

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

Secuencia de fases

OBJETIVOS

Establecer la secuencia de fases de un sistema trifásico por diversos métodos.

PROBLEMAS PREPARATORIOS

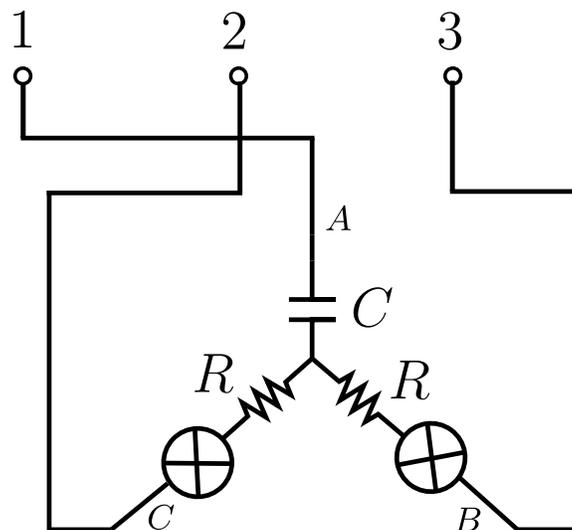


Figura 1 La lámpara más iluminada indica la fase que sigue a la fase a la que está conectado el capacitor

- En el circuito de la Figura 1 con $R = 20\ \Omega$, $C = 5\ \mu F$ y las lámparas incandescentes son de $100\ w$ a $220\ V$, hallar las corrientes y voltajes en los elementos suponiendo:

a)

$$V_{AB} = 220\angle 0^\circ \quad V_{BC} = 220\angle -120^\circ \quad V_{CA} = 220\angle 120^\circ \quad \text{Secuencia positiva} \quad (1)$$

b)

$$V_{AB} = 220\angle 0^\circ \quad V_{BC} = 220\angle 120^\circ \quad V_{CA} = -220\angle -120^\circ \quad \text{Secuencia negativa} \quad (2)$$

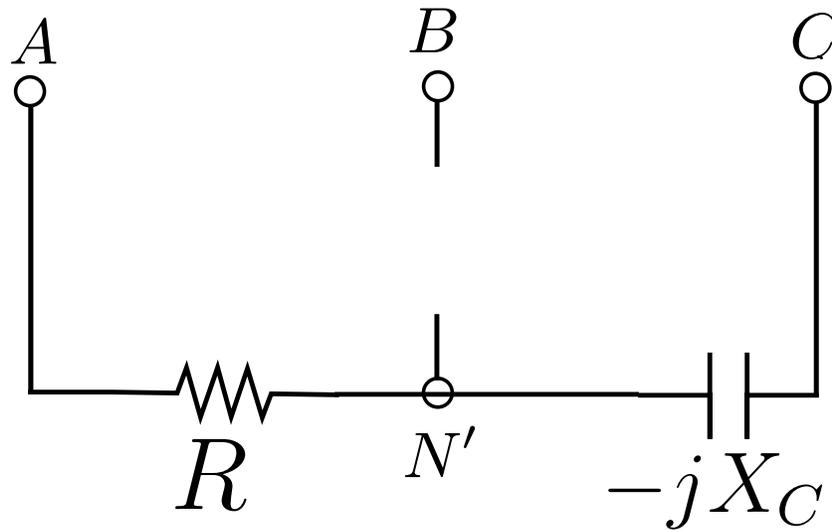


Figura 2 Cuando la secuencia de fases es ABC (positiva) $V_{BN'} < V_{AB}$

2. En el circuito de la Figura 2 se cumple la condición $R \approx X_C$). Demostrar que:

- (a) $V_{BN'} < V_L$ para secuencia positiva: ecuación (1)
- (b) $V_{BN'} > V_L$ para secuencia negativa: ecuación (2)

donde V_L es el voltaje entre líneas.

Práctica

1. Montar el circuito de la Figura 1 con los parámetros del problema preparatorio 1 y determinar experimentalmente la secuencia de fases del sistema de suministro de energía trifásico. Notar que la fase que sigue a la del capacitor es la de la bombilla que ilumina más o de mayor corriente a través de ella.
2. Montar el circuito de la Figura 2 con $R = 84,4\Omega$ y $C = 30\mu F$ y determinar experimentalmente el voltaje $V_{BN'}$ y del resultado determinar la secuencia de fases del sistema de suministro de energía trifásico.
3. En circuito de la Figura 2 intercambiar las fases B y C , es decir, conectar el circuito RC entre los terminales A y B y medir el voltaje $V_{CN'}$ y compararlo con V_{AB} . Del resultado determinar la secuencia de fases del sistema de suministro de energía trifásico.
4. Verificar los resultados anteriores mediante el secuencímetro industrial.

Aplicaciones

Son varios los casos en los que será necesario conocer la secuencia de fases: A la hora de conectar un motor trifásico si queremos que nos gire en un determinado sentido, necesitaremos conocer la secuencia de fases previamente. Es muy fácil cambiar el sentido de giro del mismo, intercambiando dos de sus fases de alimentación. Pero a veces nos encontraremos con máquinas que no nos permitirán la prueba del sentido de giro, pudiendo estropearse si giran en sentido contrario al diseñado, por poco tiempo que giren, como ocurre con los equipos frigoríficos trifásicos, el compresor podría dañarse. Averiguaremos la secuencia y conectaremos la máquina adecuadamente. En los motores rebobinados tendremos en cuenta que quizás el bobinador no ha respetado la secuencia de fases original, y la numeración de las fases no se corresponda con la nueva distribución. Los motores eléctricos trifásicos están equipados con 6 bornes, conforme a la norma CEI 34-8. Cuando el motor es alimentado en U1, V1 y W1 por una red de secuencia directa L1, L2 y L3, el motor girará en sentido horario visto desde la salida del eje.

<http://electric1.es/sfases/secuenciadefases.html>

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

LEYES DE KIRCHHOFF

Objetivo

Verificar experimentalmente el cumplimiento de las leyes de Kirchhoff en el estado estacionario en circuitos excitados con fuentes de voltaje sinusoidales de frecuencia constante (AC) y de valor constante (DC).

Problemas Preparatorios

1. Determinar los voltajes y corrientes en cada uno de los elementos del circuito de la Figura 1 con los parámetros de la ecuación (1) y los sentidos de referencia indicados suponiendo que las corrientes se han definido en los sentidos de las caídas de potencial. Encontrar expresiones para las corrientes y voltajes en función de R_5 .

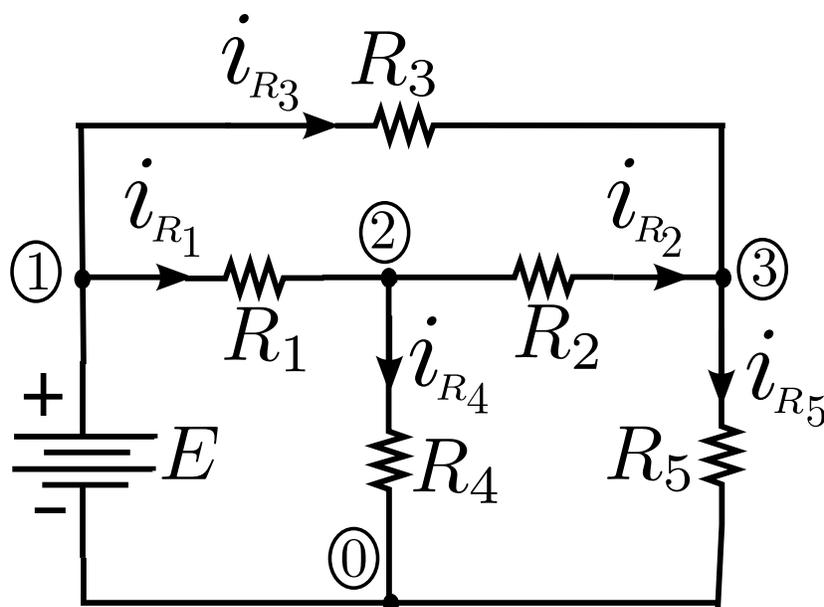


Figura 1

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 680 \, \Omega & R_2 &= 270 \, \Omega & R_3 &= 1,2 \, k\Omega \\
 R_4 &= 820 \, \Omega & R_5 &= 1 \, k\Omega & E &= 12 \, V
 \end{aligned}$$

(1)

2. Determinar los voltajes y corrientes en cada uno de los elementos del circuito de la Figura 2 con los parámetros de la ecuación (2) y los sentidos de referencia indicados suponiendo que las corrientes se han definido en los sentidos de las caídas de potencial.

