• Substituce

Děláme-li substituci ve 2D, musíme zavést dvě nové proměnné. Zároveň předpokládáme, že mezi proměnnými lze vzájemně jednoznačně přecházet.

$$x = f_1(s,t), y = f_2(s,t), \quad (x,y) \in M \qquad \Leftrightarrow \qquad s = h_1(x,y), t = h_2(x,y), \quad (s,t) \in N$$

Samozřejmě je rovněž nutné přepočítat meze. Je-li tedy např. množina M zadána nerovnicemi

$$a \ \leq \ x \ \leq \ b, \quad g_1(x) \ \leq \ y \ \leq \ g_2(x),$$

potom omezující podmínky pro proměnné s a t (definici množiny N) získáme ze vztahů

$$a \ \leq \ f_1(s,t) \ \leq \ b, \quad g_1(f_1(s,t)) \ \leq \ f_2(s,t) \ \leq \ g_2(f_1(s,t)).$$

V 1D musíme ještě přepočítat diferenciál dx. Tomu ve 2D odpovídá výpočet absolutní hodnoty determinantu Jacobiho matice (tj. matice parciálních derivací) zobrazení f_1 a f_2 podle proměnných s a t:

$$J_F \ = \ \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Věta o substituci: Je-li u spojitá funkce na M a $f_1, f_2 : N \to M$ spojitě diferencovatelné funkce takové, že $J_F = \frac{\partial f_1}{\partial s}\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial f_2}{\partial s} \neq 0$ všude v N, potom

$$\iint_M u(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad = \quad \iint_N u(f_1(s,t), f_2(s,t)) \cdot |J_F|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

Příklad: Vypočítejte dvojný integrál $\int_M \frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}A$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 3x \wedge \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}\}$.

Řešení: Úpravou podmínek pro x a y získáme:

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 3, \qquad 1 \leq xy \leq 2.$$

Bude tedy vhodné zavést substituci $s = h_1(x,y) = \frac{y}{x}$ a $t = h_2(x,y) = xy$. Nové proměnné pak splňují nerovnice

$$1 \leq s \leq 3, \qquad 1 \leq t \leq 2.$$

Integrovat proto budeme přes obdélník $[1,3] \times [1,2]$. Zbývá nám vyjádřit si proměnné x, y pomocí proměnných s, t a spočítat jakobián.

$$s = \frac{y}{x},\ t = xy \qquad \Rightarrow \qquad \frac{t}{s} = x^2,\ st = y^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{t}{s}} = f_1(s,t),\ y = \sqrt{st} = f_2(s,t)$$

$$J_F \ = \ \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{pmatrix} \ = \ \det \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{t}{4s^3}} & \sqrt{\frac{1}{4st}} \\ \sqrt{\frac{t}{4s}} & \sqrt{\frac{s}{4t}} \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{t}{4s^3}}\sqrt{\frac{s}{4t}} - \sqrt{\frac{1}{4st}}\sqrt{\frac{t}{4s}} = -\frac{1}{4s} - \frac{1}{4s} = -\frac{1}{2s}$$

Nakonec už jen vše dosadíme do vzorce pro substituci:

$$\iint_M \frac{y^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ = \iint_N \frac{f_2^2(s,t)}{f_1^2(s,t)}\,|J_F|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \ = \int_1^3 \int_1^2 \frac{st}{\frac{t}{s}} \left| -\frac{1}{2s} \right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \ = \int_1^3 \int_1^2 \frac{s}{2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \ = \int_1^3 \frac{s}{2}\,\mathrm{d}s \ = \ \frac{3^2}{4} - \frac{1^2}{4} \ = \ 2$$

Příklad: Pomocí substituce do polárních souřadnic spočítejte obsah kruhu $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Řešení: Chceme spočítat integrál $\int_M 1\,\mathrm{d}A$. Polární souřadnice mají tvar:

$$\begin{aligned} x &= f_1(r,\varphi) = r\cos\varphi \\ y &= f_2(r,\varphi) = r\sin\varphi \end{aligned}$$

