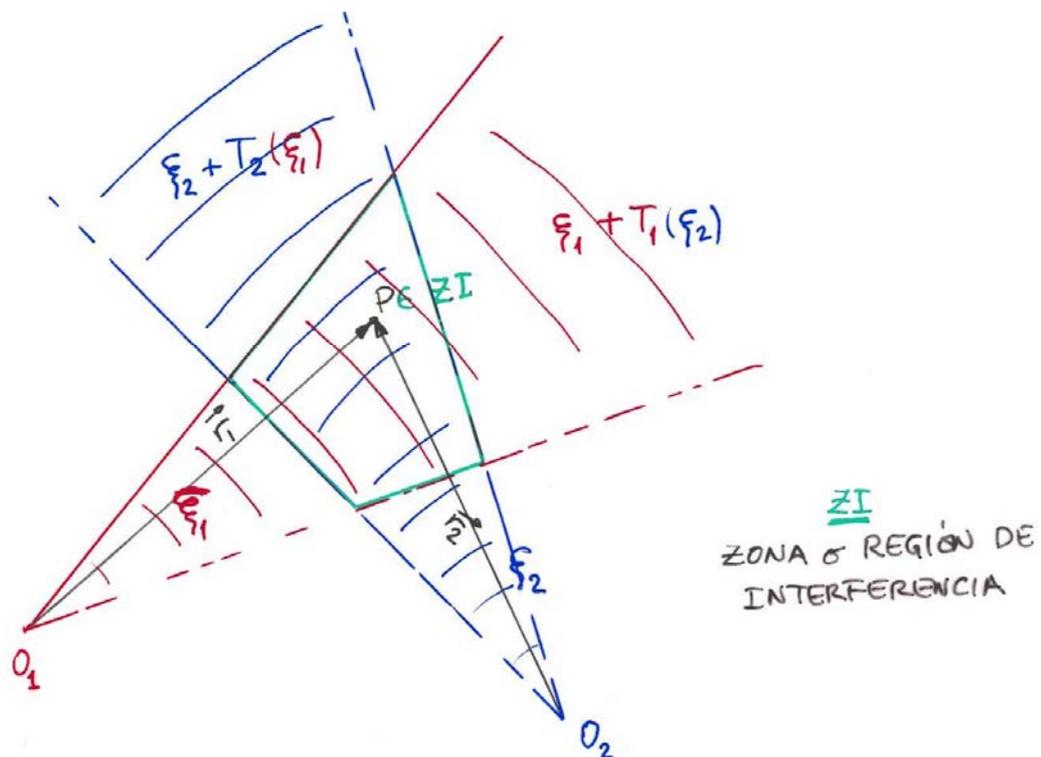


B.- INTERFERENCIAS

1.- Introducción

Es el primer criterio para saber si un determinado fenómeno presenta o no aspectos ondulatorios; la interferencia ocurre cuando dos o más ondas, de una misma clase, coinciden simultáneamente en una región del espacio. Superada la región donde han coincidido las ondas, cada una de ellas continua su marcha como si no se hubiera interferido con ninguna otra (es claro que si al interferir, cada una de ellas se viese modificada no podríamos escuchar la radio, ver la TV, etc) La pregunta que tenemos que hacernos es ¿Cuánto vale la perturbación en aquellos puntos donde coinciden las ondas al mismo tiempo?

INTERFERENCIAS



PREGUNTAS

P.a) ¿QUÉ SUCEDE EN LOS PUNTOS \$P \in ZI\$?

P.b) ¿QUÉ SE OBSERVA EN CADA ONDA DESPUÉS DE SOBREPASAR LA \$ZI\$?

RESPUESTAS

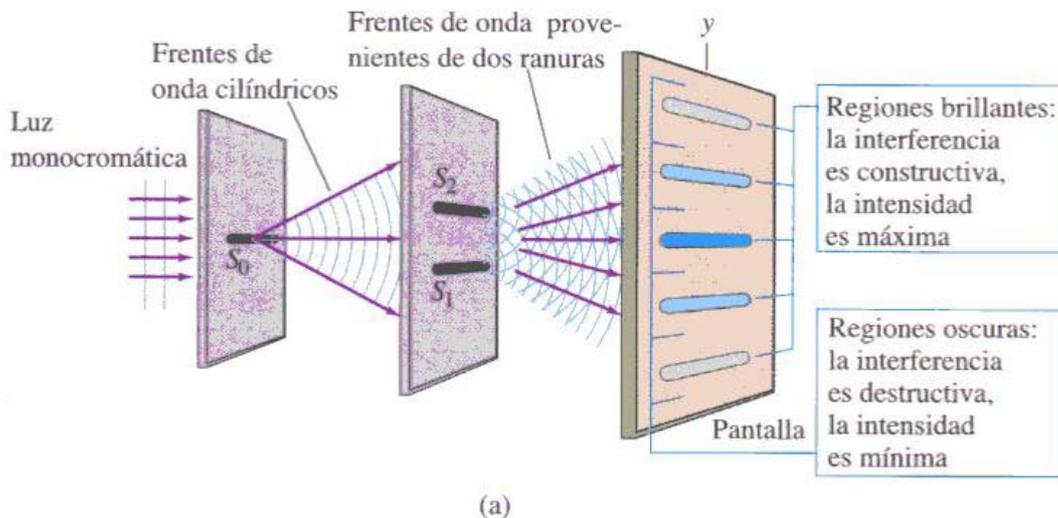
R.a) PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN $\xi(P,t) = \sum_{i=1}^N \xi_i(P,t)$

R.b) \$T_1(\xi_2) = T_2(\xi_1) = 0\$

La respuesta, ampliamente confirmada por la experiencia, es que para los casos de perturbaciones ondulatorias normales la resultante de las ondas que llegan a un punto en un mismo instante es la suma de las perturbaciones aisladas (según la magnitud de que se trate escalar o vectorial). Esto constituye el **PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN**. Dicho principio no es aplicable en los casos, poco comunes, de perturbaciones tan intensas que afectan a las propiedades del medio donde se propagan.

Citar como ejemplos los casos 1) de dos estaciones de radio que emiten OEM hacia una misma región del espacio, en este caso el campo eléctrico resultante en la zona de coincidencia será la suma de los campos eléctricos individuales $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ y 2) si se trata de ondas acústicas, la presión resultante es la suma escalar de las presiones individuales $p = p_1 + p_2$

Si las ondas que interfieren se mantienen permanentemente en el tiempo, tienen igual frecuencia y las diferencias de fase en origen son constantes, se obtiene lo que se llama un **PATRÓN DE INTERFERENCIAS** que permanece en el tiempo, en cambio si las ondas son trenes o pulsos de ondas la interferencia sólo se mantiene, en cierta zona, mientras las ondas pasan por los diferentes puntos de la región, desapareciendo después.