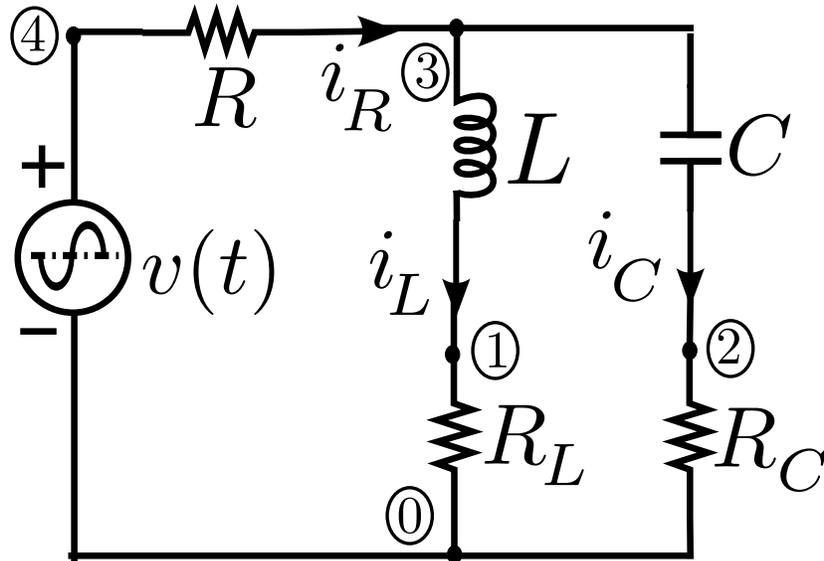


Figura 2

$$\begin{aligned} R &= 50 \Omega & R_L &= R_C = 100 \Omega & C &= 28 \mu F \\ L &= 280 mH & f &= 60 Hz & v(t) &= 35\sqrt{2} \text{Sen } 2\pi ft V \end{aligned} \quad (2)$$

Práctica

- Montar el circuito de la Figura 1 con los parámetros de la ecuación (1) y determinar experimentalmente las corrientes y voltajes en cada uno de los elementos.
 - Verificar cumplimiento de la 1ª ley de K. en cada uno de los nodos del circuito.
 - Verificar el cumplimiento de la 2ª ley de K. para todos los anillos del circuito.
 - Observar el efecto de R_5 en las corrientes incidentes al nodo 1.
- Montar el circuito de la Figura 2 con los parámetros de la ecuación (2) y determinar experimentalmente los fasores que representan las corrientes y voltajes en cada uno de los elementos eligiendo adecuadamente los instrumentos de medición de corrientes (amperímetros). Tomar como referencia el voltaje de la fuente independiente y medir con el osciloscopio la diferencia de fase entre:

$$i \quad \mathbf{V} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}_{R_L};$$

- ii \mathbf{V} y \mathbf{V}_{R_C} ;
 - iii $-\mathbf{V}$ y $-\mathbf{V}_R$;
 - iv intercambiar la ubicación entre R_L y L y medir la diferencia de fase entre \mathbf{V} y \mathbf{V}_L ;
 - v intercambiar la ubicación entre R_C y C y medir la diferencia de fase entre \mathbf{V} y \mathbf{V}_C ;
- (a) Verificar cumplimiento de la 1ª ley de K. en cada uno de los nodos del circuito.
 - (b) Verificar cumplimiento de la 2ª ley de K. en cada uno de los anillos del circuito.
 - (c) Variar R_L y R_C hasta obtener que la corriente i_R tenga su valor máximo.

NOTAS

- a) Si las lecturas de los amperímetros no son apreciables variar el voltaje de entrada si es necesario teniendo cuidado de no exceder la máxima corriente permitida a través de cada elemento. Para calcular los nuevos valores predichos teóricamente aplicar el principio de proporcionalidad en circuitos lineales a partir de los resultados obtenidos en el pre-informe.
- b) En el circuito de la Figura 2 R es un reóstato de $98\ \Omega$ de corriente máxima $2,2\ A$; R_L y R_C son reóstatos de corriente máxima $1\ A$ y la fuente independiente es un variac.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

SIMULACIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS CON MATLAB

Objetivos

1. Utilizar el paquete de simulación simulink de Matlab para resolver circuitos en régimen permanente.
2. Visualizar las respuestas transitorias y del estado estacionario en el dominio del tiempo utilizando el mismo programa.

Problemas Preparatorios

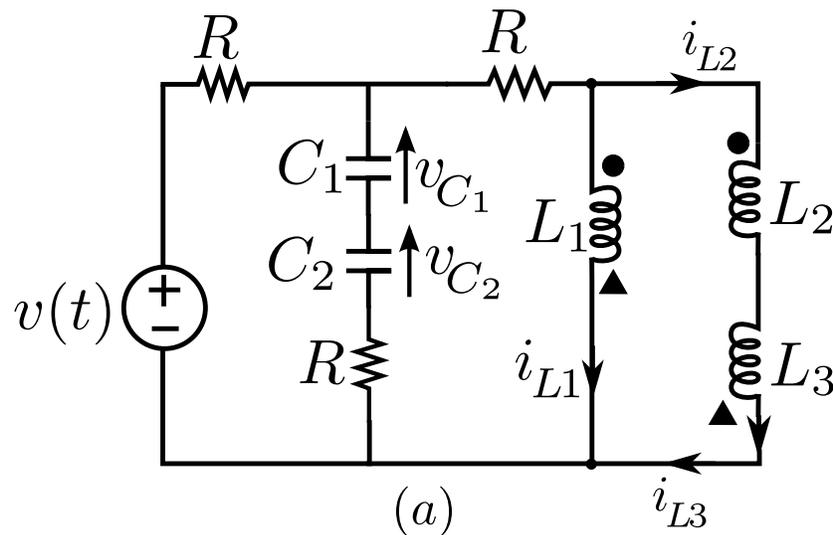


Figura 1 Circuito para Verificar las leyes de Kirchhoff en régimen sinusoidal permanente.

1. Determinar los voltajes y corrientes de régimen permanente en cada uno de los elementos del circuito de la Figura 1 con los parámetros de la ecuación (1) y los sentidos de referencia indicados suponiendo que las corrientes se han definido en los sentidos de las caídas de potencial, para cada uno de los siguientes casos:

(a) $v(t) = 24 V$

$$(b) v(t) = 86 \text{Sen}(10^3 t + 53,13^\circ)$$

$$\begin{aligned} R &= 3 \Omega & C_1 &= 300 \mu F & C_2 &= 1500 \mu F \\ L_1 &= 6 mH & L_2 &= 1,5 mH & L_3 &= 3 mH \\ M_{12} &= 1 mH & M_{13} &= 2 mH \end{aligned} \quad (1)$$

2. Transitorios en Circuitos de Primer orden

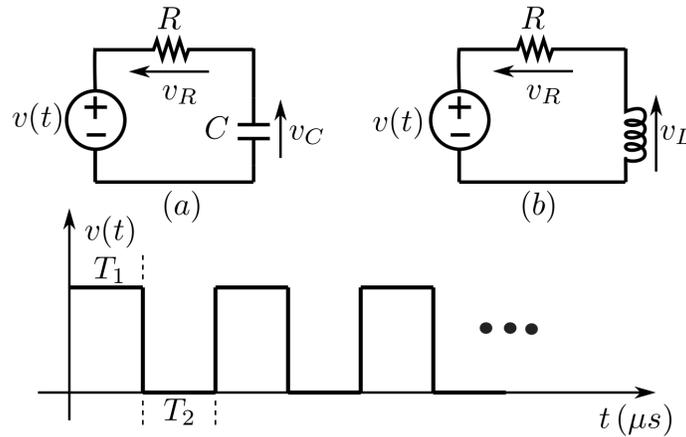


Figura 2 Transitorios en Circuitos de Primer orden

- a) Demostrar que $\tau = RC$ y $\tau = \frac{L}{R}$ tienen dimensiones de tiempo (segundos en el sistema MKS)
- b) En el circuito de la Figura 2(a) suponer $v(t) = V = \text{constante}$ y $v_C(0) = V_{C0}$. Demostrar las siguientes expresiones en función del tiempo para los voltajes en el resistor y en el capacitor:
- $$v_R(t) = (V - V_{C0}) e^{-\frac{t}{T}} \quad v_C(t) = V_{C0} + (V - V_{C0}) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad T = RC \quad (2)$$
- c) En el circuito de la Figura 2(a) suponer $v(t) = V = \text{constante}$ e $i_L(0) = I_{L0}$. Hallar expresiones del tiempo para $v_R(t)$ y $v_L(t)$.

