# Capítulo 3

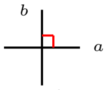
# Plano Métrico

En los espacios métricos introduciremos la noción de ortogonalidad entre rectas y analizaremos el quinto axioma de Euclides.

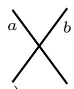
## 3.1. Introducción

Para enunciar los axiomas del plano métrico, consideremos $\Pi = (\mathcal{P},\ \mathcal{L},\ \mathcal{I},\ \perp)$ donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de puntos, $\mathcal{L}$ es el conjunto de rectas, $\mathcal{I}$ una relación de incidencia entre puntos y rectas y $\perp$ una relación ortogonalidad entre rectas.

$a \perp b$



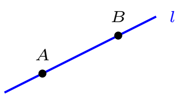

$a \not\perp b$



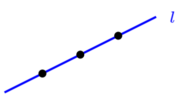

Ahora veamos los tres tipos de axiomas (afines, perpendicular y colineación).

### 3.1.1. Axiomas Afines:

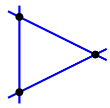
1. Si$A, B \in \mathcal{P}, A \neq B$ entonces $(\exists! l \in \mathcal{L})(A\mathcal{I}l \wedge B\mathcal{I}l)$




2. Cada recta contiene al menos tres puntos.

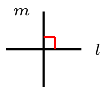



3. Existe un triángulo (tres puntos no colineales).

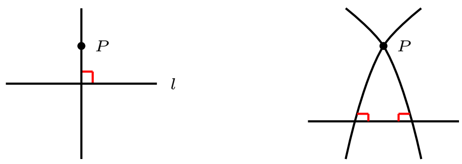


### 3.1.2. Axiomas de Ortogonalidad

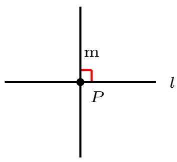
1. Sean $l, m \in \mathcal{L}$ tal que si $l \perp m$, entonces $m \perp l$ ($\perp$ es simétrico)



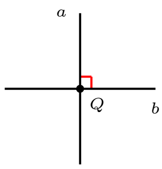

2. Sean $P \in \mathcal{P}, l \in \mathcal{L}$, entonces $\exists m \in \mathcal{L}$ tal que $P\ \mathcal{I}\ m$ y $m \perp l$




Además si $P\mathcal{I}l$, entonces $m$ es única.




3. Si $l \perp m$, entonces $l \cap m \neq \varnothing$




**Definición 3.1** *Sean* $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \perp)$ *plano que cumple los axiomas afines y de ortogonalidad y* $f$ *una función biyectiva, se dice que* $f$ *es una colineación del plano* $\Pi$ *si y sólo si*

*i)* $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ *y* $f : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ *son biyectiva.*

*ii) Preserva incidencia:*

*Para todo* $P, l$ *se tiene que si* $P\mathcal{I}l$*, entonces* $f(P)\mathcal{I}f(l)$*.*

*iii) Preserva Ortogonalidad.*

*Para todo* $l, m$ *se tiene que si* $l \perp m$*, entonces* $f(l) \perp f(m)$*.*

**Notación:**

$$\mathrm{Aut}(\Pi) = \{f : \Pi \to \Pi \mid f \text{ es colineación}\}$$

**Simetrías en el plano.**

**Definición 3.2** *Sea $R \in Aut(\Pi)$, se dice que $R$ es una simetría de eje $l$ si y sólo si*

i) $R \neq \mathrm{Id}$

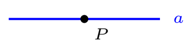
ii) $R$ tiene orden dos

iii) $R$ fija a todos los puntos de una recta $l$ (eje de simetría)

**Notación:** $R_l$ es la simetría de eje $l$.

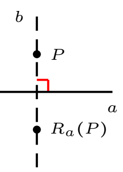
**Visualización de una simetría:** Sean $P \in \mathcal{P}$ y $a, b \in \mathcal{L}$

1. Si $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a(P) = P$




2. Si $P\not{\mathcal{I}}a$, entonces existe $b \perp a$, tal que $P\mathcal{I}b$, pero $\{Q\} = a \cap b$, luego $b$ es única recta tal que $Q\mathcal{I}b$.

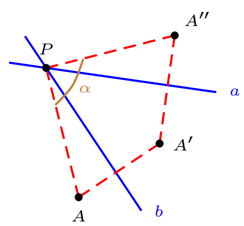
   Pero $R_a(Q) = Q$, $R_a(P)\mathcal{I}R_a(b)$, $Q\mathcal{I}R_a(b)$, y como $R_a(a) \perp R_a(b)$, por ello $R_a(b) = b$, de lo cual tenemos que $R_a(P)\mathcal{I}b$.



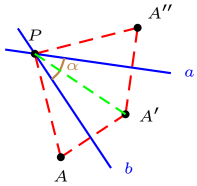

**Rotaciones:**
Sea $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Pi)$, se dice que $\sigma$ es una rotación si y sólo si existen $R_a$, $R_b \in \mathrm{Aut}(\Pi)$, tal que $a \cap b = \{P\}$ y $\sigma = R_a \circ R_b$.

a) $P$ se denomina centro de rotación.

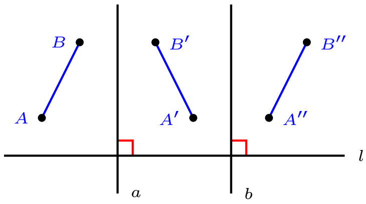
b) El ángulo de rotación viene dado por $\alpha = \sphericalangle APA''$, donde $A'' = \sigma(A)$



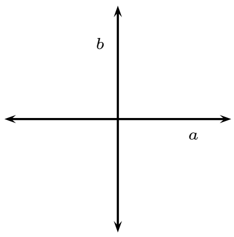

En plano Real el ángulo de una rotación siempre es el doble del ángulo entre las rectas $a$ y $b$.




**Traslaciones:**
Sea $t \in \text{Aut}(\Pi)$. Diremos que $t$ es traslación a lo largo de $l$ si y sólo si existe $a, b \in \mathcal{L}$ tales que $t = R_a \circ R_b, a \cap b = \varnothing$ y $a \perp l \wedge b \perp l$ $(R_a, R_b$ simetría).




**Simetría Puntual** Sea $H_P \in \text{Aut}(\Pi)$. Diremos que $H_P$ es una simetría Puntual si y sólo si existen $a, b \in \mathcal{L}$ tales que $H_P = R_a \circ R_b$, $a \cap b = \{P\}$ y $a \perp b$




### 3.1.3. Axiomas de Colineaciones:

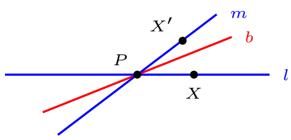
1. **Simetrías**

   a) Todas recta está asociada a una única simetría.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \to & \text{Aut}(\Pi) \\ a & \to & R_a \end{array}$$

   b) El grupo de las colineaciones esta generado por el conjunto de las simetrías del plano afín.

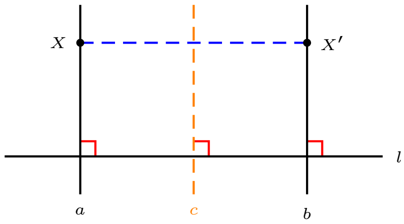
2. **Rotación:** Sea $\sigma$ una rotación tal que $\sigma(P) = P$ y $\sigma(l) = m$, entonces existe $b \in \mathcal{L}$ tal que $P \ \mathcal{I} \ b$ y $(\forall X \mathcal{I} l)(R_b(X) = \sigma(X))$




$$R_b|_l = \sigma|_l$$

3. **Traslaciones:** Sea $t$ traslación a lo largo de la recta $l$ del plano $\Pi$.

   Sean $a, b \in \mathcal{L}$ tales que $a \perp l \wedge b \perp l$ y $t(a) = b$, entonces existe $c \in \mathcal{L}$ tal que $c \perp l$ y $(\forall X \mathcal{I} a)(R_c(X) = t(X))$.




   donde $c$ se visualiza como la paralela media entre $a$ y $b$

## 3.2. Plano Métrico

**Definición 3.3** $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \perp)$ *es un plano métrico, si y sólo si satisface los axiomas: afines, de ortogonalidad y de colineación.*
*Además, el grupo de las colineaciones corresponde a* $Aut(\Pi)$, *es decir, biyecciones entre puntos, entre rectas y que preservan incidencia y ortogonalidad.*

**Propiedad 3.4** *Sean* $\Pi$ *plano métrico,* $\sigma \in Aut(\Pi)$ *y* $R_a$ *simetría de eje* $a$, *entonces*

$$\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = R_{\sigma(a)}$$

**Demostración:** Notemos que $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}$ es una simetría, ya que

i) $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} \neq Id$. Supongamos que $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = Id$ entonces

$$\begin{array}{rcl} R_a & = & \sigma^{-1} \circ \sigma \\ R_a & = & Id \end{array}$$

Pues esto es una contradicción, por lo tanto es distinta de la identidad.

ii) $(\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}) = Id$

Esto es verdadero pues $Id = Id$, de esta forma se cumple que tiene orden dos.

iii) $\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1}$ deja fijos a todos los puntos de la recta $\sigma(a)$

Si $P \mathcal{I} a$ entonces $\sigma(P) \mathcal{I} \sigma(a)$

$$(\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1})(\sigma(P)) = \sigma(R_a(P)) = \sigma(P)$$

Luego tenemos, es una simetría y fija los puntos de la recta $\sigma(A)$, luego

$$\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = R_{\sigma(a)}$$

■

**Corolario 3.5** *Sean* $\Pi$ *plano métrico,* $a, b, l \in \mathcal{L}$ *tal que* $R_l(a) = b$ *entonces*

$$R_l \circ R_a \circ R_l = R_b.$$

**Propiedad 3.6** *Sea* $\Pi$ *plano métrico y* $a, b \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \perp b$ *entonces* $R_a(b) = b$.

**Demostración:**
Sea $\{P\} = a \cap b$, luego tenemos que $b$ es la única recta ortogonal a $a$ en $P$. Además $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a(P) = P$.
Pero $R_a(P)\mathcal{I}R_a(b)$ y $R_a(b) \perp R_a(a)$, de lo cual tenemos que:

$$P\mathcal{I}R_a(b) \text{ y } R_a(b) \perp a$$

Por unicidad de $b$, se tiene que $R_a(b) = b$. ■

**Propiedad 3.7** *Sea* $\Pi$ *plano métrico y* $a, b \in \mathcal{L}$ *distintas tales que* $R_a(b) = b$ *entonces* $a \perp b$.

**Demostración:**
Sea $P\mathcal{I}b$ y $P\not{\mathcal{I}}a$, luego tenemos que $R_a(P)\mathcal{I}b$, consideremos $c$ tal que $P\mathcal{I}c$ y $c \perp a$, entonces por la propiedad anterior tenemos $R_a(c) = c$, de lo cual $R_a(P)\mathcal{I}c$.
De este modo tenemos que $P, R_a(P)\mathcal{I}c$, por ello tenemos $c, b$ tiene dos puntos en común, luego las rectas son iguales, de lo cual obtenemos que $b \perp a$. ■

**Propiedad 3.8** *Sean* $\Pi$ *plano métrico,* $a, b \in \mathcal{L}$ *distintas, entonces*

$$a \perp b \quad \textit{si y sólo si} \quad R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

**Demostración:** Sean $a, b \in \mathcal{L}$ y $a \perp b$, luego tenemos que $R_a(b) = b$, además $R_a^{-1} = R_a$, de este modo tenemos que

$$R_a \circ R_b \circ R_a^{-1} = R_{R_a(b)} = R_b.$$

despejando obtenemos

$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

Supongamos ahora que

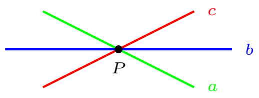
$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

despejando, y usando la propiedad tenemos

$$R_{R_a(b)} = R_a \circ R_b \circ R_a = R_b$$

luego $R_a(b) = b$, de lo cual $a \perp b$. ■

**Teorema 3.9 (Teorema de las Tres Simetrías para Rotación)** *Sea* $\Pi$ *plano métrico. Si* $P \in \mathcal{P}$ *y* $a, b, c \in \mathcal{L}$*, tal que* $P\mathcal{I}a, b, c$*, entonces* $(\exists d \in \mathcal{L})(R_a \circ R_b \circ R_c = R_d \ \wedge \ P\mathcal{I}d)$




**Demostración:** Ya que $R_c \circ R_b$ es una rotaciones de centro $P$ y consideremos $(R_c \circ R_b)(a) = a'$, entonces por axioma de rotación existe $d \in \mathcal{L}$ tal que $d\mathcal{I}l \;\wedge\; R_c \circ R_b|_a = R_d|_a$
Notemos que

$$\begin{array}{rcll} (R_c \circ R_b)(x) & = & R_d(x) & ; \forall x\mathcal{I}a \\ (R_d \circ R_c \circ R_b)(x) & = & x & ; \forall x\mathcal{I}a \end{array}$$

De lo cual obtenemos que

$$R_d \circ R_c \circ R_b = Id \;;\; R_d \circ R_c \circ R_b = R_a$$

Supongamos que

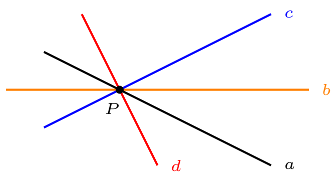
$$\begin{array}{rcl} R_d \circ R_c \circ R_b & = & Id \quad /R_d \circ \\ R_c \circ R_b & = & R_d \end{array}$$

de lo cual tenemos $R_c \circ R_b = R_d$, en donde

$$\begin{array}{rcl} R_c \circ R_b \circ R_c \circ R_b & = & Id \\ R_c \circ R_b \circ R_c & = & R_b \\ R_c \circ R_b & = & R_b \circ R_c \\ b & \perp & c. \end{array}$$

Análogamente $d \perp c$. Por lo tanto por $P$ pasan dos rectas $b, d$ perpendiculares a $c$ esto es una contradicción, luego debe cumplirse la otra igualdad.

$$\begin{array}{rcl} R_d \circ R_c \circ R_b & = & R_a \\ R_d \circ R_c & = & R_a \circ R_b \\ R_d & = & R_a \circ R_b \circ R_c \end{array}$$

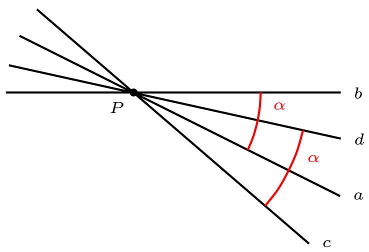



■

**Teorema 3.10** *Sea $\Pi$ plano métrico y $\sigma$ una rotación de centro $P$.*

$$\textit{Si } P\mathcal{I}a, \textit{ entonces } (\exists b \in \mathcal{L})(P\mathcal{I}b \;\wedge\; \sigma = R_a \circ R_b)$$

**Demostración:** Ya que $\sigma$ es una rotación, existen $c, d \in \mathcal{L}$ tales que $c \cap d = \{P\}$ y $\sigma = R_c \circ R_d$



