenida de Dickens, P. *et al.* [1].

### I.5. Resonancias en un tubo cónico

Uno de los modelos que se estudia en la siguiente sección es el del tubo cónico que se ensancha linealmente hacia la campana. Los armónicos de un tubo cónico que se ensancha hacia la campana vienen dados por [7]:

$$\omega_n = (n\pi c/L) \left\{ 1 + \left( \frac{x_0}{L} \right) \left( \frac{1}{B} \right) \right\}^{-1} \quad (I.5.1)$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

$$B \cong 1 + \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \left( \frac{b}{x_0} \right)^2 [b^2 / (L + x_0)^2] n^2$$



Donde  $b$  es el radio del tubo en el extremo abierto, es decir, en  $z = L$ , y  $x_0$  es una distancia positiva si el tubo se ensancha hacia el extremo abierto, y negativa si el tubo se estrecha hacia el extremo abierto, tal y como indica la siguiente figura.

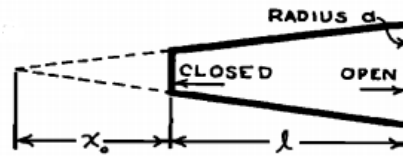


Figura 6. Geometría del tubo cónico considerado en este estudio [7].

Esta distancia  $x_0$  se ha calculado conociendo los radios del tubo en  $z = 0$  (radio  $a = 0.6$  cm) y en  $z = L$  (radio  $b = 2.8$  cm), empleando la relación de proporcionalidad entre triángulos:

$$\frac{x_0}{2a} = \frac{x_0 + L}{2b} \rightarrow \frac{x_0}{1.2} = \frac{x_0 + L}{5.6} \rightarrow x_0 = 18 \text{ cm}$$

La expresión (I.5.1) muestra que la frecuencia fundamental de resonancia del tubo cónico es mayor que la de un tubo cilíndrico de la misma longitud, si el diámetro aumenta desde el extremo cerrado al extremo abierto, y menor si el diámetro disminuye desde el extremo cerrado al abierto.

#### I.6. Resonancias en un tubo exponencial. Bocinas de Bessel

Tal y como se ha explicado en el apartado I.5, en el espectro en frecuencias de un sonido producido por un instrumento musical, los sucesivos armónicos han de estar distanciados un número entero de veces la frecuencia fundamental. Esta relación se ha de cumplir para todos los sonidos que se producen en el instrumento, es decir, para cualquier longitud de resonancia del tubo (tal y como se ha explicado, la altura del sonido en un instrumento de viento se modifica con la digitación, es decir, variando la longitud de la resonancia). En otras palabras, para que un instrumento de viento produzca sonidos musicales, se han de cumplir estos dos requisitos:

- Que los armónicos guarden una proporción de números enteros respecto de la frecuencia fundamental.
- Que esta proporción se siga cumpliendo independientemente de la longitud de la resonancia para una frecuencia fundamental concreta (en términos musicales, para todas las notas o todo el registro del instrumento).

En *On Woodwind Instrument Bores* [7], Arthur H. Benade muestra que estas condiciones se cumplen si la sección transversal del tubo está definida por la siguiente ecuación:

$$S(z) = C(z - z_0)^\epsilon \quad (\text{I.6.1})$$

Los tubos que cumplen con esta geometría se denominan *tubos o bocinas de Bessel*. En la expresión anterior,  $C$  es una constante de proporcionalidad,  $z_0$  es el punto inicial del tubo, que en el modelo considerado es  $z = 0$ , y  $\epsilon$  es una constante que indica la tasa de ensanchamiento del tubo, es decir, cuán rápido aumenta el diámetro del tubo a lo largo del eje  $z$ .

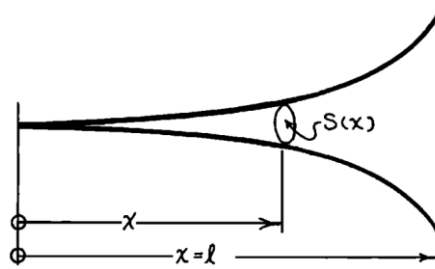


Figura 7. Perfil de una bocina de Bessel con una cierta tasa de ensanchamiento  $\varepsilon$  [7].

El área al final del tubo es:

$$S(z = L) \equiv S_L = CL^\varepsilon \quad (I.6.2)$$

La constante  $\varepsilon$  puede obtenerse a partir de las dimensiones del tubo y la constante  $C$ :

$$\varepsilon = \frac{\frac{S_L}{C}}{L} \quad (I.6.3)$$

Las frecuencias de resonancia o los sucesivos armónicos que se producen en este tipo de tubos dependen de la constante  $\varepsilon$ , por lo que no existe una expresión teórica única que las describa. En función del valor de  $k$  la relación entre los sucesivos armónicos es de números enteros o no. Si no lo es, la forma exponencial del modelo considerado no es “musicalmente útil”, ya que no genera armónicos espaciados un número entero de veces la frecuencia fundamental. En la siguiente figura, obtenida de [7], se indican los valores de la constante  $\varepsilon$  que generan armónicos equiespaciados y múltiplos de la fundamental, lo cual produciría un sonido correspondiente a un tono, y la bocina podría considerarse un instrumento musical.

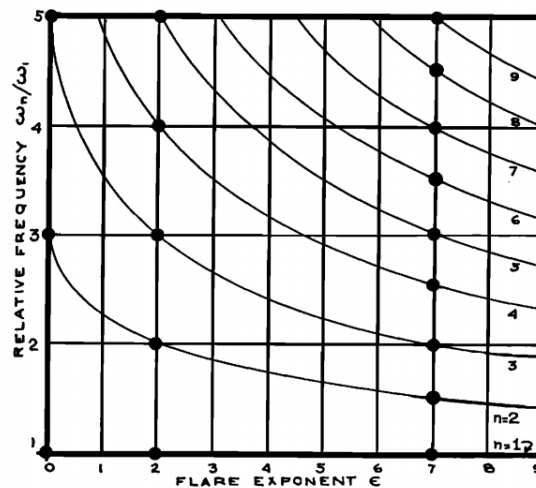


Figura 8. Relación de los sucesivos armónicos con la fundamental para tubos exponenciales de constante  $\varepsilon$  variable [7].

Se tienen tres casos posibles para los instrumentos de viento:

- Para  $\varepsilon = 0$ ,  $S(x)$  es constante. Se tiene un tubo cilíndrico cerrado-abierto, en el cual sólo se producen los armónicos impares, como se ha explicado en el apartado I.4. Éste sería el caso

que mejor se ajusta a la acústica del clarinete.

- Para  $\varepsilon = 2$ ,  $S(x)$  es proporcional a  $x^2$ . Los armónicos siguen la relación de números enteros:  $f_1, f_2 = 2f_1, f_3 = 3f_1 \dots$  siendo  $f_1$  la frecuencia fundamental. Éste es el caso de los tubos cónicos, como los del oboe, el fagot y el saxofón.
- La misma relación armónica se tiene para  $\varepsilon \approx 7$ , donde también se producen los armónicos tanto pares como impares. Los armónicos que cumplen las relaciones 1.5, 2.5, 3.5, etc. no se producen, puesto que no son frecuencias a las que el elemento excitador, la lengüeta del instrumento o la caña, puede funcionar. Además, la bocina presentaría un ensanchamiento demasiado grande como para que se produjeran las resonancias dentro del tubo, ya que el amortiguamiento debido a la radiación sería demasiado elevado [7].

Estas tres posibilidades se resumen en la tabla siguiente:

Constante $\varepsilon$	$S(x)$	Forma	Intervalo $f_1/f_0$	Armónico $n$
0	Indep. de $x$	Cilíndrica, cerrada-abierta	12 <sup>a</sup>	$(2n-1)c/4L$
		Abierta-abierta	8 <sup>a</sup>	$nc/2L$
2	Prop. a $x^2$	Cónica	8 <sup>a</sup>	$nc/2L$
7	Prop. a $x^7$	Ver figura	5 <sup>a</sup>	$(n+1)c/2L$

Tabla 1. Resumen de los posibles casos de apertura exponencial en los tubos resonadores de los instrumentos musicales de viento.

De la anterior reflexión se concluye que, si bien la forma de bocina no se emplea para modelar el comportamiento acústico del clarinete, ya que éste se ajusta a un tubo cilíndrico, sí que se emplea para modelar otros instrumentos de la familia de viento-madera, como el oboe, el fagot o el saxofón, por lo que se ha tenido en cuenta en el análisis numérico presentado en la siguiente sección.

### I.7. Radiación del sonido en los instrumentos musicales. Patrón de directividad

Los instrumentos musicales, como la mayoría de las fuentes acústicas, radian omnidireccionalmente a bajas frecuencias. Existe un límite a partir del cual la radiación del sonido comienza a tener cierta directividad, y está delimitado por la longitud del instrumento: cuando la longitud de onda del sonido emitido es comparable a las dimensiones del instrumento. A frecuencias superiores, el patrón de directividad del instrumento varía en función del tamaño, la forma y los modos vibracionales excitados [8]. Este límite, en el caso del clarinete, se puede calcular considerando la longitud  $L = 66$  cm:

$$f_{\text{lim}} = \frac{c}{\lambda_{\text{lim}}} = \frac{c}{L} = \frac{343.37 \frac{m}{s}}{0.66 m} \approx 520 \text{ Hz} \rightarrow Do_5$$

### I.8. Modelo de pérdidas

En la propagación de una onda acústica siempre se da cierta pérdida de energía, la cual se convierte en energía térmica. Esto se traduce en un decremento de la presión acústica, que, en ciertos casos, considerando las distancias y los tiempos empleados en el estudio, pueden ser despreciables. No obstante, en el análisis presentado en la sección II de esta memoria se ha querido comparar el resultado obtenido sin considerar estas pérdidas con el obtenido teniendo en cuenta las pérdidas.

La pérdida de energía producida en la propagación de la onda acústica puede ser debida al comportamiento del propio fluido, en este caso el aire en el interior del tubo resonador, o a la interacción de este fluido con las paredes del tubo [2]. Las pérdidas que pueden producirse debidas al comportamiento del propio fluido, a su vez, pueden deberse a varias causas, de las cuales las más relevantes son las siguientes:

- Por viscosidad: generadas cuando existe movimiento relativo entre regiones adyacentes del fluido, como compresiones y rarefacciones, producidas en la propagación de la onda.
- Por conductividad térmica: generadas cuando existe una diferencia de temperatura entre las regiones que acumulan calor (compresiones) y las que pierden calor (rarefacciones)<sup>2</sup>.

