CONCEPTO DE ONDA

1.- Introducción

Todos estamos familiarizados de modo intuitivo con la idea de onda; así, cuando se deja caer una piedra en un estanque, las ondas en el agua marchan radialmente en todas las direcciones; al tocar el piano vibran las cuerdas y las ondas sonoras asociadas se extienden por el entorno; cuando una estación de radio o de televisión está emitiendo, las ondas electromagnéticas se mueven por el aire o a través de un cable. Todos estos son ejemplos de movimientos ondulatorios y tienen en común dos propiedades:

a) Se propaga energía a puntos distantes a partir de una fuente.
b) La perturbación inicial que da lugar a la onda marcha a través del medio sin que éste en su totalidad sufra efecto alguno de modo permanente.

¿Cómo sucede todo esto? En el tema inicial del curso describíamos el oscilador básico (sistema con un grado de libertad), que estaba caracterizado por una componente inercial y una elástica y que presentaba una única frecuencia natural de oscilación ω_0, aislado por completo de su entorno; pero si el mismo oscilador puede interactuar con su entorno entonces si al primero se le saca del equilibrio (ha aparecido sobre él una perturbación) lo lógico es que éste influya en sus vecinos (interacción) y los pueda sacar del equilibrio transmitiéndoles parte de su energía; de modo que todos los elementos del medio estén acoplados entre sí; la cuestión es ¿cómo influye el acoplamiento sobre el comportamiento de los osciladores individuales? El estudio de todo esto da lugar a una amplia casuística para diferentes medios y distintos tipos de perturbaciones que se puede abordar desde la perspectiva de las ondas.

En la hoja adjunta se muestra una región del espacio muy grande, teóricamente sin límites, donde se está propagando una perturbación, definida por una magnitud ψ, que se inicio en una zona concreta de dicho medio; en ella se da una visión cualitativa de muchos aspectos relacionados con las ondas. De dicho esquema podemos extraer una serie de consideraciones generales como son:

A) Tipología de las ondas

A.1) ***Dependiendo del carácter de la magnitud física***, pueden ser

Ondas escalares: ψ es una magnitud escalar como por ejemplo las ondas sonoras descritas por la presión acústica $p(\vec{r},t)$

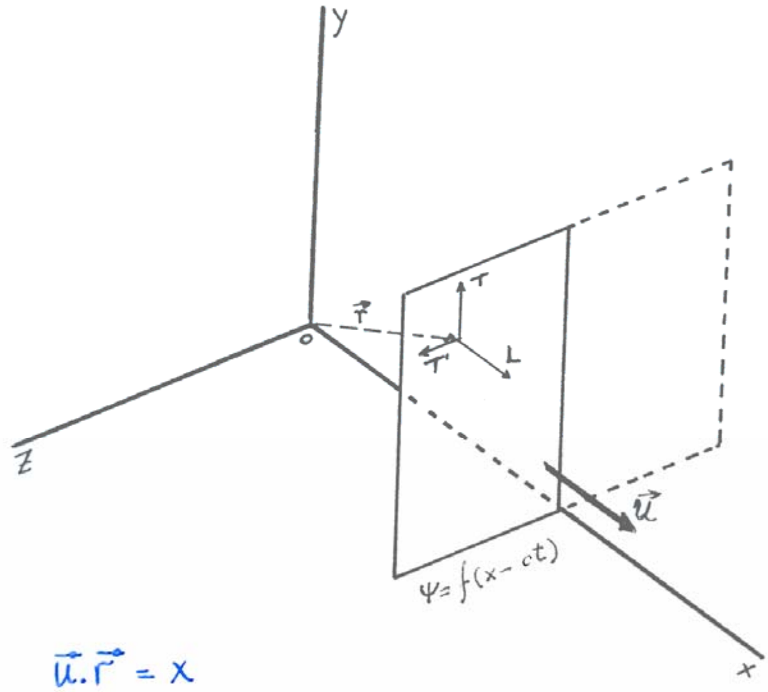
Ondas vectoriales: $\vec{\psi}$ es una magnitud vectorial como por ejemplo las O.E.M. descritas por los campos eléctricos y/o magnéticos $\vec{E}(\vec{r},t)$ o $\vec{B}(\vec{r},t)$.

A.2) ***Dependiendo de la parte de la física a la que pertenezca la magnitud que describe la onda***, pueden ser

Ondas mecánicas (rama mecánica de la física) como las ondas sísmicas.
Ondas electromagnéticas (rama electromagnética de la física) como las microondas.
Ondas de probabilidad (rama de la física cuántica) como las ondas electrónicas.

A.3) ***Dependiendo de la relación entre la dirección de vibración (DV) y la dirección de propagación (DP)***, pueden ser

Ondas longitudinales (OL) cuando la dirección de vibración (DV) y la de propagación (DP) coinciden como en las ondas acústicas en un medio fluido.
Ondas transversales (OT) cuando la dirección de vibración es perpendicular a la dirección de propagación como por ejemplo la luz en el aire.
Ondas elípticas que es la superposición de OL y OT como en general las olas en los océanos.



$\vec{u}\cdot\vec{r} = x$

EN GENERAL $\bar{u}\cdot\bar{r}$ REPRESENTA LA DISTANCIA AL ORIGEN SEGÚN LA DIRECCIÓN DE PROPAGACIÓN "$\bar{u}$"

Algunas propiedades generales de las ondas mecánicas son:

- Necesitan medios materiales para poder propagarse
- Los medios fluidos sólo pueden trasmitir ondas longitudinales
- Los medios sólidos pueden trasmitir tanto OL como OT.

Algunas propiedades de las O.E.M. son:

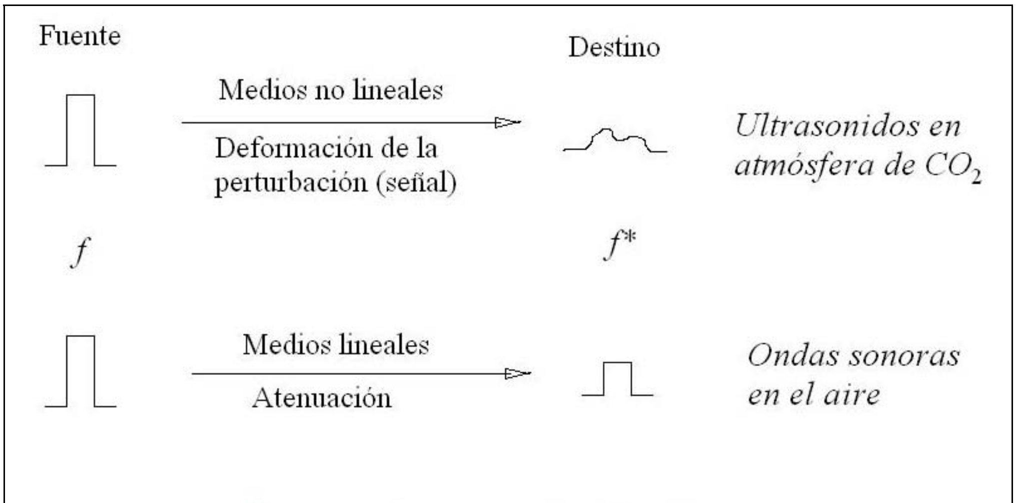
- Pueden propagarse en ausencia de medio (vacío)
- en principio pueden propagarse en cualquier medio aunque depende mucho de la frecuencia de la onda, por ejemplo la ionosfera terrestre absorbe una parte de la radiación UV del espectro E.M. y no la puede transmitir.