Luego tenemos que $P\mathcal{I}a,c,d$ y por teorema de las tres simetrías se obtiene

$$R_a \circ R_c \circ R_d = R_b$$

Despejando

$$R_c \circ R_d = R_a \circ R_b = \sigma$$

■

**Teorema 3.11** *Sea* $\Pi$ *un plano métrico y* $P \in \mathcal{P}$.

$$G_P = \{\sigma \in Aut(\Pi) \mid \sigma \textit{ rotación de centro } P\}$$

*entonces* $(G_P, \circ)$ *es un grupo abeliano.*

**Demostración: Clausura** Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in G_P$, luego existen $a, b, c, d \in \mathcal{L}$ tales que $P\mathcal{I}a,b,c,d$ y $\sigma_1 = R_a \circ R_b$, $\sigma_2 = R_c \circ R_d$.
Como $P\mathcal{I}a,b,c$ y $R_a \circ R_b \circ R_c$, por teorema de las tres simetrías existe $l \in \mathcal{L}$ tal que $P\mathcal{I}l$ y $R_a \circ R_b \circ R_c = R_l$.
Luego tenemos que

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_a \circ R_b \circ R_c \circ R_d = R_l \circ R_d \in G_P$$

**Neutro** Dada $a \in \mathcal{L}$ tal que $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a \circ R_a = Id \in G_P$.
**Inverso** Sea $\sigma = R_a \circ R_b \in G_P$, luego

$$\sigma^{-1} = R_b \circ R_a \in G_P$$

**Conmutatividad** Sean $\sigma_1 = R_a \circ R_b$, $\sigma_2 = R_c \circ R_d$. Por demostrar que

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1.$$

Por teorema de las tres simetrías tenemos que $R_b \circ R_c \circ R_d = R_l$
Luego $\sigma_2 = R_b \circ R_l$. De lo cual obtenemos

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_a \circ R_b \circ R_b \circ R_l = R_a \circ R_l$$

y

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = R_b \circ R_l \circ R_a \circ R_b$$

Reemplazando, obtenemos una proposición equivalente a que debemos demostrar

$$R_a \circ R_l \circ R_b = R_b \circ R_l \circ R_a$$

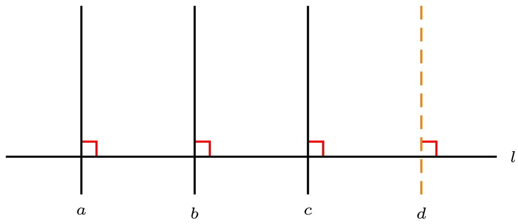
Pero por teorema de las tres simetrías, es una simetría

$$R_a \circ R_l \circ R_b = (R_a \circ R_l \circ R_b)^{-1} = R_b \circ R_l \circ R_a$$

lo que demuestra lo requerido. ■

**Teorema 3.12 (Las Tres Simetrías para traslaciones)** *Sea* $\Pi$ *plano métrico, Si* $a, b, c, l \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \cap b = a \cap c = b \cap c = \varnothing$ *y* $l \perp a, b, c$ *entonces*

$$(\exists d \in \mathcal{L})(R_a \circ R_b \circ R_c = R_d \ \wedge \ d \perp l)$$




**Demostración:** Ya que $R_c \circ R_b$ es una traslación a lo largo de $l$ y consideremos $(R_c \circ R_b)(a) = a'$, entonces por axioma de traslación existe $d \in \mathcal{L}$ tal que $d \perp l \ \wedge \ R_c \circ R_b|_a = R_d|_a$
Notemos que

$$\begin{array}{rcll} (R_c \circ R_b)(x) & = & R_d(x) & ; \forall x \mathcal{I} a \\ (R_d \circ R_c \circ R_b)(x) & = & x & ; \forall x \mathcal{I} a \end{array}$$

De lo cual obtenemos que

$$R_d \circ R_c \circ R_b = Id \ ; \ R_d \circ R_c \circ R_b = R_a$$

Supongamos que

$$\begin{array}{rcll} R_d \circ R_c \circ R_b & = & Id & /R_d \circ \\ R_c \circ R_b & = & R_d & \end{array}$$

de lo cual tenemos $R_c \circ R_b = R_d$, en donde

$$\begin{array}{rcl} R_c \circ R_b \circ R_c \circ R_b & = & Id \\ R_c \circ R_b \circ R_c & = & R_b \\ R_c \circ R_b & = & R_b \circ R_c \\ b & \perp & c. \end{array}$$

luego $b \cap c \neq \varnothing$.
Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} R_d \circ R_c \circ R_b & = & R_a \\ R_d \circ R_c & = & R_a \circ R_b \\ R_d & = & R_a \circ R_b \circ R_c \end{array}$$

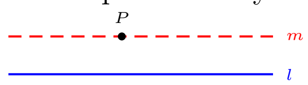
■

**Teorema 3.13** *Sea* $\Pi$ *un plano métrico y* $l \in \mathcal{L}$.

$$G_l = \{\sigma \in Aut(\Pi) \mid \sigma \text{ traslación en la dirección } l \ \}$$

*entonces* $(G_l, \circ)$ *es un grupo abeliano.*

**Observación:** El quinto postulado de Euclides en el plano métrico dice que si $P \in \mathcal{P}$, $l \in \mathcal{L}$ y $P \not\mathcal{I} l$, implica que existe un único $m \in \mathcal{L}$ tal que $P\ \mathcal{I}\ m$ y $m \parallel l$

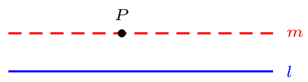



1. Los planos métricos, que cumple el quinto axioma de Euclides se le denomina plano **Euclidiano**.
2. Si no existe rectas paralelas, entonces el plano métrico se denomina plano **Elíptico**.
3. Si existen infinitas paralelas, entonces el plano métrico se denomina plano **Hiperbólico**.

## 3.3. Plano Euclidiano

El plano Euclidiano es un plano métrico en el cual se cumple el **quinto postulado de Euclides**, es decir, es un plano $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}, \perp)$ que cumple con

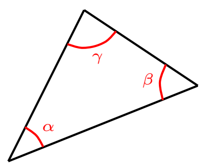
1. Los axiomas afines
2. Los axiomas de ortogonalidad
3. Los axiomas de colinealidad
4. **Axioma Euclides** Si $P \not\mathcal{I} l$ entonces $\exists! m \in \mathcal{L}$ tal que $P \mathcal{I} m \ \wedge \ m \parallel l$



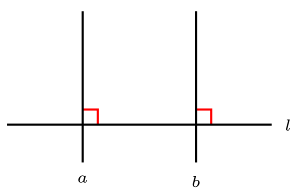

**Introducción:** A través de éste axioma se derivan muchas propiedades de la geometría clásica, como las siguientes:

1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°

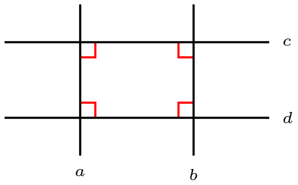
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$




2. Si $a \perp l \wedge b \perp l$, $a \neq b$ entonces $a \parallel b$

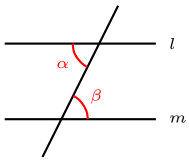


3. Si $a \perp c \wedge a \perp d$, $b \perp c$ entonces $b \perp d$

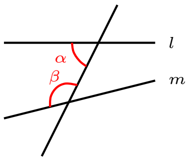



4. Ángulos alternos internos

$$l \parallel m \Rightarrow \alpha = \beta$$




5. Si $l \nparallel m$ entonces $\alpha + \beta \neq 180°$




### 3.3.1. Modelos de Plano Euclidiano

Sean $V$ un plano vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $2 \neq 0$ y $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal, simétrica sin vectores isótropos, es decir,

1. **Bilineal:**

   Se dice que $f$ es lineal en la primera componente.

   *a*) $(\forall \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \in V)(f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}) = f(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_3}) + f(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}))$.

   *b*) $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V)(f(\alpha \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \alpha f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$

   Note que la linealidad en la segunda componente, se logra con la siguiente propiedad

2. **Simétrica:**

   Se dice que $f$ es simétrica si y sólo si

   $$(\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in V)(f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = f(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})).$$

3. **Sin vectores isótropos:**

   Se dice que $f$ no tiene vectores isótropos si y sólo si

   $$(\forall \overrightarrow{v} \in V)(f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v} = 0).$$

**Plano Métrico Euclidiano** Sean $V$ un plano vectorial y $f : V \times V \to \mathbb{K}$, una forma bilineal, simétrica sin vectores isótropos.
Definimos el plano $(V, f)$, de modo que el conjunto de puntos es $\mathcal{P} = V$, el conjunto de recta $\mathcal{L}$ es el conjunto de rectas afines, la incidencia $\mathcal{I}$ es la pertenecía y la ortogonalidad entre rectas esta dada por

$$\langle v_1\rangle + w_1 \perp \langle v_2\rangle + w_2 \text{ si y sólo si } f(v_1, v_2) = 0.$$

**Propiedad 3.14** *Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $f$ un forma bilineal simétrica sin vectores isótropos, entonces $(V, f)$ es un Plano Métrico Euclidiano*

**Demostración:** De ejercicios los axiomas afines y de ortogonalidad, recordar para ello las nociones de geometría analítica, el de colineación lo veremos más adelante.

**Ejemplo 3.15** *Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ plano Euclidiano, con $f$ el producto interno usual, es decir,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \rightsquigarrow & x_1x_2 + y_1y_2 \end{array}$$

*Dada las rectas $l_1 : y = x + 2$ y $l_2 : y = -x - 3$.*
*Determine si $l_1 \perp l_2$.*

**Solución:** Para el caso real, con el producto usual sabemos que

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

lo cual es verdadero.
De otro modo, o en general con un producto arbitrario, tenemos

$$l_1 = \langle(1, 1)\rangle + (0, 2); \quad l_2 = \langle(1, -1)\rangle + (0, -3)$$

Evaluando el vector director

$$f((1, 1), (1, -1)) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 = 0$$

Por lo tanto

$$l_1 \perp l_2.$$

□

**Observación:** En general la forma bilineal utilizada es el producto interno usual para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pero para otro cuerpo, es necesario tener presente lo siguiente:
Sea $(V, f)$ un Plano Euclidiano, luego se tiene que $V$ es un espacio vectorial de dimensión dos y $f$ es una forma bilineal sin vectores isótropos. Por ello, dado $u_1 \in V$ no nulo, se tiene que $u_1$ es anisótropo y podemos obtener el ortogonal a

$$< u_1 >^{\perp} = \{v \in V \mid f(u_1, v) = 0\}$$

No es difícil demostrar que este espacio tiene dimensión 1, ya que es una ecuación lineal homogénea de dos variables, luego existe $u_2$ y se cumple que $\{u_1, u_2\}$ es una base de $V$.
Dados $x = x_1u_1 + x_2u_2$, $y = y_1u_1 + y_2u_2$, podemos calcular

$$f(x,y) = x_1y_1f(u_1,u_1) + x_2y_2f(u_2,u_2)$$

Como esta forma bilineal no tiene vectores isótropos, significa que la ecuación cuadrática

$$f(x,x) = x_1^2f(u_1,u_1) + x_2^2f(u_2,u_2) = 0$$

sólo puede tener la solución trivial, de lo cual obtenemos

$$f(u_1,u_1) \neq 0 \wedge f(u_2,u_2) \neq 0$$

y además

$$z^2 = -\frac{f(u_2,u_2)}{f(u_1,u_1)}$$

no debe tener solución.
De este modo tenemos que la forma bilineal salvo escalar, debe poder escribirse de la forma

$$f(x,y) = x_1y_1 - \delta x_2y_2$$

donde $z^2 = \delta$ no tiene solución.
Por esto es importante considerar el grupo de los cuadrado, que esta dado por

$$\square_{\mathbb{K}} = \left\{a^2 \mid a \in \mathbb{K} - \{0\}\right\}$$

y de los no cuadrado

$$\boxslash_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} - \left\{a^2 \mid a \in \mathbb{K}\right\}$$

Por ejemplo en $\mathbb{Z}_5$, tenemos que el conjunto de los cuadrados es $\square_5 = \{1,\ 4\}$ y el conjunto de los no cuadrados es $\boxslash_5 = \{2,\ 3\}$.
Para cada $\delta \in \boxslash_{\mathbb{K}}$, se puede definir la función

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2 - \delta y_1y_2,$$

la cual es una función bilineal, simétrica y sin vectores isótropos en $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

**Ejemplo 3.16** *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ y $V = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ y la forma bilineal simétrica sin vectores isótropos*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1x_2 + 3y_1y_2 = x_1x_2 - 2y_1y_2.$$

*Determine si $l_1 = \langle(1,\ 1)\rangle + (2,3)$ y $l_2 = \{(x,y) \in V \mid x - 2y = 1\}$ son ortogonales.*

**Solución:** Sea $(x,y) \in l_2$ entonces

$$(x,y) = (1+2y,y) = y(2,1) + (1,0)$$

luego $l_2 : \langle(2,\ 1)\rangle + (1,0)$, entonces

$$f((1,1),(2,1)) = 2 + 3 = 5 = 0 \ \in \mathbb{Z}_5$$

por lo tanto $l_1 \perp l_2$. $\square$

### 3.3.2. Colineaciones del Plano Euclidiano

Sea $(V, f)$ un plano Euclidiano y $g : V \to V$ una transformación lineal invertible, hemos visto que preservan incidencia, ahora veremos la ortogonalidad.
Se dice que $g$ es una **isometría** si y sólo si

$$(\forall v, w \in V)(f(g(v), g(w)) = f(u, v))$$

Note que la ortogonalidad esta definida a partir de la forma bilineal, luego una isometría son colineaciones. Claramente la identidad es una isometría
Se define el grupo ortogonal de $(V, f)$ igual a

$$O(f) = \{g : V \to V \mid g \text{ es una isometría } \}$$

**Caso particular** Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ con la formal usual tenemos que

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 = [x_1\ x_2]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Una forma de explicitar las isometrías es matricialmente, para ello consideramos una base la base canonica $C$ y calculemos

$$\begin{array}{rcl} f(g(v), g(w)) & = & f(u, v) \\ [g(v)]_C^t[f]_C[g(w)]_C & = & [u]_C^t[f]_C[v]_C \\ ([g]_C[v]_C)^t[f]_C[g]_C[w]v & = & [u]_C^t[f]_C[v]_C \\ [v]_C^t[g]_C^t[f]_C[g]_C[w]_C & = & [u]_C^t[f]_C[v]_C \end{array}$$

Es una igualdad para todo los vectores, por lo tanto

$$[g]_C^t[f]_C[g]_C = [f]_C$$

Si $g$ es una isometría tal que $A = [g]_C$, reemplazando obtenemos que

$$A^tA = I_2$$

Grupo de las matrices ortogonales de $2 \times 2$

$$O(f) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid A^tA = I\}.$$

Para explicitar directamente este grupo. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La ecuación matricial $A^tA = I$, nos entrega el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} a^2 + c^2 & = & 1 \\ b^2 + d^2 & = & 1 \\ ab + cd & = & 0 \end{array}\right|$$