Dosadíme-li do definice množiny M, vidíme, že musí být splněno

$$x^2 + y^2 \ = \ r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \ = \ r^2 \ \leq \ R^2,$$

Tedy $r \leq R$. Pro φ žádná omezení nemáme, proto uvažujeme celou periodu: $\varphi \in [0, 2\pi]$

Pro jakobián platí

$$J_F \ = \ \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \ = \ \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \ = \ r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \ = \ r.$$

Dosadíme-li do vzorce pro substituci, získáme

$$\iint_M 1\,\mathrm{d}A \ = \ \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \ = \ \int_0^R 2\pi r\,\mathrm{d}r \ = \ \left[\pi r^2\right]_0^R \ = \ \pi R^2.$$

Příklad:[1.29] Vypočítejte dvojný integrál $\int_M (1-3x-2y)\,\mathrm{d}A$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4 \wedge y \ge x\}$.
Řešení: Použijeme-li polární souřadnice, platí

$$x^2+y^2 = r^2 \le 4, \quad \text{a} \quad y = r\sin\varphi \ge r\cos\varphi = x,$$

tedy $\sin\varphi \ge \cos\varphi$, nebo-li $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. Dosadíme-li do vzorce pro substituci, získáme

$$\int_M (1-3x-2y)\,\mathrm{d}A = \int_{r=0}^{2}\int_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1-3r\cos\varphi-2r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_{r=0}^{2} \left[r\varphi - 3r^2\sin\varphi + 2r^2\cos\varphi\right]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 \pi r + (3-2)\sqrt{2}\,r^2\,\mathrm{d}r = \left[\pi\frac{r^2}{2} + \sqrt{2}\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = 2\pi + \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Příklad:[1.30] Vypočítejte dvojný integrál $\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A$, kde $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e} \wedge y \ge 0\}$.
Řešení: Použijeme-li polární souřadnice, platí

$$1 \le r^2 \le \mathrm{e} \quad \text{a} \quad y = r\sin\varphi \ge 0,$$

tedy $\sin\varphi \ge 0$, nebo-li $\varphi \in [0,\pi]$. Dosadíme-li do vzorce pro substituci, získáme

$$\int_M \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}A = \int_{r=1}^{\sqrt{e}}\int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{\ln r^2}{r^2}\cdot r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_1^{\sqrt{e}} 2\pi\frac{\ln r}{r}\,\mathrm{d}r = \pi\left[\ln^2 r\right]_1^{\sqrt{e}} = \pi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

Někdy je lepší polární souřadnice posunout, potom mají tvar (jakobián zůstává stejný, tj. $J_F = r$)

$$\begin{aligned} x &= f_1(r,\varphi) = A + r\cos\varphi \\ y &= f_2(r,\varphi) = B + r\sin\varphi \end{aligned}$$

Má-li oblast M (nebo její část) tvar elipsy, je vhodné použít eliptické souřadnice (jakobián je $J_F = abr$)

$$\begin{aligned} x &= f_1(r,\varphi) = ar\cos\varphi \\ y &= f_2(r,\varphi) = br\sin\varphi \end{aligned}$$

Úkoly:

Ze sbírky dr. Šibravy:

- U příkladů **1.15, 1.17 a 1.19** sestavte integrály pro použítí Fubiniovy věty (oba dva způsoby - jednou vnější proměnná x, jednou y). Integrály **nepočítejte!**
- Vyberte si **tři** příklady z příkladů **1.31–1.46** a spočítejte je.

Sbírku naleznete na adrese `https://mat.fsv.cvut.cz/BAKALARI/ma3si/files/vic_int.pdf`
Odkaz je dostupný rovněž ze stránek předmětu Matematika 3 ≫ Literatura ≫ Vícenásobné integrály