B) Relación entre la perturbación en origen y en destino f y f^*

Es este un problema bastante complicado ya que depende en gran medida de la magnitud involucrada, de la frecuencia de la onda y del tipo de medio. En general se plantean dos posibilidades:

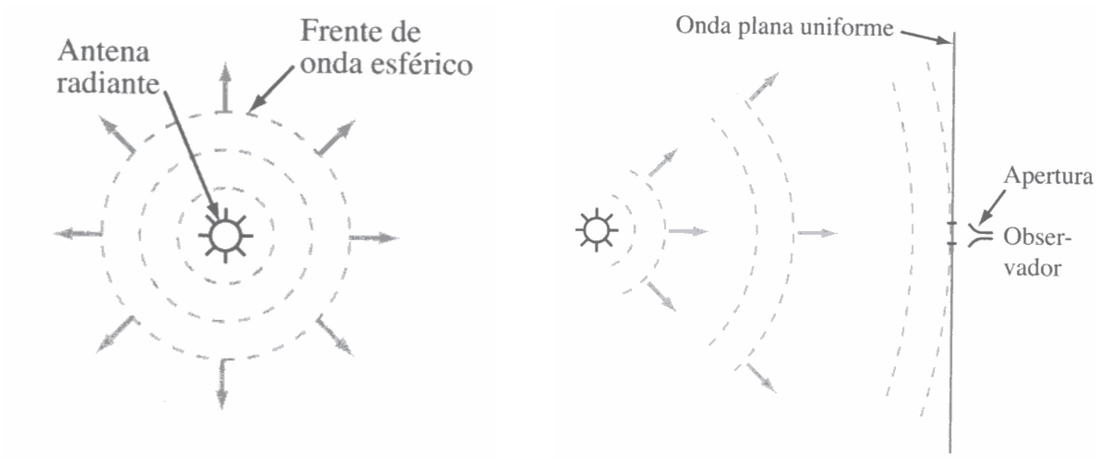
- Se alteran las componentes frecuenciales (medios no lineales) y puede que la señal en destino sea muy diferente de la señal en origen. Se dice que se ha producido una dispersión como por ejemplo al trasmitir ultrasonidos en una atmósfera de CO_2

- La señal en destino tiene la misma forma que en origen pero de amplitud mucho menor. Ocurre en medios lineales y se dice que se produce una atenuación (si la onda es atenuada de manera muy pronunciada sobre una distancia muy pequeña se dice que el medio es incapaz de propagar dicha onda la cual es absorbida por el medio de manera que la energía de la onda se transfiere al medio en distintas formas de energía).



Esquema de propagación de ondas

Estas propiedades comunes a todas las ondas provienen de que, cualquiera que sea la naturaleza de las ondas, su evolución se rige por la misma ecuación diferencial llamada *ecuación de ondas* o *ecuación del movimiento ondulatorio* y la parte práctica de cada problema concreto consiste meramente en resolver la citada ecuación de ondas con las condiciones de contorno adecuadas al caso y posteriormente interpretar la solución.



(a) Onda esférica (b) Onda aproximadamente plana

Inicialmente, para simplificar el problema, vamos a tratar con medios lineales, isótropos y homogéneos (velocidad de propagación c constante), suficientemente grandes (idealmente ilimitados para evitar los problemas de reflexión que se verán con posterioridad), y donde las ondas se propagarán según una dirección marcada por uno de los ejes cartesianos (medio unidimensional como puede ser una cuerda). Todo esto conlleva que *la perturbación no cambia de forma ni se atenúa.*

2.- Funciones de onda

Sea una perturbación ψ que se propaga según el eje *x* con velocidad *c*; que puede ser la elevación de una ola en agua o la magnitud de un campo eléctrico oscilante. Como la perturbación se mueve, ψ dependerá de *x* y de *t* y en un instante concreto, que es como hacer una fotografía, por ejemplo en $t = 0$ ψ será una cierta función de *x* que podemos escribir $\psi = f(x)$ llamado ***perfil de onda***. Si suponemos que la perturbación se propaga sin cambiar de forma, entonces una fotografía tomada en un instante posterior *t*, será idéntica a la de $t = 0$, salvo que el perfil se habrá movido una distancia *ct* según la dirección positiva del eje *x*. Si tomamos nuevo origen en el punto $x = ct$, y llamamos *X* a las distancias medidas a partir de este nuevo origen, de manera que $x = X + ct$, el perfil de onda será $\psi = f(X)$, que referido al origen primitivo se convierte en

$$\psi = f(x - ct) \quad [1].$$

Esta ecuación es la forma más general de una onda que se mueve con velocidad constante *c* y sin cambio de forma a lo largo de la dirección positiva del eje *x*. Si la señal (perturbación) se moviese según la dirección negativa del eje *x*, todo es igual sin más que cambiar *c* por –*c*, el resultando se expresaría como

$$\psi = f(x + ct) \quad [2].$$

Una forma alternativa de verlo, que quizás sea más intuitiva, es razonar sobre el valor de ψ para un instante dado en un punto del medio caracterizado por su valor de *x*, en particular, y sin pérdida de generalidad, para el origen de coordenadas pues siempre podemos cambiar el origen de referencia. Así podemos afirmar que si el valor de la perturbación en el origen y en el instante t' es $\psi = F(0, t')$ y la perturbación se propaga con velocidad *c* en el sentido positivo del eje *x* sin cambio de forma, entonces el valor de la perturbación en un punto alejado *x* y en un instante $t > t'$ será el mismo pero retrasado un intervalo de tiempo que coincide con el intervalo de tiempo que tarda en llegar la perturbación al punto considerado, es decir $t - t' = x / c$, por tanto se cumple

$$\psi(x, t) = F(0, t') = F\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad [1']$$

Si la señal (perturbación) se moviese según la dirección negativa del eje *x*, todo es igual sin más que cambiar *c* por –*c*, el resultando se expresaría como

$$\psi(x, t) = F\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad [2'].$$

Se puede generalizar la ecuación [1] para tratar el caso de ondas planas en dos y tres dimensiones. Una onda plana en tres dimensiones es aquella en que todos los puntos de un plano situado perpendicularmente a la dirección de propagación, para un instante dado, vibran en fase, o lo que es lo mismo todos los puntos de estos planos son alcanzados por la perturbación en el mismo instante. Para un instante dado tendremos distintos planos tales que en cada uno de ellos todos sus puntos vibran en fase; a los diferentes planos se les llama ***frentes de onda*** y si nos fijamos en uno concreto veremos como avanza en la dirección perpendicular a él mismo con la velocidad *c*. Nuestra ecuación [1] extendida a 3 dimensiones no deja de ser una onda plana cuyo frente de onda es el plano x = cte. Si la dirección de propagación es la indicada por la recta

$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ donde (l,m,n) son los cosenos directores de la normal a cada frente de onda, entonces la ecuación de los frentes de onda se expresa $l\,x+m\,y+n\,z=\text{cte}$ [3], y en cada instante de tiempo *t*, ψ ha de tener el mismo valor para todos los (*x*, *y*, *z*) que satisfagan [3]. La función

$$\psi = f\left(l\,x+m\,y+n\,z-c\,t\right) \quad [4],$$

cumple todas las condiciones y por tanto representa una onda plana que marcha con la velocidad *c* en la dirección (l,m,n) sin cambio de forma.