Si se considera la ecuación de Helmholtz en su forma más sencilla:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (\text{I.8.1})$$

La solución de esta ecuación da la expresión de la presión acústica de una onda plana, propagándose en el eje z:

$$p(z, t) = P_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad (\text{I.8.2})$$

Las pérdidas producen una atenuación de la amplitud de presión en el eje z, independiente del tiempo. Por tanto, la amplitud variará con z de la siguiente forma:

$$P_0 \rightarrow P_0(z) = P_0 e^{-\alpha z}$$

$$p(z, t) = P_0(z) e^{j(\omega t - kz)} = P_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - kz)} \equiv P_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

Donde se ha definido el vector de onda complejo de la siguiente forma:

$$\mathbf{k} = k - j\alpha$$

Siendo  $\alpha$  el coeficiente de atenuación del medio. Este coeficiente es función de la frecuencia de la onda: las ondas de mayor frecuencia se atenúan más que las de menor frecuencia. En concreto, considerando pérdidas visco-térmicas,  $\alpha$  es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia [2].

En este estudio se ha considerado el modelo de pérdidas presentado en Picó, R. *et al.* [9]. Las expresiones implementadas son las siguientes.

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} + \alpha(1 - j) \quad (\text{I.8.4})$$

$$\text{Donde } \alpha \approx 3 \cdot \frac{10^{-5} \sqrt{f}}{a} \text{ y } c_0 = 343.37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ a } 20^\circ\text{C}.$$

<sup>2</sup> La teoría cinética de los gases sostiene que la presión de un gas es proporcional a su temperatura absoluta [10].

Estas expresiones tienen en cuenta las pérdidas producidas por disipación visco-térmica en el propio aire dentro del tubo del instrumento.

En la siguiente gráfica se muestra una comparativa entre las curvas del módulo de la impedancia de entrada para el tubo cilíndrico de longitud  $L = 0.66$  m, entre el caso en el que se consideran pérdidas (expresiones I.8.4) y el caso en el que no se consideran pérdidas.

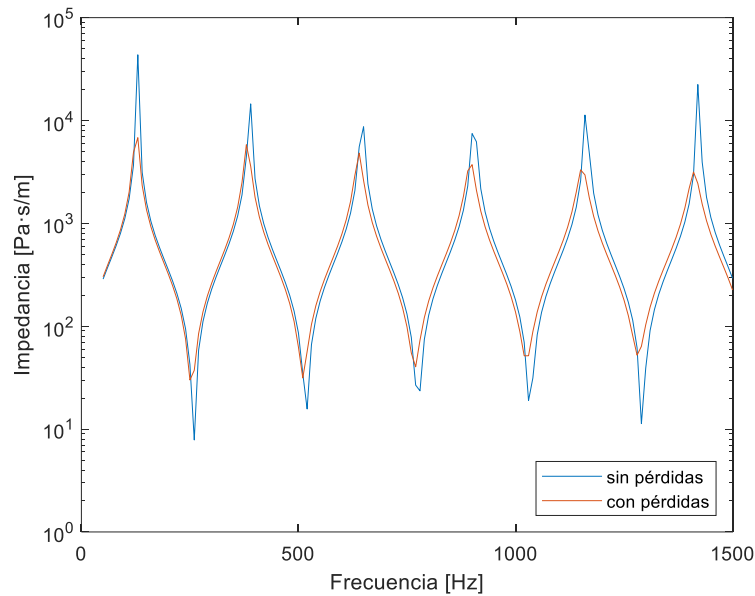


Figura 9. Comparativa de los modelos teóricos para los casos sin pérdidas (azul) y con pérdidas (rojo).

Se puede observar que, si se consideran las pérdidas, los máximos y mínimos de impedancia están mucho más atenuados. Esto es debido a que al no considerar pérdidas los máximos de impedancia tienden a infinito, y el programa realiza un truncamiento en un valor cercano a  $10^8$ . Los valores de la impedancia en el caso en que sí se consideran pérdidas varían dentro de un rango más reducido.

### I.9. Herramientas numéricas y software empleados: Método de Elementos Finitos (FEM) y COMSOL Multiphysics®

El Método de Elementos Finitos (FEM) es una herramienta de resolución de las ecuaciones diferenciales parciales que describen un problema físico, empleada en el caso en que la resolución de dicho problema no es posible mediante métodos analíticos, debido a la complejidad en la geometría del sistema [3]. Este método permite una representación tridimensional de la geometría del sistema con dominios internos y externos acoplados, independientemente de cuán complicada sea la misma. Esto es posible gracias a que se realiza una discretización del dominio en un número finito de elementos. Estos elementos pueden ser de varios tipos, y los que son relevantes en este estudio se presentan en la figura 1 [11]:

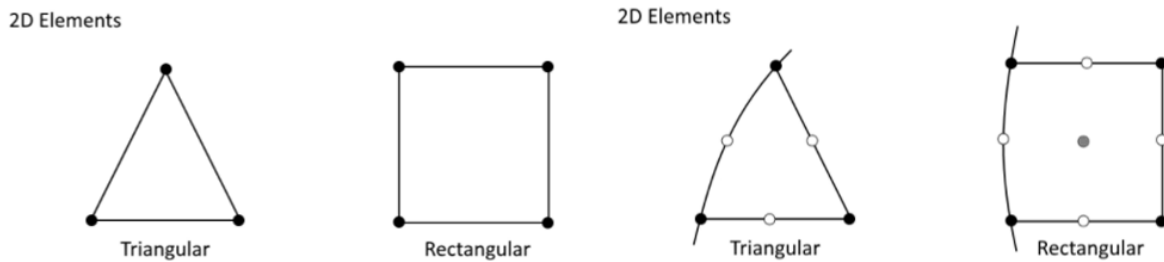


Figura 10. Elementos lineales o de 1° orden (izda.) y cuadráticos o de 2° orden (dcha.), ambos en dos dimensiones.

El conjunto de todos estos elementos constituye la *mall*a. La precisión de las soluciones es tanto mayor cuanto más fina sea la malla, es decir, cuantos más elementos contenga, y, en consecuencia, en cuanto mayor número de puntos se realicen los cálculos. El resultado del problema se calcula por interpolación entre los elementos. La malla tiene que ser lo suficientemente pequeña como para representar correctamente en el resultado final todas las oscilaciones que se producen en el sistema. Para ello se ha de cumplir lo que se conoce como *condición de convergencia*: Ha de cumplirse que el tamaño de cada elemento,  $\Delta x$ , no sea mayor que la octava parte de la longitud de onda [12]. Tomando la longitud de onda más corta de oscilación del sistema,  $\lambda_{\min}$ , y la correspondiente frecuencia más elevada de oscilación del sistema, la condición de convergencia es la siguiente:

$$\Delta x = \frac{\lambda_{\min}}{8} = \frac{c}{8f_{\max}} \quad (\text{I.9.1})$$

Donde  $c$  es la velocidad del sonido en el material.

A toda la superficie de cada elemento se le da un único valor de presión. Por ello, no tiene sentido que la longitud de un elemento coincida con una longitud de onda o más, ya que de ser así la presión oscilaría entre el valor máximo, el valor mínimo y el cero. Sin embargo, si se divide la longitud de onda en ocho elementos (como mínimo), es correcto asumir que la presión se mantiene constante en cada uno de éstos.

No obstante, automáticamente la malla construida por COMSOL tiene elementos de tamaño menor a  $\Delta x$ , por lo que no es necesario realizar el cálculo de la ecuación (I.9.1).

Para las simulaciones presentadas en este trabajo, se ha empleado **un modelo en 2D con simetría de revolución (modelo 2D axisimétrico)**, y se han utilizado elementos de Lagrange curvos de segundo orden (cuadráticos), y triangulares (este tipo de elemento se muestra en tercer lugar, de izquierda a derecha, en la figura 1).

El software empleado en este estudio, desde el cual se ha desarrollado la simulación mediante FEM, es COMSOL *MultiPhysics*®. Este programa permite realizar simulaciones de problemas de cualquier campo de la ingeniería, ya que ofrece distintos módulos con herramientas prediseñadas para facilitar el uso. El módulo que se ha utilizado en el presente estudio es el **módulo de Acústica**.

El módulo de Acústica en COMSOL permite estudiar los siguientes aspectos: presión acústica, ondas elásticas, interacción acústica-estructura, aeroacústica, acústica termo-viscosa, ultrasonido y

acústica geométrica. Este estudio se centrará en el primero de ellos: **Presión Acústica**, ya que el objetivo es visualizar la propagación de las ondas de presión emitidas por el instrumento.

El módulo de Acústica – Presión Acústica a su vez se divide en distintas ramas, en función de si el dominio del estudio es el tiempo o la frecuencia. Todas las simulaciones presentadas en este trabajo se realizan en el módulo **Presión Acústica, frecuencia**. En la sección II se presentan dos tipos de estudio que se pueden realizar en este módulo:

- **Dominio de la Frecuencia.** Cuando se pretende observar la propagación de las ondas de presión acústica para una frecuencia cualquiera. En este caso se considera un dominio en frecuencia desde 50 Hz hasta 1500 Hz, con pasos de 10 en 10. En este tipo de estudio se distinguen a su vez dos tipos de geometrías empleadas:
  - **Geometrías cerradas:** cuando el dominio en el que se realizan los cálculos se reduce al interior del tubo resonador.
  - **Geometrías abiertas:** cuando, además del dominio del interior del tubo, se incluye en la geometría un dominio de radiación de onda esférica circundante. En este caso se ha considerado una semiesfera de radio 0.5 metros con centro en el extremo final del tubo, en  $z = L$ .
- **Frecuencias Propias.** Cuando se pretende obtener los modos propios de resonancia del modelo. Aquí únicamente se tiene en cuenta el dominio englobado por el sistema físico, en este caso el tubo resonador, y no se considera el dominio de radiación. Por tanto, todas las geometrías que se consideran en este tipo de estudio son **geometrías cerradas**.