Ya que los puntos pertenecen al circunferencia unitaria, podemos parametrizar

$$a = cos(\alpha);\ c = sen(\alpha),\ b = cos(\beta);\ d = sen(\beta)$$

luego se cumple las dos primeras ecuaciones y la tercera

$$0 = cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) = cos(\beta - \alpha)$$

de lo cual obtenemos

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ o bien } \beta - \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Veamos la primera posibilidad y reemplacemos

$$a = cos(\alpha);\ c = sen(\alpha),\ b = cos(\frac{\pi}{2} + \alpha);\ d = sen(\frac{\pi}{2} + \alpha)$$

Utilizando identidades, finalmente obtenemos que

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

matriz de tienen determinante 1 y corresponde a rotaciones en un ángulo $\alpha$.
En la otra posibilidad se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

matriz de tiene determinante -1.
Luego tenemos el grupo ortogonal esta formado por

$$O(f) = \left\{ \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Note que las matrices de determinante -1, dejan fijos todos los punto de la recta

$$< (cos(\alpha) + 1, sen(\alpha)) >,$$

por lo anterior es una simetría entorno a la recta, ya que al cuadrado es la identidad.
Al multiplicar dos de esta simetrías obtenemos

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\beta) & sen(\beta) \\ sen(\beta) & -cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha - \beta) & -sen(\alpha - \beta) \\ sen(\alpha - \beta) & cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

una rotación, que son las otras matrices del grupo ortogonal, los otros axiomas se obtiene en forma similar.
Luego tenemos el grupo ortogonal de las rotaciones esta formado por:

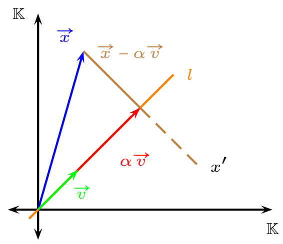
$$O^+(f) = \left\{ \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi] \right\}.$$

### 3.3.3. Simetrías

Notemos que la recta fija anterior, no tiene una expresión fácil de despejar a partir de el vector director de la recta, por ello determinaremos en forma explícita la simetría respecto a la recta $l \in \mathcal{L}$ .
**Primer Caso:** Cuando la Recta es Vectorial.
Sean $l = \langle \overrightarrow{v} \rangle$, $\overrightarrow{x} \in V$ y $R_l$ simetrías de eje $l$.
Determinemos primero $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $x - \alpha\overrightarrow{v}$, sea ortogonal a $l$

$$f(\overrightarrow{x} - \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0$$

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x} - \alpha\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) &= 0 \\ f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) - \alpha f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) &= 0 \\ \alpha f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) &= f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

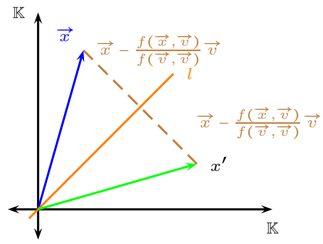



Luego tenemos

$$\alpha = \frac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})}$$

$$x' = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x} - \frac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v})$$

$$x' = -\overrightarrow{x} + 2\frac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v}$$




De este modo tenemos que la simetría está dada por:

$$R_l(\overrightarrow{x}) = -\overrightarrow{x} + 2\frac{f(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v}$$

**Segundo Caso:** La recta no es vectorial.
Sean $l = \langle \overrightarrow{v} \rangle + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{x} \in V$ y $R_l$ simetrías de eje $l$.
Si $\overrightarrow{P}\mathcal{I}l$ entonces, existe $\alpha_1 \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{P} = \alpha_1\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$

$$\begin{aligned} R_l(\alpha_1\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) &= \alpha_1\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \\ (R_l \circ T_{\overrightarrow{w}})(\alpha_1\overrightarrow{v}) &= T_{\overrightarrow{w}}(\alpha_1\overrightarrow{v}) \\ (T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}})(\alpha_1\overrightarrow{v}) &= \alpha_1\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

luego, $T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}}$ tiene orden 2 y fija a todos los puntos de la forma $\alpha_1\overrightarrow{v}$, entonces:

$$T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = Id \ \vee \ T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = R_{\langle \overrightarrow{v} \rangle}$$

Si $T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = Id$, despejando se tiene que $R_l = Id$ lo cual es una contradicción, luego tenemos

$$T_{\overrightarrow{w}}^{-1} \circ R_l \circ T_{\overrightarrow{w}} = R_{\langle \overrightarrow{v} \rangle}$$

del cual se establece que:

$$R_l = T_{\overrightarrow{w}} \circ R_{\langle \overrightarrow{v} \rangle} \circ T_{\overrightarrow{w}}^{-1}$$

De este modo tenemos que la simetría está dada por:

$$R_l(\overrightarrow{x}) = -(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}) + 2\frac{f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

**Propiedad 3.17** *Sea $(V, f)$ plano métrico euclidiano y la recta $l =< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{w}$ entonces*

$$\begin{array}{rccl} R_l: & V & \to & V \\ & x & \rightsquigarrow & 2\overrightarrow{w} - \overrightarrow{x} + 2\frac{f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v})} \cdot \overrightarrow{v} \end{array}$$

**Ejemplo 3.18** *Sea $(\mathbb{R}^2, f)$ plano Euclidiano con el producto usual*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$$

*Dada $l : y = 2x$, Calcule $R_l(x, y)$.*

**Solución:** Ya que $l : y = 2x$, obtenemos $l = \langle (1, 2) \rangle$

$$\begin{array}{rcl} R_l(x,y) & = & -(x,y) + 2\frac{f((x,y),(1,2))}{f((1,2),(1,2))} \cdot (1,2) \\ R_l(x,y) & = & (-x,-y) + 2(\frac{x+2y}{5}) \cdot (1,2) \\ R_l(x,y) & = & (-x,-y) + (\frac{2x+4y}{5}, \frac{4x+8y}{5}) \\ R_l(x,y) & = & (\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5}) \end{array}$$

En la base canónica $C$, tenemos que

$$A = [R_l]_C = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}, \quad det(A) = -1.$$

□

**Ejemplo 3.19** *Sea $(\mathbb{Z}_7^2, f)$ plano euclidiano y la forma bilineal simétrica sin vectores isótropos.*

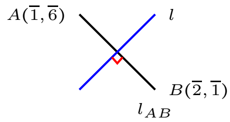
$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 - \overline{5}y_1y_2.$$

*Sea $l$ la recta tal que $R_l(\overline{2}, \overline{1}) = (\overline{1}, \overline{6})$.*
*Determine $R_l(x, y)$*

**Solución:** Para determinar la recta

$$l = \langle \overrightarrow{v} \rangle + \overrightarrow{w}$$

veamos los siguiente:




$$\begin{array}{rcl} l_{AB} & = & \langle A-B\rangle + B \\ l_{AB} & = & \Big\langle(\overline{1},\overline{6})-(\overline{2},\overline{1})\Big\rangle + (\overline{2},\overline{1}) \\ l_{AB} & = & \Big\langle(-\overline{1},\overline{5})\Big\rangle + (\overline{2},\overline{1}) \end{array}$$

Pero $l_{AB} \perp l$, luego

$$\begin{array}{rcl} f((x_1,x_2),(-\overline{1},\overline{5})) & = & 0 \\ -x_1-\overline{25}x_2 & = & 0 \\ x_1 & = & \overline{3}x_2 \end{array}$$

Entonces $(x_1,x_2)=(3x_2,x_2)=x_2(3,1)$, por lo tanto $l=\Big\langle(\overline{3},\overline{1})\Big\rangle+(c,d)$ buscamos el punto medio entre $A$ y $B$ que esta dado por:

$$\begin{array}{rcl} P_m & = & (\frac{\overline{2}+\overline{1}}{2},\frac{\overline{1}+\overline{6}}{2}) \\ P_m & = & (3\cdot 3, 3\cdot 7) \\ P_m & = & (5,0) \end{array}$$

Luego $l=\Big\langle(\overline{3},\overline{1})\Big\rangle+(\overline{5},\overline{0})$.
Finalmente podemos encontrar $R_l(x,y)$

$$\begin{array}{rcl} R_l(x,y) & = & (T_{(\overline{5},\overline{0})}\circ R_{\langle(\overline{3},\overline{1})\rangle}\circ T^{-1}_{(\overline{5},\overline{0})})(x,y) \\ & = & T_{(\overline{5},\overline{0})}\Big(R_{\langle(\overline{3},\overline{1})\rangle}(x-\overline{5},y)\Big) \\ & = & T_{(\overline{5},\overline{0})}\Big((\overline{5}-x,-y)+\overline{2}\cdot\frac{f((x-\overline{5},y),(\overline{3},\overline{1}))}{f((\overline{3},\overline{1}),(\overline{3},\overline{1}))}\cdot(\overline{3},\overline{1})\Big) \\ & = & T_{(\overline{5},\overline{0})}\Big((\overline{5}-x,-y)+\frac{(\overline{3}x-\overline{15}-\overline{5}y)}{2}\cdot(\overline{3},\overline{1})\Big) \\ & = & T_{(\overline{5},\overline{0})}\Big((\overline{5}-x,-y)+\Big(\frac{\overline{9}x-\overline{15}y-\overline{45}}{2},\frac{\overline{3}x-\overline{15}-\overline{5}y}{2}\Big)\Big) \\ & = & T_{(\overline{5},\overline{0})}\Big((\overline{5}-x,-y)+(x+\overline{3}y+\overline{2},\overline{5}x+y+\overline{3})\Big) \\ & = & T_{(\overline{5},\overline{0})}\Big(\overline{3}y+\overline{7},\overline{5}x+\overline{3}\Big) \\ & = & \Big(\overline{3}y+\overline{7}+\overline{5},\overline{5}x+\overline{3}+\overline{0}\Big) \\ R_l(x,y) & = & \Big(\overline{3}y+\overline{5},\overline{5}x+\overline{3}\Big) \end{array}$$

□

### 3.3.4. Traslaciones en el Plano Euclidiano

En el plano euclidiano real $(V,f)$,
Sean $b :< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{u}$ y $d :< \overrightarrow{v} > + \overrightarrow{w}$.
Luego tenemos

$$\begin{array}{rcl} (R_b\circ R_d)(\overrightarrow{x}) & = & R_b(2\overrightarrow{w}-\overrightarrow{x}+2\frac{f(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v}) \\ & = & \overrightarrow{x}+2\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v} \\ & = & t_{2\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v}}(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

Notemos que

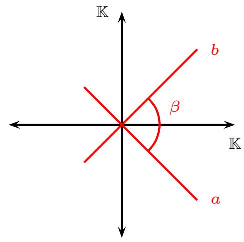
$$f(2\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{w}+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=2f(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{w},\overrightarrow{v})+2\frac{f(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}{f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})}f(\overrightarrow{v},\overrightarrow{v})=0$$

Por ellos es un traslación, en dirección de la recta ortogonal a $< \overrightarrow{v} >$.

### 3.3.5. Rotaciones en el Plano Euclidiano

En el plano euclidiano real $(V, f)$, sea $\sigma$ una rotación de centro $P$.
Luego existen $a, b \in \mathcal{L}$ tal que $a \cap b = \{P\}$ y $\sigma = R_a \circ R_b$.
Si $P = \overrightarrow{0}$ y $\alpha$ es el ángulo de rotación, si $\beta$ es el ángulo entre $a$ y $b$ entonces

$$\alpha = 2 \cdot \beta$$




$$\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Fórmula para rotaciones de centro $(0, 0)$ y ángulo $\alpha$

Si $P \neq \overrightarrow{0}$, entonces las rotaciones de centro $P$ y ángulo $\alpha$ vienen dadas por la fórmula:

$$\sigma(x, y) = \left( T_{\overrightarrow{P}} \circ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \circ T^{-1}_{\overrightarrow{P}} \right)(x, y)$$

**Ejemplo 3.20** *Sea* $(\mathbb{R}^2, f)$ *plano Euclidiano con el producto usual*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$$

*Dadas las rectas* $l_1 : y = 5x$ *y* $l_2 : y = 2x$.
*Determinar explícitamente la rotación* $R_{l_1} \circ R_{l_2}(x, y)$ *y el ángulo de rotación .*

**Solución:** Ya que $l_1 : x = 5y$, y $l_2 : y = 2x$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\sigma(x, y) &= R_{l_1} \circ R_{l_2}(x, y) \\
&= R_{l_1}(-(x, y) + 2\tfrac{f((x,y),(1,2))}{f((1,2),(1,2))} \cdot (1, 2) \\
&= R_{l_1}(\tfrac{-3x+4y}{5}, \tfrac{4x+3y}{5}) \\
&= -(\tfrac{-3x+4y}{5}, \tfrac{4x+3y}{5}) + \tfrac{1}{13}\tfrac{-11x+23y}{5}(5, 1) \\
&= -(\tfrac{-3x+4y}{5}, \tfrac{4x+3y}{5}) + \tfrac{1}{13}\tfrac{-11x+23y}{5}(5, 1) \\
&= (\tfrac{-16x+63y}{65}, \tfrac{-63x-16y}{65})
\end{aligned}$$

Expresando en coordenadas de la base canónica, se tiene que

$$[\sigma(x, y)]_C = \frac{1}{65} \begin{pmatrix} -16 & 63 \\ -63 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

De lo cual tenemos que

$$\arctan(\frac{63}{16}) \approx 75,75°.$$

Ya que $\sigma(1,0) = (\frac{-16}{65}, \frac{-63}{65})$ y $\sigma(0,1) = (\frac{63}{65}, \frac{-16}{65})$, el ángulo es

$$\alpha \approx -75,75°.$$

□

**Ejercicio 3.21** *Sean $(V, f)$ plano euclidiano, $a, b \in \mathcal{L}$ tal que $a \cap b \neq \phi$.*
*Determine la rotación, de centro $P$ y*

$$\sigma = R_a \circ R_b$$

**Ejercicio 3.22** *Sean $(V, f)$ plano euclidiano, $a, b \in \mathcal{L}$ tal que $a \cap b \neq \phi$ y $a \perp b$.*
*Determine la simetría puntual, de centro $P$*

$$\sigma = R_a \circ R_b$$

## 3.4. Plano Elíptico

Un plano elíptico $\Pi = (\mathcal{L},\ \mathcal{P},\ \mathcal{I},\ \perp)$ es un plano métrico $\Pi$ que satisface el axioma elíptico, es decir,

1. Los axiomas afines
2. Los axiomas de ortogonalidad
3. Los axiomas de colinealidad
4. **Axioma elíptico:** Para toda $l, m \in \mathcal{L}$, entonces $l \cap m \neq \varnothing$

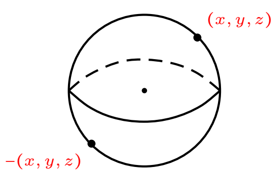
### 3.4.1. Modelo de Plano Elíptico

Construyamos un modelo de un el Plano Elíptico, para ello consideremos la esfera unitaria y centro en el origen, es decir,

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

i) Notemos que una recta vectorial intersecta a la esfera centrada en el origen en dos puntos.

