Kalkulus 1
8. feladatsor

2022/23. I. félév

Részsorozatok, torlódási pontok, alsó és felső határérték

1. Mutassuk meg, hogy ha az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat valamely $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata konvergens, akkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens.

2. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy számsorozat, melyre $a_{2n} \to A$ és $a_{2n+1} \to B$.

   (a) Mutassuk meg, hogy ha $A = B$, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens és $a_n \to A$.

   (b) Mutassuk meg, hogy ha $A \neq B$, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bármely konvergens részsorozata vagy A-hoz, vagy B-hez tart.

   (c) Mutassuk meg, hogy ha tudjuk, hogy még $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat is konvergens, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens.

3. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Mutassuk meg, hogy $\alpha = \liminf a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ pontosan akkor, ha

   (a) minden $c < \alpha$ esetén $c < a_n$ majdnem minden n-re és

   (b) minden $c > \alpha$ esetén $a_n < c$ végtelen sok n-re.

   Fogalmazzunk meg hasonló állítás $\limsup a_n$-re is!

4. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy

   (a)
   $$\liminf a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\}.$$

(b)

$$\limsup a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\{\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\}.$$

5. Keressük meg az alábbi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok értékkészletének infimumát és supremumát, valamint a sorozatok lim inf-jét és lim sup-ját!

   (a) $a_n = (-1)^n(1+1/n)$,

   (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$,

   (c) $a_n = (3+(-1)^n)n$,

   (d) $a_n = 1+2(-1)^n+3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,

   (e) $a_n = n^{(-1)^n}$.

6. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két valós sorozat. Mutassuk meg, hogy

$$\liminf a_n + \liminf b_n \le \liminf(a_n+b_n) \le \liminf a_n + \limsup b_n \le \limsup(a_n+b_n)$$
$$\le \limsup a_n + \limsup b_n.$$

7. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ adott valós számok. Adjunk meg olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, melyre $\alpha_i \notin \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, α_i torlódási pontja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ -nek és α_i-ken egyéb torlódási pontja nincs.

8. Adjunk meg olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, amelynek minden a_{n_0} tagjához van olyan részsorozata $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek, ami a_{n_0}-hoz konvergál.