Hallar v_R , v_C y v_L en cada uno de los circuitos de la Figura 2 para los siguientes parámetros: En la Figura 2(a): $R = 1 k\Omega$ $C = 0,1 \mu F$. En la Figura 2(b): $R = 2,7 k\Omega$ $L = 280 mH$ para cada uno de los siguientes valores de T_1 y T_2 :

- (a) $T_1 = T_2 = 400 \mu s$
 (b) $T_1 = T_2 = 800 \mu s$
 (c) $T_1 = T_2 = 200 \mu s$

RÉGIMEN SINUSOIDAL PERMANENTE: CREACIÓN Y FORMACIÓN DEL CIRCUITO

1. Ubicar el ícono de Matlab en el escritorio o en la barra de tareas y abrir el programa.
2. En la línea de comandos ejecutar “simscapepowersystems_ST”.
3. Abrir un modelo nuevo en blanco y grabarlo con un nombre descriptivo para el circuito.
4. En la ventana “Library Browser” traer el elemento “AC Voltage Source” de la librería , “Simscape”, “Electrical”, “Specialized Power Systems”, “Fundamental Blocks”, “Electrical Sources” e introducirle los parámetros correspondientes. Hacer click en “Apply” luego “Ok”.
5. En la librería “Simscape”, “Electrical”, “Specialized Power Systems”, “Fundamental Blocks”, “Elements” se encuentra el elemento “Series RLC Branch”, que se puede usar para el resistor, el capacitor o el inductor sin acoplamiento mutuo los cuales se arrastran a la ventana ‘del modelo y se les hace doble click para introducir el tipo y valor que le corresponde. Hacer click en “Apply” luego “ok”.
6. Para el grupo de inductores mutuamente acoplados en la misma librería anterior, es decir, “Simscape”, “Electrical”, “Specialized Power Systems”, “Fundamental Blocks”, “Elements”, ubicar y arrastrar “Mutual Inductance”, cuyos parámetros se deben introducir de la siguiente manera:
 - a) En el menú desplegable del Type of Mutual Inductance escoger “Generalized Mutual Inductance”.
 - b) en Number of windings 3
 - c) Introducir la matriz de inductancias propias y mutuas y la matriz de resistencias serie que en nuestro caso es de ceros. Recordar que se introduce por filas, separadas por punto y coma y que los elementos de cada fila se separan mediante la barra espaciadora.
7. Cuando el cursor pasa cerca de cualquier terminal (de un elemento de circuito, de un medidor o de una fuente) se pasa automáticamente al modo de alambrado para realizar conexiones con los demás elementos.
8. Tanto los medidores como las fuentes también tienen polaridad o sentido de referencia (interpretación para los valores positivos de las funciones del tiempo)
9. Para realizar la simulación ubicar en la columna izquierda de la ventana del “Simulink Library Browser”, “Specialized Power Systems”, “Fundamental Blocks”, “powergui” y arrastrarlo y soltarlo en cualquier parte de la ventana del modelo.

10. Al tener el circuito listo, hacer click en “run” ubicado en la barra de herramientas. No deberá mostrar ningun mensaje de error

Mediciones

Los elementos de medida se obtienen con los elementos “Voltage Measurement” y/o “Current Measurement” de la librería “Simscape”, “Electrical”, “Specialized Power Systems”, “Fundamental Blocks”, “Measurements”, que tienen una salida que se debe conectar a un elemento “Fourier”, el cual tiene dos salidas para la magnitud y la fase a cada una de las cuales se debe conectar un elemento Display”.

Es muy importante que a cada elemento “Fourier” se le debe configurar una frecuencia idéntica a la de la fuente de voltaje.

Para visualizar las ondas de los elementos se selecciona “scope” lo arrastramos al circuito y lo pegamos a la salida de “Voltage Measurement” y “Current Measurement”.

TRANSITORIOS EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Se arma el circuito como se describió en la sección anterior, pero se excita con una fuente de voltaje escalón unitario, para lo cual se deben buscar e interconectar dos elementos “Controlled Voltage Source” y “Step”, como se muestra en la Figura 3.

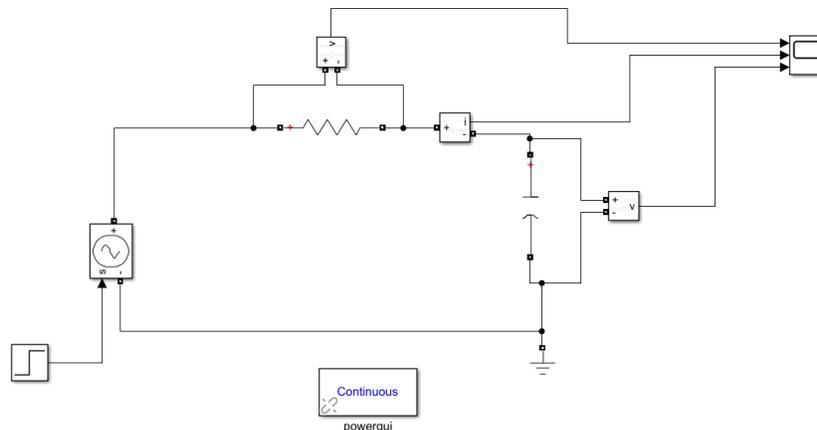


Figura 3

Otro enfoque es mediante los archivos de comandos Matlab (de extensión *.m), para crear el cual se va a la pestaña “HOME”, “New Script” y se le digitan los siguientes comandos:

```
% Circuito Serie R-L-C
clear all;
close all;
clc;
R=5;    % El valor del parámetro Resistencia
C=1.9;  %El valor del parámetro Capacitancia
L=1.45; El valor del parámetro Inductancia
Tf=25 % Tiempo Final
s=tf('s');
g=1/((L*C)*s^2+(R*C)*s+1); % Función de transferencia para Vc(s)
step(g,Tf)
grid on
stepinfo(g)
```

Nótese que en este último enfoque es necesario previamente obtener la función de transferencia para cada respuesta.

Algo muy importante es de acuerdo a la ubicación de las raíces del denominador de la función de transferencia (polos) el tiempo final de simulación debe ser mayor o igual a $Tf = \frac{4}{\alpha}$, donde α es la parte real de la solución más cercana al eje imaginario.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

EL OSCILOSCOPIO DE RAYOS (ORC) CATÓDICOS

Objetivos

1. Entender el funcionamiento físico y algunos detalles constructivos del ORC analógico.
2. Realizar mediciones del voltaje, frecuencia y diferencias de fase entre voltajes sinusoidales de la misma frecuencia con el ORC (digital y analógico).

Problemas Preparatorios

1. Explicar el “Efecto de Edison”. ¿En qué consiste la emisión termoiónica? ¿Cómo se define el “Trabajo de Extracción” de un material?
2. Explicar los detalles constructivos y cómo funciona un “Tríodo”.
3. Demostrar que un electrón de carga e y masa m despreciable (es decir se puede ignorar el efecto de la gravedad), inicialmente en reposo en el punto A de potencial V_A en una región de un campo eléctrico de valor constante E que lo acelera, adquiere una velocidad v_z en el punto B de potencial V_B que viene dada por la siguiente expresión (Ver Figura 1 (a)):

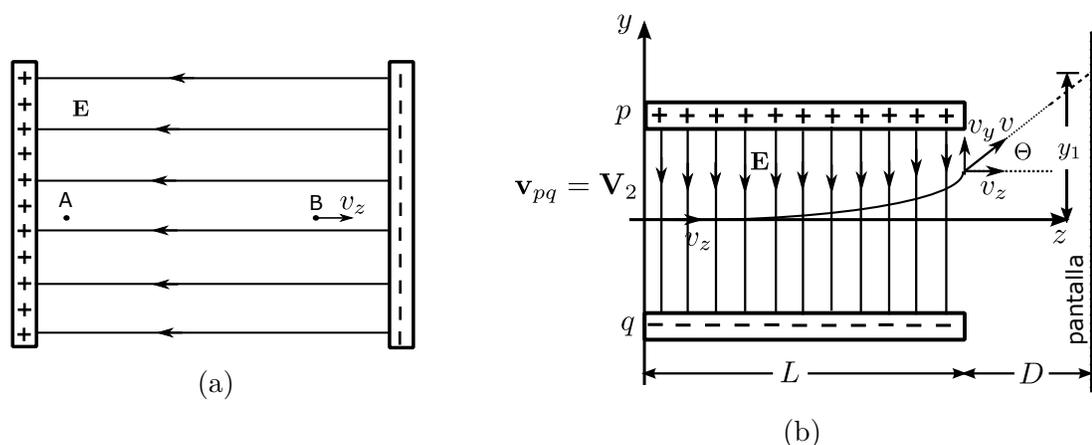


Figura 1

$$v_z = \sqrt{\frac{2|e| |V_B - V_A|}{m}} \quad (1)$$

4. Describir en sus aspectos esenciales como está construido el osciloscopio de rayos catódicos analógico.
5. Demostrar que si un electrón entra entre la región entre dos placas paralelas entre las cuales hay una diferencia de potencial V_2 de valor constante (Ver Figura 1 (b)) con una velocidad v_z perpendicular al campo eléctrico uniforme entre ellas sigue una trayectoria parabólica cuando se ignora el efecto de la gravedad. Demostrar que la ordenada del punto de impacto con la pantalla S viene dada por:

$$y_1 = \left[\frac{L}{2d} \left(D + \frac{L}{2} \right) \right] \frac{V_2}{V_1} \quad (2)$$

donde $V_1 = V_B - V_A$ es el voltaje acelerador del problema anterior, V_2 es la diferencia de potencial entre las placas horizontales y donde se hace notar que la expresión entre corchetes es un factor puramente geométrico. Por lo tanto, si el voltaje acelerador V_1 es constante, la desviación y (ordenada del punto de impacto en la pantalla) es proporcional al voltaje desviador aplicado a las placas horizontales V_2 .

6. Verificar que la forma de onda periódica de voltaje variable con el tiempo, de frecuencia f , aplicado entre las placas de desviación vertical (horizontales) se puede observar en la pantalla si entre las placas de desviación horizontal (verticales) se aplica un voltaje en forma de diente de sierra de frecuencia submúltiplo de f .
7. Sean $v_x = V_H \text{Sen}(\omega t + \alpha_1)$ y $v_y = V_V \text{Sen}(\omega t + \alpha_2)$ los voltajes aplicados a las placas de desviación horizontal (dispuestas verticalmente) y de desviación vertical (dispuestas horizontalmente), respectivamente.

- a) Demostrar que la trayectoria del punto luminoso sobre la pantalla del ORC es una elipse (patrón elíptico de Lissajous). Sugerencia: puesto que la deflexión es proporcional al voltaje aplicado en cada instante, elimine ωt de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \text{Sen}(\omega t + \alpha_1) \\ y(t) &= Y \text{Sen}(\omega t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (3)$$

- b) Determinar si existe simetría respecto al origen. Hallar la orientación de la elipse. ¿Coinciden los ejes de la elipse con las diagonales del rectángulo circunscrito?

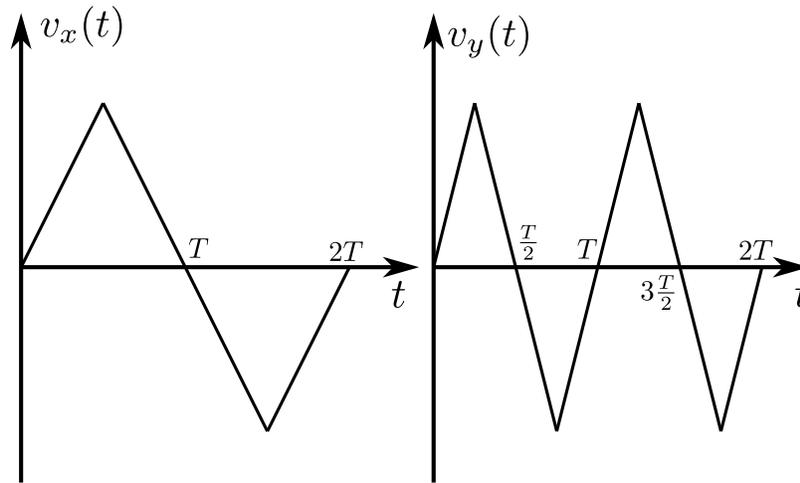


Figura 2

c) Demostrar que:

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{x}{X} \Big|_{y=0} = \frac{y}{Y} \Big|_{x=0} \\ \text{Cos}(\alpha_2 - \alpha_1) &= \frac{x}{X} \Big|_{y=Y} = \frac{y}{Y} \Big|_{x=X} \end{aligned} \quad (4)$$

8. Graficar la trayectoria del punto luminoso sobre la pantalla cuando los voltajes periódicos que tienen las formas de onda indicadas en la Figura 2 se aplican, respectivamente, a las placas de desviación horizontal y de desviación vertical.
9. Determinar gráficamente la trayectoria del punto luminoso sobre la pantalla del ORC (patrón de Lissajous) cuando se aplican a las placas de desviación horizontal y vertical, respectivamente, los siguientes voltajes:

$$v_h(t) = V_h \text{Sen } \omega t \quad v_v(t) = V_v \text{Cos } 2\omega t \quad (5)$$

10. Para cada uno de los circuitos de las Figuras 3, 4 y 5, hallar la respuesta indicada en régimen permanente, en función de los parámetros, la frecuencia y la amplitud V_m de la fuente sinusoidal. Suponer $v(t) = V_m \text{Sen } \omega t$

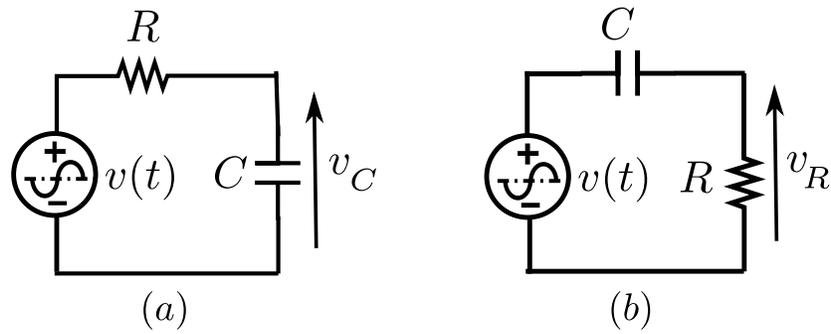


Figura 3

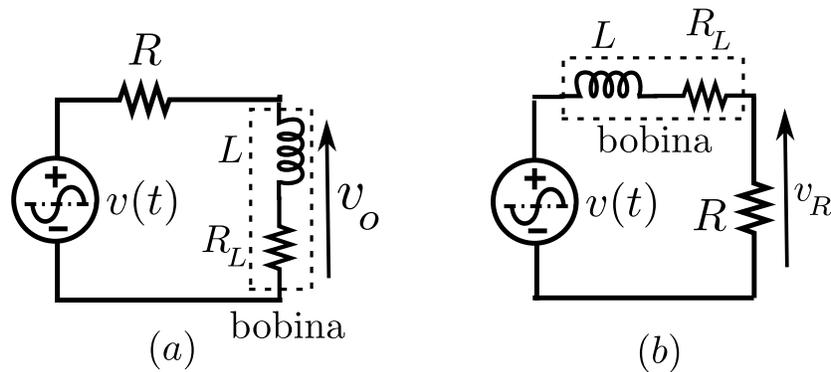


Figura 4

Notar la bobina física se representa mediante un resistor R_L en serie con un inductor L .

11. Reemplazar en los resultados obtenidos en el problema anterior:

a) Para la figura 3:

$$\begin{aligned} R &= 100 \text{ k}\Omega & C &= 0,0022 \mu\text{F} & f &= 610 \text{ Hz} \\ R &= 4700 \Omega & C &= 0,01 \mu\text{F} & f &= 12200 \text{ Hz} \end{aligned} \quad (6)$$

b) Para el circuito de la Figura 4:

$$\begin{aligned} R &= 47 \text{ k}\Omega & L &= 0,0996 \text{ H} & R_L &= 82,6 \Omega & f &= 5 \text{ kHz} \\ R &= 3,3 \text{ k}\Omega & L &= 0,0996 \text{ H} & R_L &= 82,6 \Omega & f &= 600 \text{ Hz} \\ R &= 3,3 \text{ k}\Omega & L &= 1,998 \text{ H} & R_L &= 1369 \Omega & f &= 100 \text{ Hz} \\ R &= 100 \text{ k}\Omega & L &= 1,998 \text{ H} & R_L &= 1369 \Omega & f &= 7 \text{ kHz} \\ R &= 100 \text{ k}\Omega & L &= 0,2005 \text{ H} & R_L &= 144,2 \Omega & f &= 60 \text{ Hz} \\ R &= 27 \text{ k}\Omega & L &= 0,2005 \text{ H} & R_L &= 144,2 \Omega & f &= 12 \text{ kHz} \\ R &= 10 \text{ k}\Omega & L &= 2 \text{ H} & R_L &= 700 \Omega & f &= 1 \text{ kHz} \end{aligned} \quad (7)$$