3.- Ecuación de ondas: Propiedades

La expresión [4] es una solución particular de la ecuación de ondas (ecuación del movimiento ondulatorio) a que nos hemos referido al inicio de estas líneas. Puesto que *l*, *m* y *n* son cosenos directores se cumple que $l^2+m^2+n^2=1$ y podemos verificar que [4] satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad [5]$$

a la que se conoce con el nombre de ***ecuación de ondas*** o ***ecuación del movimiento ondulatorio*** y es una de las ecuaciones más importantes puesto que representa todos los tipos de movimientos ondulatorios donde la velocidad es constante. Nuestra tarea, para un problema particular, será elegir la solución apropiada.

La ecuación [5] es lineal lo que significa que tanto ψ como sus derivadas solo aparecen en la ecuación en la forma de primer grado, lo que quiere decir que si ψ_1 y ψ_2 son dos soluciones cualesquiera de [5] cualquier combinación lineal de las soluciones anteriores $\psi=a_1\,\psi_1+a_2\,\psi_2\;/\;a_1$ y a_2 son constantes arbitrarias también es solución. Esto es en esencia ***el principio de superposición*** que afirma que, cuando todas las ecuaciones pertinentes son lineales, podemos superponer cualquier nº de soluciones individuales para formar nuevas funciones que, a su vez, son soluciones.

Podemos dividir nuestras soluciones en dos tipos principales, que representan bien sea ***ondas progresivas*** u ***ondas estacionarias***.

4.- Función de onda armónica. Parámetros característicos

Para fijar ideas vamos a tratar con la ecuación de ondas en una dimensión

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad [6]$$

cuya solución más general, utilizando las ecuaciones [1’] y [2’], es

$$\psi(x,t)=F\left(t-\frac{x}{c}\right)+G\left(t+\frac{x}{c}\right) \quad [7]$$

siendo *f* y *g* funciones arbitrarias que representan ondas que se mueven con velocidad *c*, en sentidos opuestos, la función *f* es una perturbación que se mueve en el sentido del eje *x* positivo, mientras que la función *g* es una perturbación que viaja según el sentido del eje *x* negativo. Un caso especialmente interesante son ***las ondas armónicas*** en las que la variación temporal en el origen es sinusoidal, es decir si en $x=0$ $F(t)=A\cos(\omega t)$,

donde ω, llamada ***frecuencia angular*** de vibración, nos mide la rapidez de oscilación; dicho parámetro se mide en radianes/segundo (rad/s) en el S.I., entonces, suponiendo que la perturbación se mueve en el sentido del eje *x* positivo, para un tiempo genérico *t*, el valor de la perturbación será

$$\psi(x,t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad [8]$$

$$\psi(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = A\cos(\omega t - kx) \ \ / \ \ k = \frac{\omega}{c}$$

El valor *A* se llama ***amplitud*** y el parámetro *k* se llama ***nº de onda***, que se mide, por comparación con la frecuencia angular, en radianes / m (rad/m).

Para un instante dado, a la mínima distancia espacial entre dos puntos que se encuentren en el mismo estado de vibración (igualdad de ψ y $\dot{\psi}$) se le llama ***longitud de onda*** λ que se determina mediante

$$\begin{cases} \psi(x_1,t) = A\cos[\omega t - k\,x_1] \\ \psi(x_2,t) = A\cos[\omega t - k\,x_2] \end{cases} \Rightarrow \text{ Si } \psi(x_1,t) = \psi(x_2,t) \Rightarrow$$

$$\omega t - k\,x_1 - (\omega t - k\,x_2) = 2\pi \Rightarrow k(x_2 - x_1) = 2\pi \Rightarrow (x_2 - x_1) = \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad [9]$$

Por otro lado si estamos en un punto dado el tiempo que tarda la señal armónica en pasar de un estado al mismo estado se denomina ***periodo*** *T*, de modo que

$$\begin{cases} \psi(x,t_1) = A\cos[\omega t_1 - k\,x] \\ \psi(x,t_2) = A\cos[\omega t_2 - k\,x] \end{cases} \Rightarrow \text{ Si } \psi(x,t_1) = \psi(x,t_2) \Rightarrow$$

$$\omega t_2 - k\,x - (\omega t_1 - k\,x) = 2\pi \Rightarrow \omega(t_2 - t_1) = 2\pi \Rightarrow (t_2 - t_1) = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{c} \quad [10]$$

Se define la ***frecuencia de la onda*** armónica f o υ como el nº de repeticiones que pasan en la unidad de tiempo por el punto fijo donde está el observador,

$$f \equiv \upsilon = \frac{1}{T} \quad [11]$$

se mide en ciclos/segundo (c/s) o Hercios (Hz).

La función de onda con los parámetros definidos se puede escribir como

$$\psi(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\right) = A\cos(\omega t - kx) = A\cos\left(2\pi\left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right]\right)$$

De [10] y [11] deducimos que

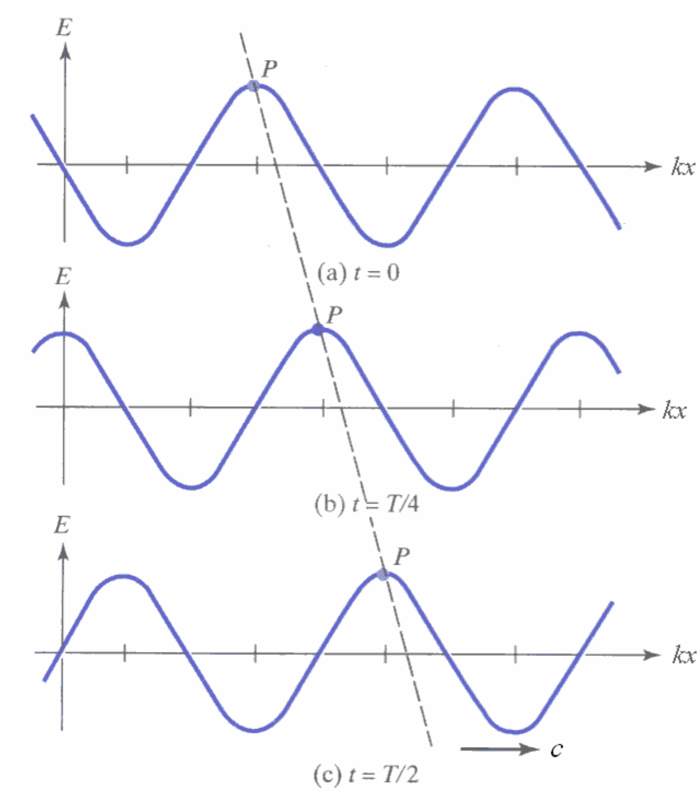
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad [12]$$

Algunas relaciones entre los parámetros espaciales y temporales son

$$c = \lambda f \ \text{ y } \ \omega = k\,c$$

De lo expuesto hasta aquí se desprende que nuestras *ondas armónicas presentan una doble periodicidad, una espacial con periodo* $\boldsymbol{\lambda}$ *y otra temporal con periodo* ***T***.