La ecuación considerada en el estudio de Presión Acústica, Frecuencia es la ecuación de Helmholtz. Para el estudio de **Dominio de la Frecuencia**, presenta la forma siguiente. tal y como se muestra en COMSOL:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{\rho_c} (\nabla p_t - \mathbf{q}_d) \right) - \frac{k_{eq}^2 p_t}{\rho_c} = Q_m \quad (I.9.2)$$

$$p_t = p + p_b$$

$$k_{eq}^2 = \left( \frac{\omega}{c_c} \right)^2 - k_m^2$$

$$c_c = c \left( 1 + i\omega \frac{\delta}{c^2} \right)^{0.5}, \rho_c = \frac{\rho_c^2}{c_c^2}, \delta = \frac{1}{\rho} \left( \frac{4\mu}{3} + \mu_B + \frac{(\gamma - 1)k}{C_p} \right)$$

La ecuación (I.9.2) se resuelve para  $p$ , que es la presión acústica ambiental, siendo ésta la resta entre la presión total y la presión atmosférica de fondo.

Por otro lado, cuando se usa geometría en 2D axisimétrica, las variables independientes son la coordenada radial  $r$  y la coordenada axial  $z$ . La dependencia azimutal (coordenada  $\varphi$ ) aparece en forma de *fasor*:

$$p(r, \varphi, z) = p(r, z) e^{-im\varphi} \quad (I.9.3)$$

Donde  $m$  es denominado *número modal azimutal*. Éste define el *número de onda azimutal*  $k_m = m/r$ . Como la dependencia azimutal es periódica,  $m$  es un número entero. A menos que se introduzca manualmente su valor en el programa, el valor de  $m$  por defecto es 0, es decir, no hay dependencia azimutal. En este estudio se toma  $m = 0$  y por tanto  $k_m = 0$ , ya que no hay dependencia azimutal, es decir, la presión no varía si únicamente varía la coordenada  $\varphi$ .

$k_{eq}$ : Número de onda [ $1/m$ ], el cual contiene el número de onda habitual  $k$  y el número de onda azimutal  $k_m$ . No obstante, en este estudio  $k_m = 0$  y por tanto  $k_{eq}$  es simplemente el número de onda habitual.

$\rho_c$ : densidad [ $\text{kg/m}^3$ ],

$c_c$ : velocidad del sonido [ $\text{m/s}$ ],

$q_d$ : fuente dipolo [ $\text{N/m}^3$ ],

$Q_m$ : fuente monopolo [ $1/\text{s}^2$ ],

$\omega = 2\pi f$ : frecuencia angular [ $\text{rad/s}$ ] siendo  $f$  la frecuencia [ $\text{Hz}$ ].

Para el estudio de **Frecuencias Propias**, la ecuación de Helmholtz presenta la forma siguiente, tal y como se muestra en COMSOL:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{\rho_c} \nabla p \right) + \frac{\Lambda^2 p}{\rho_c c_c^2} = 0 \quad (\text{I.9.4})$$

Donde los términos asociados a las fuentes no aparecen, ya que el estudio es independiente de éstas. La expresión (I.2.4) se cumple para ciertos valores discretos del parámetro  $\Lambda$ , por lo que éste se dice que es un *autovalor* o valor propio. Comparando la expresión (I.2.4) con la (I.2.2), igualando los términos, se comprueba que cada valor propio  $\Lambda$  está asociado a una correspondiente frecuencia propia  $f$  de esta forma:  $\Lambda = i2\pi f = i\omega$ . Las frecuencias propias son las frecuencias correspondientes a los distintos modos de resonancia del sistema, también llamados *modos propios* del sistema.

En un mismo archivo de COMSOL o *estudio* se puede realizar todo el proceso de simulación: elección del diseño (1D, 2D axisimétrico, 3D), definición de los parámetros y las variables del problema, construcción de la geometría, elección del material o de los materiales, configuración de las condiciones de contorno, elección del tipo de estudio, cálculo de la predicción y visualización de los resultados por medio de gráficas. Mediante este proceso el usuario puede estudiar en profundidad el comportamiento acústico del sistema modelado sin necesidad de construirlo físicamente.

## II. SIMULACIÓN Y CÁLCULO MEDIANTE FEM

Como se ha indicado en el apartado I.9, se ha empleado en COMSOL *Multiphysics*<sup>®</sup> el módulo de Presión Acústica, Frecuencia. Éste permite realizar dos tipos de estudio, como se ha mencionado anteriormente, y en cada uno de ellos se pueden obtener diversos resultados:



**1. Dominio de la Frecuencia.** Permite obtener las curvas de impedancia de entrada y de presión, así como los diagramas polares/patrones de directividad, para una frecuencia cualquiera dentro de un rango definido; se ha escogido un rango de 50 a 1500 Hz en pasos de 10 Hz. Como se ha mencionado en I.9, en una primera parte del estudio se emplean dos tipos de geometría:

- La **geometría cerrada/ sin dominio de radiación** para comparar las curvas de impedancia de entrada de un tubo excitado en  $z = 0$  y cerrado o rígido en  $z = L$  (expresión teórica I.3.11) con las de un tubo excitado en  $z = 0$  y abierto en  $z = L$  (expresión teórica I.3.14).
- La **geometría abierta/ con dominio de radiación** para obtener las curvas de impedancia de los tubos excitados en  $z = 0$  y abiertos y radiando libremente en  $z = L$ , en tres casos distintos:
  - Tubo cilíndrico. A su vez se evaluará el caso apantallado y no apantallado.
  - Tubo cónico.
  - Tubo exponencial/ bocina de Bessel.

**2. Frecuencia Propia.** Este tipo de estudio se ha empleado para obtener los modos propios del sistema, en este caso se ha empleado para obtener la serie armónica de la frecuencia fundamental de resonancia del tubo. Como se ha mencionado en I.9, se considera aquí simplemente la **geometría cerrada/ sin dominio de radiación**. Se evalúan dos casos:

- Tubo excitado en  $z = 0$  y cerrado o rígido en  $z = L$ .
- Tubo excitado en  $z = 0$  y abierto en  $z = L$ .
- Tubo cónico
- Tubo exponencial/ bocina de Bessel.

En el siguiente diagrama se resumen más claramente todos los casos estudiados en el presente trabajo.

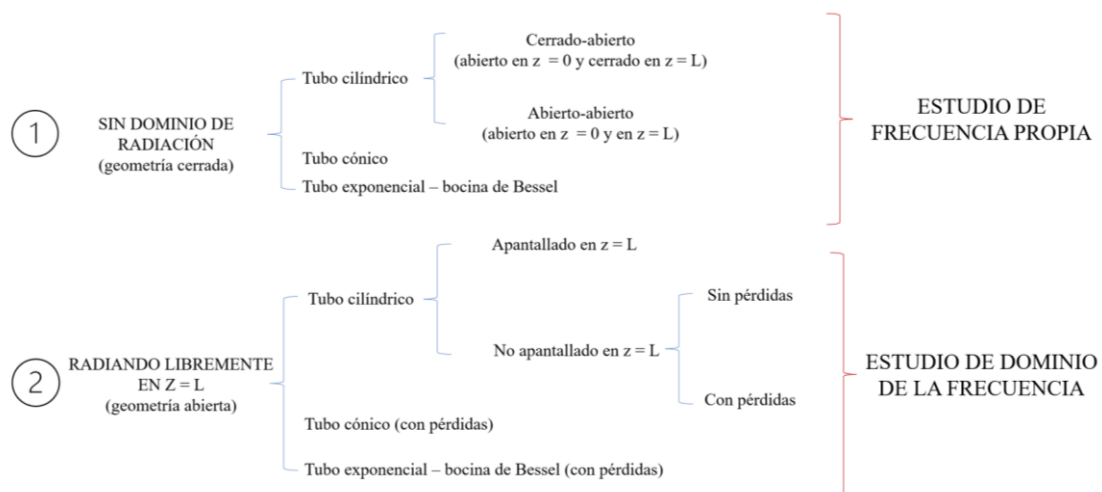


Diagrama 1. Resumen de los casos considerados en el estudio con COMSOL.

En la siguiente figura se muestran las secciones de los tubos cilíndrico, cónico y bocina de Bessel elaborados en COMSOL.

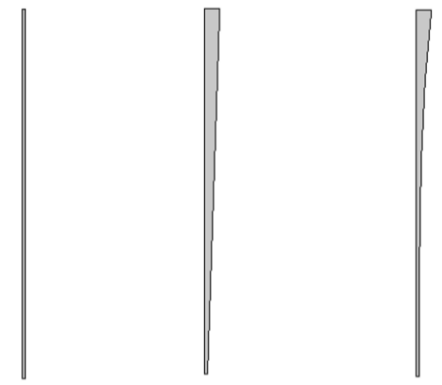


Figura 11. Modelos de tubo cilíndrico (izquierda), tubo cónico (centro) y tubo exponencial o bocina de Bessel (derecha) considerados en este estudio.

### II.1. *Dominios*

- Interior del tubo: dominio en el que se propaga el sonido.
- Esfera de radiación: dominio que contiene el medio hacia el que se radia el sonido. Ha de tener un volumen finito, y se ha escogido para el mismo una esfera de radio 0.5 m.

### II.2. *Condiciones de contorno*

El siguiente punto importante es imponer las condiciones de contorno oportunas.

- Condición de contorno rígido en la pared del tubo (lados con  $r$  cte. =  $\pm a$ )  $\rightarrow$  velocidad = 0; con esto el programa entiende que, si la onda incide en cualquier punto de la pared, se refleja en su totalidad, es decir, no hay transmisión de sonido a través de la pared del tubo.
- Condición de contorno blando al sonido en los casos en los que se tiene un extremo abierto sin dominio de radiación.
- Condición de velocidad normal no nula en  $r = 0$ ,  $z = 0$ . Esta condición garantiza una discontinuidad en la presión en este contorno. Con esta velocidad normal se simula el movimiento del aire generado por el excitador. Se toma un valor igual a 1 para facilitar el cálculo de la impedancia específica: de esta manera, según la expresión (1.4.1), tiene el mismo valor que la presión.
- Condición de radiación (onda esférica) con centro (fuente) en  $r = 0$ ,  $z = L$ . Esto proporciona en los resultados un diagrama de propagación de la presión en forma de frentes de onda esféricos en el dominio de radiación [2].
- Capas perfectamente ajustadas: una capa de unos 3 cm de grosor que actúa como material absorbente en la frontera exterior del dominio de radiación. Conviene emplear esta condición ya que no interesa el campo existente en la frontera exterior del dominio, ni tampoco interesa que haya reflexión en la misma que influya en el cálculo del campo en

el dominio de radiación [13].

