Vektoralgebra (2) **2. FELADATLAP**
Skaláris, vektoriális és vegyes szorzat

1. Adottak az $\overrightarrow{OA} = (4, -2, -4)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 4, 3)$ vektorok. Határozzuk meg az $OACB$ paralelogramma átlóinak hosszát és közrezárt szögüket!

2. Adottak az $\overrightarrow{AB}(1, 2, -2)$, $\overrightarrow{BC}(2, 1, 2)$, $\overrightarrow{CD}(-1, -2, 2)$ vektorok. Igazoljuk, hogy $ABCD$ négyzet!

3. Határozzuk meg az $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$ vektorokra epített paralelogramma átlóinak hosszát, ahol az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok hossza 1 és a közrezárt szögük mértéke $60°$.

4. Határozzuk meg az $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ és $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$ vektorok szögét, ahol az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ egysgvektorok és a közrezárt szögük mértéke $120°$.

5. Az $ABCD$ négyzet A csúcspontját összekötjük a $[BC]$ oldal M felezőpontjával és a $[DC]$ oldal N felezőpontjával. Számítsuk ki az MAN szög mértékét (vektoriálisan!).

6. Legyen $ABCDA'B'C'D'$ egy kocka és N a $CDD'C'$lap középpontja, M pedig az $A'B'C'D'$ lap középpontja. Számítsuk ki:
a) az AC és AD' hajlásszögének mértékét;
b) az AN és AM hajlásszögének mértékét.

7. Legyen ABC egy háromszög és O egy pont a térben. Mutassuk ki, hogy

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

8. Legyen ABC egy derékszögű háromszög és az AB átfogó hossza c. Számítsuk ki az alábbi összeget:

$$S = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

9. Határozzuk meg a $\lambda \in \mathbb{R}$ valós számot úgy, hogy a $\vec{p} = \vec{i} + 2\vec{j} + \lambda\vec{k}$ és $\vec{q} = 3\vec{i} + \vec{j}$ vektorok által közrezárt szög $45°$-os legyen!

10. Határozzuk meg azt a $\vec{p}$ vektort, amely merőleges az $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ és $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ vektorokra, hossza 14 és az Oy tengellyel tompaszöget zár be!

11. Egy $\vec{p}$ vektor kollineáris az $\vec{a}(6, -8, -15/2)$ vektorral és tompaszöget zár be az Oz tengellyel. Határozzuk meg a $\vec{p}$ komponenseit, ha $||\vec{p}|| = 50$.

12. Adottak az $\vec{a}(3, -1, -2)$ és $\vec{b}(1, 2, -1)$ vektorok. Számítsuk ki az alábbi vektorokat:

$$\vec{a} \times \vec{b}, (2\vec{a} + b) \times \vec{b}, (2\vec{a} + b) \times (2\vec{a} - \vec{b}).$$

13. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AB}(6, 0, 2)$ és $\overrightarrow{AC}(1.5, 2, 1)$ vektorokra épített paralelogramma párhuzamos oldalai közti távolságokat!

14. Adottak az $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ és $C(5, 2, 6)$ pontok. Határozzuk meg az ABC háromszög területét!

15. Adottak az $\vec{a}(2, -3, 1)$, $\vec{b}(-3, 1, 2)$ és $\vec{c}(1, 2, 3)$ vektorok. Határozzuk meg az $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ és $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ vektorokat. Milyen következtetést tudunk levonni a vektoriális szorzat asszociatívításával kapcsolatosan?

16. Adottak az $\overrightarrow{a}(1, 0, 3)$és a $\overrightarrow{b}(2, 1, -1)$ vektorok. Adjunk meg egy vektort, amely merőleges az $\overrightarrow{a}$ és $\overrightarrow{b}$ vektorokra és hosszúsága 2.

17. Legyen az $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$ kifejezés. Számítsuk ki az értékét és értelmezzük mértanilag.

18. Mikor áll fenn az $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ egyenlőség?

19. (*Gibbs-képlet*) Mutassuk ki, hogy:
a) $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$;
b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{a}$.

20. Tekintsük a $VABC$ szabályos háromoldalú gúlát, melyben $AB = BC = AC = a$ és $VA = VB = VC = b$ $(b>a)$. Mutassuk ki, hogy $(\overrightarrow{VA} \times \overrightarrow{VB}) \times \overrightarrow{VC} = \frac{2b^2-a^2}{2}\overrightarrow{AB}$.

21. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:
a) $\operatorname{tg}(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\left\|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right\|}{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}$;
b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})^2 = \overrightarrow{a}^2\overrightarrow{b}^2 - (\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b})^2$ (Lagrange-féle azonosság).

22. Legyen $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ három nem kollineáris vektor. Ha $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, akkor igazoljuk, hogy annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen az ABC háromszög az, hogy: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}$. Innen vezessük le a szinusz tételt.

23. (Sündisznó tétel) Legyen az $[VABC]$ tetraéder. Igazoljuk, hogy azon kifele irányuló vektorok összege, amelyek merőlegesek a tetraéder lapjaira, és nagyságuk rendre a megfelelő lap területével egyenlő, a zérus vektor.

24. Adott három vektor: $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{OC}$. Igazoljuk, hogy az

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{r_3} \times \overrightarrow{r_1}$$

vektor merőleges az (ABC) síkra.

25. Igazoljuk, hogy az $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$ $C(-1, 2, 1)$ és $D(2, 1, 3)$ pontok egy síkban vannak!

26. Határozzuk meg azon tertraéder térfogatát, amelynek csúcsai $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ és $D(4, 1, 3)$!

27. Egy $ABCD$ tetraéder esetén $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Határozzuk meg a D csúcs koordinátáit, tudva, hogy a tetraéder térfogata 5 és a D csúcs az Oy tengelyen helyezkedik el.

28. Adottak az $\vec{a}(8, 4, 1)$, $\vec{b}(2, 2, 1)$ és $\vec{c}(1, 1, 1)$ vektorok. Határozzuk meg azt az egységnyi hosszúságú $\vec{d}$ vektort, amelyik az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokkal ugyanakkora szöget zár be, merőleges a $\vec{c}$ vektorra, valamint az $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ és $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ rendszerekről tudjuk, hogy azonos irányításúak (mindkettő jobb- vagy mindkettő balsodrású).

29. Mutassuk ki, hogy ha $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, akkor az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ vektorok koplanárisak.

30. Mutassuk ki, hogy ha $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) = 0$ akkor $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ koplanárisak.

31. Ellenőrizzük az $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}) - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{d})(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c})$ összefüggést.

32. Igazoljuk, hogy $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{d}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d})\overrightarrow{c} - (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\overrightarrow{d}$.

33. Az ABC háromszögben legyenek $A\prime$, $B\prime$, $C\prime$ a magasságok talppontjai. Bevezetve a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{h}_a, \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{h}_b, \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{h}_c$ jelöléseket mutassuk ki, hogy:
a) $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{h}_a \times \overrightarrow{a}$;
b) $\overrightarrow{h}_a = \frac{1}{a^2}\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$;
c) $a^2\overrightarrow{h}_a + b^2\overrightarrow{h}_b + c^2\overrightarrow{h}_c = \overrightarrow{0}$.

34. Adottak az $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ nem koplanáris vektorok. Mutassuk ki, hogy

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) = 0.$$