Con todos estos parámetros definidos las ondas armónicas se suelen representar de alguna de las siguientes formas y se suelen llamar ***ondas progresivas***.



$$\psi(x,t) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \text{ o } \psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \quad [13.1]$$

Si hubiéramos utilizado funciones seno,

$$\psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \text{ o } \psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - kx) \quad [13.2]$$

Si hubiéramos hecho el desarrollo a partir de [1] y [2] con perfil coseno, es decir $\psi(x,0) = f(x) = A\cos(kx)$ tendríamos $\psi = f(k(x-ct))$ y llegaríamos a

$$\psi(x,t) = A\cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) \text{ o } \psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \quad [13.3]$$

Si hubiéramos utilizado un perfil seno

$$\psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) \text{ o } \psi(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \quad [13.4]$$

Todas las expresiones [13.1], [13.2], [13.3] y [13.4] son representaciones de ondas armónicas que avanzan según la dirección marcada por el eje positivo *x*. Si cambiamos el origen de tiempos en los argumentos de las funciones trigonométricas puede aparecer un término aditivo δ llamado constante de fase que no modifica para nada las propiedades de nuestras ondas; así por ejemplo podríamos escribir

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \delta) \quad [14]$$

Los diferentes puntos del medio realizarán oscilaciones armónicas con diferentes fases relativas entre ellos; no obstante habrá puntos cuyas vibraciones guarden alguna relación. Así diremos que ***dos puntos vibran en fase*** cuando se encuentran en el mismo estado de vibración en cualquier instante, es decir

$$\left(\psi(x_1,t);\dot{\psi}(x_1,t)\right)\equiv\left(\psi(x_2,t);\dot{\psi}(x_2,t)\right)$$

Si $\psi(x,t)=A\cos(\omega t\mp k\,x-\delta)\ \Rightarrow\ \dot{\psi}(x,t)=-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t\mp k\,x-\delta)$ por lo que para que los valores de las funciones seno y coseno simultáneamente vuelvan a repetirse los argumentos deben diferir en múltiplos de 2π radianes. Así

$$(\omega t\mp k\,x_1-\delta)-(\omega t\mp k\,x_2-\delta)=2\pi\,n\ \ /\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{k(x_2-x_1)=2\pi\,n\ \ \Rightarrow\ \ (x_2-x_1)=n\lambda\ \ /\ \ n\in\mathbb{Z}}\quad [15]$$

Por otro lado diremos que ***dos puntos vibran en oposición de fase*** cuando se encuentran en estados opuestos de vibración en cualquier instante, es decir

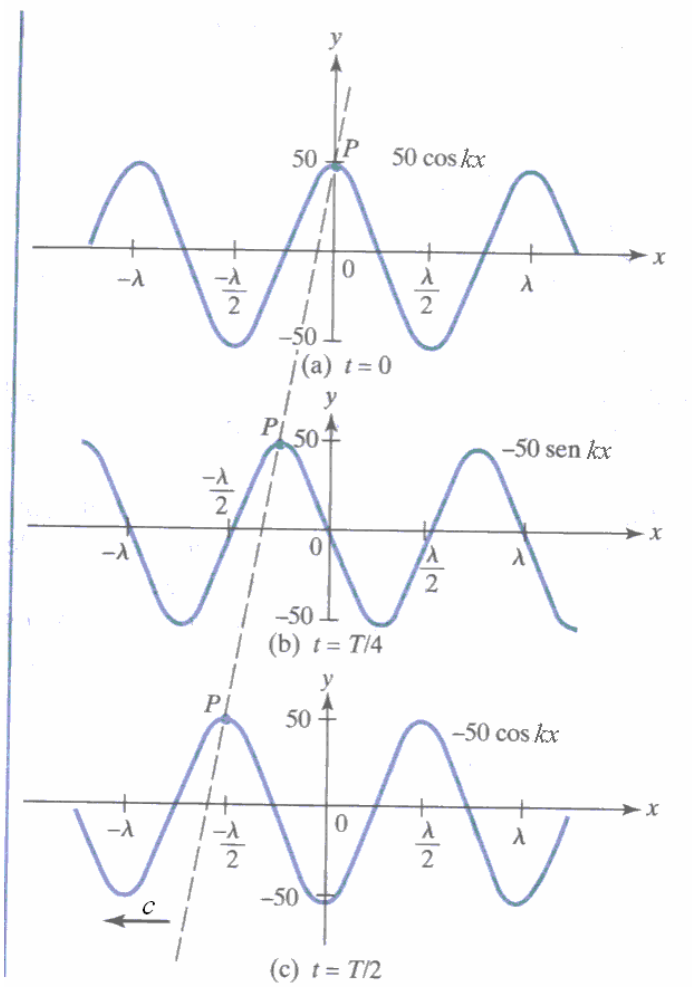
$$\left(\psi(x_1,t);\dot{\psi}(x_1,t)\right)\equiv-\left(\psi(x_2,t);\dot{\psi}(x_2,t)\right)$$

Para que esto ocurra simultáneamente con las dos funciones seno y coseno los argumentos deben diferir en un múltiplo impar de π radianes, por tanto

$$(\omega t\mp k\,x_1-\delta)-(\omega t\mp k\,x_2-\delta)=(2n+1)\pi\ /\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\boxed{k(x_2-x_1)=(2n+1)\pi\ \ \Rightarrow\ \ (x_2-x_1)=(2n+1)\frac{\lambda}{2}\ \ /\ \ n\in\mathbb{Z}}\quad [16]$$

Si la perturbación se propaga en el sentido negativo del eje x todo es igual sin más que cambiar los signos – por signos +.



Como las soluciones pueden ser seno o coseno con una fase asociada, a la hora de realizar ciertos trabajos con las ondas armónicas conviene expresarlas *en el dominio complejo como exponenciales complejas*, así pondremos

$$\hat{\psi}(x,t) = \hat{A}e^{j(\omega t \mp k x)} = Ae^{j(\omega t \mp k x + \delta)} \;/\; \hat{A} = Ae^{j\delta} \quad [17],$$

en la que el signo – indica una onda que se propaga en el sentido del eje *x* positivo y el signo + indica una onda que se propaga en el sentido del eje *x* negativo.