- Valor inicial en todos los dominios:  $p = 0$ .
- Condición de región estrecha: en el caso con pérdidas, en el interior del tubo se introduce esta condición para considerar las pérdidas visco-térmicas en las paredes del tubo, cuando la sección transversal es comparable con el espesor de la capa límite<sup>3</sup> [14].

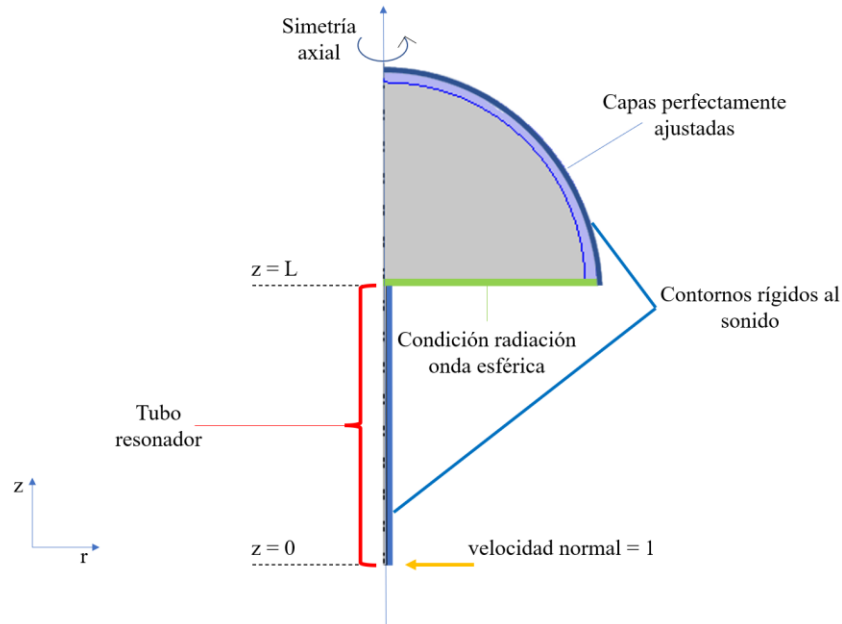


Diagrama 2. Resumen de las condiciones de contorno del problema para un tubo excitado en  $z = 0$  y radiando libremente en  $z = L$ . Aunque aquí se muestre el tubo de sección cilíndrica, estas condiciones aplican por igual a los tubos cilíndrico, cónico y bocina de Bessel, lógicamente.

### II.3. Parámetros

Al comenzar a trabajar en COMSOL, uno de los primeros pasos que hay que seguir es introducir los valores de los parámetros fijos del problema. Por tanto, conviene recordarlos aquí.

$L$  longitud del tubo 66 cm

$a$  radio interior 6 mm

$d$  diámetro interior 12 mm

$rad$  radio esfera dominio radiación 0,5 m

Para el tubo cónico se tienen dos radios interiores:

$a$  radio interior en  $z = 0$ : 6 mm

$b$  radio interior en  $z = L$ : 28 mm

<sup>3</sup> Se conoce por capa límite a la zona en la cual la velocidad del flujo de fluido se ve perturbado por la presencia de una superficie sólida, en este caso, el contacto con las paredes del tubo. La velocidad justo sobre la superficie es nula, y existe un gradiente positivo a medida que la distancia a la pared aumenta, siendo máxima la velocidad en el eje central del tubo, es decir, a una distancia igual a  $d/2$  de las paredes, donde  $d$  es el diámetro del tubo.

## II.4. Resultados

En este apartado se exponen los resultados obtenidos en cada caso analizado, siguiendo el orden presentado en el diagrama 1.

### 1. ESTUDIO DE FRECUENCIA PROPIA

Como se ha mencionado, todos los casos de este apartado se han desarrollado con la geometría del tubo cerrada, es decir, **sin dominio de radiación**.

- a) *Tubo cilíndrico abierto en  $z = 0$  y en  $z = L$  (abierto-abierto) vs. tubo cilíndrico cerrado en  $z = 0$  y abierto en  $z = L$  (cerrado-abierto)*

Se obtienen las frecuencias de resonancia o modos propios del instrumento, que esta vez sí cumplen las relaciones armónicas descritas en las expresiones (I.4.1) para cada tipo de tubo. Se ha obtenido la desviación de los armónicos obtenidos de la simulación (los que se han llamado “reales”) con respecto a los obtenidos de las expresiones (I.4.1) (los que se han llamado “teóricos”), expresada en *cents*. Se ha calculado de la siguiente manera:

$$desv (cents) = \frac{1200}{\log(2)} \log\left(\frac{f_{real}}{f_{teórico}}\right) \quad (II.4.1)$$

Donde  $f_{real}$  es la frecuencia del armónico “real” de orden  $n$ , y  $f_{teórico}$  es la frecuencia del armónico “teórico” de orden  $n$ .

El *cent* es una magnitud empleada en acústica musical, definida como la 1200ª parte de una octava, que designa la discrepancia entre dos frecuencias. El intervalo acústico  $i_a$  entre dos frecuencias que distan la  $N$ -ésima parte de una octava se expresa como:

$$f_2 = 2^{1/N} \cdot f_1 \rightarrow i_a = \frac{f_2}{f_1} = 2^{1/N}$$

Para que las dos frecuencias disten una cantidad de 1 cent,  $N$  ha de valer 1200, por tanto:

$$\begin{aligned} desv (cents) &= \frac{1200}{\log(2)} \log(i_a) = \frac{1200}{\log(2)} \log\left(\frac{f_2}{f_1}\right) = \frac{1200}{\log(2)} \log\left(2^{\frac{1}{1200}}\right) = \frac{1200}{\log(2)} \cdot \frac{1}{1200} \log(2) \\ &= 1 \text{ cent} \end{aligned}$$

Para el tubo cerrado-abierto, las condiciones de contorno son: contorno blando al sonido en  $z = 0$  y velocidad normal = 1 en  $z = L$ . Los armónicos teóricos son los múltiplos impares de la fundamental, mientras que los reales son los obtenidos de la simulación en el estudio de Frecuencia Propia. Los resultados se resumen en la tabla siguiente.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos reales [Hz]	Desviación (cents)
1	130	130	0

2	390	390	0
3	650	650	0
4	910	910	0
5	1170	1170	0
6	1430	1430	0

Tabla 2. Armónicos teóricos, armónicos numéricos y sus respectivas desviaciones, para el tubo cerrado-abierto sin dominio de radiación.

Para el tubo abierto-abierto, las condiciones de contorno son de contorno blando al sonido en ambos extremos,  $z = 0$  y  $z = L$ . Los armónicos teóricos son los múltiplos tanto pares como impares de la fundamental, mientras que los reales son los obtenidos de la simulación en el estudio de Frecuencia Propia. Los resultados se resumen en la tabla siguiente.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos reales [Hz]	Desviación (cents)
1	260	260	0
2	520	520	0
3	780	780	0
4	1040	1040	0
5	1300	1300	0

Tabla 3. Armónicos teóricos, armónicos numéricos y sus respectivas desviaciones, para el tubo abierto-abierto sin dominio de radiación.

Como se puede observar, la diferencia entre los valores reales obtenidos de la simulación respecto de los armónicos teóricos, es decir, los múltiplos de la fundamental, es nula. Esto demuestra la fiabilidad del método de elementos finitos en el estudio de Frecuencia Propia.

Se puede visualizar la variación de presión en el interior del tubo para cada uno de los modos propios, en función de la distancia (figuras 11 y 12).

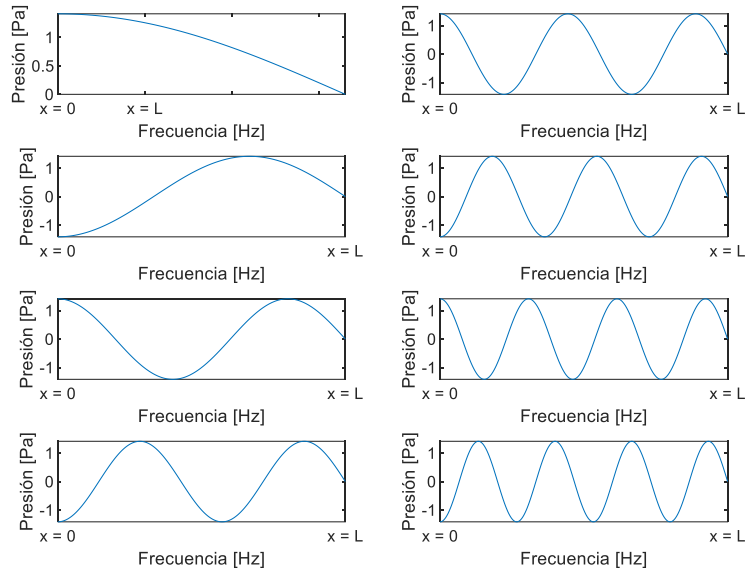


Figura 12. Ondas de presión para las frecuencias correspondientes a los ocho primeros armónicos o modos propios del tubo cerrado-abierto.

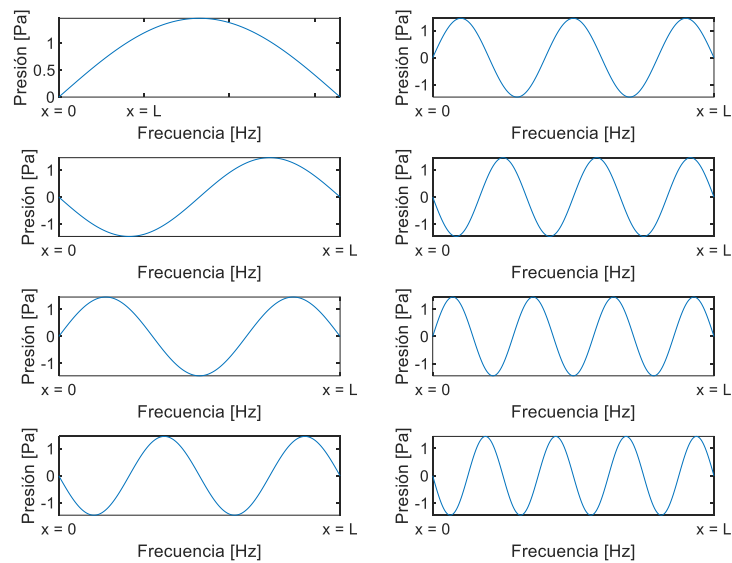


Figura 13. Ondas de presión para las frecuencias correspondientes a los ocho primeros armónicos o modos propios del tubo abierto-abierto.