**Puntos del plano elíptico**

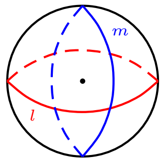



$\mathcal{P} = \{[(x, y, z), (-x, -y, -z)]; (x, y, z) \in S\}$ a los puntos $[(x, y, z), (-x, -y, -z)]$ se les llama puntos antipolares o bipuntos.

ii) Un plano vectorial intersecta a la esfera en una circunferencia de radio máximo.

**Rectas del plano elíptico**

$\mathcal{L}$ = {circunferencia de radio máximo de $S$}, si $l_1, l_2$ son rectas, entonces en $S$ tienen ecuaciones de la forma:




$$\begin{aligned} l_1 &: a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ l_2 &: a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{aligned}$$

iii) La **incidencia** $P\mathcal{I}l$ si y sólo si $P \subseteq l$

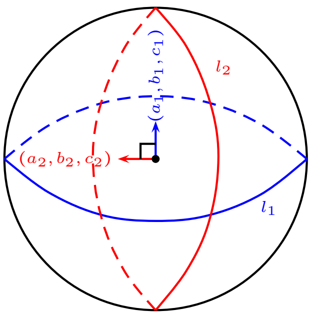
iv) La **Ortogonalidad** en $\mathcal{L}$. Sean $l_1$ y $l_2$ en $\mathcal{L}$, definida por:

$$\begin{aligned} l_1 &: a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ l_2 &: a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{aligned}$$

note que podemos escribir las ecuaciones del siguiente modo

$$\begin{aligned} l_1 &: (a_1, b_1, c_1)(x, y, z) = 0 \\ l_2 &: (a_2, b_2, c_2)(x, y, z) = 0 \end{aligned}$$

Los vectores $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ son perpendicular a los respectivos planos en el espacio.




Por ello se define, la ortogonalidad

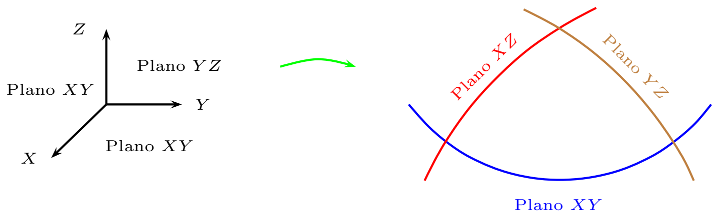
$$l_1 \perp l_2 \text{ si y sólo si } a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0$$

**Propiedad 3.23** *El plano* $\Pi = (\mathcal{L}, \ \mathcal{P}, \ \mathcal{I}, \ \perp)$, *es un Plano Elíptico.*

**Ejemplo 3.24** *Consideremos las planos* $XY$,$XZ$ *y* $YZ$ *donde las ecuaciones están dadas por* $l_z : z = 0$, $l_y : y = 0$, $l_x : x = 0$ *respectivamente.*
*Los rectas en el plano elíptico son perpendiculares ya que*

$$\begin{aligned} l_z \perp l_y &\Leftrightarrow 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ l_z \perp l_x &\Leftrightarrow 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \\ l_y \perp l_x &\Leftrightarrow 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

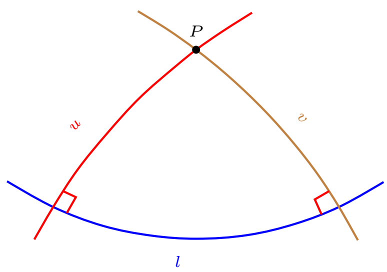
Una visualización en el primer octante $x, y, z > 0$, de los planos asociado a los ejes están dados por




**Definición 3.25** *Sean* $\Pi$ *plano métrico y* $a, b, c \in \mathcal{L}$.
*Se dice que* $a, b, c$ *es un* ***Triángulo Polar*** *si y sólo si* $a \perp b$, $b \perp c$ *y* $c \perp a$.

**Observación:** En el figura anterior, tenemos que $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ forman un triángulo polar en el primer octante,con los bipuntos $<(1,0,0)>, <(0,1,0)>, <(0,0,1)>$ y además la suma de los ángulos interiores de este triángulo son tres rectos.

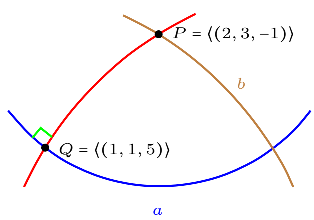
**Definición 3.26** *Sea* $\Pi$ *plano métrico,* $P \in \mathcal{P}$ *y* $l \in \mathcal{L}$.
*Se dice que* $P$ *es* ***polo*** *de* $l$ *si y sólo si existen* $u, v \in \mathcal{L}$ *distintas, tales que* $u \perp l$, $v \perp l$ *y* $u \cap v = \{P\}$.




**Ejemplo 3.27** *Comprobar que* $<(0,0,1)>$ *es el polo de* $l =<(0,1,0),(1,0,0)>$.

**Solución:** En la figura anterior, tenemos que $u =<(1,0,0),(0,0,1)>$, $v =<(0,1,0),(0,0,1)>$ son recta ortogonales a $l$, ya que forman un triángulo polar.

**Ejemplo 3.28** *Sea* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ *plano elíptico.*
*Determinar la recta que une* $P = \langle(2,3,-1)\rangle$ *y* $Q = \langle(1,1,5)\rangle$



**Solución:**
La recta que pasa por $P$ y $Q$ es

$$l_{PQ} = \langle (2,3,-1),(1,1,5)\rangle$$

y su ecuación cartesiana esta dada por

$$l_{PQ}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

De lo cual se obtiene $l_{PQ}: 16x - 11y - z = 0$.
Además note que las rectas

$$\begin{array}{rrcl} a: & 2x+3y-z & = & 0 \\ b: & x+y+5z & = & 0 \end{array}$$

son perpendiculars $l_{PQ}$ ya que

$$\begin{array}{rcl} (2,3,-1)(16,-11,-1) & = & 0 \\ (1,1,5)(16,-11,-1) & = & 0 \end{array}$$

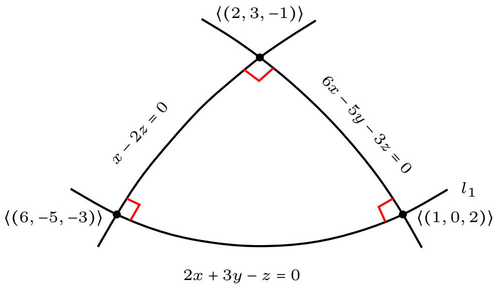
□

**Ejemplo 3.29** *Sean $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ plano elíptico, $l: 2x+3y-z=0$ y $\delta = \langle (1,0,2)\rangle$. Determinar los lados y vertices del triángulo polar formado por el vértice $\delta$ y lado $l$.*

**Solución:** Teniendo presente el ejemplo anterior tenemos que la recta que une los puntos

$$l_{PQ}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6x - 5y - 3z = 0$$

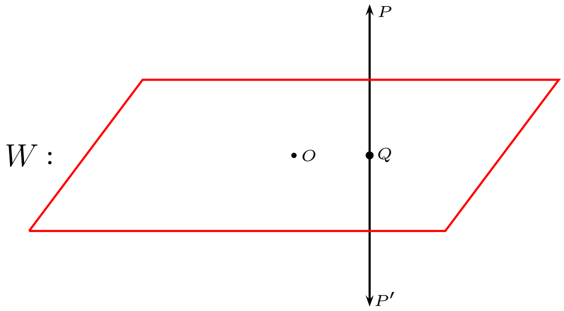
Luego




□

## 3.5. Simetrías en el Plano Elíptico

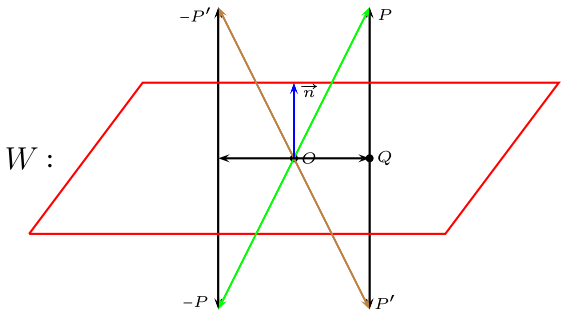
Todo plano vectorial en $\mathbb{R}^3$ es el eje de una simetría




Los puntos $P, P'$ son simétricos respecto al plano.
Teniendo presente el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$, obtenemos un resultado similar, esto es

$$R_W(\vec{x}) = \vec{x} - 2\frac{\vec{x}\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n}$$

donde $\vec{n}$ es perpendicular al plano $W$.




Si $d(O,P) = d(O,P') = d(0,-P) = d(O,-P')$, luego si uno de ello pertenece a la circunferencia unitaria, todos pertenecen, por ello tenemos la definida la simetría en los puntos antipolares de Plano Elíptico del siguiente modo

$$R_W([P,-P]) = [R_W(P), R_W(-P)] = [P', -P'].$$

**Propiedad 3.30** *Sea* $\Pi$ *el modelo de plano elíptico sobre la esfera, y la recta* $l : ax+by+cy = 0$*, entonces la simetría asociada a* $l$ *esta dada por*

$$R_l([\pm P]) = \left[\pm(P - 2\frac{P\cdot\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{n}}\vec{n})\right]$$

*donde* $\vec{n} = (a,b,c)$*.*

**Ejemplo 3.31** *Sea* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ *plano elíptico.*
*Determinar la simetrías en el plano elíptico respecto a la recta*

$$l : 2x + 3y - z = 0.$$

**Solución:** En $\mathbb{R}^3$, notemos que $\overrightarrow{\eta} = (2,3,-1)$, $\overrightarrow{\eta} \cdot \overrightarrow{\eta} = 14$ y la simetría esta dada por

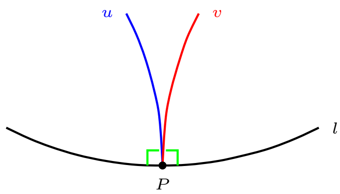
$$\begin{aligned} R_l(x,y,z) &= (x,y,z) - 2\frac{1}{14}(2x+3y-z)(2,3,-1) \\ &= \frac{1}{7}(3x-6y+2z,-6x-2y+3z,2x+3y+6z) \end{aligned}$$

aplicada a un punto antipolar o bipunto tenemos

$$R_l([e_1,-e_1]) = \left[\left(\frac{3}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7}\right),-\left(\frac{3}{7},\frac{-6}{7},\frac{2}{7}\right)\right]$$

□

**Teorema 3.32** *Sea* $\Pi$ *plano métrico y* $P$ *polo de* $l$*, entonces* $P \not{\mathcal{I}} l$

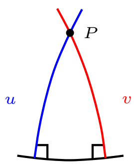



***Demostración:*** *Supongamos que* $P\mathcal{I}l$*.*
*Por* $P$ *pasan dos rectas perpendiculares a* $l$*, y estas son* $u, v$ *esto es una contradicción, ya que por la recta* $l$ *sólo pasa una recta perpendicular en* $P$*.* ■

**Propiedad 3.33** *Sea* $\Pi$ *plano métrico.*
*Si* $P$ *es polo de* $l$*, entonces* $R_l(P) = P$

**Demostración:** Si $P$ es un polo de $l$, luego existen $u, v \in \mathcal{L}$, con $u \neq v$, tales que $u \perp l$, $v \perp l$ y $u \cap v = \{P\}$.
Por propiedad anterior tenemos que

$$R_l(u) = u \text{ y } R_l(v) = v$$




de este modo tenemos que

$$R_l(u) \cap R_l(v) = u \cap v = \{P\}$$

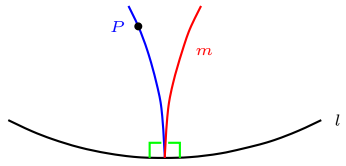
es decir $R_l(P) = P$.

■

**Teorema 3.34** *Sea* $\Pi$ *plano métrico.*
*Si* $P$ *es polo de* $l$ *y* $m \perp l$*, entonces* $P\mathcal{I}m$

**Demostración:**

Supongamos que $l \cap m = \{Q\}$, entonces $R_l(Q) = Q$. Dada la recta $l_{PQ}$, pero $P$ y $Q$ son fijos por $R_l$, entonces $R_l(l_{PQ}) = l_{PQ}$ por eso es perpendicular a la recta $l$.



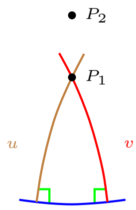

Luego tenemos

$$l_{PQ} = m, \text{ ya que por } Q \text{ pasa una única ortogonal a la recta } l.$$

■

**Teorema 3.35** *Sea $\Pi$ un plano métrico, entonces cada recta tiene a lo más un polo.*

**Demostración:** Supongamos que $P_1$ y $P_2$ son polo de $l$, si $P_1$ es polo de $l$, entonces $\exists\ u, v \in \mathcal{L}$ distintas tales



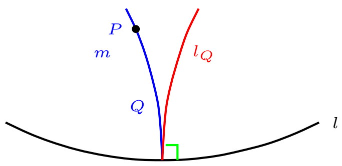

$$u \perp l \ \wedge \ u \cap v = \{P_1\}$$

Pero $u \perp l$ y $v \perp l$, por teorema anterior $P_2 \mathcal{I} u$ y $P_2 \mathcal{I} v$, si los puntos fueran distintos las recta $u, v$ serían iguales lo cual es imposible, por lo tanto $P_1 = P_2$, es decir

$$u \cap v = \{P\} = \{P_1\} = \{P_2\}$$

■

**Teorema 3.36** *Sea $\Pi$ plano métrico.*
*Si $P$ es polo de $l$ y $P\mathcal{I}m$, entonces $l \perp m$.*



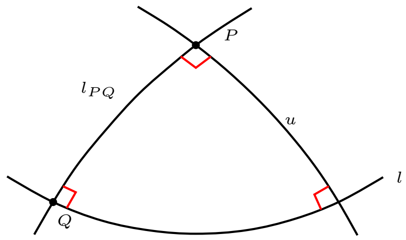

**Demostración:** Sea $Q\mathcal{I}m$, tal que $Q \neq P$ y sea $l_Q \in \mathcal{L}$ tal que $Q\mathcal{I}l_Q \ \wedge \ l_Q \perp l$, por ello tenemos que $P\mathcal{I}l_Q$ y además $Q, P\mathcal{I}m$, por ello

$$\begin{array}{ccc} l_Q & = & m \\ m & \perp & l \end{array}$$

■

**Teorema 3.37** *Sea* $\Pi$ *plano métrico.*
*Si* $P$ *es polo de* $l$*, entonces todo punto tiene un recta polar y toda recta tiene un polo.*

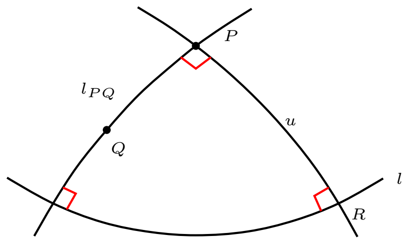
**Demostración:** Sea $\Pi$ plano métrico y $P$ es polo de $l$. Dado $Q$ un punto en el plano métrico.