La solución física o real será la parte real de la expresión anterior si trabajamos con cosenos o la parte imaginaria si trabajamos con senos

$$\psi(x,t) = \Re_e\left[\hat{\psi}(x,t)\right] \;\text{ o }\; \psi(x,t) = \mathrm{I_m}\left[\hat{\psi}(x,t)\right] \quad [18]$$

Aunque una onda no sea armónica, si el perfil de onda consiste en un patrón que se repite con regularidad, las definiciones, de longitud de onda, periodo, frecuencia y nº de onda, siguen siendo válidas.

Otro tipo de soluciones de nuestra ecuación de ondas y que son muy importantes consisten en la suma de dos ondas, en este caso armónicas, de la misma frecuencia que marchan en sentidos opuestos con la misma amplitud y velocidad, así

$$\psi(x,t) = A\cos(\omega t - k x) + A\cos(\omega t + k x) = 2A\cos(k x)\cos(\omega t) \quad [19],$$

en la que las variables espacio y tiempo están desacopladas. A este tipo de solución se le llama ***onda estacionaria*** para distinguirla de las anteriores ondas progresivas. Debe su nombre al hecho de que el perfil de onda no se mueve hacia delante.

Todo lo dicho hasta aquí puede repetirse para dos y tres dimensiones de igual forma (ondas planas). Así decimos que si en $(x=0, y=0)$, caso de 2 dimensiones o $(x=0, y=0, z=0)$, caso de 3 dimensiones, $\psi(0,t) = A\cos(\omega t)$, y la perturbación se propaga a velocidad *c* según la dirección del vector unitario $\vec{u} = l\,\vec{i} + m\,\vec{j} + n\,\vec{k}$, entonces los frentes de ondas son planos perpendiculares al vector $\vec{u}$, que tienen por ecuación $l\,x + m\,y + n\,z = \text{cte}$ y el valor de la perturbación en un punto genérico del frente de onda se expresa como

$$\psi(\vec{r},t) = \psi(x,y,z,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{l\,x + m\,y + nz}{c}\right)\right) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(l\,x + m\,y + nz)\right)$$

y si utilizamos el vector posición $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ para describir los puntos genéricos del frente de ondas, tenemos

$$\psi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(l\,x + m\,y + nz)\right) = A\cos(\omega t - k\,\vec{u}\cdot\vec{r}) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \quad [19]$$

Al vector $\vec{k}$ se le llama vector propagación o vector nº de onda.

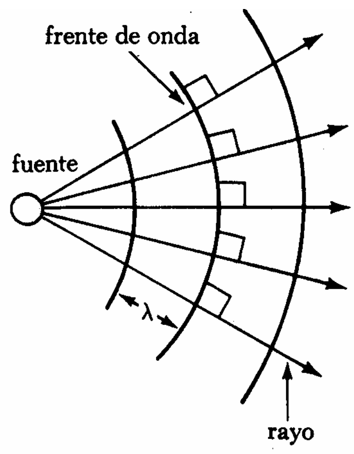
$$\vec{k} = k\,\vec{u} = \frac{\omega}{c}\vec{u} = \mathrm{k}_1\vec{i} + \mathrm{k}_2\vec{j} + \mathrm{k}_3\vec{k} \;/\; \mathrm{k}_1 = \frac{\omega}{c}l \,,\, \mathrm{k}_2 = \frac{\omega}{c}m \,,\, \mathrm{k}_3 = \frac{\omega}{c}n \quad [20]$$

En general al resolver problemas usaremos o *necesitaremos* ***soluciones del tipo progresivo*** *en los casos en que se admita un intervalo infinito para el rango de valores de las variables x y z, y* ***soluciones de tipo estacionario*** *cuando el intervalo sea finito.*

5.- Generalización del concepto de frente de onda. Clasificación de las ondas según el frente de onda

Del mismo modo puede demostrarse que hay soluciones de tipo progresivo en que no intervienen ondas planas pero que trataremos con mucha menos profundidad. También podemos utilizar otro tipo de sistema de coordenadas para abordar problemas que presenten ciertas simetrías.

Los frentes de onda y los rayos asociados nos facilitan la visualización de los fenómenos ondulatorios. Para concretar vamos a dar una definición, así denominamos ***frente de onda*** (FO) o ***superficie de onda*** (SO) al lugar geométrico de los puntos del medio a los que llega la perturbación en el mismo instante, es decir son superficies de fase constante, así por ejemplo para el caso de ondas planas en tres dimensiones las ecuaciones de los FO serán $\omega t - \frac{\omega}{c}(l\,x + m\,y + nz) = C_0 \;\Rightarrow\; l\,x + m\,y + nz = \mathrm{C}_0^*$ siendo C_0^* un nº real; si además el medio es homogéneo e isótropo y el foco es no directivo (lo que se supondrá siempre mientras no se diga lo contrario) todos los puntos del FO estarán en el mismo estado de vibración, $(\psi, \dot{\psi})_{\forall \mathrm{P} \in \mathrm{FO}}$.



Fijado un tiempo $t = t_0$ cada punto del medio pertenece a un FO y, como las fases pueden variar en los nº reales, habrá infinitos FO, ¿Cuáles representar? El criterio general es representar sólo aquéllos (ondas armónicas) que se encuentren en el máximo valor de la perturbación, los cuales están separados una distancia igual a la longitud de onda.

Denominamos ***rayos*** a las líneas perpendiculares (no tienen porque ser rectas) a los sucesivos FO en cada punto, y físicamente representan las líneas a lo largo de las cuales se propaga la energía de la onda.

La forma de los FO induce una nueva clasificación de las ondas y al ser lugares geométricos pueden expresarse por funciones que dependan de las variables espaciales, es decir fijado $t = t_0 \;\Rightarrow\;$ FO $\equiv g(x, y, z) = 0$, por ejemplo $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ es un FO esférico; pero ¿de qué depende la forma de estas funciones $g(x, y, z) = 0$?

- Propiedades emisoras de la fuente o foco donde se origine la perturbación
- Propiedades del medio propagador

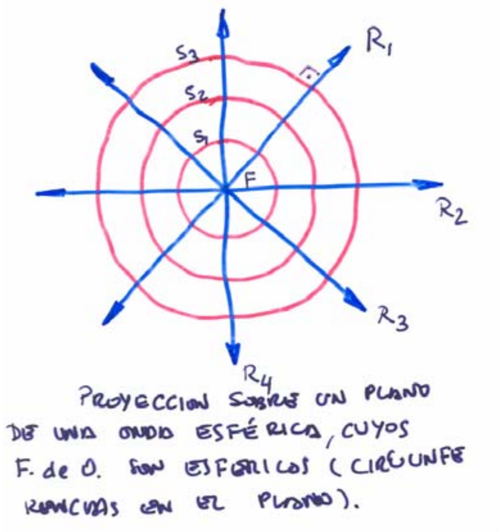
En función de estas dos características las ondas se clasifican en:

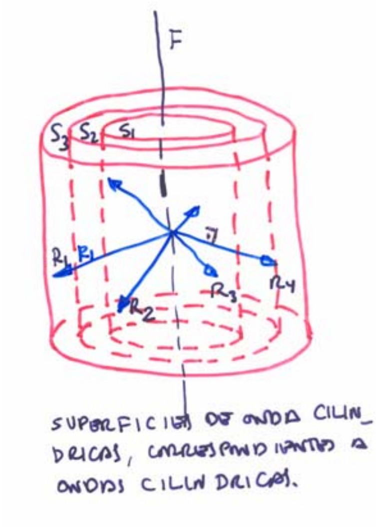
Ondas esféricas: los frentes de onda son superficies esféricas, $g(x, y, z) = 0$ representa una superficie esférica, como por ejemplo las ondas sonoras originadas por un cambio brusco de presión en un punto de un gas.