Se observa, por un lado, que la forma de la onda de presión en el interior del tubo para cada frecuencia de resonancia coincide con las presentadas en el apartado I.4, en la figura 4.

*b) Tubo cónico*

En este apartado se realizan los mismos cálculos que en el apartado anterior, para el tubo de sección cónica. Los resultados se resumen en la tabla siguiente.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos reales [Hz]	Desviación (cents)
1	204.39	209.86	45.72
2	408.80	439.85	126.74
3	613.24	684.35	189.94
4	817.73	935.70	233.31
5	1022.30	1190.30	263.41
6	1226.90	1446.70	285.30

Tabla 4. Armónicos teóricos, armónicos numéricos y sus respectivas desviaciones, para el tubo de sección cónica, sin dominio de radiación.

*c) Tubo exponencial o bocina de Bessel*

En este apartado se realizan los mismos cálculos que en el apartado anterior, para el tubo de sección exponencial, o bocina de Bessel. Los resultados se presentan en la siguiente tabla. Los armónicos teóricos se han calculado como los múltiplos enteros de la fundamental, que son los valores esperados del tubo exponencial [7]. El valor de la fundamental se ha tomado redondeando la fundamental “real” a la unidad.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos reales [Hz]	Desviación (cents)
1	212	211.58	-3.43
2	424	443.73	78.74
3	636	682.02	120.94
4	848	932.83	165.06
5	1060	1187.60	196.78
6	1272	1444.20	219.81

Tabla 5. Armónicos teóricos, armónicos numéricos y sus respectivas desviaciones, para el tubo bocina de Bessel, sin dominio de radiación.

Se puede observar que, al igual que pasaba con el tubo cónico, la desviación va en aumento con la frecuencia.

**2. ESTUDIO EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA**

Como se ha mencionado, todos los casos de este apartado se han desarrollado en el módulo de Estudio de Dominio de la Frecuencia en COMSOL. **En el apartado b)** se emplea la geometría cerrada del tubo, ya que se evalúan los casos **sin dominio de radiación**, mientras que **en el resto** de los apartados se emplean las geometrías abiertas, **con dominio de radiación**.

Para la obtención de las curvas del módulo de la impedancia, por un lado, se han implementado las fórmulas teóricas expuestas en la anterior sección, para obtener las curvas de forma teórica, y,

por otro lado, se ha diseñado el sistema resonador y radiante del clarinete y se ha realizado una simulación imponiendo distintas condiciones de contorno, para obtener las curvas de forma numérica. En todas las soluciones numéricas, el valor de la impedancia se obtiene empleando la expresión (I.4.2).

a) *Tubo cilíndrico abierto en  $z = 0$  y en  $z = L$  (abierto-abierto) vs. tubo cilíndrico cerrado en  $z = 0$  y abierto en  $z = L$  (cerrado-abierto)*

En primer lugar, para comparar con los armónicos obtenidos en el apartado II.4.1 sin dominio de radiación, se analizarán los armónicos obtenidos para el caso en el que **sí hay dominio de radiación**. Para ello se obtendrá la curva de impedancia, y se analizarán los máximos y los mínimos, acorde con lo descrito en el apartado I.4: de los máximos se obtendrán las frecuencias de resonancia para el tubo cerrado-abierto, y de los mínimos, las frecuencias de resonancia para el tubo abierto-abierto.

La curva del módulo de la impedancia de entrada obtenida es la siguiente:

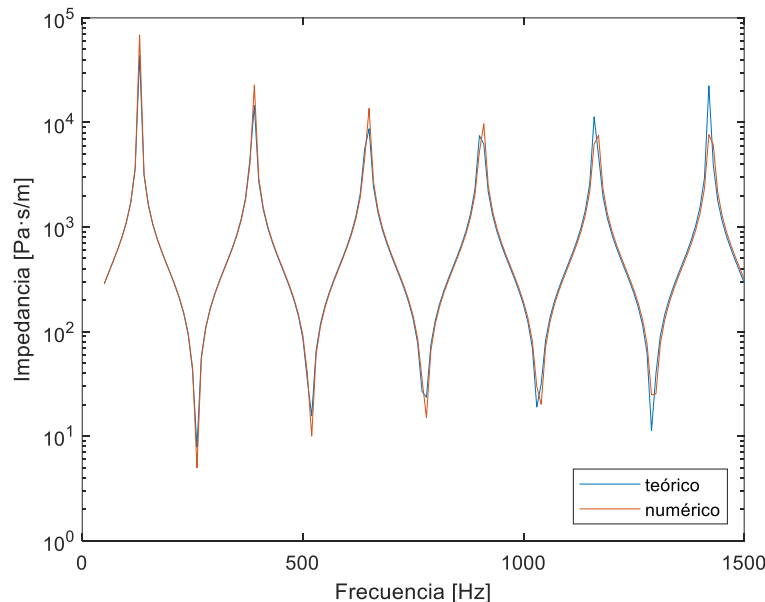


Figura 14. Tubo cilíndrico radiando libremente, no apantallado y sin pérdidas, modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo).

Como se aprecia en la figura 13, las curvas son coincidentes para la mayoría de los valores de la frecuencia. No obstante, en los extremos aparecen ligeras diferencias entre la curva teórica y la numérica. En concreto, la precisión en la curva de impedancia numérica es mayor a menor frecuencia. Esto es debido al tipo de barrido que se ha efectuado en COMSOL, que es de tipo logarítmico. Esto se refiere a que el eje en frecuencias en el que se hace el cálculo es logarítmico, por eso en bajas frecuencias los intervalos son mucho más precisos que en altas frecuencias.

De los máximos de impedancia se obtienen las frecuencias de los armónicos del tubo cerrado-abierto, que coinciden en ambos modelos, numérico y teórico. Estos armónicos obtenidos se han



llamado armónicos “numéricos”, para contrastarlos con los armónicos “teóricos” que se esperaba obtener de las expresiones (I.4.1), esto es, los que siguen la relación perfectamente armónica (ser los múltiplos impares de la fundamental). De esta comparación se puede calcular la desviación entre los armónicos numéricos y los teóricos expresada en *cents*:

$$desv (cents) = \frac{1200}{\log (2)} \log \left( \frac{f_{numérico}}{f_{teórico}} \right) \quad (II.4.2)$$

Donde  $f_{numérico}$  es la frecuencia del armónico numérico de orden  $n$ , y  $f_{teórico}$  es la frecuencia del armónico teórico de orden  $n$ . Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos numéricos [Hz]	Desviación (cents)
1	130	130	0
2	390	390	0
3	650	650	0
4	910	910	0
5	1170	1170	0
6	1430	1420	-12.15

Tabla 6. Armónicos numéricos, armónicos teóricos y la desviación entre ambos para el tubo cerrado-abierto.

De igual forma, de los mínimos de impedancia se obtienen las frecuencias de los armónicos “numéricos” del tubo abierto-abierto, que coinciden en ambos modelos, numérico y teórico, mostrados en la figura 13. Éstas de nuevo se comparan con los armónicos “teóricos” obtenidos de (I.4.1), los múltiplos enteros de la fundamental:

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos numéricos [Hz]	Desviación (cents)
1	260	260	0
2	520	520	0
3	780	780	0
4	1040	1040	0
5	1300	1290	-13.37

Tabla 7. Armónicos numéricos, armónicos teóricos y la desviación entre ambos para el tubo abierto-abierto.

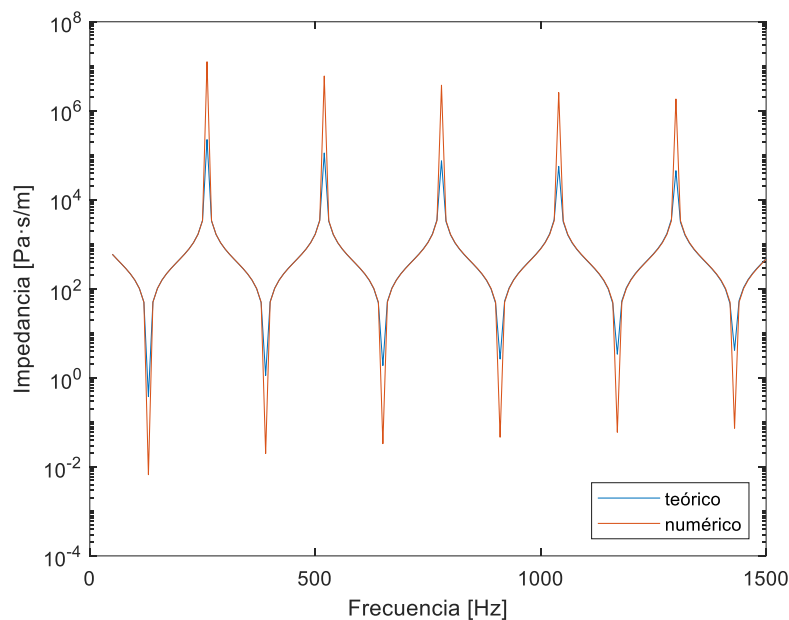
Como se puede observar, en el primer caso las frecuencias corresponden a los múltiplos impares de la fundamental, 130 Hz, mientras que en el segundo caso corresponden a los múltiplos tanto pares como impares de la fundamental, 260 Hz, la cual es una octava superior a la fundamental del tubo cerrado-abierto de exactamente la misma longitud. En ambos casos la relación es perfecta excepto el último armónico, como se ve en las tablas 6 y 7. Esto da cuenta de la fiabilidad de los resultados: a altas frecuencias presentan más error. En los resultados teóricos era de esperar, ya que como se vio

en el apartado I.5 las expresiones son válidas para bajas frecuencias o  $\lambda \gg a$ . En los resultados numéricos el hecho de que las frecuencias altas introduzcan más error se debe a la misma razón comentada anteriormente: el barrido logarítmico genera menor precisión a frecuencias altas.

Ahora sí, se exponen a continuación los casos presentados en el punto 2 del diagrama 1.

b) *Tubo cilíndrico excitado en  $z = 0$  y cerrado en  $z = L$  vs excitado en  $z = 0$  y abierto en  $z = L$  (sin dominio de radiación)*

Para el caso del tubo cerrado en  $z = L$  la geometría es necesariamente cerrada, ya que la onda de presión está totalmente confinada en el interior del tubo. En consecuencia, para comparar este caso con el del tubo abierto en  $z = L$  en igualdad de condiciones, **en los dos casos no se ha considerado dominio de radiación**. Las curvas del módulo de la impedancia obtenidas para cada caso son las



siguientes:

Figura 15. Tubo cilíndrico cerrado en  $z = L$  (extremo final rígido) sin dominio de radiación, modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo).