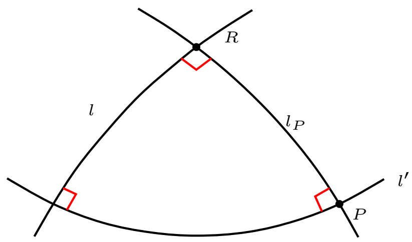

Primer caso $Q\mathcal{I}l$.
Sea $l_{PQ}$ la recta que une $P$, $Q$, además $u$ recta ortogonal a $l_{PQ}$ en el punto $P$, por ello tenemos que

$$l_{PQ} \perp u \wedge l \perp u$$

Además ambas contiene a $Q$.
Segundo caso $Q\not{\mathcal{I}}l$.



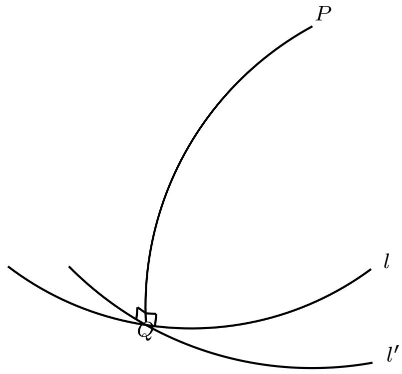

Sea $l_{PQ}$ la recta que une $P$, $Q$, de este modo tenemos $l_{PQ} \perp l$. Además sea $u$ la recta tal que $u \perp l_{PQ}$ y contiene $P$, de este modo $l_{PQ}$ es la recta polar de $u \cap l = \{R\}$ y $Q$ pertenece a ella. Aplicando el caso anterior, se construye la recta polar.
Para la otra parte.




Dado $l'$ una recta, luego contiene un punto $P$ y por lo anterior el tiene una recta polar $l$. Luego tenemos $l \perp l'$. Consideremos $l_P$, la recta perpendicular a $l'$ en el punto $P$, por ello $l_P \perp l$, de este modo tenemos que $l_P \cap l = \{R\}$ es el polo de $l'$. ■

**Propiedad 3.38** *Sea* $\Pi$ *plano elíptico.*
*Si* $P$ *es polo de* $l$*, entonces* $P$ *tiene solamente una recta polar.*

**Demostración:** Sea $P$ polo de $l$ y $l'$.
Toda recta ortogonal a $l$, pasa por $P$, y por ende es ortogonal a $l'$ y toda recta $l''$ tal que $P\mathcal{I}l''$ tenemos que $l'' \perp l$ y $l'' \perp l'$.
Sea $Q\mathcal{I}l \wedge Q\mathcal{I}l'$, $l_Q$ la recta ortogonal a $l$, luego $P\mathcal{I}l_Q$, de lo cual $l_Q \perp l'$.
Es decir, $l, l'$ son ortogonales a $l_Q$ en el punto $Q$, luego por unicidad de la recta ortogonal, tenemos que $l = l'$.

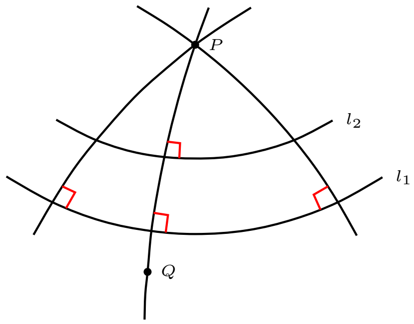



■

**Teorema 3.39** *Sea* $\Pi$ *plano métrico.*
*Si cada recta contiene un polo, entonces* $\Pi$ *es un plano elíptico.*

**Demostración:** Sea $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$, por demostrar que $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$.
Supongamos que $P$ es el polo de $l_1$ y $Q$ es polo de $l_2$, como $l_1, l_2 \perp l_{PQ}$, entonces $l_1$ y $l_2$ pasan por el polo de $l_{PQ}$, por lo tanto

$$l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$$




■

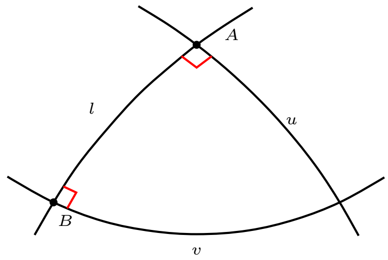
**Teorema 3.40** *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\Pi$ *es un plano elíptico.*
2. *Cada recta tiene un polo*
3. *Cada punto tiene una recta polar.*
4. *Existe un par polo-polar*
5. *El plano* $\Pi$ *contiene un triángulo polar.*

**Demostración:**

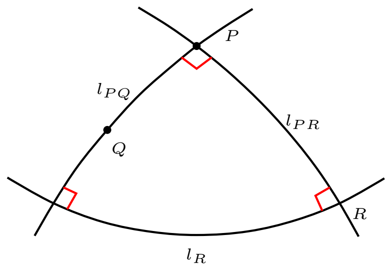
1. Sea $\Pi$ un plano elíptico, por demostrar que cada recta tiene un polo.

   Dada la recta $l$ y $A, B\mathcal{I}l$ distintas.
   Sean $u, v \in \mathcal{L}$, tal que $A\mathcal{I}u$, $u \perp l$ y $B\mathcal{I}v$, $v \perp l$, de este modo tenemos $u \cap v = \{P\}$, de donde $P$ es el polo de $l$.

2. Si cada recta tiene un polo, por demostrar cada punto tiene una polar.

   Sea $P$ un punto, escogemos $Q$ otro punto, luego la recta $l_{PQ}$ tiene un polo $R$, trazamos la recta $l_{PR}$ y la recta ortogonal a $l_R$, ortogonal a $l_{PR}$, de la construcción obtenemos que $l_R$ es la recta polar a $P$.

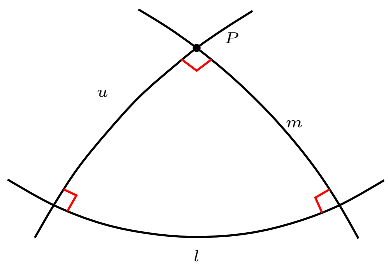
3. Si cada punto tiene una recta polar entonces existe un par polo-polar.

   Este demostración se deja para el lector, dado que es trivial.

4. Si existe un par polo-polar entonces el plano $\Pi$ contiene un triángulo polar.

   Sea $(P, l)$ par polo polar.
   Sea $m \in \mathcal{L}$ tal que $m \perp u \ \wedge P\mathcal{I}m$, entonces $m \perp l$

   existe un triángulo polar.

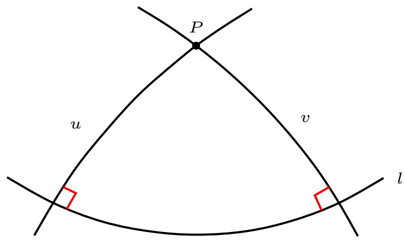
   
   

5. Si existe un triángulo polar entonces $\Pi$ es un plano elíptico.

   Sea $(P, l)$ una par polar, por teorema 3.37 toda recta tiene un polo y aplicando teorema 3.39 $\Pi$ es elíptico. ■

### 3.5.1. Colineaciones en el Plano Elíptico

Sean $\Pi$ plano elíptico y $(P, l)$ par polo-polar.




Si $P$ es polo de $l$, entonces existen $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $u, v \perp l \ \wedge \ u \cap v = \{P\}$.
De lo cual obtenemos que $R_l(P) = P$.

**Observación:** Recordemos que una rotación $\sigma$ de centro $Q$ en un plano métrico significa que existen $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $u \cap v = \{Q\}$ y $\sigma = R_u \circ R_v$

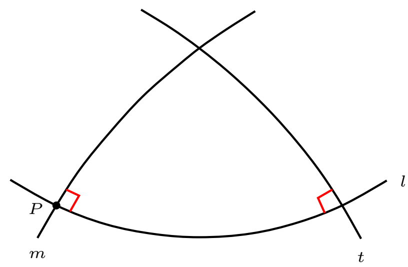
**Propiedad 3.41** *Sea* $\Pi$ *plano elíptico y* $\sigma$ *una rotación de centro* $P$*, entonces existe* $l \in \mathcal{L}$ *tal que* $\sigma(l) = l \ \wedge \ P \not{\mathcal{I}} l$.

**Demostración:** Sea $\sigma$ es rotación, entonces

$$(\exists l, m \in \mathcal{L})(\sigma = R_l \circ R_m \ \wedge \ m \cap l = \{P\})$$

Sea $t$ la recta polar de $P$, de donde se tiene que $m \perp t \ \wedge \ l \perp t$
entonces

$$\begin{array}{rcl} \sigma(t) & = & (R_l \circ R_m)(t) \\ & = & R_l(R_m(t)) \\ & = & R_l(t) \\ \sigma(t) & = & t \end{array}$$



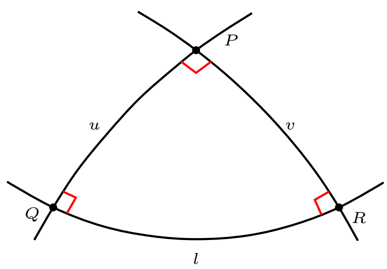

De este modo se obtiene que $t$ esta fija.

$$\sigma(t) = t$$

■

**Propiedad 3.42** *Sea* $\Pi$ *plano elíptico y* $H_P$ *una simetría puntual, entonces* $H_P$ *fija tres puntos.*

**Demostración:** Como $H_P$ es una simetría puntual, existen $u, v \in \mathcal{L}$ tales que $u \cap v = \{P\} \wedge u \perp v$ y $H_P = R_u \circ R_v$.

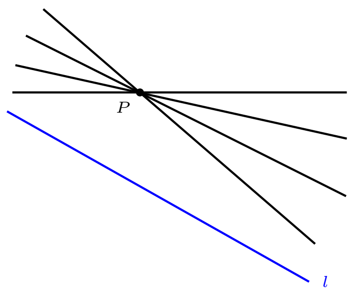


Sea $l$ la recta polar de $P$, y los puntos de incidencia $l \cap u = \{Q\} \wedge l \cap v = \{R\}$. Por propiedad anterior $H_P(l) = l$.
Sabemos que $Q\mathcal{I}l, u$, $R_v(Q)\mathcal{I}l, u$, de lo cual tenemos $R_v(Q) = Q$ y por ende tenemos $H_P(Q) = Q$ análogamente $H_P(R) = R$. ■

## 3.6. Plano Hiperbólico

Un plano hiperbólico $\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{P}, \mathcal{I}, \perp)$ es un plano métrico $\Pi$ que satisface el axioma hiperbólico, es decir,

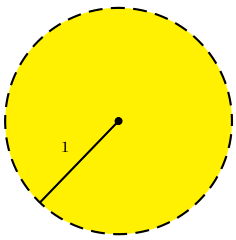
1. Los axiomas afines
2. Los axiomas de ortogonalidad
3. Los axiomas de colinealidad
4. **Axioma hiperbólico:** Si $P \in \mathcal{P}$ y $l \in \mathcal{L}$ tal que $P \not\mathcal{I} l$ entonces por $P$ pasan infinitas paralelas a la recta $l$.



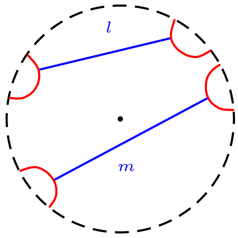

### 3.6.1. Modelo de Klein

Construyamos el modelo de Klein de un Plano Hiperbólico.
El conjunto de punto del plano, corresponde al interior del circulo unitario, es decir,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$



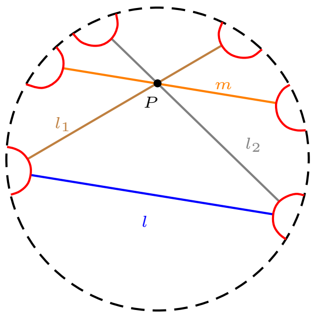
Las rectas del plano, corresponde a las cuerda en el circulo unitario, de otro modo son las recta del plano cartesiano intersecta con el circulo, cuando estas es no vacías, $l, m \in \mathcal{L}$




$$\mathcal{L} = \{ \text{ Las cuerdas de las circunferencia unitaria} \}$$

La incidencia corresponde a la pertenecía.

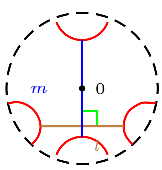
**Relación de Paralelismo** Dos rectas son paralelas, si no tiene puntos en común.
En la figura, las rectas paralelas a $l$ que pase por $P$, son cualquier recta que pase por $P$ y se encuentre situada entre las rectas $l_1$ y $l_2$.



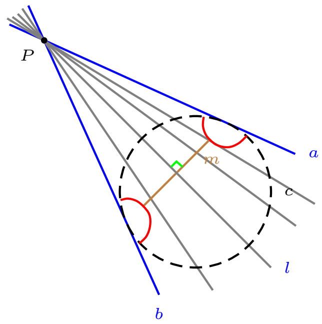

**Observación:** En el caso Euclidiano, sólo se tiene que $m \parallel l$.

**Relación de Ortogonalidad** Dos rectas $l, m \in \mathcal{L}$ son ortogonales, si cumple una de las siguientes condiciones

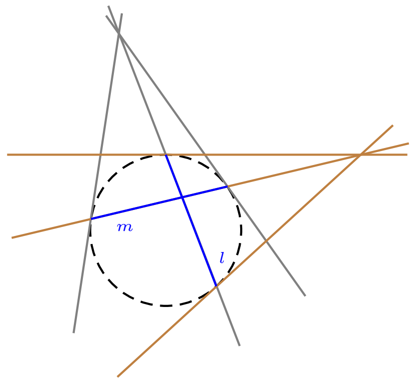
a) Si $l$ o $m$ es un diámetro es la ortogonalidad Euclidiana:



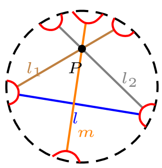
b) Si ninguna de las cuerdas es un diámetro, trazamos las tangente $a, b$ a la circunferencia, en los puntos de intersección de la prolongación de $m$ con la circunferencia, y prolongamos la recta $l$, si la prolongación pasa por el punto de intersección de las tangente, decimos que las recta $m$ es ortogonal a la recta $l$.




De otro modo, si $m \perp l$, entonces existen tangentes a la circunferencia en los puntos de intersección con las cuerdas, de modo que las extensiones de ambas pasan por los puntos de intersección de las tangentes.