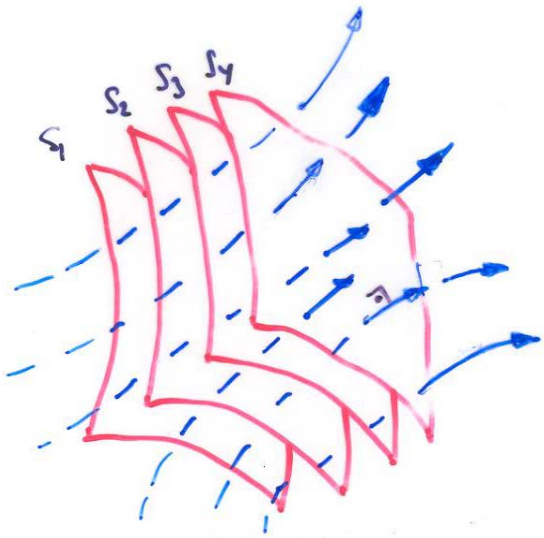
Ondas cilíndricas: los frentes de onda son superficies cilíndricas, $g(x, y, z) = 0$ es una superficie cilíndrica, y una manera de generarlas es a través de un conjunto de focos puntuales distribuidos sobre una recta que emiten en fase; el equivalente bidimensional sería el de ondas circulares en las que $g(x, y) = 0$ representa una circunferencia.

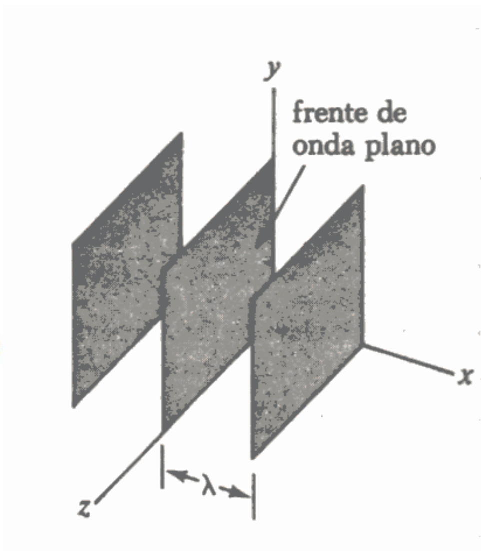
Ondas planas: los frentes de onda son planos, $g(x,y,z)=0$ representa un plano, y en el caso de propagación serán las más estudiadas ya que aunque no tienen una existencia real si que representan una buena aproximación de las ondas esféricas cuando estamos lejos de las fuentes que las originan pues localmente se puede sustituir la superficie esférica por su plano tangente.

Otros tipos: cuando los frentes de onda son distintos a los anteriores y que suelen darse, cuando tenemos medios no homogéneos y/o anisótropos como por ejemplo una onda de presión en un gas sometido a un gradiente de temperatura.









6.- Intensidad de onda

Es este un concepto poco claro y que se presta a distintas definiciones en función del tipo de onda y de las características del emisor. Así, con carácter general, las fuentes no emiten a una sola frecuencia (no son monocromáticas) sino que emiten en un rango más o menos amplio de frecuencias, de manera que la potencia (propiedad del emisor) que emiten en cada dirección y para cada frecuencia es distinta. De igual modo a la hora de captar la onda el detector puede ser *sintonizado* (solo capta la energía que llega a una frecuencia) o *no sintonizado* (capta energía a distintas frecuencias); por otro lado como la onda no está localizada, como en el caso de una partícula, sino que se extiende por amplias zonas del espacio nos interesa no tanto la energía sino el ritmo de llegada a un determinado lugar; así se suele hablar de la densidad espectral de potencia, $I_\upsilon \equiv I_\lambda$ que es la energía por unidad de tiempo (potencia) que llega a un determinado lugar, por unidad de superficie a una de las frecuencias de la onda (o longitud de onda). Se mide en $I_\upsilon \left[\mathrm{W\,m^{-2}\,Hz^{-1}} \right] \equiv I_\lambda \left[\mathrm{W\,m^{-2}\,\mu m^{-1}} \right]$; como nosotros trataremos, esencialmente, con ondas monocromáticas hablaremos de la intensidad del movimiento ondulatorio o de la onda *I* definida como la energía por unidad de tiempo que incide sobre una superficie unidad situada perpendicularmente a la dirección de propagación.

$I = \dfrac{\Delta E}{\Delta S\,\Delta t} = \dfrac{P}{\Delta S} \;/\; [I] \equiv \left[\mathrm{W\,m^{-2}} \right] \overset{Term.Diferenc.}{\Rightarrow} P = \displaystyle\int_S I\,\vec{u}_P \cdot d\vec{S}$ [21], donde $\vec{u}_P$ nos indica la dirección de propagación. La intensidad, al igual que las magnitudes que describen las ondas, varía con el tiempo por lo que la energía que llega a nuestro detector, situado en una posición concreta, no es constante por lo que cuando hablamos de la intensidad nos referimos al valor promedio que para ondas armónicas es $I = \langle I \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I(t)\,dt$ [22]

¿Cuánto vale la intensidad en función de las propiedades del medio y de las características del emisor?

La respuesta no es la misma dependiendo si se trata de una onda mecánica o una onda electromagnética (discusión del efecto fotoeléctrico).

6.1.- Intensidad de una onda mecánica o material

Sea una onda mecánica armónica de frecuencia ω que se propaga con velocidad *c* en la dirección dada por el vector unitario $\vec{u}$; y situemos, perpendicularmente a la dirección $\vec{u}$, una superficie ΔS ¿cuánta energía atraviesa el área ΔS en un intervalo de tiempo $\Delta t \to 0$?