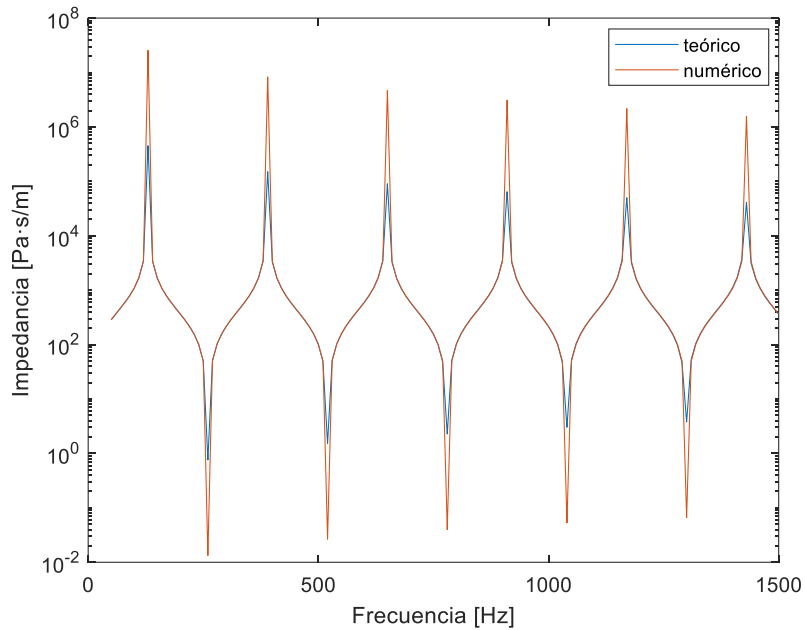


Figura 16. Tubo cilíndrico abierto en  $z = L$  sin dominio de radiación, modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo).

En la figura 16, los máximos y los mínimos están invertidos respecto a la figura 15. Esto es debido a que en este caso la impedancia es función de la tangente de  $kL$  (expresión I.3.11), mientras que en el caso anterior es función de la cotangente de  $kL$  (expresión I.3.14), es decir, la inversa.

En todos los casos siguientes se ha considerado el dominio de radiación, por ello se indica “radiando libremente”.

*c) Tubo cilíndrico radiando libremente en  $z = L$ , apantallado vs. no apantallado*

En la figura 3 (apartado I.3) se ha mostrado una comparativa entre los resultados teóricos considerando los casos apantallado y no apantallado, en el caso sin pérdidas. Las mismas conclusiones se pueden derivar de la comparativa entre los resultados numéricos, que se muestra en la figura siguiente.

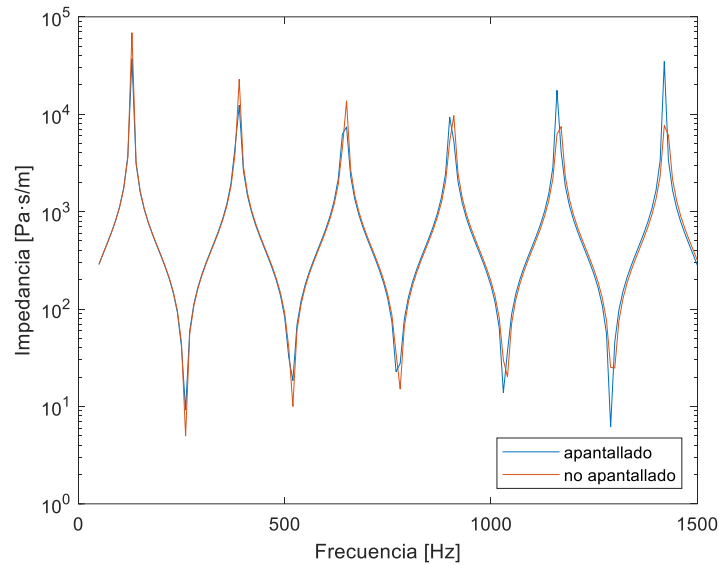


Figura 17. Comparativa de los modelos numéricos para el tubo cilíndrico radiando libremente y sin pérdidas, apantallado (azul) y el no apantallado (rojo).

d) *Tubo cilíndrico radiando libremente en  $z = L$  no apantallado: sin pérdidas vs. con pérdidas*

En la figura 9 (apartado I.8) se ha mostrado una comparativa entre los resultados teóricos para el caso no apantallado, considerando pérdidas y sin considerar pérdidas. Las mismas conclusiones se pueden derivar de la comparativa entre los resultados numéricos, que se muestra en la figura siguiente.

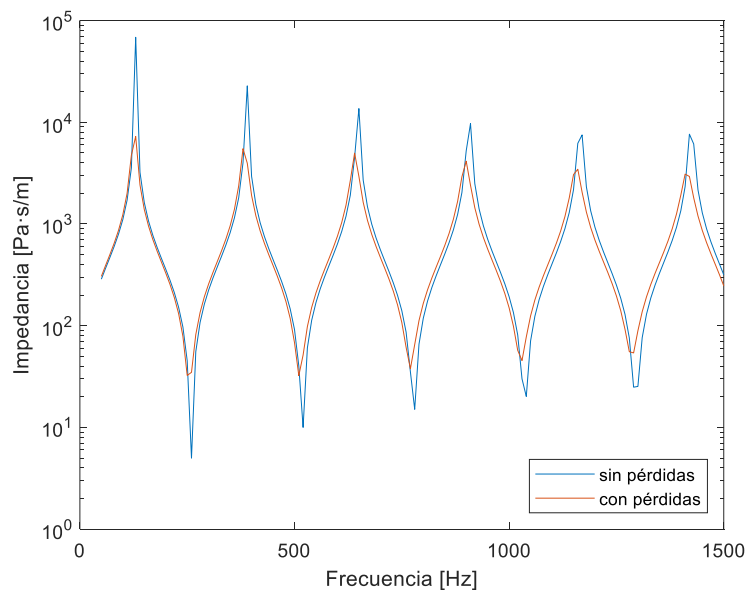


Figura 18. Comparativa de los modelos numéricos para el tubo cilíndrico radiando libremente y no apantallado, considerando pérdidas (rojo) y sin considerar pérdidas (azul).

De nuevo se obtiene, como en la figura 9, que si se consideran las pérdidas los máximos y mínimos de impedancia están mucho más atenuados. Al no considerar pérdidas, los máximos de impedancia tienden a infinito, y el programa realiza un truncamiento en un valor cercano a  $10^8$ . Los valores de la impedancia en el caso en que sí se consideran pérdidas varían dentro de un rango más reducido.

En la figura 19 se comparan las curvas numérica y teórica para el caso no apantallado sin pérdidas.

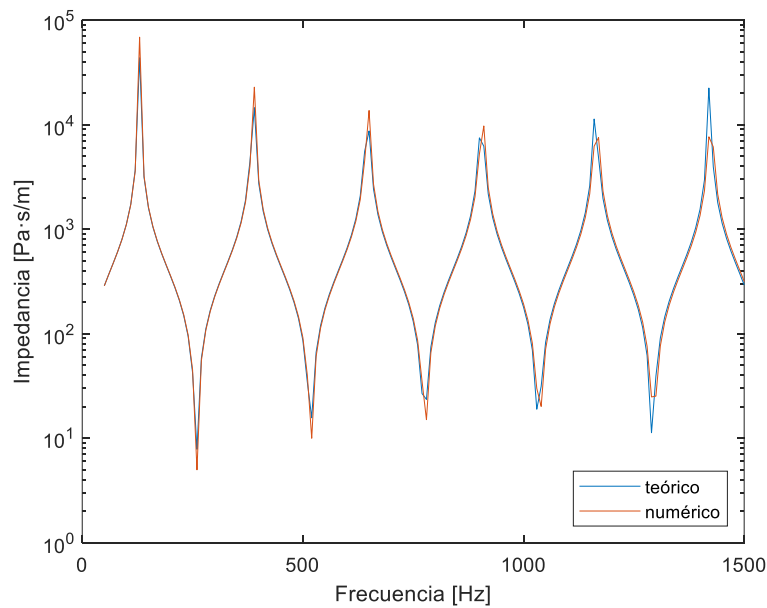


Figura 19. Tubo cilíndrico radiando libremente, no apantallado sin pérdidas; modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo).

En el gráfico anterior se vuelve a ver que el modelo numérico presenta más error a frecuencias altas, debido de nuevo al tipo de barrido empleado en el cálculo numérico.

El siguiente gráfico presenta del mismo modo la comparación entre las curvas numérica y teórica, pero en este caso considerando el modelo de pérdidas.

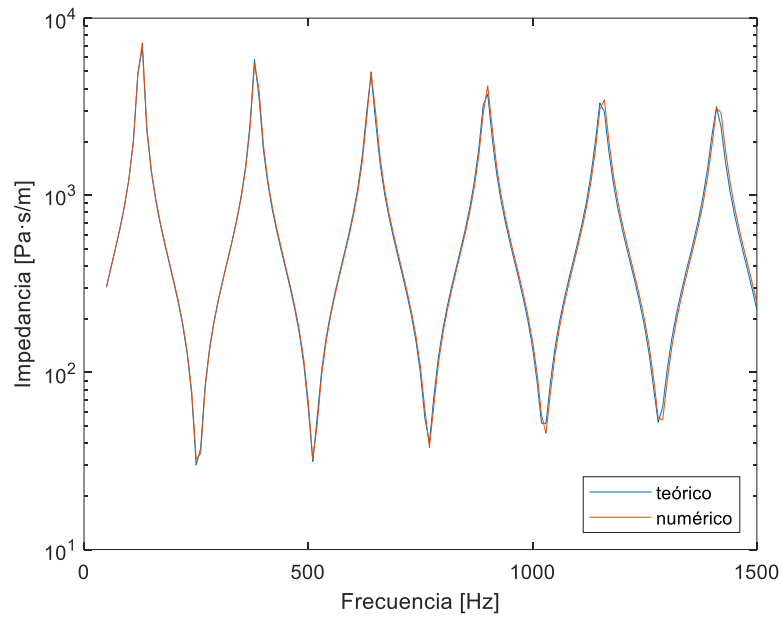


Figura 20. Tubo cilíndrico radiando libremente, no apantallado y con pérdidas; modelo teórico (azul) vs. resultado numérico (rojo).