En lo sucesivo, salvo que digamos lo contrario, trabajaremos con las hipótesis:

- Es válido el principio de superposición.
- Las ondas que interfieren son monocromáticas de igual frecuencia.
- Si las ondas son transversales (p.e. las OEM) supondremos que las ondas están polarizadas linealmente en la misma dirección ya que de esta forma la suma de los campos vectoriales se reduce a una suma escalar.

De todo lo anterior concluimos que la amplitud de perturbación en un punto P, dependerá de:

- Las amplitudes de las ondas que se propagan (A_1 y A_2).
- La diferencia de fase en el origen de tiempos (fases iniciales).
- La diferencia de los caminos recorridos desde las fuentes al punto considerado.

2.- Análisis cuantitativo

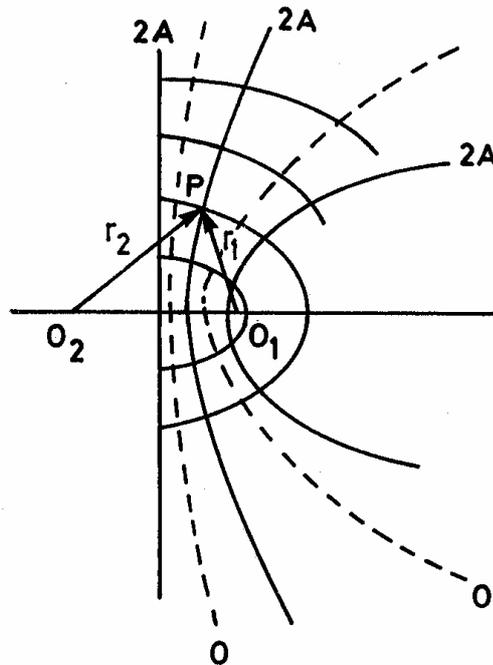
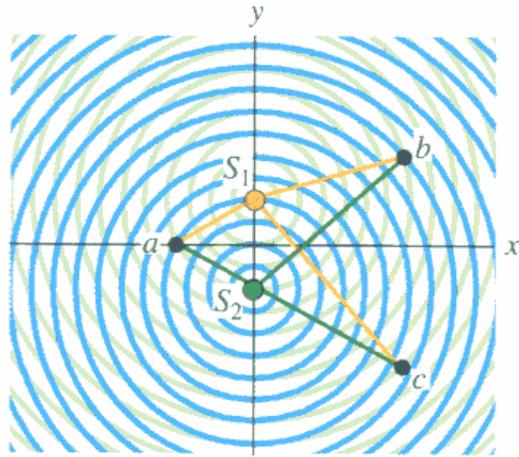
Sean 2 focos emisores F_1 y F_2 que vibran con la misma frecuencia ω generando en un medio isótropo, homogéneo, ilimitado y sin pérdidas, ondas monocromáticas de igual naturaleza, que podemos describir

$$\begin{cases} \xi_1(P,t) = A_1(r_1) \text{sen}(\omega t - k r_1 + \varphi_1) \\ \xi_2(P,t) = A_2(r_2) \text{sen}(\omega t - k r_2 + \varphi_2) \end{cases}$$

donde r_1 y r_2 son, respectivamente, las distancias desde los focos F_1 y F_2 al punto considerado P.

¿Cuál es la perturbación en P debida a estas dos ondas?

$$\xi(P,t) = \xi_1(P,t) + \xi_2(P,t) = A_1(r_1) \text{sen}(\omega t - k r_1 + \varphi_1) + A_2(r_2) \text{sen}(\omega t - k r_2 + \varphi_2)$$



Si llamamos $\alpha_1 = \varphi_1 - k r_1$ y $\alpha_2 = \varphi_2 - k r_2$, la expresión anterior se escribe

$$\xi(P,t) = A_1(r_1) \text{sen}(\omega t + \alpha_1) + A_2(r_2) \text{sen}(\omega t + \alpha_2)$$

Pasando al dominio complejo definimos

$$\hat{z}_1 = A_1(r_1) e^{j(\omega t + \alpha_1)} \text{ y } \hat{z}_2 = A_2(r_2) e^{j(\omega t + \alpha_2)} \quad / \quad \xi_1 = \text{Im}[\hat{z}_1] \text{ y } \xi_2 = \text{Im}[\hat{z}_2], \text{ entonces}$$

$$\hat{z} = \hat{z}_1 + \hat{z}_2 = e^{j\omega t} [A_1(r_1) e^{j\alpha_1} + A_2(r_2) e^{j\alpha_2}] = \hat{H} e^{j\omega t} \text{ y tal que}$$

$$\hat{H} = A(r_1, r_2) e^{j\phi} = [A_1(r_1) e^{j\alpha_1} + A_2(r_2) e^{j\alpha_2}]$$

$$A(r_1, r_2) = [\hat{H} \cdot \hat{H}^*]^{1/2} = [A_1^2(r_1) + A_2^2(r_2) + 2A_1(r_1)A_2(r_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)]^{1/2}$$

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}[\hat{z}]}{\text{Re}[\hat{z}]} = \frac{A_1(r_1) \sin \alpha_1 + A_2(r_2) \sin \alpha_2}{A_1(r_1) \cos \alpha_1 + A_2(r_2) \cos \alpha_2}$$

$$\hat{z} = A(r_1, r_2) e^{j(\omega t + \phi)} \quad / \quad \xi(P, t) = \text{Im}[\hat{z}] = A(r_1, r_2) \sin(\omega t + \phi)$$

A partir de ahora vamos a omitir los argumentos que aparece en las amplitudes, que también debería omitirse si las ondas fuesen planas, es decir pondremos:

$A_1(r_1) = A_1$, $A_2(r_2) = A_2$, $A(r_1, r_2) = A_R \equiv A$ o si fueran O. planas $A_1(r) = A_1$, $A_2(r) = A_2$

$$A_R^2 = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad / \quad \alpha_1 - \alpha_2 = k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (19);$$

$A_R \equiv A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta)]^{1/2}$ / $\delta = k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2)$; siendo δ la diferencia de fase de las oscilaciones en P que depende de la diferencia de caminos recorridos y de la diferencia de fase en el origen de tiempos.

Surge una segunda pregunta, ¿Cuánto vale la intensidad de la perturbación en P?

Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud tendremos que

$$I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (20)$$

De lo expuesto se infiere que la intensidad resultante en P, puede ser mayor o menor que la suma de las intensidades individuales, dependiendo de la diferencia de fase de las oscilaciones en el punto P. Vamos a ver los casos extremos.