Será la contenida en un cilindro de base ΔS y altura $c\,\Delta t$

$$\Delta E = e\,n\,\Delta V \;/\; \begin{cases} e: \text{ es la energía de cada partícula debida a su estado vibratorio} \\ n: \text{ es el nº de partículas por unidad de volumen} \\ \Delta V = \Delta S\,c\,\Delta t \text{ es el volumen del cilindro} \end{cases}$$

Suponiendo que todas las partículas del volumen elemental están en el mismo estado de vibración, debido a la oscilación forzada, la energía de cada partícula será la suma de la energía potencial más la energía cinética las cuales se van intercambiando a lo largo del tiempo, por lo que la energía promedio será la correspondiente bien a la energía cinética máxima o a la energía potencial máxima; eligiendo la primera de estas dos posibilidades se puede escribir $e = \dfrac{1}{2} m_p \omega^2 A^2$ por lo cual

$$\Delta E = e\,n\,\Delta V = \frac{1}{2} m_p \omega^2 A^2 n\,\Delta S\,c\,\Delta t = \frac{1}{2}\rho\,c\,\omega^2 A^2 \Delta S \Delta t$$

$$\langle w_{\text{mec}} \rangle = w_{\text{mec}} = \frac{dE}{dV} \equiv \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 A^2 \;\Rightarrow\; I = \frac{\Delta E}{\Delta S\,\Delta t} = \frac{1}{2}\rho\,c\,\omega^2 A^2 = w_{\text{mec}}\,c \quad [23],$$

en la que w_{mec} es la densidad de energía asociada a la onda.

6.2.- Intensidad de una onda electromagnética

Coincide con el valor medio del vector de Poynting; en el tema de ecuaciones de Maxwell se ofrece una discusión sobre este asunto en el epígrafe 9.

6.3.- Variación de la amplitud y la intensidad de la onda con la distancia al foco emisor

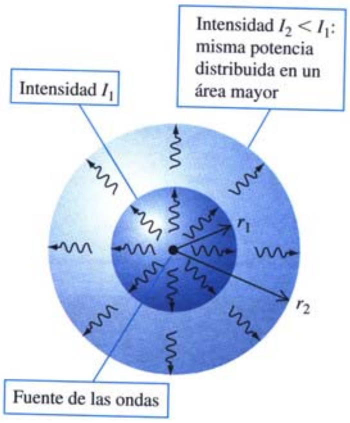
a) Ondas esféricas

Supongamos un foco que emite con potencia P de manera omnidireccional sobre un medio lineal, isótropo, homogéneo, ilimitado y sin pérdidas y sean FO_1 y FO_2 dos FO de radios r_1 y r_2 entonces

$$I_1 = \frac{P}{A_{SE(r_1)}} = \frac{P}{4\pi r_1^2} \quad \text{y} \quad I_2 = \frac{P}{A_{SE(r_2)}} = \frac{P}{4\pi r_2^2}$$

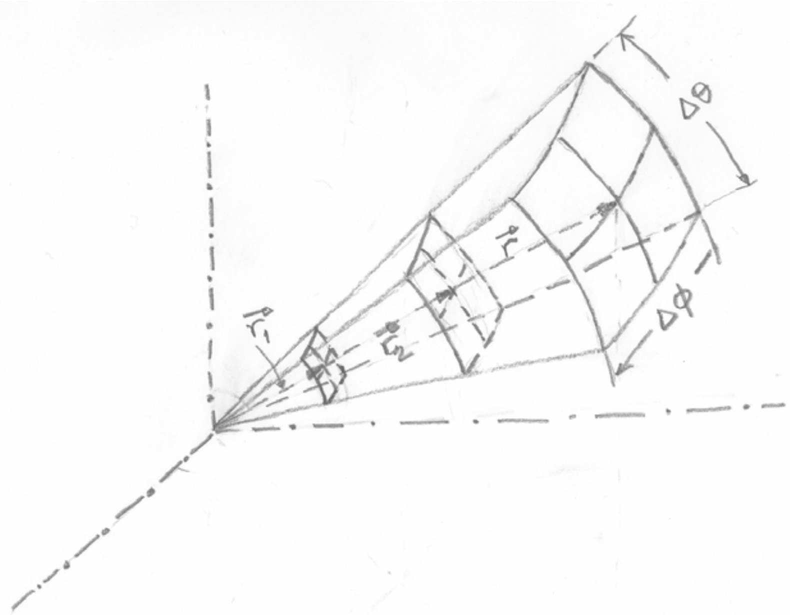
$$I_1 4\pi r_1^2 = I_2 4\pi r_2^2 \;\Rightarrow\; \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \;\Rightarrow\; I \alpha \frac{1}{r^2} \quad [24]$$

$$I \,\alpha A^2 \text{ y } I \,\alpha \frac{1}{r^2} \;\Rightarrow\; A \alpha \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad [25]$$



¿Qué forma tienen las funciones de onda esféricas $\psi(r,t)$?

En este supuesto no son necesarias las condiciones de emisión omnidireccional e isotropía, ya que si observamos la onda según la dirección indicada por θ y ϕ se puede despreciar cualquier variación de la energía en una zona piramidal comprendida entre pequeñas variaciones de θ y ϕ, $\Delta\theta$ y $\Delta\phi$



$$\Delta S_1 = r_1^2\,\Delta\theta\,\Delta\phi \;;\; \Delta S_2 = r_2^2\,\Delta\theta\,\Delta\phi \;;\; \Delta S = r^2\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

$$I_1=\frac{P_{zona}}{\Delta S_1}=\frac{P_{zona}}{r_1^2\,\Delta\theta\,\Delta\phi}\;;\;I_2=\frac{P_{zona}}{\Delta S_2}=\frac{P_{zona}}{r_2^2\,\Delta\theta\,\Delta\phi}\;;\;I=\frac{P_{zona}}{\Delta S}=\frac{P_{zona}}{r^2\,\Delta\theta\,\Delta\phi}$$

$$I_1\,r_1^2=I_2\,r_2^2=I\,r^2\quad\Rightarrow\quad I\,\alpha\,\frac{1}{r^2}\ \text{(como sucedía en condiciones isotrópicas)}$$

Al observar en una dirección dada podemos suponer que la función de onda es de la misma forma que en el caso de ondas planas y postular que $\psi(r,t)=F\left(t-\frac{r}{c}\right)$, pero está función no se deforma ni atenúa y del párrafo anterior sabemos que, por motivos exclusivamente geométricos, la onda va disminuyendo su amplitud de la forma $A\alpha\frac{1}{r}$; entonces para que nuestra función original de cuenta de la realidad hemos de introducir un factor inversamente proporcional a la distancia al foco,

$$\psi(r,t)=\frac{1}{r}F\left(t-\frac{r}{c}\right)\quad[25]$$

Los problemas de [25] son dos, el primero es que si $r<1$ hay una amplificación (sacar energía de la nada) y el segundo es que el factor añadido aporta dimensiones lo que no debería suceder; para solucionar esto razonamos diciendo que el foco al vibrar alcanza una región del espacio definida por un radio medio, digamos r_0, y tenemos que observar los efectos fuera de dicho espacio, es decir para $r>r_0$, por lo que escribimos

$$\psi(r,t)=A(r)F\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{A_0}{r/r_0}F\left(t-\frac{r}{c}\right)\quad\forall r\ge r_0\ /\ \frac{A(r)}{A_0}=\frac{r_0}{r}\quad[26],$$

donde sólo utilizamos el signo – ya que la onda siempre diverge.