Se puede observar cómo, al introducir las pérdidas, los modelos teórico y numérico coinciden (figura 20), mientras que, si no se consideran las pérdidas, los extremos no coinciden (figura 19). Esto demuestra que el modelo de pérdidas considerado se ajusta al método numérico, al arrojar ambos resultados muy similares.

*e) Tubo cónico radiando libremente (no apantallado y con pérdidas)*

Para el caso cónico no se puede desarrollar el modelo teórico porque no hay expresión teórica para la impedancia [7]. La figura siguiente muestra la curva de impedancia obtenida numéricamente a partir de la geometría cónica descrita en el apartado I.5.

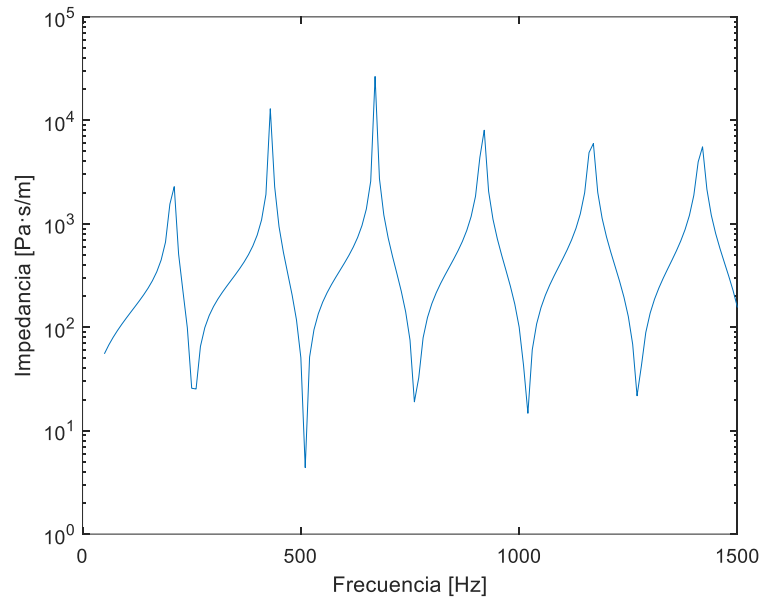


Figura 21. Tubo cónico radiando libremente, no apantallado y con pérdidas, de radio  $a = 0.6$  cm, radio final  $b = 2.8$  cm y longitud  $L = 66$  cm.

Se han comparado los armónicos obtenidos de la expresión teórica (I.5.1) con las frecuencias correspondientes a los máximos de impedancia (armónicos “numéricos”) de la figura anterior. Tomando  $L = 0.66$  m,  $x_0 = 0.18$  m y  $c = 343.37$  m/s, los armónicos que se obtienen de (I.5.1) son los denominados “teóricos”. Los resultados se resumen en la siguiente tabla.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos numéricos [Hz]	Desviación (cents)
1	204.39	210	46.88
2	408.80	430	87.53
3	613.24	670	153.25
4	817.73	920	204.01
5	1022.30	1170	233.63
6	1226.90	1420	253.05

Tabla 8. Armónicos numéricos, armónicos teóricos y la desviación entre ambos para el tubo cónico radiando libremente, no apantallado y con pérdidas.

Comparando los armónicos numéricos con los obtenidos en el estudio de Frecuencia Propia en la sección b) del apartado anterior, que se habían denominado “reales”, se puede obtener un error relativo que da cuenta de la desviación entre los dos estudios, el de Frecuencia Propia y el de Dominio de la Frecuencia. Esta desviación se ha calculado como el intervalo acústico o cociente entre ambos armónicos expresado en *cents*:

$$desv (cents) = \frac{1200}{\log(2)} \log\left(\frac{f_{numérico}}{f_{real}}\right) \quad (II.4.3)$$

Así pues, los armónicos reales, los numéricos y sus respectivas desviaciones resultan ser los siguientes:

Orden del armónico (n)	Armónicos reales [Hz]	Armónicos numéricos [Hz]	Desviación (cents)
1	209.86	210	-1.15
2	439.85	430	39.21
3	684.35	670	36.69
4	935.7	920	29.29
5	1190.3	1170	29.78
6	1446.7	1420	32.25

Tabla 9. Armónicos numéricos, armónicos "reales" y la desviación entre ambos para el tubo cónico radiando libremente, no apantallado y con pérdidas.

f) *Tubo exponencial o bocina de Bessel radiando libremente (no apantallado y con pérdidas)*

Para el caso bocina de Bessel no se puede desarrollar el modelo teórico porque no hay expresión teórica para la impedancia [7]. El perfil de la bocina se ha modelado empleando la relación (I.7.1) para  $\varepsilon = 7$  y teniendo en cuenta las secciones del tubo en los extremos:  $S_0 = \pi a^2$  y  $S_L = \pi b^2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{S}(z) &= Cz^7 = \pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{Cz^7}{\pi}} + a \\ S(z) &= \pi \left( \sqrt{\frac{Cz^7}{\pi}} + a \right)^2 \\ S_0 &= \pi a^2 \\ S_L &= \pi \left( \sqrt{\frac{CL^7}{\pi}} + a \right)^2 = \pi b^2 \rightarrow C = \frac{\pi(b-a)^2}{L^7} \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente la expresión para la sección transversal del tubo en función de la coordenada  $z$ :

$$S(z) = \pi \left( \sqrt{(b-a)^2 \frac{z^7}{L^7}} + a \right)^2$$



La figura siguiente muestra la curva de impedancia obtenida numéricamente a partir de la geometría descrita en el apartado I.5.

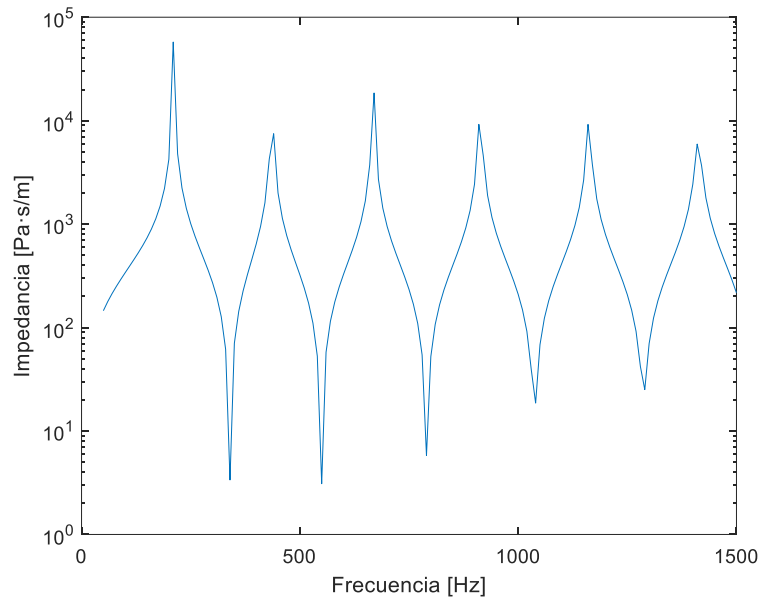


Figura 22. Tubo bocina de Bessel radiando libremente no apantallado y con pérdidas, con parámetro  $\epsilon = 7$  y longitud  $L = 66$  cm.

La teoría predice que los armónicos de la bocina de Bessel son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental [7]. Estos múltiplos son en este caso los armónicos “teóricos”. Los máximos de impedancia de la figura anterior se corresponden con los armónicos “numéricos”. Ambos se comparan en la tabla siguiente.

Orden del armónico (n)	Armónicos teóricos [Hz]	Armónicos numéricos [Hz]	Desviación (cents)
1	210	210	0
2	420	440	80.54
3	630	670	106.57
4	840	910	138.57
5	1050	1160	172.48
6	1260	1410	194.73

Tabla 10. Armónicos numéricos, armónicos teóricos y la desviación entre ambos para el tubo exponencial (Bessel) radiando libremente, no apantallado y con pérdidas.

De la misma forma que para el tubo cónico, también se comparan los armónicos obtenidos numéricamente en el estudio en el Dominio de Frecuencia con los obtenidos en el estudio de Frecuencia Propia (los que hemos denominado “reales”), obteniendo la respectiva desviación en cents a partir de la ecuación (II.4.3):

Orden del armónico (n)	Armónicos reales [Hz]	Armónicos numéricos [Hz]	Desviación (cents)
1	211.58	210	-12.98
2	443.73	440	-14.61
3	682.02	670	-30.79
4	932.83	910	-42.90
5	1187.60	1160	-40.71
6	1444.20	1410	-41.49

Tabla 11. Armónicos numéricos, armónicos "reales" y la desviación entre ambos para el tubo exponencial (Bessel) radiando libremente, no apantallado y con pérdidas.

### 3. DIAGRAMAS DE DIRECTIVIDAD EN COORDENADAS POLARES

En este apartado se representa el nivel de presión sonora del campo de radiación lejano, para los tubos radiando libremente en  $z = L$ , tanto el cilíndrico como el cónico y la bocina de Bessel. Los resultados se muestran en los gráficos siguientes para ciertas frecuencias.

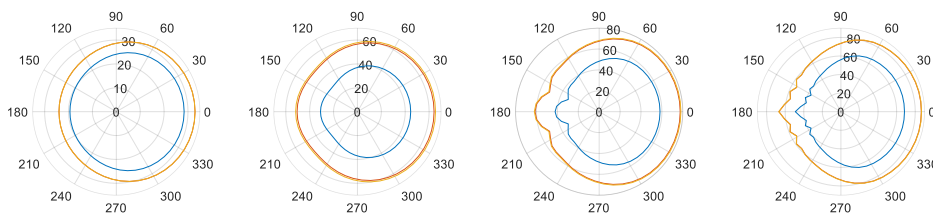


Figura 23. Nivel de presión sonora en campo lejano (en dB) a 50, 250, 750 y 1500 Hz, para el tubo cilíndrico (azul), cónico (rojo) y bocina de Bessel (amarillo), todos radiando libremente en el extremo  $z = L$ , no apantallados y considerando pérdidas.