1.- La perturbación será máxima (**interferencia constructiva**) cuando

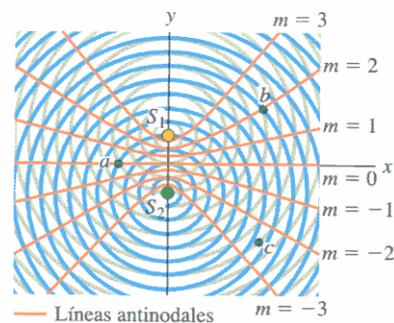
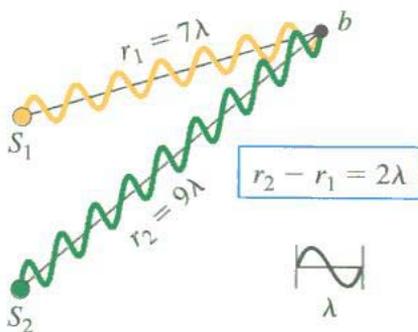
$$\cos \delta = 1 \Rightarrow \delta = 2\pi n / n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) = 2\pi n \quad (21)$$

En el supuesto en que las fases en $t = 0$ sean iguales, $\varphi_1 = \varphi_2$ la ecuación (21) se

reduce a $k(r_2 - r_1) = 2\pi n \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = 2\pi n \Rightarrow (r_2 - r_1) = n\lambda$ (22)

La ecuación (22) representa un hiperboloide (hipérbola en el plano) y se suelen llamar **superficies antinodales o ventrales**; en estos casos se dice que la interferencia es constructiva y se cumple

$$A_R = A_1 + A_2 \quad \text{y} \quad I_R = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (23)$$



2.- La perturbación será mínima (**interferencia destructiva**) cuando

$$\cos \delta = -1 \Rightarrow \delta = (2n + 1)\pi / n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k(r_2 - r_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) = (2n + 1)\pi \quad (24)$$

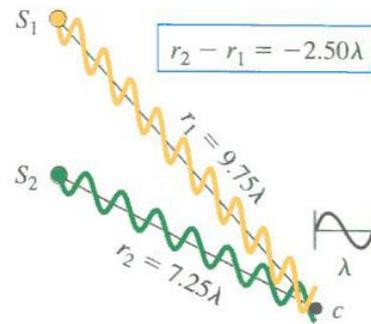
En el supuesto en que las fases en $t = 0$ sean iguales, $\varphi_1 = \varphi_2$ la ecuación (24) se

reduce a

$$k(r_2 - r_1) = (2n + 1)\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = (2n + 1)\pi$$

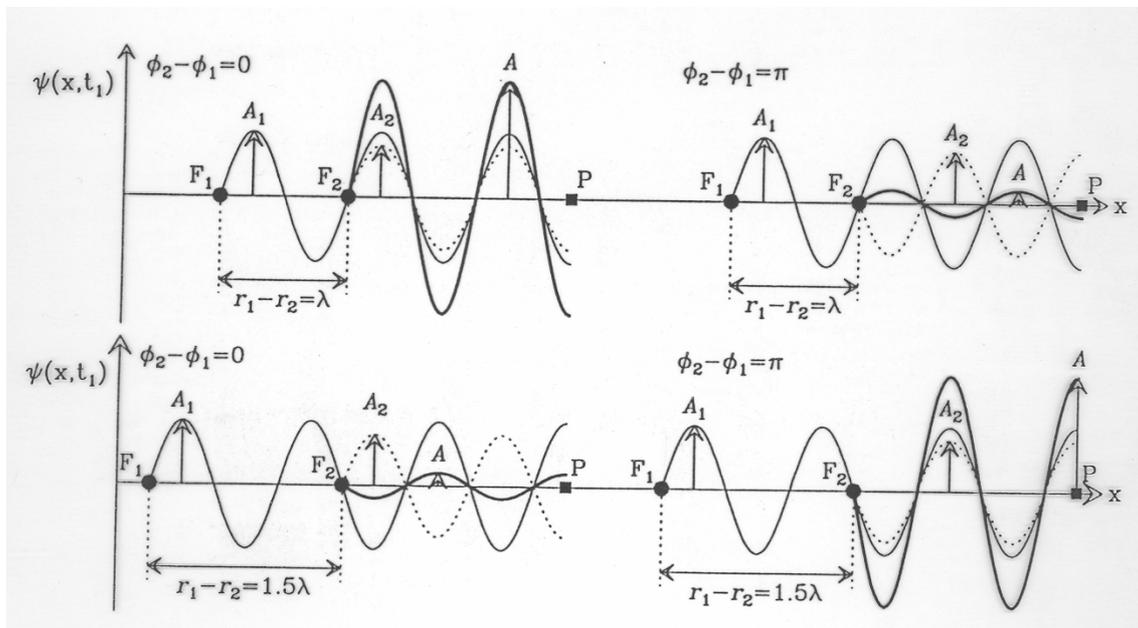
$$(r_2 - r_1) = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (25)$$

La ecuación (25) representa un hiperboloide (hipérbola en el plano) y se suelen llamar *superficies nodales*; en estos casos se dice que la interferencia es destructiva y se cumple



$$A_R = |A_1 - A_2| \quad \text{y} \quad I_R = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \quad (26)$$

En la figura que aparece a continuación, para una dimensión, se muestran las interferencias constructivas y destructivas en distintos supuestos en función de unas combinaciones de diferencias de caminos y diferencias de fase en el origen.



3.- Ejercicio: Experimento de Young

Young hizo interferir dos haces luminosos de igual frecuencia y amplitud, que en primera aproximación podían considerarse como ondas planas, y con diferencia de fase inicial nula; que procedían de dos orificios bastante próximos. Se observa el patrón de interferencias sobre una pantalla situada paralelamente a la línea que une los focos y muy alejada de ellos.