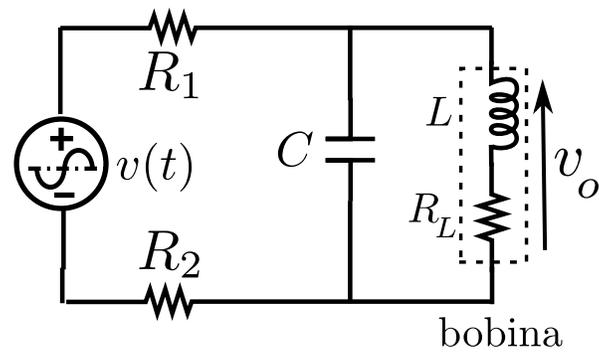


Figura 5

- c) Para el circuito de la Figura 5, con frecuencia $f = 1\text{kHz}$, $C = 1\mu\text{F}$ y $R_1 = R_2 = 100\Omega$:

$$\begin{aligned}
 L = 1\text{H} & \quad R_L = 250\Omega \\
 L = 0,5\text{H} & \quad R_L = 114\Omega \\
 L = 10\text{mH} & \quad R_L = 12\Omega \\
 L = 20\text{mH} & \quad R_L = 25\Omega
 \end{aligned}$$

(8)

Práctica

Utilizar el osciloscopio digital para verificar experimentalmente los resultados del preinforme.

Se recomienda anotar los resultados del preinforme para ir verificando en tiempo real.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

MEDIDA DE POTENCIA Y CORRECCIÓN DEL FACTOR DE POTENCIA

Objetivos

1. Utilizar el vatímetro análogo y el digital para medir la potencia activa absorbida por una puerta.
2. Repasar los fundamentos teóricos e implementar en la práctica el método más utilizado para mejorar “*el porcentaje de energía extraída de la red que se aprovecha o convierte en trabajo útil en una carga o dispositivo conectado a ella*” o factor de potencia”

Problemas Preparatorios

1. Para cada uno de los circuitos de la Figura 1 (con los interruptores cerrados) con los valores de la ecuación (1) calcular las corrientes, voltajes y potencias (activas y reactivas) absorbidas por cada uno de los elementos y el factor de potencia en la carga (lo que está conectado a la derecha de los terminales p y q), suponiendo los interruptores cerrados

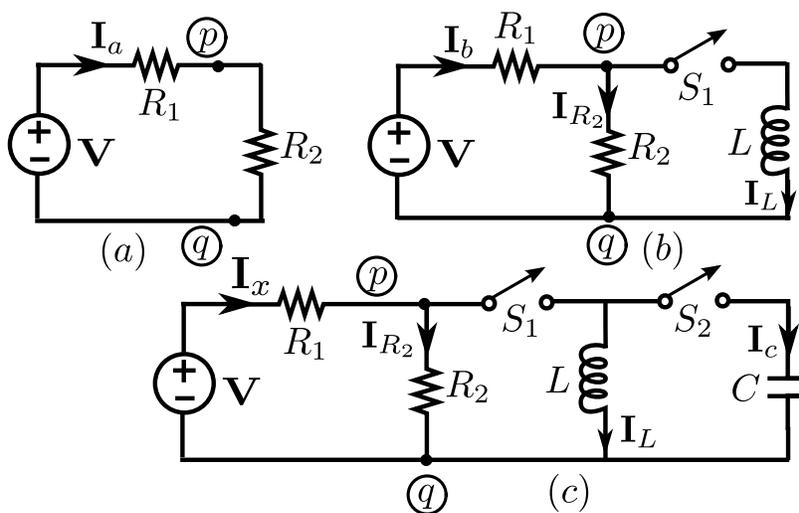


Figura 1

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= 120 V & f &= 60 Hz & R_1 &= 22 \Omega \\ R_2 &= 98 \Omega & L &= 280 mH & C &= 28 \mu F \end{aligned} \quad (1)$$

Nótese que R_1 se introduce para simular las pérdidas en el sistema de transmisión de energía desde la fuente hasta el punto de consumo donde se ubica la carga (aparato o conjunto de ellos que absorben energía de la red) conectada entre los terminales \underline{p} - \underline{q} .

2. Para el circuito de la Figura 1(c) suponiendo conocido el factor de potencia $\text{Cos } \phi$, obtener una expresión para C , en función de f , L , R_2 y $\text{Cos } \phi$. Con los parámetros de la ecuación (1) verificar el valor obtenido en el problema 1
3. Suponer una puerta a través de la cual hay una diferencia de potencial $v(t) = V_m \text{Sen } \omega t$ y una corriente, definida en el sentido de la caída de potencial, $i(t) = I_m \text{Sen } (\omega t + \phi)$. Demostrar que la potencia instantánea absorbida por dicha puerta viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} p(t) &= p_a(t) + p_q(t) \\ p_a(t) &= \frac{V_m I_m}{2} \text{Cos } \phi (1 - \text{Cos } 2\omega t) \\ p_q(t) &= \frac{V_m I_m}{2} \text{Sen } \phi \text{Sen } 2\omega t \end{aligned} \quad (2)$$

donde $p_a(t)$ se denomina **potencia activa instantánea** y $p_q(t)$ la **potencia reactiva instantánea**.

4. (a) Cómo se define el valor eficaz de una función periódica y cuál es su significado físico? Con qué otro nombre se le conoce al valor eficaz?
 - (b) Obtener el valor eficaz de una función sinusoidal.
 - (c) Hallar el valor promedio de la potencia activa instantánea y denotarlo $P = \overline{p_a(t)}$ y su valor máximo $p_a(t)|_{max}$.
 - (d) Hallar el valor promedio de la potencia reactiva instantánea y denotarlo $\overline{p_q(t)}$ y su valor máximo $Q = p_q(t)|_{max}$.
 - (e) Re-escribir la ecuación (2) en función de los valores eficaces de la señal de voltaje y corriente.
5. Describir brevemente los detalles constructivos del vatímetro análogo y su conexión. ¿Cuál de las cantidades definidas en el problema anterior registra dicho instrumento?
6. Cuál debe ser la resistencia de una bombilla incandescente de 100 *wats* a 120 V?
7. Obtener el valor promedio de la potencia absorbida por una resistencia conectada a una fuente de voltaje sinusoidal de amplitud V_m . ¿Cuál debería ser el valor de una fuente de voltaje de valor constante que produzca el mismo valor de potencia promedio?. Con qué nombre se conoce este valor?

8. La Figura 2 muestra 2 bombillos de 100 vatios a 120 Voltios conectados en paralelo a través de un interruptor termo-magnético que sirve de protección contra sobrecorriente y/o corto-circuito a una fuente sinusoidal de voltaje de 60 ciclos por segundo y valor eficaz de 120 Voltios. Si $L = 280\text{ mH}$, $R_L = 4\ \Omega$ y $C = 10\ \mu\text{F}$ obtener las corrientes \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 e \mathbf{I}_4 para cada una de las siguientes configuraciones:

- S_1 cerrado y S_2 y S_3 abiertos;
- S_1 y S_2 cerrados y S_3 abierto;
- S_1 , S_2 y S_3 cerrados;

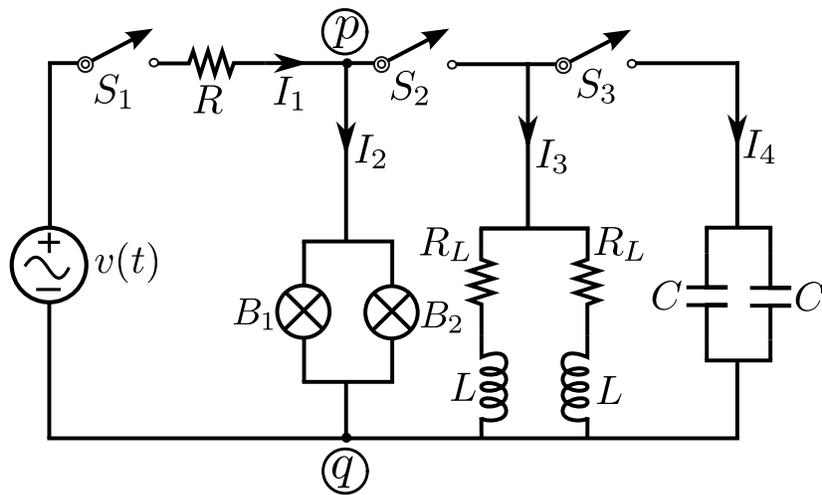


Figura 2

- Para cada uno de los casos del problema anterior obtener el factor de potencia de la carga compuesta (conectada a la derecha de los terminales \underline{p} y \underline{q}), la potencia activa promedio absorbida por ella y la potencia reactiva instantánea máxima.
- En qué unidades se mide el consumo de potencia activa y reactiva. Definir cada una de ellas.
- Es costumbre generalizada de las empresas distribuidoras de energía eléctrica permitir a las industrias un consumo de energía reactiva equivalente a la mitad de la activa. La energía reactiva en exceso a este límite se cobra al mismo precio de la activa. Es decir, denotando por A y B el consumo de energía activa y reactiva, respectivamente, el criterio de tarifa descrito se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$C = \left[A + \left(B - \frac{A}{2} \right) \right] c \quad B > \frac{A}{2} \quad (3)$$

donde C es el costo total del consumo de energía eléctrica en pesos y c es el precio unitario de energía en pesos por kilovatio-hora.