Se aprecia cómo, en los tres casos, conforme aumenta la frecuencia va perdiéndose la omnidireccionalidad y va apareciendo el lóbulo a  $180^\circ$ , convirtiéndose en un patrón bidireccional. Esto es lo esperado siguiendo la regla de acústica: las frecuencias altas son más directivas mientras que las graves se propagan más en todas direcciones. Esta es una regla general de la acústica: a menor frecuencia, la onda acústica es más omnidireccional y menos directiva [2].

Además, se observa que tanto el tubo cónico como el exponencial o bocina de Bessel presentan prácticamente los mismos valores de nivel de presión. Esto demuestra que lo determinante en el modelo del campo lejano es la salida del tubo, no la forma de éste. Como ambos tienen el mismo diámetro en  $z = L$ , el nivel de presión sonora en campo lejano es el mismo prácticamente para ambos. El tubo cilíndrico, al tener un diámetro final más pequeño, presenta un nivel de presión sonora menor.

### III. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

Como se presentó en el apartado I.1, el objetivo del presente trabajo es exponer las principales características acústicas del clarinete como resonador acústico, mediante un estudio comparativo entre la teoría y los resultados obtenidos por medio del método numérico de elementos finitos (FEM), que se ha llevado a cabo en el programa COMSOL *MultiPhysics*<sup>®</sup>.

En la sección I se ha presentado la base teórica relativa a todos aquellos aspectos relevantes al estudio que se presenta en la sección II. Los resultados de la simulación se han comparado con la teoría. Las simulaciones se han diseñado teniendo en cuenta diversas modelizaciones del resonador de un instrumento musical, con el fin de ver la similitud de los resultados con la predicción teórica. Estas modelizaciones son las que se han presentado en forma de esquema en el diagrama 1. Cabe destacar que, si bien se ha distinguido entre los dos elementos: elemento excitador (la lengüeta simple o *caña*) y elemento resonador (el tubo del instrumento), en este trabajo se ha realizado un estudio sobre este último, sin considerar las alteraciones acústicas que introduce el primero.

#### III.1. Conclusiones

Han sido varios casos los que se han analizado, y los resultados obtenidos se pueden agrupar en tres partes para obtener las conclusiones pertinentes.

##### 1. Estudio de las frecuencias de resonancia o armónicos

Se ha podido apreciar la analogía entre los resultados teóricos y los numéricos al **comparar los armónicos** obtenidos de las expresiones teóricas (“teóricos”) con los armónicos obtenidos tanto de las curvas de impedancia (“numéricos”) como de los estudios de Frecuencias Propias (“reales”). Los resultados obtenidos se resumen a continuación.

- La simulación efectuada en el estudio en Frecuencia Propia, para el tubo cilíndrico, proporciona las frecuencias propias en una relación perfectamente armónica: proporciona los múltiplos pares de la fundamental para el caso cerrado-abierto, y los múltiplos tanto pares como impares de la fundamental para el caso abierto-abierto (tablas 2 y 3). Esto es lo que se espera de las expresiones teóricas.
- El estudio en Frecuencia Propia tanto para el tubo cónico como para el exponencial proporciona unos valores para los armónicos que se desvían de los armónicos esperados teóricamente (tablas 4 y 5). Esto no quiere decir que el error provenga de los resultados de la simulación únicamente: la expresión (I.5.1) para el tubo cónico resulta ser una aproximación, y para el tubo exponencial realmente no se contaba con una expresión teórica, sino simplemente se ha partido de la afirmación de que los armónicos para este tipo de tubo siguen una relación armónica.
- En el caso de los armónicos obtenidos del estudio en Dominio de la Frecuencia, es decir, los que se han obtenido a partir de los máximos o los mínimos de las curvas de impedancia (tablas 6 y 7), solamente se aprecia error en el armónico de mayor frecuencia, lo cual es

consecuencia de que se ha perdido precisión en el límite de altas frecuencias debido al tipo de barrido ejecutado.

## 2. Estudio de las curvas de impedancia teóricas y numéricas

Por otra parte, la comparativa entre las curvas de impedancia numéricas y las teóricas ponen de manifiesto la fiabilidad del cálculo numérico mediante elementos finitos o FEM. Las diferencias entre las gráficas teórica y numérica eran en todos los casos muy pequeñas, siempre siendo más acentuadas en los extremos (máximos y/o mínimos). Los **resultados del análisis de las curvas de impedancia**, ordenados según los subapartados de II.4, son los siguientes:

- En general, en todas las curvas en las que se comparan los métodos teórico y numérico, se aprecia la menor precisión en el método numérico para los máximos y mínimos a altas frecuencias, que se ha comentado en el apartado anterior.
- En las figuras 19 y 20 se aprecia cómo hay más similitud entre las curvas teórica y numérica cuando se consideran pérdidas (figura 20) que cuando no se consideran pérdidas (figura 19). Esto significa que la condición de “región estrecha” impuesta en la simulación se ajusta muy bien al modelo de pérdidas expuesto en el apartado I.8.
- Por lo demás, las curvas de impedancia de los modelos numéricos muestran lo que se espera teóricamente. Entre el caso apantallado y el no apantallado se aprecia una diferencia (figura 17). En el caso en el que se consideran pérdidas, la amplitud de la impedancia disminuye respecto al caso en el que no se consideran pérdidas (figura 18).

## 3. Estudio de los patrones de directividad polares

Por último, del **estudio de los patrones de directividad polares** se han obtenido los siguientes resultados principales:

- La dependencia angular del nivel de presión sonora en campo lejano es la misma para los tubos cilíndrico, cónico y exponencial o bocina de Bessel, radiando libremente. Por tanto, no depende de la forma del tubo.
- El nivel de presión sonora es menor en el tubo cilíndrico que en el tubo cónico y exponencial, debido a un diámetro menor del tubo en el extremo final  $z = L$ . Se concluye que lo que determina el nivel de presión sonora no es la forma del tubo, sino el diámetro final del mismo.

### III.2. Futuras líneas de investigación

Debido a las limitaciones en cuanto a tiempo y extensión de este trabajo, ha habido aspectos que no se han podido estudiar, como considerar las perturbaciones introducidas por los orificios del tubo o por el elemento excitador. Tampoco se ha podido realizar un estudio comparativo de diversos programas de simulación numérica por FEM, empleando otros softwares junto a COMSOL, como FEATool MultiPhysics, el cual es una GUI de MATLAB, FreeFem++, el cual es *open source*, ACTRAN, diseñado para modelar específicamente el comportamiento acústico de piezas de un

sistema mecánico, etc. Todos estos aspectos pueden dar pie a un trabajo de investigación que sea continuación del presente.

Este trabajo ha sido inspirado por otros estudios de temática acústico-musical realizados en COMSOL, en especial un estudio sobre los modos de vibración de la madera del violín [15] y otro sobre las oscilaciones de las paredes de instrumentos de viento-metal [16].

## BIBLIOGRAFÍA

### *Bibliografía, páginas web y recursos online*

- [1] Dickens, P., France, R., Smith, J. & Wolfe, J. (2007), *Clarinet Acoustics: Introducing a Compendium of Impedance and Sound Spectra*. Acoustics Australia Vol. 35 No. 1; pp. 17–24.
- [2] Kinsler, *Fundamentals of Acoustics*.
- [3] Demésy, G., Zolla, F. *et al* (2012), *Finite Element Method*. E. Popov. Gratings: Theory and Numeric Applications, AMU, pp.5.1-5.47.
- [4] M. J. Ruiz, “Boomwhackers and End-Pipe Corrections,” *Phys. Teach.*, vol. 52, no. 2, pp. 73–75, 2014, doi: 10.1119/1.4862106.
- [5] Cabo, I. (2020), *Los instrumentos de viento como resonadores acústicos: un estudio comparativo del clarinete y la flauta* (Trabajo Fin de Grado). Universidad de Valencia, Facultad de Física. Valencia.
- [6] J. Wolfe (2002), *Clarinet acoustics: an introduction*. Disponible online en <http://www.phys.unsw.edu.au/jw/clarinetacoustics.html> [consultado el 07-09-2021].
- [7] Benade, A. H. (1959), *On Woodwind Instrument Bores*. *The Journal of the Acoustical Society of America* 31, pp. 137-146; doi: 10.1121/1.1907682.
- [8] Gough, C. *Handbook of Acoustics*.
- [9] R. Picó, F. Gautier, J. Redondo (2007), *Acoustic input impedance of a vibrating cylindrical tube*. *Journal of Sound and Vibration*, Volume 301, Issues 3–5, pp. 649-664. Disponible online en <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.10.030> [consultado el 07-09-2021].
- [10] “Teoría cinética de los gases - Wikipedia.”. Disponible online en [https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa\\_cin%C3%A9tica\\_de\\_los\\_gases#Temperatura](https://es.wikipedia.org/wiki/Teor%C3%ADa_cin%C3%A9tica_de_los_gases#Temperatura) [consultado el 15-08-2021].
- [11] The Multiphysics Cyclopedia (COMSOL *MultiPhysics*®): *Detailed Explanation of the Finite Element Method (FEM)*. Disponible online en <https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method> [consultado el 07-09-2021].
- [12] Picó, R. (2021). *Técnicas de Simulación en Acústica*. Apuntes de la asignatura Técnicas de Simulación del Máster Universitario en Ingeniería Acústica de la EPSG [Diapositiva de PowerPoint].
- [13] COMSOL Blog (COMSOL *MultiPhysics*®): *Using Perfectly Matched Layers and Scattering Boundary Conditions for Wave Electromagnetic Problems*. Disponible online en <https://br.comsol.com/blogs/using-perfectly-matched-layers-and-scattering-boundary-conditions-for-wave-electromagnetics-problems/> [consultado el 07-09-2021].
- [14] COMSOL Help (COMSOL *MultiPhysics*®): *About the Narrow Region Acoustic Problems*. Disponible online en [https://doc.comsol.com/5.5/doc/com.comsol.help.aco/aco Ug\\_pressure.05.145.html](https://doc.comsol.com/5.5/doc/com.comsol.help.aco/aco Ug_pressure.05.145.html) [consultado el 07-09-2021].
- [15] Stylianides, A. *et al*. (2019), *An Investigation of Violin Sound Quality through Resonant Modes*. University of Hartford, USA.
- [16] Chatziioannou, V. & Kausel, W. (2011), *Modelling the Wall Vibrations of Brass Wind Instruments*. University of Music and Performing Arts. Vienna, Austria.