De acuerdo con lo explicado en el apartado anterior

$$A(P) = \left[A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2 \cos(k(r_2 - r_1)) \right]^{1/2} = \left[2A_0^2 (1 + \cos(k(r_2 - r_1))) \right]^{1/2}$$

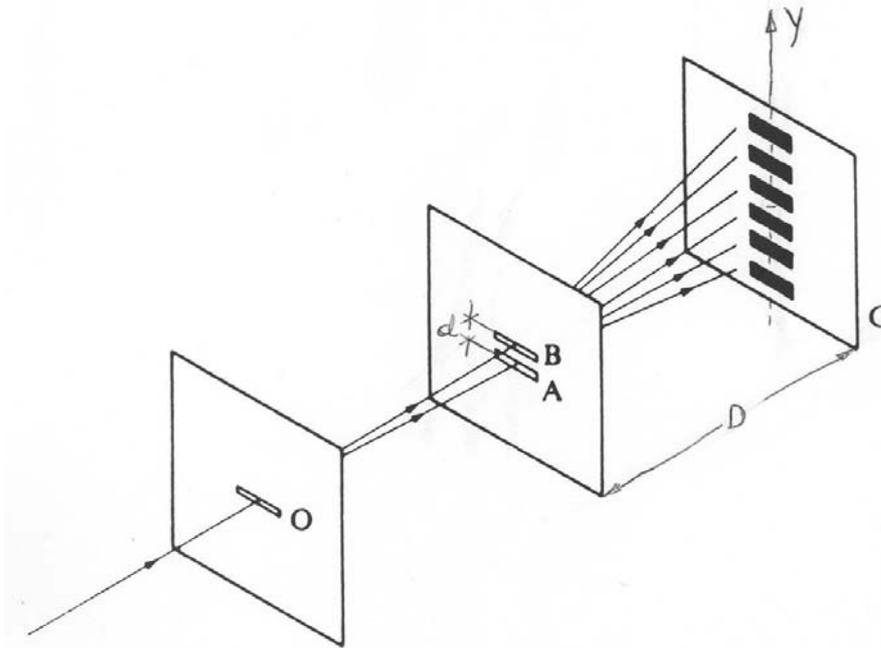
$$A(P) = \left[2A_0^2 (1 + \cos(k(r_2 - r_1))) \right]^{1/2} = \left[4A_0^2 \cos^2 \left(\frac{k}{2}(r_2 - r_1) \right) \right]^{1/2} = 2A_0 \cos \left(\frac{k}{2}(r_2 - r_1) \right)$$

$$A(P) = 2A_0 \cos \left(\frac{\delta}{2} \right) \text{ y } I(P) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

Interferencia constructiva $(r_2 - r_1) = n\lambda$

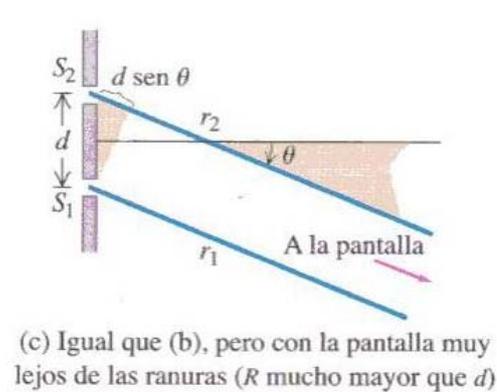
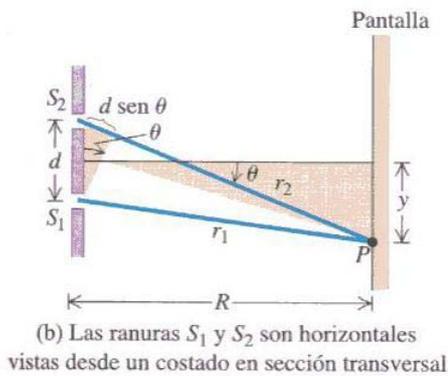
Interferencia destructiva $(r_2 - r_1) = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$

En la figura que sigue se muestra un esbozo del experimento.



3.1.- Aproximación de rayos paralelos

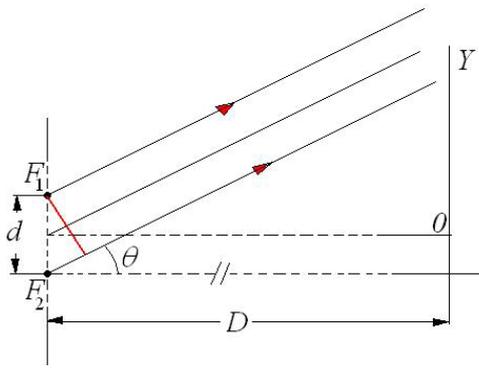
Si d es la distancia entre focos y $R = D \gg d$ es la distancia de los focos a la pantalla de interferencia, los rayos que provienen de cada orificio son aproximadamente paralelos y en consecuencia la posición de los distintos puntos de la pantalla se pueden describir mediante el ángulo θ que forma con la horizontal el rayo que se dirige al punto.



Así se puede escribir

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} d \sin \theta = n \lambda \text{ para Int. constructiva} \\ d \sin \theta = (2n + 1) \lambda / 2 \text{ para Int. destructiva} \end{cases}$$

En función de la coordenada y sobre la pantalla



$$\begin{cases} r_1^2 = \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + D^2 \\ r_2^2 = \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + D^2 \end{cases}$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2 y d = (r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1) \cong 2 D (r_2 - r_1)$$

$$(r_2 - r_1) = \frac{d}{D} y \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{d}{D} y$$

$$A(P) = 2 A_0 \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda D} y\right) \text{ y } I(P) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda D} y\right)$$

Y teniendo en cuenta que $\text{sen } \theta \cong y / D$

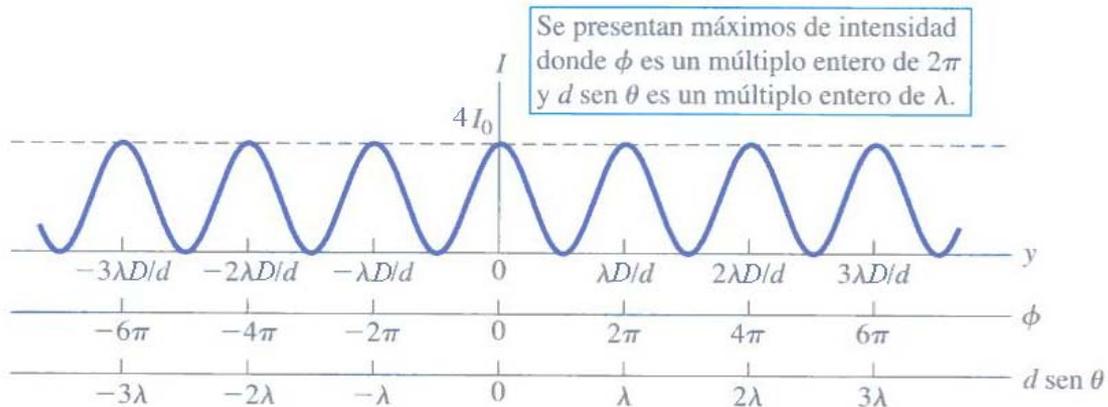
$$A(P) = 2 A_0 \cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} \text{sen } \theta\right) \text{ y } I(P) = 4 I_0 \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \text{sen } \theta\right)$$