Suponiendo que suponiendo que la carga instalada y el ciclo de trabajo de los dispositivos eléctricos de una industria no varían, que su consumo de energía activa y reactiva se puede simular mediante el caso (b) del problema 8 (carga inductiva) y que el precio unitario permanece constante, comparar las cuentas de cobro mensuales con y sin corrección del factor de potencia como ilustra el caso (c) del problema 8.

PRÁCTICA

1. Con los parámetros de la ecuación (1) montar el circuito de la Figura 1. Ajustar los valores de R_1 y R_2 con S_1 cerrado y S_2 y S_3 abiertos hasta que por el circuito circule una corriente de 1 A disminuyendo la primera y/o aumentando la segunda. Medir los valores de las resistencias mediante un puente de Wheatstone.
2. Con los parámetros de la ecuación (1) y la Figura 1, excepto R_1 y R_2 , que son los valores medidos en 1, medir experimentalmente los fasores \mathbf{I}_a , \mathbf{I}_b , \mathbf{I}_x , \mathbf{I}_{R2} , \mathbf{I}_L , \mathbf{I}_C y \mathbf{V}_{pq} .¹ Conectar un interruptor termo-magnético entre la fuente y la resistencia R_1 . Medir la resistencia interna del inductor con el puente de Wheatstone.
 - Tomar lecturas de las variables mencionadas así como de la potencia absorbida por cada elemento de circuito para cada uno de los circuitos de la Figura 1. Observar y explicar en cada caso el efecto sobre la magnitud del voltaje \mathbf{V}_{pq} y sobre la magnitud de la corriente total \mathbf{I}_a , \mathbf{I}_b , e \mathbf{I}_c .
 - Medir los voltajes en cada elemento para evaluar la potencia aparente S y determinar para cada puerta individual como para la compuesta (la conectada entre los terminales \underline{p} y \underline{q}), $\cos \phi = \frac{P}{S}$. Verificar el equilibrio de potencias tanto activas como reactivas.
3. Montar el circuito de la Figura 2 con los datos del problema 8 tomar lecturas de \mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 e \mathbf{I}_4 , para cada uno de los casos considerados en el problema 8. Observar y explicar el comportamiento de la corriente a través de la fuente independiente de voltaje \mathbf{I}_1 , así como de la potencia activa, reactiva y aparente entregada por ella. y las absorbidas por las puertas. Verificar el cumplimiento del equilibrio de potencia tanto activa, como reactiva.
4. En el circuito de la Figura 2, con S_1 cerrado y S_2 y S_3 abiertos, reemplazar la fuente independiente de voltaje por un variac y medir la potencia absorbida por

¹Midiendo mediante el osciloscopio los correspondientes voltajes fasoriales y dividiendo por la correspondiente impedancia, para obtener las corrientes fasoriales.

las bombillas incandescentes para los valores de voltaje de la Tabla 1. Suponiendo que la potencia es proporcional a $|\mathbf{V}|^\alpha$, determinar α .

Voltaje (V)	20	40	60	80	100	120
Potencia (W)						

Tabla 1

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

Medición de Potencia Activa en Sistemas Trifásicos

Objetivos

1. Medir potencia activa en sistemas trifásicos balanceados y desbalanceados.
2. Medir la potencia reactiva de sistemas trifásicos balanceados.
3. Determinar el factor de potencia en circuitos trifásicos balanceados y verificar métodos para mejorarlo.

Teoría

Método de los dos vatímetros

cargas en estrella neutro aislado

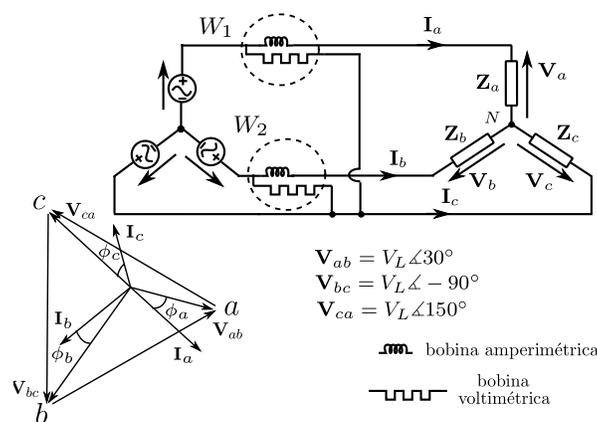


Figura 1 Método de los dos vatímetros: carga desbalanceada en estrella.

La Figura 1 muestra las conexiones necesarias para medir la potencia trifásica por el método de los dos vatímetros y el correspondiente diagrama fasorial para una carga desbalanceada en estrella con neutro aislado. La suma de las lecturas de los vatímetros viene dada por la parte real de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{3\phi} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 &= \mathbf{V}_{ac}\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_b^* \\
&= (\mathbf{V}_a - \mathbf{V}_c)\mathbf{I}_a^* + (\mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c)\mathbf{I}_b^* \\
&= \mathbf{V}_a\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_b\mathbf{I}_b^* - \mathbf{V}_c(\mathbf{I}_a^* + \mathbf{I}_b^*) \\
&= \mathbf{V}_a\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_b\mathbf{I}_b^* + \mathbf{V}_c\mathbf{I}_c^*
\end{aligned} \tag{1}$$

donde se ha tenido en cuenta que dada la condición de frontera de neutro aislado $\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0$ y se aplica la expresión para la potencia compleja $\mathbf{S} = \mathbb{V}\mathbb{I}^*$, donde $(\cdot)^*$ denota el complejo conjugado de (\cdot) .

Nótese que el método se aplica a cargas tanto balanceadas como desbalanceadas.

Cuando la carga es balanceada, es decir, $\mathbf{Z}_a = \mathbf{Z}_b = \mathbf{Z}_c = \mathbf{Z} = Z\angle\phi$, los voltajes de fase (en cada impedancia de la estrella) son también balanceados y se puede suponer:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_a &= V\angle -30^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_a = I\angle -(30^\circ + \phi) \\
\mathbf{V}_b &= V\angle -150^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_b = I\angle -(150^\circ + \phi) \\
\mathbf{V}_c &= V\angle 90^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_c = I\angle (90^\circ - \phi)
\end{aligned} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{3\phi} &= \mathbf{V}_a\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_b\mathbf{I}_b^* + \mathbf{V}_c\mathbf{I}_c^* \\
&= Ve^{-j30^\circ} Ie^{j30^\circ} e^{j\phi} + Ve^{-j150^\circ} Ie^{j150^\circ} e^{j\phi} + Ve^{j90^\circ} Ie^{-j90^\circ} e^{j\phi} \\
&= 3VIe^{j\phi} = P_{3\phi} + jQ_{3\phi} = \sqrt{3} \underbrace{\sqrt{3}V}_{V_L} I (\text{Cos } \phi + j\text{Sen } \phi)
\end{aligned}$$

$$P_{3\phi} = \sqrt{3}V_L I_L \text{Cos } \phi \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3}V_L I_L \text{Sen } \phi \tag{3}$$

donde se ha definido el voltaje de línea $V_L = \sqrt{3}V$ y la corriente de línea $I_L = I$ para una conexión en estrella y se ha utilizado la notación $e^{jx} = \text{Cos } x + j\text{Sen } x = 1,0\angle x$.

cargas en triángulo o Δ

La Figura 2 muestra las conexiones necesarias para medir la potencia trifásica por el método de los dos vatímetros y el correspondiente diagrama fasorial para una carga desbalanceada en Δ .