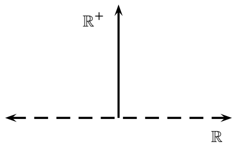

**Observación:** La ortogonalidad hiperbólica, no respecta paralelismo.




### 3.6.2. Modelo de Poincaré

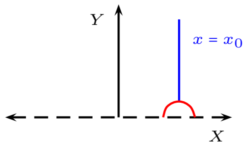
Construyamos el modelo de Poincaré, de un plano Hiperbólico.
El conjunto de puntos del plano, son los puntos del semiplano superior del plano cartesiano, es decir,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

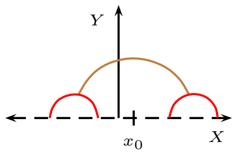



El conjunto de las rectas, esta formado por dos tipos:

1. Semirecta Paralelas al eje $Y$; $l : x = x_0$

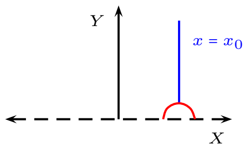



2. Semicircunferencias $l : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2$

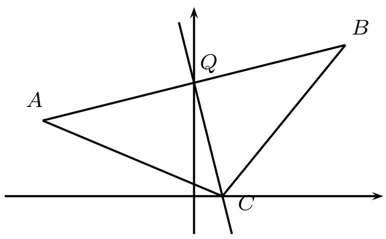



**Por dos puntos pasa un única recta.** Sean $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathcal{P}$.

1. Si $x_0 = x_1$, las recta es $l : x = x_0$




2. Si $x_0 \neq x_1$ entonces, sea $Q$ el punto medio del segmento que une los puntos $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, tracemos la perpendicular, al segmento en $Q$ y la intersección con el eje $X$ es el centro de la semicircunferencia y el radio la distancia a uno de los puntos




**Ejemplo 3.43** *Sean $A = (1, 2)$ y $B = (3, 5)$ en el plano de Poincare.*
*Determinar la ecuación de la recta que une los puntos*

**Solución:** El punto medio es $M=(2,\frac{7}{2})$, la pendiente de la recta es

$$m=\frac{5-2}{3-1}=\frac{3}{2}.$$

Luego la ecuación de la recta tangente esta dada por

$$y-\frac{7}{2}=-\frac{2}{3}(x-2)$$

Para $y=0$, $x_0=\frac{29}{4}$, y las distancia tenemos

$$d(A,O)=D(B,O)=\sqrt{(1-29/4)^2+4}=\sqrt{\frac{689}{16}}$$

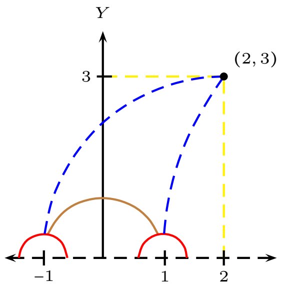
De lo cual tenemos

$$l_{AB}:\left(x-\frac{29}{4}\right)^2+y^2=\frac{689}{16}$$

□

**Ejemplo 3.44** *En el semiplano de Poincare.*
*Dada la recta* $l:x^2+y^2=1$ *y el punto* $P=(2,3)$.
*Determine las rectas paralelas hiperbólicas a la recta* $l$ *y que pasa por* $P$.

**Solución:** Grafiquemos la semicircunferencia unitaria de centro el origen y punto correspondiente.




Notemos que existen posibles semicircunferencias y una semirecta paralela Por ello debe, tener ecuación

$$m:(x-x_0)^2+y^2=r^2$$

y debe pasar por los puntos $(2,3),(t,0)$, $t\in\mathbb{R}-]-1,1[$ y $t\neq 2$ reemplazando obtenemos

$$\left.\begin{array}{rcl}(2-x_0)^2+9&=&r^2\\(t-x_0)^2&=&r^2\end{array}\right|$$

sustituyendo obtenemos

$$\begin{array}{ccc}(2-x_0)^2+9&=&(t-x_0)^2\\4-4x_0+x_0^2+9&=&t^2-2tx_0+x_0^2\\13-t^2&=&(4-2t)x_0\\x_0&=&\frac{13-t^2}{4-2t}\end{array}$$

De donde se concluye que

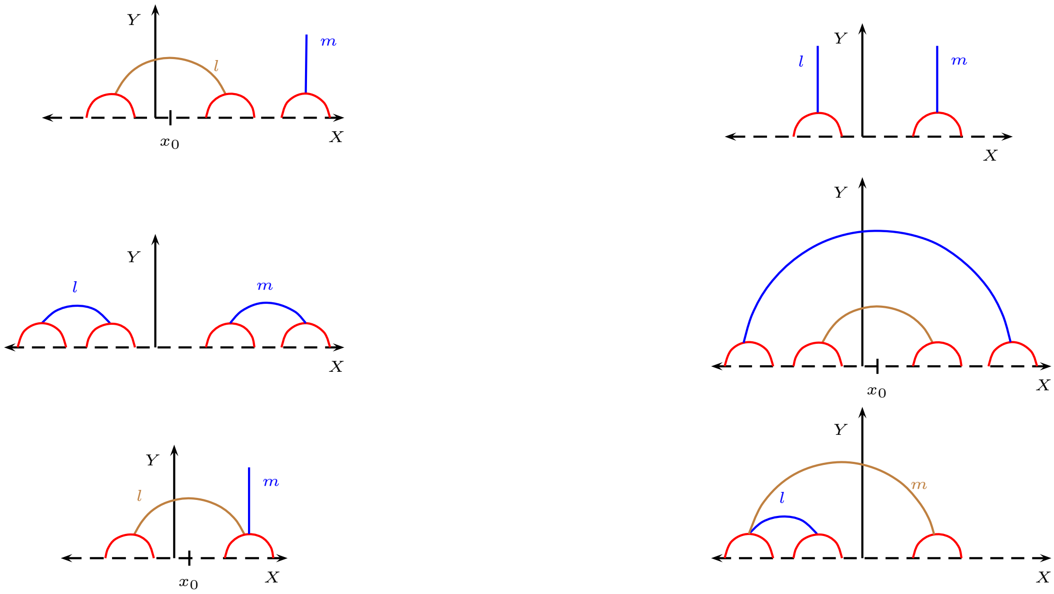
$$m_t : \left(x - \frac{13 - t^2}{4 - 2t}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{t^2 - 4t + 13}{4 - 2t}\right)^2, \text{ con } |t| \geq 1$$

Además

$$m : x = 2$$

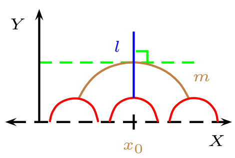
$\square$

**Relación de Paralelismo:** Dos rectas son paralelas, si no tiene puntos en común:

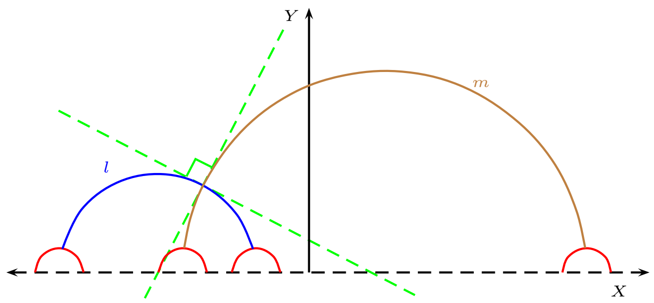



**Relación de Ortogonalidad:** El ángulo entre un semirecta y una semicircunferencia corresponde a la recta tangente a la semicircunferencia con la semirecta y para el caso de dos semi circunferencia, es el ángulo entre las tangente a las circunferencias en el punto de intersección. Las rectas $l$ y $m$ son perpendiculares en los siguientes casos

1. Una semicircunferencia con la semirecta $l \perp m$

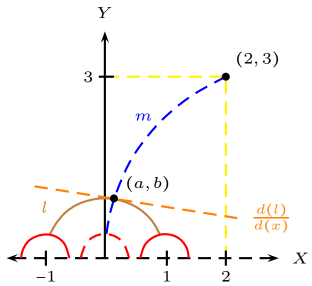



2. Dos semi circunferencia $l \perp m$




**Ejemplo 3.45** *En el semiplano de Poincare.*
*Dada la recta* $l : x^2 + y^2 = 1$ *y el punto* $P = (2, 3)$*.*
*Determine las rectas ortogonales hiperbólicas a la recta* $l$ *y que pasa por* $P$*.*

**Solución:** Grafiquemos la semicircunferencia unitaria de centro el origen y punto correspondiente.




La recta ortogonal, sólo puede ser del tipo semicircunferencia, para ello sea
Sea $m : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2$, la recta solicitada.
Luego existe $Q = (a, b)$ tal que $P\mathcal{I}m$, $Q\mathcal{I}m$, $Q\mathcal{I}l$ reemplazando tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} (2 - x_0)^2 + 9 & = & r^2 \\ (a - x_0)^2 + b^2 & = & r^2 \\ a^2 + b^2 & = & 1 \end{array}\right|$$

Además deben ser perpendiculares, para ello calculemos la pendiente de la recta tangente en el punto $Q$.

$$\begin{array}{rrcl} \dfrac{d(l)}{d(x)} : & 2x + 2y \cdot y' & = & 0 \\ & y' & = & -\dfrac{x}{y} \\ & y'|_{(a,b)} & = & -\dfrac{a}{b} \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \dfrac{d(m)}{d(x)} : & 2(x - x_0) + 2y \cdot y' & = & 0 \\ & y' & = & \dfrac{x_0 - x}{y} \\ & y'|_{(a,b)} & = & \dfrac{x_0 - a}{b} \end{array}$$

luego tenemos,

$$\begin{array}{rcl} -\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{x_0 - a}{b} & = & -1 \\ -ax_0 + a^2 & = & -b^2 \\ a^2 + b^2 & = & ax_0 \\ 1 & = & ax_0 \end{array}$$

Volvamos al sistema, igualando $r^2$ obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{array}{rcll} (2-x_0)^2+9 & = & (a-x_0)^2+b^2 & \\ 4-4x_0+x_0^2+9 & = & a^2-2ax_0+x_0^2+b^2 & \\ 2ax_0-4x_0 & = & -12 & / \div 2 \\ 2x_0-ax_0 & = & 6 & \end{array}$$

y reemplazando

$$\begin{array}{rcl} 2x_0-ax_0 & = & 6 \\ 2x_0-1 & = & 6 \\ 2x_0 & = & 7 \\ x_0 & = & \dfrac{7}{2} \end{array}$$

Reemplazamos en la primera ecuación del sistema:

$$\begin{array}{rcl} \left(2-\dfrac{7}{2}\right)^2+9 & = & r^2 \\ \dfrac{9}{4}+9 & = & r^2 \\ \dfrac{45}{4} & = & r^2 \end{array}$$

Finalmente tenemos la ecuación de la recta tangente a $l$ es

$$m:\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+y^2=\frac{45}{4}$$

$\square$

**Ejercicio 3.46** *En el semiplano de Poincare.*
*Dada la recta* $l: x^2+y^2=1$ *y el punto* $P=(-5,8)$*.*
*Determine las rectas ortogonales hiperbólicas a la recta* $l$ *y que pasa por* $P$*.*

**Observación:** Notemos que el semiplano de Poincare, también se puede describir del siguiente modo

$$\mathcal{P}=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ (z)>0\}$$

y las rectas están dadas por

$$l: Re(z)=a \quad \vee \quad l:|z-x_0|=r,\ Im(x_0)=0$$

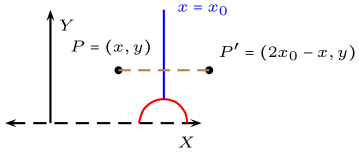
Donde $Re(z)=a$ es la parte real de $z$ y $Im(z)$ es la parte imaginaria de $z$.

### 3.6.3. Simetrías en el Semiplano de Poincaré

Para determinar las simetrías de semiplano superior de Poincaré, considere

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } (z) > 0\}$$

y debemos tener presente que hay dos tipo de rectas en el Semiplano de Poincaré
**Caso 1:** Simetría de eje la semirecta $k : Re(z) = x_0$
Recordemos la simetría respecto a la recta en el plano euclidiano




$$R_k(x, y) = (2x_0 - x, y)$$

En nuestro caso tenemos

$$R_k(z) = 2x_0 - \overline{z}$$

**Caso 2:** Simetría respecto a la semicircunferencia,

1. Veamos primero simetría respecto a la recta $l : |z| = 1$.

   Ya que $|z| = 1$, luego tenemos que $z \cdot \overline{z} = 1$, de lo cual tenemos

   $$z = \frac{1}{\overline{z}}$$

   es decir, la función $R(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$ deja fijo los punto de la circunferencia unitaria.

   *a*) $R(z) = \frac{1}{z\overline{z}} z$, luego si $Im(z) > 0$ entonces $Im(R(z)) > 0$, ya que sólo es amplificado por un número positivo.

   *b*) $R(R(z)) = z$, por ello se tiene que $R^2 = I$.

   *c*) Es una colineación.
   Si $k_a : x = a \neq 0$, entonces $R(l) = \{(\frac{a}{a^2+y^2}, \frac{y}{a^2+y^2}) \mid y \geq 0\}$.
   Sean $u = \frac{a}{a^2+y^2}$, $v = \frac{y}{a^2+y^2}$, de lo cual obtenemos $\frac{av}{u} = y$, reemplazando tenemos

   $$\begin{aligned} u &= \frac{a}{a^2 + (av/u)^2} \\ 1 &= \frac{u}{au^2 + av^2} \\ au^2 - u + av^2 &= 0 \\ \left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 &= \frac{1}{4a^2} \end{aligned}$$

   Es un circulo de centro $(\frac{1}{2a}, 0)$ y radio $\frac{1}{2|a|}$.
   Cuando $a = 0$, la recta queda fija.

*d*) Las semicircunferencia de centro $a$ y radio $r$, tal que $a^2 \neq r^2$.
Sea $l : (x-a)^2 + y^2 = r^2$, luego tenemos

$$R(l) = \left\{ \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \mid y \geq 0 \right\}.$$

Notemos que

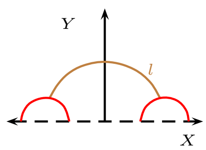
$$\begin{aligned} & \left( \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{a}{a^2-r^2} \right)^2 + \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 \\ = & \left( \frac{x(a^2-r^2) - a(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(a^2-r^2)} \right)^2 + \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 \\ = & \frac{x^2(a^2-r^2)^2 + a^2(x^2+y^2)^2 - 2xa(a^2-r^2)(x^2+y^2) + y^2(a^2-r^2)^2}{(x^2+y^2)^2(a^2-r^2)^2} \\ = & \frac{(x^2+y^2)(a^2-r^2)^2 + a^2(x^2+y^2)^2 - 2xa(a^2-r^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2(a^2-r^2)^2} \\ = & \frac{(a^2-r^2-2xa)(a^2-r^2) + a^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(a^2-r^2)^2} \end{aligned}$$

Teniendo presente $l : x^2 + y^2 = r^2 - a^2 + 2ax$, obtenemos que

$$\left( \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{a}{a^2-r^2} \right)^2 + \left( \frac{y}{x^2+y^2} \right)^2 = \frac{r^2}{(a^2-r^2)^2}$$

Notemos que: Cuando $a^2 = r^2$, la semicircunferencia es enviada en la semirecta $l : x = \frac{1}{2a}$.
Las semicircunferencia de centro el origen y radio $r$, son enviados en semicircunferencia de centro el origen y radio $1/r$.
Por el calculo anterior, se cumple la incidencia. Del mismo modo repasando cada caso, tenemos que preserva ortogonalidad

*e*) Por todo lo anterior tenemos que $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ es una simetría respecto al semicircunferencia unitaria, con centro en el origen.