El primer cero de intensidad se da en

$$I(P) = 0 = 4 I_0 \cos^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \text{sen } \theta\right) \Rightarrow \pi \frac{d}{\lambda} \text{sen } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{sen } \theta = \frac{\lambda}{2d}$$

En la siguiente figura se muestra, en un diagrama lineal, la intensidad en los diferentes puntos de la pantalla en función de 3 variables relacionadas, a saber la coordenada y sobre la pantalla, la distancia $d \text{ sen } \theta$ y una variable auxiliar definida por

$$\phi = \frac{2\pi d \text{ sen } \theta}{\lambda}$$



En ocasiones la intensidad de una onda viene dada en términos comparativos a través de relaciones logarítmicas y se habla entonces de *nivel de intensidad* (**NI**) de la onda que se expresa en una unidad de comparación llamada *decibelio* (**dB**) que nos dice cómo de grande es la intensidad comparada con una intensidad patrón o de referencia.

$$NI(\text{dB}) = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{REF}} \right) \quad (27)$$

La relación (27) no está determinada mientras no nos indiquen la intensidad de referencia o patrón. Esta intensidad patrón no es fija y depende del ámbito de trabajo. En acústica la intensidad de referencia más usual es la mínima energía capaz de excitar el nervio auditivo a una frecuencia de 1000 Hz (la sensibilidad del oído depende de la frecuencia, siendo la frecuencia de 1000 Hz una de las frecuencias para la que el sistema auditivo es más sensible) y tiene por valor $I_{REF} = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Conclusiones:

1.- El resultado de la interferencia no es otra cosa que **una redistribución de energía en el espacio**, cumpliéndose, evidentemente, que la energía se conserva. Así el valor medio espacial de la intensidad, o valor promediado sobre una distancia donde se toman todos los valores posibles de la intensidad, es decir

$0 \leq \text{sen } \theta \leq \lambda / d \Rightarrow 0 \leq y \leq \lambda D / d$ es:

$$\langle I \rangle_{ESP} = \frac{1}{\lambda D / d} \int_0^{\lambda D / d} I(y) dy = \frac{4 I_0 d}{\lambda D} \int_0^{\lambda D / d} \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda D} y \right) dy$$

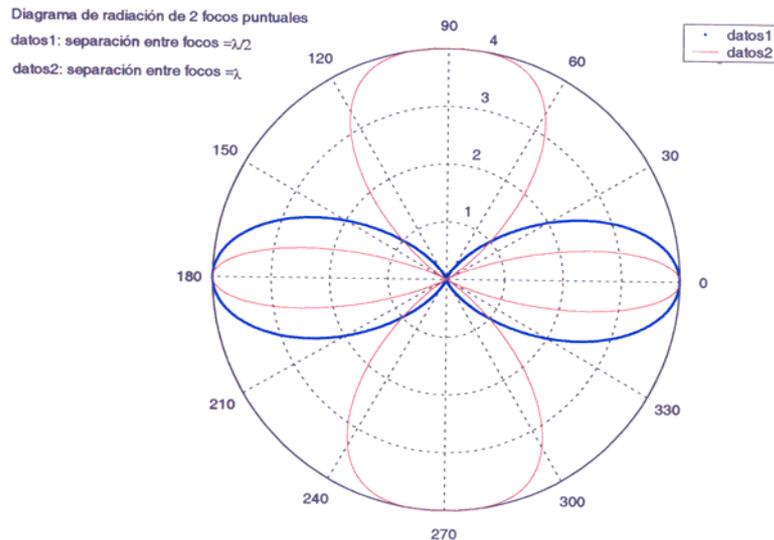
$$\langle I \rangle_{ESP} = \frac{4 I_0 d}{\lambda D} \int_0^{\lambda D / d} \frac{1}{2} dy - \frac{2 I_0 d}{\lambda D} \int_0^{\lambda D / d} \cos \left(\frac{2 \pi d}{\lambda D} y \right) dy = 2 I_0 - \frac{I_0}{\pi} \text{sen} \left(\frac{2 \pi d}{\lambda D} y \right) \Big|_0^{\lambda D / d} = 2 I_0$$

2.- Los **diagramas de representación** pueden ser **lineales** $I = I(y)$ o $I = I(\text{sen } \theta)$ o **polares** $I = I(\theta)$, en éstos se representa el plano angular y para cada ángulo se traza un segmento de recta desde el origen de una longitud proporcional al valor de la intensidad y se unen los extremos. Los diagramas polares son muy útiles por que nos orientan de cómo se

distribuye la energía en el espacio, a través de los lóbulos de radiación (como se distribuye la energía emitida por nuestros focos en el espacio) que se caracterizan por el ancho angular entre dos mínimos de intensidad; en nuestro caso el ángulo entre mínimos o máximos viene dado

por $\text{sen } \theta = n \frac{\lambda}{d}$ y por

tanto habrá más o menos lóbulos dependiendo de la relación entre la longitud de onda y la distancia entre los focos ya que si $d < \lambda$ solo existe un máximo, el correspondiente a $n = 0$, y sólo existe un lóbulo de radiación, en cambio si $d \geq \lambda$ puede existir más de un máximo de radiación.



3.- Si el n° de fuentes aumenta se pueden extraer las siguientes consecuencias:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } d < \lambda \text{ y } N \uparrow \text{ la emisión es más direccional y aparecen máximos secundarios} \\ \text{Si } d \geq \lambda \text{ existen varios lóbulos principales} \end{array} \right.$