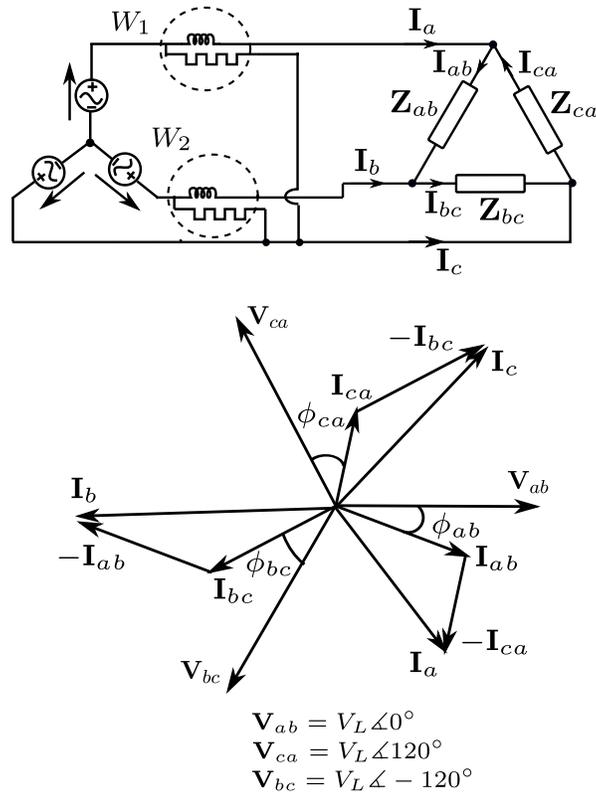


Figura 2 Método de los dos vatímetros: carga desbalanceada en triángulo o Δ .

De la aplicación de las leyes de Kirchoff se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} & \mathbf{I}_b &= \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab} \\
 \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} + \mathbf{V}_{ca} &= 0 & \mathbf{V}_{ca} &= -\mathbf{V}_{ab} - \mathbf{V}_{bc} \\
 \mathbf{V}_{ac} &= \mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc} & &
 \end{aligned} \tag{4}$$

La suma de las lecturas de los vatímetros viene dada por la parte real de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{3\phi} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 &= \mathbf{V}_{ac}\mathbf{I}_a^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_b^* \\
 &= (\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc})(\mathbf{I}_{ab}^* - \mathbf{I}_{ca}^*) + \mathbf{V}_{bc}(\mathbf{I}_{bc}^* - \mathbf{I}_{ab}^*) \\
 &= \mathbf{V}_{ab}(\mathbf{I}_{ab}^* - \mathbf{I}_{ca}^*) + \mathbf{V}_{bc}(\mathbf{I}_{ab}^* - \mathbf{I}_{ca}^*) + \mathbf{V}_{bc}(\mathbf{I}_{bc}^* - \mathbf{I}_{ab}^*) \\
 &= \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_{ab}^* - \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_{ca}^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{ab}^* - \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{ca}^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{bc}^* - \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{ab}^* \\
 &= \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_{ab}^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{bc}^* - \underbrace{(\mathbf{V}_{ab} + \mathbf{V}_{bc})\mathbf{I}_{ca}^*}_{\mathbf{V}_{ca}} \\
 &= \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_{ab}^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{bc}^* + \mathbf{V}_{ca}\mathbf{I}_{ca}^*
 \end{aligned} \tag{5}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (4)

Cuando la carga es balanceada, es decir, $\mathbf{Z}_{ab} = \mathbf{Z}_{bc} = \mathbf{Z}_{ca} = \mathbf{Z} = Z\angle\phi$ se puede suponer:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{ab} &= V_L\angle 0^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_{ab} = I\angle -\phi \\ \mathbf{V}_{bc} &= V_L\angle -120^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_{bc} = I\angle -(120^\circ + \phi) \\ \mathbf{V}_{ca} &= V_L\angle 120^\circ \quad \therefore \quad \mathbf{I}_{ca} = I\angle (120^\circ - \phi) \end{aligned} \quad (6)$$

donde I es la corriente de fase de la conexión Δ .

Reemplazando (6) en (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{3\phi} &= \mathbf{V}_{ab}\mathbf{I}_{ab}^* + \mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_{bc}^* + \mathbf{V}_{ca}\mathbf{I}_{ca}^* \\ &= V_L e^{j0^\circ} I e^{j\phi} + V_L e^{-j120^\circ} I e^{j120^\circ} e^{j\phi} + V_L e^{j120^\circ} I e^{-j120^\circ} e^{j\phi} \\ &= 3V_L I e^{j\phi} = P_{3\phi} + jQ_{3\phi} = \sqrt{3}V_L \underbrace{\sqrt{3}I}_{I_L} (\text{Cos } \phi + j\text{Sen } \phi) \\ P_{3\phi} &= \sqrt{3}V_L I_L \text{Cos } \phi \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3}V_L I_L \text{Sen } \phi \end{aligned} \quad (7)$$

donde se ha definido la corriente de línea $I_L = \sqrt{3}I$ y el voltaje de línea $V_L = V$ para una conexión en Δ y se ha utilizado la notación $e^{jx} = \text{Cos } x + j\text{Sen } x = 1,0\angle x$.

De la comparación entre las ecuaciones (3) y (7) se observa que las expresiones para la potencia activa y reactiva trifásica son independientes de la conexión trifásica particular, es decir, son las mismas para cargas en estrella como para cargas en triángulo, independiente de que sean balanceadas o nó.

Potencia reactiva en sistemas balanceados

Independiente de la conexión de la carga (Δ o Y) las lecturas de los vatímetros vienen dadas por la siguientes expresiones:

$$W_1 = \text{Re}\{\mathbf{V}_{ac}\mathbf{I}_a^*\} \quad W_2 = \text{Re}\{\mathbf{V}_{bc}\mathbf{I}_b^*\} \quad (8)$$

Reemplazando (2), válida para carga balanceada conectada en Y , en (8) se obtiene:

$$\begin{aligned} W_1 &= \text{Re}\{\sqrt{3}V e^{-j60^\circ} I e^{j(30^\circ + \phi)}\} = \sqrt{3}VI \text{Cos } (\phi - 30^\circ) \\ W_2 &= \text{Re}\{\sqrt{3}V e^{-j120^\circ} I e^{j(150^\circ + \phi)}\} = \sqrt{3}VI \text{Cos } (\phi + 30^\circ) \\ W_1 - W_2 &= \sqrt{3}VI \text{Sen } \phi = V_L I_L \text{Sen } \phi \\ Q_{3\phi} &= 3VI \text{Sen } \phi = \sqrt{3}V_L I_L \text{Sen } \phi = \sqrt{3} |(W_1 - W_2)| \end{aligned} \quad (9)$$

donde \mathbf{V} es el voltaje de fase e \mathbf{I} es la corriente de línea dada la conexión en estrella.

Similarmente, reemplazando (6), válida para carga balanceada conectada en Δ , en (8), se obtiene:

$$\begin{aligned} W_1 &= \operatorname{Re}\{V_L e^{-j60^\circ} \sqrt{3} I e^{j(30^\circ + \phi)}\} = V_L I_L \cos(\phi - 30^\circ) \\ W_2 &= \operatorname{Re}\{V_L e^{-j120^\circ} \sqrt{3} I e^{j(150^\circ + \phi)}\} = V_L I_L \cos(\phi + 30^\circ) \\ W_1 - W_2 &= V_L I_L \operatorname{Sen} \phi = \sqrt{3} V_L I \operatorname{Sen} \phi \\ Q_{3\phi} &= 3 V_L I \operatorname{Sen} \phi = \sqrt{3} |(W_1 - W_2)| \end{aligned} \quad (10)$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} = \sqrt{3} I e^{-j(\phi + 30^\circ)} \\ \mathbf{I}_b &= \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab} = \sqrt{3} I e^{-j(\phi + 150^\circ)} \end{aligned} \quad (11)$$

Nótese que para valores de $\phi > 60^\circ$ la lectura W_2 es negativa, lo cual justifica el valor absoluto en (9). El factor de potencia de la carga balanceada puede entonces calcularse de la lectura de ambos vatímetros de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos \operatorname{Arctan} \left(\frac{Q_{3\phi}}{P_{3\phi}} \right) \\ &= \cos \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{3} \frac{|W_1 - W_2|}{W_1 + W_2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Potencia trifásica reactiva de cargas balanceadas por el método de un vatímetro

Carga balanceada en estrella

La Figura 3 muestra la conexión de un vatímetro análogo para medir potencia reactiva en sistemas trifásicos balanceados. Matemáticamente,

$$\frac{Q_{3\phi}}{\sqrt{3}} = \mathbf{V}_{bc} \mathbf{I}_a^* \quad (13)$$

ángulo	Factor	W_1	W_2	$P_{3\phi} = W_1 + W_2$	Observaciones
ϕ	$\text{Cos } \phi$	$V_L I_L \text{Cos}(30^\circ - \phi)$	$V_L I_L \text{Cos}(30^\circ + \phi)$	$\sqrt{3} V_L I_L \text{Cos } \phi$	generador: $W_1 > W_2$
0°	1,0	$\frac{\sqrt{3}}{2} V_L I_L$	$\frac{\sqrt{3}}{2} V_L I_L$	$2W_1 = 2W_2$	$W_1 = W_2$
30°	0,866	$V_L I_L$	$\frac{V_L I_L}{2}$	$1,5W_1 = 3W_2$	$W_1 = 2W_2$
60°	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2} V_L I_L$	0	W_1	$W_2 = 0$
$> 60^\circ$	$< 0,5$	W_1	$W_2 < 0$	$W_1 + (-W_2)$	

Cuadro 1 Casos límite para tener en cuenta en la medida de potencia reactiva en sistemas trifásicos balanceados.