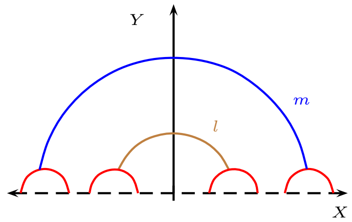

2. Simetría respecto a la recta $m : |z| = r$

Consideremos las homotecia de centro $(0,0)$ y de razón $r > 0$.

$$\begin{array}{rccl} h_r : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \rightsquigarrow & h_r(z) = r \cdot z \end{array}$$

La cual respecta incidencia y ortogonalidad, es decir,

$$h_r(l) = m; h_r \in \mathrm{Aut}(\Pi)$$




Por propiedad 3.4 tenemos que $\sigma(a) = a'$, entonces:

$$\sigma \circ R_a \circ \sigma^{-1} = R_{a'}.$$

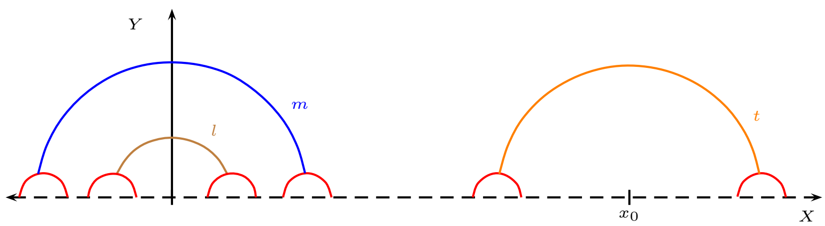
En nuestro caso tenemos que $h_r(l) = m$, entonces:

$$\begin{array}{rcll} h_r \circ R_l \circ h_r^{-1} & = & R_m & ; h_r^{-1} = h_{\frac{1}{r}} \\ \left(h_r \circ R_l \circ h_{\frac{1}{r}}\right)(z) & = & R_m(z) & \\ h_r\left(R_l(\frac{z}{r})\right) & = & R_m(z) & \\ h_r\left(\frac{r}{\overline{z}}\right) & = & R_m(z) & \\ \frac{r^2}{\overline{z}} & = & R_m(z) & \end{array}$$

3. Consideremos el eje simetría $t : |z - x_0| = r$

   La traslación en $x_0$ respecta incidencia y ortogonalidad

$$\begin{array}{rcl} t_{x_0} : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \rightsquigarrow & t_{x_0}(z) = z + x_0 \end{array}$$




$$l \xrightarrow{h_r} m \xrightarrow{t_{x_0}} t$$

Análogamente entonces se tiene

$$\begin{array}{rcl} R_t & = & t_{x_0} \circ R_m \circ t_{x_0}^{-1} \\ R_t(z) & = & t_{x_0}\left(R_m\left(z - x_0\right)\right) \\ R_t(z) & = & t_{x_0}\left(\dfrac{r^2}{\overline{z} - x_0}\right) \\ R_t(z) & = & \dfrac{r^2}{\overline{z} - x_0} + x_0 \end{array}$$

**Propiedad 3.47** *Sea $R_l$ una simetría del plano de Poincaré y $a \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que*

1. *Si $l : Re(z) = a$*
$$R_l(z) = 2a - \overline{z}$$
2. *Si $l : |z - a| = r$.*
$$R_l(z) = \frac{r^2}{\overline{z} - a} + a$$

**Ejemplo 3.48** *Sea $\Pi$ semiplano de Poincaré y $P = 2 + 3i$.*
*Determine un simétrica puntual $H_P$, respecto al punto $P$.*

**Solución:** Sea $H_P$ la simetría puntual, luego corresponde a una rotación en 180°.
Para ello debe existir $a, b \in \mathcal{L}$ tales que

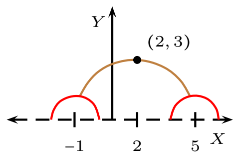
$$H_P = R_a \circ R_b; \quad a \cap b = \{P\} \quad \wedge \quad a \perp b$$

Consideremos la semicircunferencia $b$ de centro 2 y radio 3 y $a$ la semirecta vertical en $Re(z) = 2$.

$$a : Re(z) = 2; \quad b : |z - 2| = 3$$

y satisface lo pedido

$$a \cap b = \{2 + 3i\} \wedge a \perp b$$



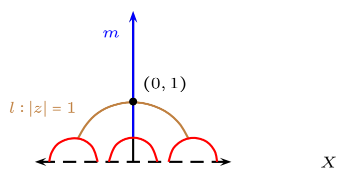

$$\begin{array}{rcl} H_P(z) & = & (R_b \circ R_a)(z) \\ H_P & = & R_b(4 - \overline{z}) \\ H_P & = & \dfrac{9}{2 - z} + 2 \end{array}$$

□

**Ejemplo 3.49** *Sea $\sigma$ una rotación de centro $i$ y $\sphericalangle 180°$ en el semiplano de Poincaré. Determine $\sigma(z)$.*

**Solución:** Las rotaciones de centro $(0, 1)$, es compuesta de dos simetrías ortogonales que se intersecta en el punto $(0, 1)$.
De otro modo:

$$(\exists l, m \in \mathcal{L})(l \perp m \ \wedge \ l \cap m = \{(0, 1)\})$$



1. Si una es una semirecta $m : Re(z) = 0$ y $l : x^2 + y^2 = 1$ tenemos

$$\begin{array}{rcl}\sigma & = & R_l \circ R_m \\ \sigma(z) & = & R_l\,(R_m(z)) \\ \sigma(z) & = & R_l(0-\overline{z}) = \frac{1}{-z}\end{array}$$

Es una rotación en 180°

$$\sigma(z) = -\frac{1}{z} = -z^{-1}$$

2. Si la dos recta son semicircunferencias:

$$l_0 : |z - x_0| = r_0, \qquad l_1 : |z - x_1| = r_1$$

Deben pasar por $(0,1)$ y perpendicular sera en 180°

$$\begin{array}{rcl}x_0^2 + 1 & = & r_0^2 \\ x_1^2 + 1 & = & r_1^2 \\ x_0 x_1 & = & -1\end{array}$$

Realizando la compuesta obtenemos

$$\sigma(z) = R_{l_1} \circ R_{l_0}(z) = \frac{r_1^2 x_0}{z(x_1 - x_0)}$$

Notemos que

$$\frac{r_1^2 x_0}{z(x_1 - x_0)} = \frac{r_1^2 x_0 x_1}{z(x_1^2 - x_0 x_1)} = \frac{-r_1^2}{z(x_1^2 + 1)} = \frac{-1}{z}$$

de este modo obtenemos la función anterior. □

**Ejemplo 3.50** *En el plano de Poincaré*
*Determinar el grupo de rotaciones de centro en $i$.*

**Solución:** Consideremos que usando traslación y homotecia siempre podemos considerar que una de las rectas es una semicircunferencia de radio 1 y centro en el origen, por el ejemplo 3.49 anterior no consideramos el caso que la otra sea una semirecta.

$$l : |z| = 1 \wedge m : |z - a| = r$$

donde $i\mathcal{I}m$ es decir, $1 + a^2 = r^2$, luego $R_l \circ R_m$ es una rotación de centro $i$.

$$R_l(R_m(z)) = R_l\left(\frac{r^2 + a\overline{z} - a^2}{\overline{z} - a}\right) = \frac{z - a}{r^2 + az - a^2} = \frac{z - a}{1 + az}$$

La rotación depende solo del valor de $a \neq 0$, y por el ejemplo anterior tenemos

$$\sigma_a(z) = \frac{z - a}{1 + az} \quad \vee \quad \sigma_\infty(z) = \frac{-1}{z}$$

Veamos la composición de dos rotaciones

$$\sigma_b(\sigma_a(z)) = \sigma_b\left(\frac{z-a}{1+az}\right) = \frac{\frac{z-a}{1+az}-b}{1+b\frac{z-a}{1+az}} = \frac{z-a-b(1+az)}{1+az+b(z-a)} = \frac{z(1-ab)-(a+b)}{z(a+b)+(1-ab)}$$

Luego tenemos

$$\sigma_b \circ \sigma_a = \begin{cases} \sigma_{\frac{a+b}{1-ab}} & \text{si} \quad ab \neq 1, \\ \sigma_\infty & \text{si} \quad ab = 1 \end{cases}$$

Además $\sigma_\infty \circ \sigma_a = \sigma_a \circ \sigma_\infty = \sigma_{\frac{-1}{a}}$ □

## 3.7. Problemas Misceláneos

**Ejemplo 3.51** *En $\Pi = \mathbb{Z}_{13}^2$, plano métrico con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + 2y_1y_2$.*
*Sean $A = (5,1)$, $l$ la recta que une los puntos $B = (3,2)$ y $C = (1,4)$.*
*Determine la ecuación de la recta $m$, tal que $A\mathcal{I}m$ y $m \perp l_{BC}$*

**Solución:** La Recta $l :< 2,-2) > +(3,2)$, la recta ortogonal

$$f((2,-2),(a,b)) = 2a - 4b = 0$$

Luego una solución es $(a,b) = (2,1)$
Por ello

$$m =< (2,1) > +(5,1)$$

□

**Ejemplo 3.52** *En $\Pi = \mathbb{Z}_{11}^2$, plano métrico con $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + 5y_1y_2$ y el punto $A = (5,1)$.*
*Determine la simetría puntual $H_A(x,y)$.*

**Solución:** (a) Consideremos la recta $a :< (1,0) > +(5,1)$ y $b :< (0,1) > +(5,1)$, rectas perpendiculares y pasan por $A$

$$\begin{aligned} H_A(x,y) &= R_a \circ R_b(x,y) \\ &= R_a(2(5,1) - (x,y) + \frac{2}{5}(5y-5)(0,1) \\ &= R_a(10-x,y) \\ &= 2(5,1) - (10-x,y) + 2(5-x)(1,0) \\ &= (x,2-y) + 2(5-x)(1,0) \\ &= (10-x,2-y) \end{aligned}$$

(b) Dada la recta $a :< (5,1) >$, tenemos que $f((5,1),(c,d)) = 5c + 5d = 0$, luego $b :< (1,-1) > +(5,1)$.

Veamos las Simetrías

$$\begin{aligned} R_a(x,y) &= -(x,y) + \frac{2}{30}(5x+5y)(5,1) \\ &= -(x,y) + 4(x+y)(5,1) \\ &= (8x+9y, 4x+3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_b(x,y) &= (10,2) - (x,y) + \frac{2}{6}((x-5) - 5(y-1))(1,-1) \\ &= (10-x, 2-y) + 4(x-5y)(1,-1) \\ &= (10-x, 2-y) + (4x+2y)(1,-1) \\ &= (10+3x+2y, 2+7x+8y) \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} H_A(x,y) &= R_b \circ R_a(x,y) = R_b(8x+9y, 4x+3y) \\ &= (10+3(8x+9y)+2(4x+3y), 2+7(8x+9y)+8(4x+3y)) = (10-x, 2-y) \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.53** *En el plano métrico $\Pi = \mathbb{Z}_{13}^2$, donde $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + 2y_1y_2$. Sean $A = (1,2)$, $B = (3,1)$, $C = (1,-1)$ puntos y la recta $l : 3x+2y = 1$.*

1. *Determine la ecuación cartesiana de la recta $m$ que pasa por $A$ y $B$.*
2. *Determine la ecuación vectorial de la recta $k$ que pasa por $C$ y es ortogonal a $l$.*
3. *Calcular $R_k \circ R_l(x,y)$.*

**Solución:** (a) La pendiente de la recta que pasa por $A, B$ es $m = \frac{2-1}{1-3} = \frac{1}{-2} = 6$.

$$y - 1 = 6(x-3); \qquad 7x + y = 9.$$

(b) La recta ortogonal a $l :< (-2,3) > +(1,-1)$ son paralela a $< (3,1) >$ y si pasa por $C$ esta dada por $k =< (3,1) > +(1,-1)$.
(c) La simetría esta definida por

$$R_a(x) = 2w - x + 2\frac{f(x-w,v)}{f(v,v)}v$$

donde $a :< v > +w$.
Calcula cada uno por separado y componiendo

$$\begin{aligned} R_l(x,y) &= (10-3x+6y, 12-10x+3y) \\ R_k(x,y) &= (5-10x-6y, 12-3x-3y) \\ R_k \circ R_l(x,y) &= R_k(10-3x+6y, 12-10x+3y) \\ &= (2-x, 11-y) \end{aligned}$$

(c') Dada $k :< v > +w$ y $l :< u > +w$ tal que $f(v,u) = 0$, entonces

$$R_k \circ R_l(X) = X - 2\frac{f(X-w,v)}{f(v,v)}v - 2\frac{f(X-w,u)}{f(u,u)}u$$

Veamos $k :< (3,1) > +(1,-1)$, $l :< (-2,3) + (1,-1)$ "solución particular más homogénea"

$$\begin{array}{ll} f(v,v) = 11, & f(X-w,v) = 3(x-1) + 2(y+1) = 3x + 2y - 1, \\ f(u,u) = 22, & f(X-w,u) = -2(x-1) + 6(y+1) = -2x + 6y + 8 \end{array}$$

Note que $11^{-1} = 6$.

$$\begin{array}{rcl} R_k \circ R_l(x,y) & = & (x,y) - 12(3x+2y-1)(3,1) - 6(-2x+6y+8)(-2,3) \\ & = & (x,y) + (3x+2y-1)(3,1) + (-x+3y+4)(-2,3) \\ & = & (2-x, 11-y) \end{array}$$

□

**Ejemplo 3.54** *En el plano Euclidiana Real usual* $\mathbb{R}^2$.
*Sean* $A = (1,4)$, $B = (3,1)$, $C = (1,-1)$ *puntos y la recta* $l : 2x + 3y = 1$

1. *Determine si la recta que pasa por los puntos* $A$ *y* $B$ *es ortogonal a* $l$.
2. *Determine* $R_l(C)$.
3. *Determine la ecuación cartesiana de la recta* $b$*, tal que* $R_b(B) = C$.