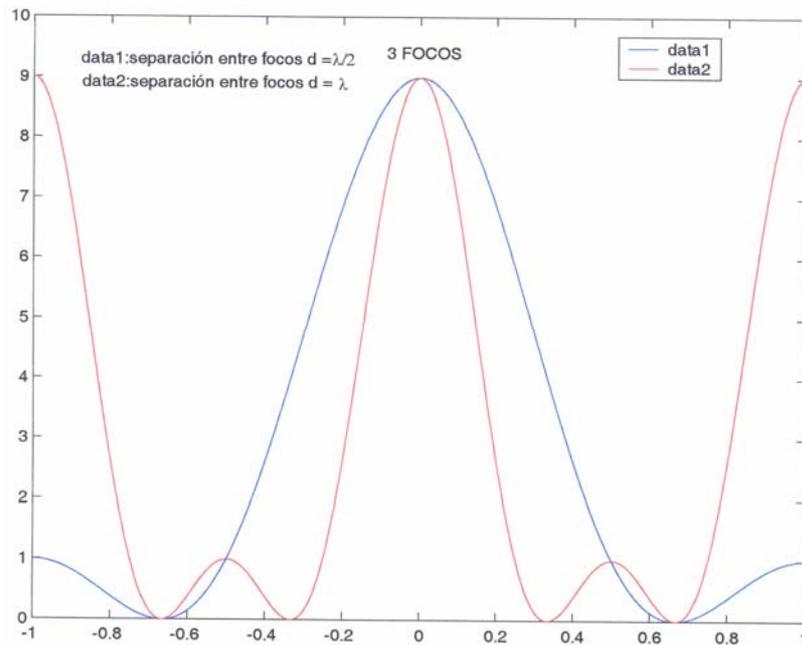
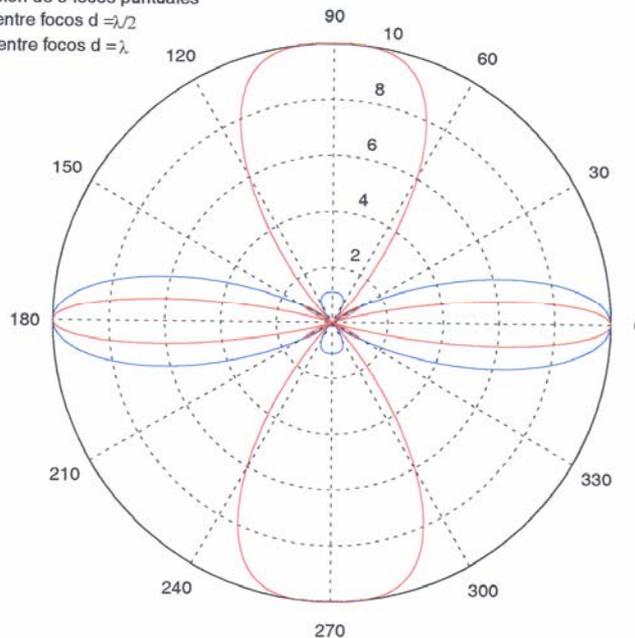


Diagrama de radiación de 3 focos puntuales

data1: separación entre focos $d = \lambda/2$

data2: separación entre focos $d = \lambda$

— data1
— data2



4.- Coherencia

Dos o más fuentes no necesitan vibrar en fase para producir un patrón fijo de interferencias. Así si en el experimento anterior las fuentes vibrasen en oposición de fase ($\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$) todo sería igual salvo que están cambiadas las posiciones de los máximos y mínimos de intensidad, y si vibrasen con una diferencia de fase cualquiera $0 < \varphi_1 - \varphi_2 = \text{cte} < \pi$ pero constante los máximos y mínimos estarán desplazados pero el patrón de interferencias se mantendrá a lo largo del tiempo; en cambio si la diferencia

de fase depende del tiempo $\varphi_1 - \varphi_2 = f(t)$ los patrones irán cambiando de un instante al siguiente y si el cambio es rápido tan sólo se observará un valor medio y desaparecerá el patrón de interferencias, es decir verá el valor medio en cualquier punto. A partir de esto se dice que dos o más fuentes son coherentes si vibran en fase o con una diferencia de fase constante entre cada dos de ellas (la luz láser es coherente). Si la diferencia de fase entre ellas cambia con el tiempo diremos que las fuentes son incoherentes (la luz natural es incoherente). El efecto de la interferencia sólo es observable si utilizamos fuentes coherentes.

En general las definiciones de coherencia o incoherencia depende mucho del detector; así si $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{cte}$ durante un intervalo temporal $\Delta t \gg \Delta \tau$, donde $\Delta \tau$ es el promedio temporal que tarda el detector en hacer una medida, entonces diremos que para ese detector las fuentes son coherentes; en cambio si $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{cte}$ durante un intervalo temporal $\Delta t < \Delta \tau$, donde $\Delta \tau$ es el promedio temporal que tarda el detector en hacer una medida, entonces diremos que para ese detector las fuentes son incoherentes.

5.- Ondas estacionarias

5.1.- Introducción

Vimos en el tema inicial de ondas que cuando los medios estaban limitados aparecían unas soluciones (distintas de las ondas progresivas) de la ecuación de ondas que respondían al término general de *ondas estacionarias*. Para ilustrarlo consideremos una cuerda, fija por un extremo, a la que se hace vibrar por el otro lado; en estas condiciones un pulso viaja por la cuerda en un sentido de modo que al llegar al extremo fijo parte se refleja apareciendo un pulso que viaja en sentido contrario. Estos pulsos que viajan en sentidos contrarios interfieren entre sí y debido a que los pulsos son una superposición de ondas armónicas con amplitudes, frecuencias y fases diferentes, al principio habrá una gran confusión donde unas ondas se cancelarán y otras no. Las que no se cancelan y se mantienen en el tiempo es a lo que llamamos ondas estacionarias. Este mismo fenómeno aparece, por ejemplo cuando una OEM viajando por el aire se refleja en un medio (conductor o dieléctrico) o cuando encendemos un horno de microondas para calentar alimentos. Nosotros abordaremos las *ondas estacionarias unidimensionales*, las cuales son el resultado de la interferencia de dos ondas armónicas, de igual naturaleza, de la misma frecuencia que viajan en la misma dirección pero en sentidos contrarios.

5.2.- Análisis cuantitativo

Supondremos, en lo que sigue, que la dirección de propagación es el eje X. Sean 2 movimientos ondulatorios, descritos por la variable ψ (que puede ser un escalar como la presión en las ondas acústicas, o un vector como el campo eléctrico en las OEM) que van en la dirección X pero en sentidos contrarios. El estado de vibración de cualquier punto del medio, dado por la coordenada x , será la superposición de las dos ondas, así:

$$\begin{cases} \psi_1(x,t) = A_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1) & \Leftrightarrow \hat{z}_1(x,t) = A_1 e^{j(\omega t - kx + \varphi_1)} & / \psi_1(x,t) = \text{Re}[\hat{z}_1(x,t)] \\ \psi_2(x,t) = A_2 \cos(\omega t + kx + \varphi_2) & \Leftrightarrow \hat{z}_2(x,t) = A_2 e^{j(\omega t + kx + \varphi_2)} & / \psi_2(x,t) = \text{Re}[\hat{z}_2(x,t)] \end{cases}$$

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{z}(x,t) = \hat{z}_1(x,t) + \hat{z}_2(x,t) \quad / \quad \psi(x,t) = \text{Re}[\hat{z}(x,t)]$$

$$\hat{z}(x,t) = \hat{z}_1(x,t) + \hat{z}_2(x,t) = e^{j(\omega t)} [A_1 e^{j(-kx + \varphi_1)} + A_2 e^{j(kx + \varphi_2)}] = \hat{A}(x) e^{j(\omega t)} = A(x) e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$A(x) = \left[\hat{A}(x) \cdot \hat{A}^*(x) \right]^{1/2} = \left\{ A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \left[2kx + (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \right\}^{1/2} \quad (28.1)$$

$$A(x) = \left\{ (A_1 + A_2)^2 \cos^2 \left[kx + (\varphi_2 - \varphi_1) / 2 \right] + (A_1 - A_2)^2 \sin^2 \left[kx + (\varphi_2 - \varphi_1) / 2 \right] \right\}^{1/2} \quad (28.2)$$