Si la perturbación es armónica $\psi(r,t)=A(r)e^{j(\omega t-kr)}=\frac{A_0}{r/r_0}e^{j(\omega t-kr)}\quad\forall r\ge r_0$ [27]

b) <u>Ondas cilíndricas</u>

Sean N focos distribuidos linealmente y cada uno emite con potencia P en fase y a la misma frecuencia, en consecuencia

$$I_1=\frac{N\,P}{A_{Lat,cil(r_1)}}=\frac{N\,P}{2\pi r_1 L}\ \text{ y }\ I_2=\frac{N\,P}{A_{Lat,cil(r_2)}}=\frac{N\,P}{2\pi r_2 L}\ \Rightarrow$$

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2}{r_1}\ \Rightarrow\ I\,\alpha\,\frac{1}{r}\ \Rightarrow\ A\alpha\frac{1}{\sqrt{r}}\quad[28]$$

c) <u>Ondas planas</u> (aproximación de ondas esféricas si $r\gg\lambda$)

Todos los FO (planos) tienen los mismos puntos por lo que la energía total promedio en cada plano es constante y no cambia con la distancia

$$I(r_1)=I(r_2)=I=\mathrm{C}_0\ \Rightarrow\ A(r_1)=A(r_2)=A_0\,\alpha\sqrt{\mathrm{C}_0}\quad[29]$$

8.- Pulsos: velocidad de fase y velocidad de grupo

Las ondas armónicas llevan implícito algo que no se ha comentado y es que existen para todo tiempo y en cualquier punto. Sea una onda que se propaga con velocidad *v*, de modo que $v = \omega / k$, que se suele llamar velocidad de fase y se llama así porque lo que hacemos es fijarnos en un valor concreto de la fase al cual seguimos en el espacio y en el tiempo; es decir, si determinado valor de la fase tiene lugar en un instante t en un punto x, el mismo valor de la fase en un instante $t + \Delta t$ se encontrará en el punto $x + \Delta x$ si la onda se propaga hacia la derecha. En términos diferenciales, si el valor de la fase es $(\omega t - k x) = \text{cte}$, entonces diferenciando

$$\omega\, dt - k\, dx = 0 \;\Rightarrow\; v_F = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

En la naturaleza lo habitual es encontrar perturbaciones que se propagan como una onda que tienen un principio y un fin y que están compuestas por varias ondas armónicas de diferente frecuencia. A esto conjunto de ondas le llamamos **tren de ondas o pulso de ondas**, entonces la velocidad de fase no tiene porque ser la velocidad del tren de ondas ya que no se trata de una onda armónica sino de la superposición de varias ondas. Para ver esto consideremos un tren de ondas compuesto de dos ondas armónicas de frecuencias muy próximas, centradas alrededor de $\omega, \omega_1 = \omega - \Delta\omega$ y $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$, a las que corresponden números de onda $k_1 = k - \Delta k$ y $\mathrm{k}_2 = k + \Delta k$, de modo que tengan amplitudes iguales:

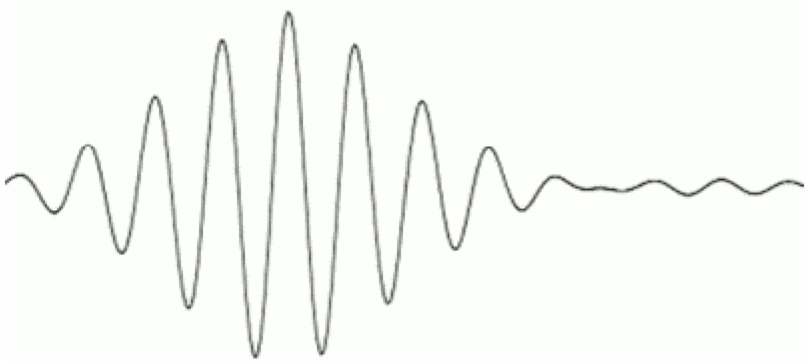
$$\psi(x,t) = \psi_0 \operatorname{sen}(k_1 x - \omega_1 t) + \psi_0 \operatorname{sen}(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\psi(x,t) = 2\psi_0 \cos\left(\frac{1}{2}\left[(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\right]\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\left[(k_2 + k_1)x - (\omega_2 + \omega_1)t\right]\right)$$

$$\psi(x,t) = 2\psi_0 \cos\left(\frac{1}{2}\left[(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\right]\right) \operatorname{sen}(k\,x - \omega t)$$

$$\psi(x,t) = 2\psi_0 \cos(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t) \operatorname{sen}(k\,x - \omega t)$$

La expresión anterior representa un movimiento ondulatorio con amplitud modulada en el que la amplitud modulada, término que varía más lentamente, se propaga con una velocidad que se conoce con el nombre de **velocidad de grupo**. En la figura se muestra el perfil de dicho movimiento ondulatorio



La velocidad de grupo (la velocidad de la fase asociada al término lentamente variable) es

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk},$$

como $\omega = kv \Rightarrow \dfrac{d\omega}{dk} = v + k\dfrac{dv}{dk} = v - \lambda\dfrac{dv}{d\lambda} \Rightarrow v_g = v + k\dfrac{dv}{dk} = v - \lambda\dfrac{dv}{d\lambda}$ [30]

Si $\dfrac{dv}{dk} \neq 0$ se dice que el medio es dispersivo.

Si $\dfrac{dv}{dk} \neq 0$ se dice que el medio es dispersivo. En estas circunstancias la velocidad de grupo coincide con la de fase o lo que es equivalente todas las ondas, con independencia de su frecuencia, se mueven con la misma velocidad.

Si queremos transmitir datos digitales en forma de pulsos a través de un medio es de desear que éste sea no dispersivo ya que un pulso rectangular o una serie de pulsos consta de muchos componentes armónicos de Fourier con distintas frecuencias; así si la velocidad de fase es la misma para todas las componentes armónicas (o al menos para las más dominantes) la forma del pulso no cambiará conforme estos viajan por el medio. Por contra si el medio es dispersivo la forma del pulso se distorsiona progresivamente y la longitud de ellos se incrementa como una función de la distancia recorrida en él; esto impone una limitación en la velocidad de transferencia de datos máxima (relacionada con la longitud de los pulsos individuales y la separación entre pulsos adyacentes) que es posible transmitir a través de un medio sin pérdida de información.

8.- Ecuación de ondas con términos disipativos

Una importante modificación de la ecuación de ondas surge cuando interviene el rozamiento, o alguna otra fuerza disipadora, en el estudio de algún problema concreto ya que producen una amortiguación de la perturbación. El efecto de amortiguación suele estar representado por un término proporcional a la primera derivada de nuestra función ψ, es decir aparecen términos $h\dfrac{\partial\psi}{\partial t}$. La ecuación de ondas cuando incorpora términos de disipación se suele escribir de la siguiente forma

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + h\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\} \quad [31]$$