**Solución:** (a) La recta que pasa por $A$ y $B$, tiene pendiente $m = \frac{1-4}{3-1} = -\frac{3}{2}$ y la recta $l$ tiene pendiente $-\frac{2}{3}$, luego no son perpendiculares.
(b) La ecuación vectorial de la recta $l :< (3,-2) > +(-1,1)$.

$$R_l(C) = (-2-1, 2+1) + \frac{2}{13}(1+1, -1-1) \cdot (3,-2) \cdot (3,-2) = (-3,3) + \frac{20}{13}(3,-2) = \left(\frac{21}{13}, -\frac{1}{13}\right)$$

(c) El punto medio entre $B, C$ es $(2,0)$, y la pendiente de la recta que une $B, C$ es $m = \frac{1+1}{3-1} = 1$. De este modo la recta que buscamos es $b : y = -x + 2$. □

**Ejemplo 3.55** *Sean* $\Pi = (V, f)$ *plano vectorial euclidiano,* $a \in \mathcal{L}$*, tal que* $R_a(v) = w$.
*Demostrar que el punto medio entre* $v$ *y* $w$ *es un punto fijo de la Simetría* $R_a$

**Solución:** Sea $a :< u > +z \in \mathcal{L}$, además $R_a(v) = w$ y $v = R_a(w)$.

$$\begin{array}{rcl} R_a(v) & = & 2z - v + 2\frac{f(v-z,u)}{f(u,u)}u = w \\ R_a(w) & = & 2z - w + 2\frac{f(w-z,u)}{f(u,u)}u = v \end{array}$$

Sumando tenemos que

$$\begin{array}{rcc}
R_a\left(\frac{1}{2}(v+w)\right) & = & 2z-\frac{1}{2}(v+w)+2\left(\frac{f(\frac{1}{2}(v+w)-z,u)}{f(u,u)}\right)u \\
& = & 2z-\frac{1}{2}(v+w)+2\left(\frac{f(\frac{1}{2}(v+w-2z),u)}{f(u,u)}\right)u \\
& = & \frac{1}{2}(4z-(v+w))+2\left(\frac{1}{2}\frac{f(v-z+w-z,u)}{f(u,u)}\right)u \\
& = & \frac{1}{2}\left[4z-(v+w)+2\left(\frac{f(v-z,u)+f(w-z,u)}{f(u,u)}\right)u\right] \\
& = & \frac{1}{2}\left[4z-(v+w)+2\left(\frac{f(v-z,u)}{f(u,u)}+\frac{f(w-z,u)}{f(u,u)}\right)u\right] \\
& = & \frac{1}{2}\left[2z-v+2\frac{f(v-z,u)}{f(u,u)}u+2z-w+2\frac{f(w-z,u)}{f(u,u)}u\right] \\
& = & \frac{1}{2}\left[R_a(v)+R_a(w)\right] \\
& = & \frac{1}{2}(w+v).
\end{array}$$

□

**Ejemplo 3.56** *En el plano Métrico Elíptico $\xi$. Sean el punto $A=<(2,1,3)>$ y $l: 2x-y+z=0$ Determine los vértices y las ecuaciones de los lados del triángulo polar, de modo que $l$ sea un lado y $A$ incide en otro lado.*

**Solución:** Ya que un ado la recta es $l: 2x-y+z=0$, tenemos que el polo es vértices $<(2,-1,1)>$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4x-4y+4z=0.$$

El segundo lado es $l_2: x+y-z=0$ y su polo es $<(1,1,-1)>$
El tercer lado debe unir los polos

$$l_3: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3y+3z=0.$$

Luego el último vértice es $<(0,1,1)>$.
Los puntos son los polos de la recta correspondiente, luego es un triángulo polar.

$$<(2,-1,1)>,\quad <(1,1,-1)>,\quad <(0,1,1)>$$

y los lados son

$$l: 2x-y+z=0,\quad l_2: x+y-z=0,\quad l_3: y+z=0.$$

□

**Ejemplo 3.57** *En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $P=<(-1,2,3)>$ y $l: 2x-4y-6z=0$. Determine los vértices y lados del triángulo polar que tiene como vértice al punto $P$ y lado a la recta $l$.*

**Solución:** El polo de $l : 2x - 4y - 6z = 0$ es $P =< (2, -4, -6) >$.
Luego consideremos punto de la recta $B =< (3, 0, 1) >$.

$$a : \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 10y - 6z = 0. \qquad b : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21x + 7z = 0$$

De este modo tenemos que los lados son $l : 2x - 4y - 6z = 0$, $a : x + 5y - 3z = 0$, $b : 3x + z = 0$ y son rectas perpendiculares, ya que

$$f(3, 0, 1), (1, 5, -3)) = 0, \ f(3, 0, 1), (2, -4, -6)) = 0, \ f(2, -4, -6), (1, 5, -3)) = 0$$

Además, los vértices son: $a \cap l =< (3, 0, 1) >$, $a \cap b =< (-1, 2, 3) >$, $b \cap l =< (1, 5, -3) >$, $\square$

**Ejemplo 3.58** *En el plano Elíptico $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, sean $A =< (1, 1, 1) >$ y $l : x - 2y - 2z = 0$.*

1. *Determine el polo de la recta $l$.*
2. *Determine la ecuación de la recta $k$ ortogonal a $l$ y que pasa por $A$.*
3. *Determine los vértices y lados del triángulo polar que dos de sus lados son $k$ y $l$.*

**Solución:** (a) El polo de la recta $l$ es $< (1, -2, -2) >$.
(b) La recta perpendicular a $l$, debe pasar por su polo $< (1, -2, -2) >$.

$$k : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 3y - 3z = 0.$$

(c) El polo de la recta $k$ es $< (0, 1, -1) >$. Finalmente buscamos un recta que pase por ambos polos.

$$m : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4x + y + z = 0.$$

Luego el triángulo polar tiene los vértices

$$< (1, -2, -2) >, \quad < (0, 1, -1) >, \quad < (4, 1, 1) >$$

y los lados son

$$l : x - 2y - 2z = 0, \quad k : y - z = 0, \quad m : 4x + y + z = 0$$

$\square$

**Ejemplo 3.59** *En el plano Métrico Elíptico $\xi$. Sean los bipuntos $A = [\pm(-4, 2, 3)]$ y $B = [\pm(1, -1, 2)]$ vértices de un triángulo polar.*
*Determine el otro vértice y las ecuaciones de los tres lados del triángulo.*

**Solución:** La recta que une los puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7x + 11y + 2z = 0.$$

El tercer punto debe ser $C = [\pm(7, 11, 2)]$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 2 \end{vmatrix} = -29(x - y + 2z) = 0. \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 7 & 11 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6(-4x + 2y + 3z) = 0.$$

Los puntos son los polos de la recta correspondiente, luego es un triángulo polar.

$$[\pm(7, 11, 2)], \quad [\pm(1, -1, 2], \quad [\pm(-4, 2, 3)]$$

y los lados son

$$l : 7x + 11y + 2z = 0, \quad k : x - y + 2z = 0, \quad m : -4x + 2y + 3z = 0.$$

□

**Ejemplo 3.60** *En el plano métrico elíptico* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_5^3)$, *sean los puntos*

$$K =< (4, 1, 1) >, L =< (3, 1, 2) >, R =< (2, 1, 3) >, P =< (2, 3, 1) >, Y =< (4, 3, 0) > .$$

*Determine si el punto* $R$ *incide en las rectas* $l_{KL}$ *y* $l_{PY}$.

**Solución:**

$$l_{KL} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = x + z = 0. \qquad l_{PY} : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2x + 4y - z = 0.$$

Evaluando
$R\mathcal{I}l_{KL}$ si y sólo si $2 + 3 = 5 = 0$ y $R\mathcal{I}l_{PY}$ si y sólo si $4 + 4 - 3 = 5 = 0$.
Luego $l_{KL} \cap l_{PY} = \{R\}$. □

**Ejemplo 3.61** *En el plano métrico elíptico* $\Pi = \mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_{11}^3)$, *sean los puntos*

$$K =< (9, 1, 2) >, L =< (3, 0, 1) >, R =< (3, 9, 1) >, P =< (2, 1, 4) > .$$

*Determine* $l_{KL} \cap l_{RP}$.

**Solución:**

$$l_{KL}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 9 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 3y - 3z = 0. \qquad l_{RP}: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2x - 10y + 7z = 0.$$

El punto de intersección se obtiene del despeje de la primer ecuación $x = 3y+3z$ y reemplazando en la segunda ecuación tenemos $6y + 6z - 10y + 7z = 0$, simplificando tenemos $-4y + 2z = 0$ de esto resulta que $z = 2y$, $x = 9y$, luego el punto esta dada por

$$(9y, y, 2y) \in < (9,1,2) >, \; y \in \mathbb{R}$$

Luego $l_{KL} \cap l_{RP} = \{< (9,1,2) >\}$. □

**Ejemplo 3.62** *En el plano de Klein, sean la recta $l : y = 3/5$ y $P = (\frac{1}{10}, \frac{2}{5})$.*
*Determine la recta $m$ tal que $P\mathcal{I}m$ y $m \perp l$*

**Solución:** Los extremos en la circunferencia unitaria de la cuerda $y = 3/5$ son $(4/5, 3/5)$, $(-4/5, 3/5)$ luego las rectas perpendiculares o tangente a la circunfencia en los puntos extremos de la cuerda son

$$\left.\begin{array}{rcl} y - 3/5 & = & -4/3(x - 4/5) \\ y - 3/5 & = & 4/3(x + 4/5) \end{array}\right| \qquad \left.\begin{array}{rcl} y & = & -4/3x + 5/3 \\ y & = & 4/3x + 5/3 \end{array}\right|$$

El punto de intersección de las tangentes es $(0, 5/3)$,
Luego tenemos $\eta :< (\frac{1}{10}, -\frac{19}{15}) > +(0, \frac{5}{3})$. Forma cartesiana $\eta : 38x + 3y = 5$.

□

**Ejemplo 3.63** *En el semiplano de Poincaré, $l : |z - 3| = 4$.*
*Determine $R_l(1 + i)$ y $R_l(w)$*

**Solución:** $R_l(w) = \frac{16}{\overline{w}-3} + 3$
Veamos el caso:

$$R_l(1+i) = \frac{16}{-2-i} + 3 = \frac{-32+16i}{5} + 3 = \frac{-17+16i}{5} = -\frac{17}{5} + \frac{16}{5}i$$

□

**Ejemplo 3.64** *En el semiplano de Poincaré, $k : |z + 2| = 3$ y $l : |z - 3| = 4$*

1. *Determine $k \cap l$.*
2. *Determine si $k \perp l$.*
3. *Calcular la forma binomial de $R_k(1 + 2i)$.*

**Solución:** (a) Sea $z = a + bi$, luego $(a+2)^2 + b^2 = 9$ y $(a-3)^2 + b^2 = 16$
Restando obtenemos que

$$(2a-1)(-5) = (a-3)^2 - (a+2)^2 = 7,$$

de lo cual $a = -\frac{1}{5}$, evaluando tenemos que $b = \frac{12}{5}$.
De este modo tenemos que

$$a \cap b = \left\{-\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i\right\}$$

(b) Veamos las pendiente, $m_1 = \frac{12/5}{-1/5+2} = \frac{4}{3}$ y $m_2 = \frac{12/5}{-1/5-3} = -\frac{3}{4}$.
(b') la distancia entre los centros $d(-2,0),(3,0)) = 5$ y $3^2 + 4^2 = 5^2$, luego son ortogonales.
(c) $R_k(1+2i) = \frac{9}{1-2i+2} - 2 = \frac{1}{13} + \frac{18}{13}i$

□

**Ejemplo 3.65** *En el semiplano de Poincaré, $k : |z+3| = 8$ y $l : |z-10| = 12$
Calcular la forma binomial de $(R_k \circ R_l)(4+6i)$.*

**Solución:**

$$\begin{array}{rcl}
(R_k \circ R_l)(4+6i) & = & R_k(R_l(4+6i)) \\
& = & R_k\left(\dfrac{144}{4-6i-10} + 10\right) \\
& = & R_k\left(\dfrac{144}{-6-6i} + 10\right) \\
& = & R_k\left(\dfrac{24}{-1-i} + 10\right) \\
& = & R_k\left(12(-1+i) + 10\right) \\
& = & R_k\left(-2+12i\right) \\
& = & \dfrac{64}{-2-12i+3} - 3 \\
& = & \dfrac{64}{1-12i} - 3 \\
& = & \dfrac{64}{145}(1+12i) - 3 \\
& = & -\dfrac{371}{145} + \dfrac{768}{145}i.
\end{array}$$

□

**Ejemplo 3.66** *En el semiplano de Poincaré, dado los puntos $A = 2+3i$ y $B = -6+i$.
Calcular la forma binomial de $R_l(\frac{1}{2}+i)$, donde $l = l_{AB}$.*

**Solución:** La recta no es vertical, luego es de la forma $(x-a)^2 + y^2 = r^2$.
Considerando la correspondencia y reemplazando obtenemos

$$(2-a)^2 + 3^2 = r^2 \qquad (-6-a)^2 + 1^2 = r^2$$

Igualado obtenemos

$$\begin{aligned} (2-a)^2+3^2 &= (-6-a)^2+1^2 \\ 4-4a+a^2+9 &= 36+12a+a^2+1 \\ -16a &= 24 \\ a &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

de este modo tenemos que $r^2 = (2+3/2)^2+9 = \frac{85}{4}$.
De este modo tenemos que $l : |z+\frac{3}{2}| = \sqrt{\frac{85}{4}}$

$$\begin{aligned} R_l\left(\tfrac{1}{2}+i\right) &= \left(\frac{\frac{85}{4}}{\frac{1}{2}-i+\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{85}{4}}{2-i} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{85}{4*5}(2+i) - \tfrac{3}{2}\right) \\ &= \left(\tfrac{17}{4}2+\tfrac{17}{4}i-\tfrac{3}{2}\right) = \left(7+\tfrac{17}{4}i\right) \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.67** *Sean* $\Pi$ *plano métrico,* $a, b \in \mathcal{L}$ *distintas.*
*Demostrar que*

$$a \perp b \quad \text{si y sólo si} \quad R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

**Solución:** Consideremos que $a \perp b$ si y sólo si $R_a(b) = b$.
Sean $a, b \in \mathcal{L}$ y $a \perp b$, luego tenemos que $R_a(b) = b$, además $R_a^{-1} = R_a$, de este modo tenemos que

$$R_a \circ R_b \circ R_a^{-1} = R_{R_a(b)} = R_b.$$

despejando obtenemos

$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

Supongamos ahora que

$$R_b \circ R_a = R_a \circ R_b$$

despejando, y usando la propiedad tenemos

$$R_{R_a(b)} = R_a \circ R_b \circ R_a = R_b$$

luego $R_a(b) = b$, de lo cual $a \perp b$. □

**Ejemplo 3.68** *En* $\Pi$ *plano métrico, sean* $a, b \in \mathcal{L}$ *tal que* $a \perp b$.
*Demostrar que*

$$R_a(b) = b.$$

**Solución:** Sea $\{P\} = a \cap b$, luego tenemos que $b$ es la única recta ortogonal a $a$ en $P$. Además $P\mathcal{I}a$ entonces $R_a(P) = P$.
Pero $R_a(P)\mathcal{I}R_a(b)$ y $R_a(b) \perp R_a(a)$, de lo cual tenemos que:

$$P\mathcal{I}R_a(b) \text{ y } R_a(b) \perp a$$

Por unicidad de $b$, se tiene que $R_a(b) = b$ $\square$