Si las amplitudes son iguales $A_1 = A_2 = A_0$, entonces

$$A(x) = \left\{ A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2 \cos \left[2kx + (\varphi_2 - \varphi_1) \right] \right\}^{1/2} = 2A_0 \cos \left[kx + (\varphi_2 - \varphi_1) / 2 \right] \quad (28.3)$$

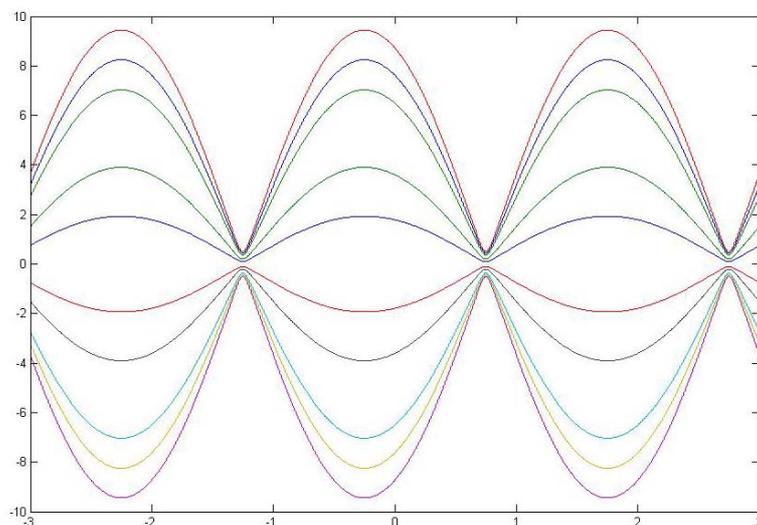
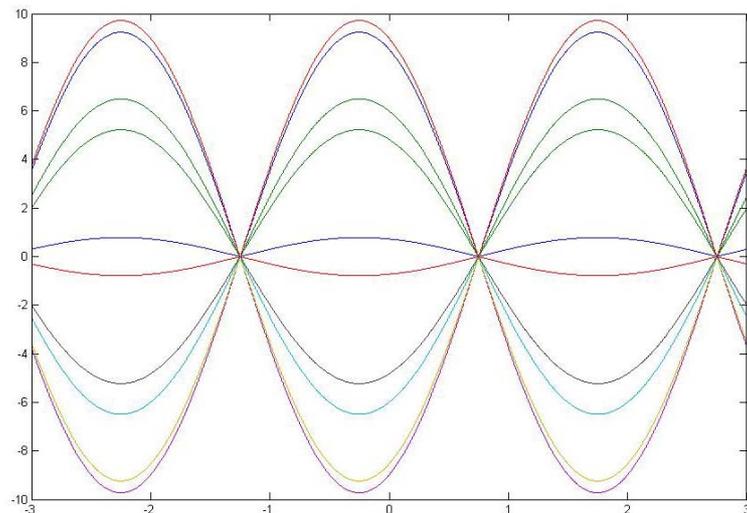
$$\tan \phi = \frac{\text{Im}(\hat{A}(x))}{\text{Re}(\hat{A}(x))} = \frac{A_1 \sin(-kx + \varphi_1) + A_2 \sin(kx + \varphi_2)}{A_1 \cos(-kx + \varphi_1) + A_2 \cos(kx + \varphi_2)} \quad (29)$$

El valor de la vibración en cada punto resulta ser

$$\psi(x, t) = \text{Re}[\hat{z}(x, t)] = A(x) \cos(\omega t + \phi) \quad (30)$$

De (30) se deduce

- 1) La onda resultante es una solución de la ecuación de ondas general, además esta solución no es una onda progresiva, pues *las variables de posición y de tiempo están desacopladas*.
- 2) Todos los puntos del medio realizan *oscilaciones armónicas* de la misma frecuencia pero con distintas amplitudes.



Resumiendo podemos decir que una *onda estacionaria es un conjunto de osciladores armónicos paralelos de igual frecuencia pero con distinta amplitud que vibran con diferentes fases entre ellos, de modo que cada uno de los osciladores es un almacén de energía, quedando ésta confinada a una posición en el caso ideal de que no existiese disipación de energía por rozamiento con el medio o no exista radiación al entorno circundante.*

Las amplitudes de vibración de los distintos puntos son diferentes. Los puntos en los cuales la amplitud es la mínima posible se llaman *puntos nodales* que ocupan unas posiciones, que a partir de (28) $\cos[2kx + (\varphi_2 - \varphi_1)] = -1$, dadas por

$$2kx + (\varphi_2 - \varphi_1) = (2n+1)\pi \Rightarrow x_N(n) = \left[(2n+1) - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\pi} \right] \frac{\lambda}{4} / n \in \mathbb{Z} \quad (31)$$

Y la amplitud en dichos puntos vale $A(x_N) = |A_1 - A_2|$ (32)

Si $A_1 = A_2 = A_0$ y $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ entonces

$$x_N(n) = (2n+1) \frac{\lambda}{4} \text{ y } A(x_N) = 0 \quad (33)$$

Los puntos en los cuales la amplitud es la máxima posible se llaman *puntos antinodales* o *ventrales* que ocupan unas posiciones, que de $\cos[2kx + (\varphi_2 - \varphi_1)] = 1$, dadas por

$$2kx + (\varphi_2 - \varphi_1) = 2\pi n \Rightarrow x_{AN}(n) = \left[n - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} \right] \frac{\lambda}{2} / n \in \mathbb{Z} \quad (34)$$

Y la amplitud en dichos puntos vale $A(x_N) = A_1 + A_2$ (35)

Si $A_1 = A_2 = A_0$ y $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ entonces

$$x_{AN}(n) = n \frac{\lambda}{2} \text{ y } A(x_{AN}) = 2A_0 \quad (36)$$

La *distancia entre un nodo y un antinodo consecutivos* es

$$x_N - x_{AN} = \left[(2n+1) - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{\pi} \right] \frac{\lambda}{4} - \left[n - \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} \right] \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4} \quad (37)$$

La *distancia entre dos nodos o dos antinodos adyacentes* es:

$$x_N(n+1) - x_N(n) = x_{AN}(n+1) - x_{AN}(n) = \frac{\lambda}{2} \quad (38)$$

Si el **sistema es finito** las frecuencias que dan lugar a ondas estacionarias se llaman *frecuencias naturales* o *resonantes del sistema*, dando lugar a los *modos de vibración resonantes* (objetos macroscópicos vibratorios en resonancia). A estas frecuencias se requiere poco esfuerzo para lograr que los sistemas entren en vibración logrando unas amplitudes de oscilación grandes. La diferencia fundamental con los osciladores básicos (circuito L – C o el oscilador masa – muelle) es que en éstos sólo existe una frecuencia de resonancia mientras que en los sistemas finitos existen un n° muy elevado de frecuencias resonantes, a la menor de ellas se le llama *frecuencia fundamental* y al resto armónicos.

Si estamos tratando con *ondas planas*, responden al mismo tipo de ecuaciones, entonces los puntos nodales y antinodales se sustituyen respectivamente por los *planos nodales* y *antinodales*.

5.3.- Ejemplos

A.- Cuerda de longitud L y fija por un extremo

Si en el extremo no fijo se aplican diferentes oscilaciones armónicas de distintas frecuencias f , ¿cuáles de ellas darán lugar a ondas estacionarias debido a la interferencia de las ondas directa y reflejada?

En el extremo fijo debe existir un nodo de amplitud, mientras que en el otro extremo tiene que haber un antinodo que siga el ritmo de la oscilación que allí actúa. Esto quiere decir que la frecuencia más pequeña (longitud de onda más grande) que da origen a una onda estacionaria será aquella que de lugar a un nodo en el extremo fijo y a un único antinodo que esté en el otro extremo, es decir la longitud de la cuerda debe coincidir con la distancia entre un nodo y un antinodo, la siguiente frecuencia será la que se acople de manera que la longitud de la cuerda sea media longitud de onda más un cuarto de longitud de onda que vuelve a dar lugar al patrón de nodo en el extremo fijo y antinodo en el punto inicial, y así seguir sucesivamente por lo que podemos escribir

$$L = (2n+1) \frac{\lambda_n}{4} \quad / \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{v}{f_n} = \frac{4L}{2n+1}$$
$$f_n = (2n+1) \frac{v}{4L} \quad \text{y} \quad f_0 = \frac{v}{4L}$$

A las frecuencias mayores que la fundamental se les suele llamar armónicos, que en este caso son 3, 5, 7, ...etc veces el fundamental (armónicos impares)

B.- Cuerda de longitud L y fija por los dos extremos

Si perturbamos un punto cualquiera de la cuerda se propagará un pulso que se reflejará en los extremos produciéndose una interferencia; de todas las ondas armónicas que componen el pulso, ¿cuáles darán lugar a ondas estacionarias?

En ambos extremos debe existir un nodo de amplitud. Esto quiere decir que la frecuencia más pequeña (longitud de onda más grande) será aquella que de lugar a un nodo en el extremo fijo y a un segundo nodo en el otro extremo, es decir la longitud de la cuerda debe ser exactamente la distancia entre dos nodos consecutivos, la siguiente frecuencia será la que se acople de manera que la longitud de la cuerda sea una longitud de onda apareciendo un tercer nodo en mitad de la cuerda, vuelve a dar lugar al mismo patrón de nodos en los dos extremos, y así sucesivamente por lo que podemos escribir

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad / \quad n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{v}{f_n} = \frac{2L}{n}$$
$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad \text{y} \quad f_1 = \frac{v}{2L}$$

A las frecuencias mayores que la fundamental se les suele llamar armónicos, que en este caso son 2, 3, 4, ...etc veces la fundamental (armónicos pares e impares).

C.- OEM polarizada linealmente según el eje Y que se propaga según el eje X en el aire e incide sobre la superficie de un conductor perfecto situada en el plano YZ

Sea la OEM, polarizada linealmente según la dirección Y, que se propaga según la dirección X positiva dada por

$$\begin{cases} \vec{E}_I(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{j} \\ \vec{B}_I(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{k} \end{cases}$$

Esta onda, al incidir sobre la superficie conductora, hace oscilar, con la misma frecuencia, a los electrones del conductor. Estas oscilaciones generan una onda, y parte de ella será una onda reflejada, con unas características de amplitud y fase que dependen de las condiciones en la frontera. Como el campo eléctrico debe ser cero en el conductor (conductor perfecto) el campo eléctrico inducido por la vibración de los electrones debe estar en oposición de fase con el incidente en la superficie para que la resultante sea cero, y teniendo en cuenta la ley de Faraday podemos escribir para los campos:

$$\begin{cases} \vec{E}_R(x,t) = E_0 \cos(\omega t + kx + \pi) \vec{j} = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{j} \\ \vec{B}_R(x,t) = B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{k} \end{cases}$$

La onda resultante es:

$$\begin{cases} \vec{E}(x < 0, t) = \vec{E}_I(x,t) + \vec{E}_R(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{j} - E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{j} \\ \vec{B}(x < 0, t) = \vec{B}_I(x,t) + \vec{B}_R(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \vec{k} + B_0 \cos(\omega t + kx) \vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(x < 0, t) = \vec{E}_I(x,t) + \vec{E}_R(x,t) = 2E_0 \sin kx \sin(\omega t) \vec{j} \\ \vec{B}(x < 0, t) = \vec{B}_I(x,t) + \vec{B}_R(x,t) = 2B_0 \cos kx \cos(\omega t) \vec{k} \end{cases}$$

Los *planos nodales para el campo eléctrico* se sitúan en los planos dados por, $\sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi \Rightarrow x_{NE}(n) = n \frac{\lambda}{2}$, existiendo un plano antinodal entre dos planos nodales consecutivos.

Los *planos nodales para el campo magnético* se sitúan en los planos dados por, $\cos kx = 0 \Rightarrow kx = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{NB}(n) = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$, existiendo un plano antinodal entre dos planos nodales consecutivos.

De los dos párrafos anteriores se deduce que *los nodos de campo eléctrico son antinodos de campo magnético y recíprocamente*.

¿Cuánto vale la intensidad de esta onda estacionaria?

Definimos la intensidad de la OEM como el valor medio temporal del vector de Poynting

$$\vec{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t) = \frac{1}{\mu_0} 2E_0 \sin kx \sin(\omega t) \vec{j} \times 2B_0 \cos kx \cos(\omega t) \vec{k}$$

$$\vec{S}(x,t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin 2kx \sin(2\omega t) \vec{i}$$

$$I = \langle S_x(x,t) \rangle_T = \frac{1}{T} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \sin 2kx \int_0^T \sin(2\omega t) dt = -\frac{E_0 B_0 \sin 2kx}{2\omega T \mu_0} \cos(2\omega t) \Big|_0^T = 0$$