Reemplazando (2) válida para carga balanceada en estrella en (13) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_{3\phi}}{\sqrt{3}} &= \mathbf{V}_{bc} \mathbf{I}_a^* = \sqrt{3} V e^{-j120^\circ} I e^{j(30^\circ + \phi)} \\
 &= \sqrt{3} V I e^{-j90^\circ} e^{j\phi} = \sqrt{3} V I (\text{Sen } \phi - j \text{Cos } \phi)
 \end{aligned} \tag{14}$$

cuya parte real es lo medido por el vatímetro, cuya lectura se debe multiplicar por $\sqrt{3}$ y en la que se ha aplicado $\mathbf{V}_{bc} = \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c$.

Carga balanceada en triángulo

Reemplazando (6) válida para carga balanceada en Δ en (13) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{Q_{3\phi}}{\sqrt{3}} &= \mathbf{V}_{bc} \mathbf{I}_a^* = V_L e^{-j120^\circ} \sqrt{3} I e^{j(30^\circ + \phi)} \\
 &= V_L \sqrt{3} I e^{-j90^\circ} e^{j\phi} = \sqrt{3} V_L I (\text{Sen } \phi - j \text{Cos } \phi)
 \end{aligned} \tag{15}$$

cuya parte real es lo medido por el vatímetro, cuya lectura se debe multiplicar por $\sqrt{3}$ y en la que se ha aplicado $\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca}$.

Problemas Preparatorios

1. En un sistema trifásico equilibrado sea:

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= V_m \text{Sen } \omega t & v_b(t) &= V_m \text{Sen } (\omega t - 120^\circ) & v_c(t) &= V_m \text{Sen } (\omega t + 120^\circ) \\
 i_a(t) &= I_m \text{Sen } (\omega t - \phi) & i_b(t) &= I_m \text{Sen } (\omega t - 120^\circ - \phi) & i_c(t) &= I_m \text{Sen } (\omega t + 120^\circ - \phi)
 \end{aligned} \tag{16}$$

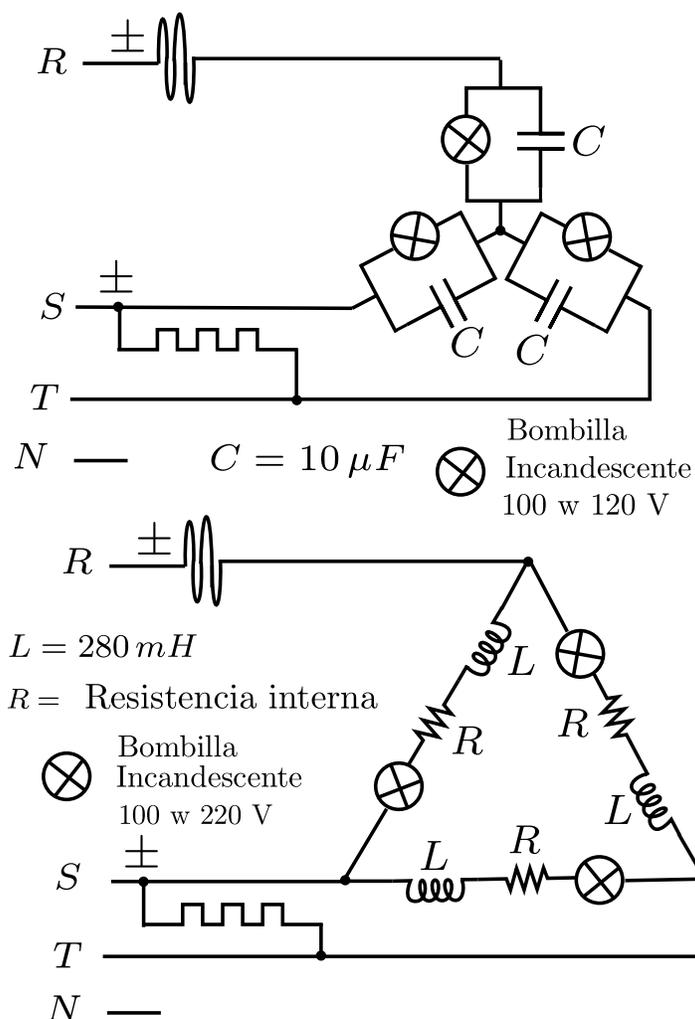


Figura 3 Conexión del vatímetro análogo para medir potencia reactiva en sistemas trifásicos balanceados.

Demostrar que

$$p_{3\phi}(t) = v_a(t)i_a(t) + v_b(t)i_b(t) + v_c(t)i_c(t) = \sqrt{3} \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi = \sqrt{3} V_{ef} I_{ef} \cos \phi = K \quad (17)$$

donde $V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ e $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ se denominan valores eficaces del voltaje y la corriente, respectivamente.

- Una carga trifásica balanceada de 10 kva tiene un factor de potencia de 0.342. La potencia es medida por el método de los dos vatímetros. Hallar la lectura de cada vatímetro cuando el factor de potencia es:

a) en atraso;

- b) en adelanto;
- Una carga trifásica a 400 V tiene un factor de potencia en atraso de $0,6$. Los dos vatímetros registran una potencia total de 20 kw . Hallar las lecturas de cada vatímetro.
 - Calcular las corrientes, voltajes y potencias en cada uno de los elementos de los circuitos de la Figura 4.

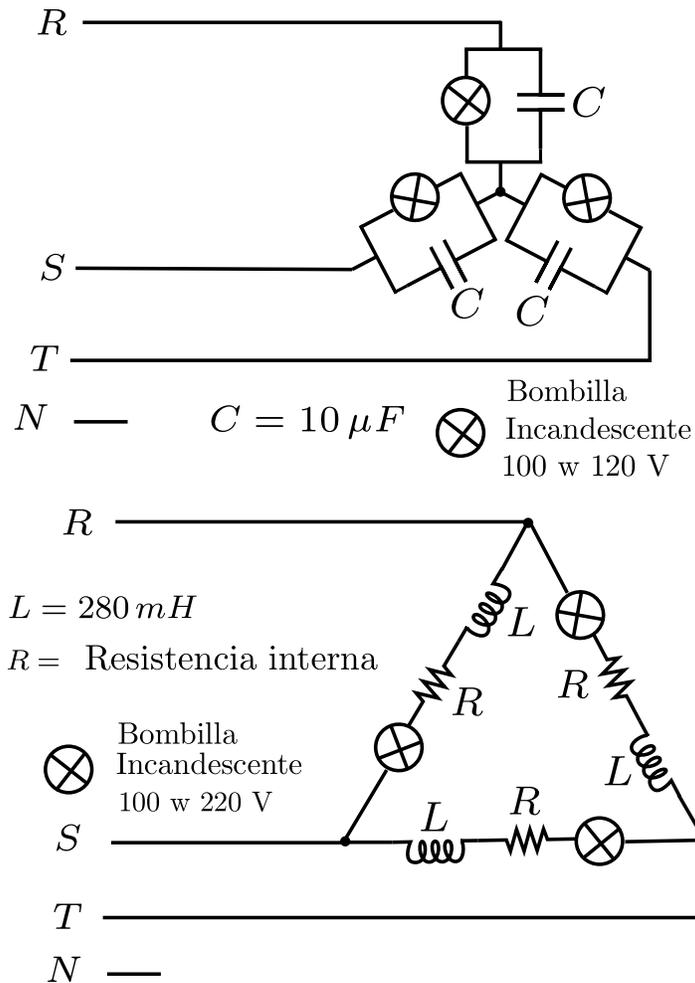


Figura 4 Cargas trifásicas balanceadas en estrella y en triángulo.

- Calcular las corrientes, voltajes y potencias en cada uno de los elementos de los circuitos de la Figura 5.

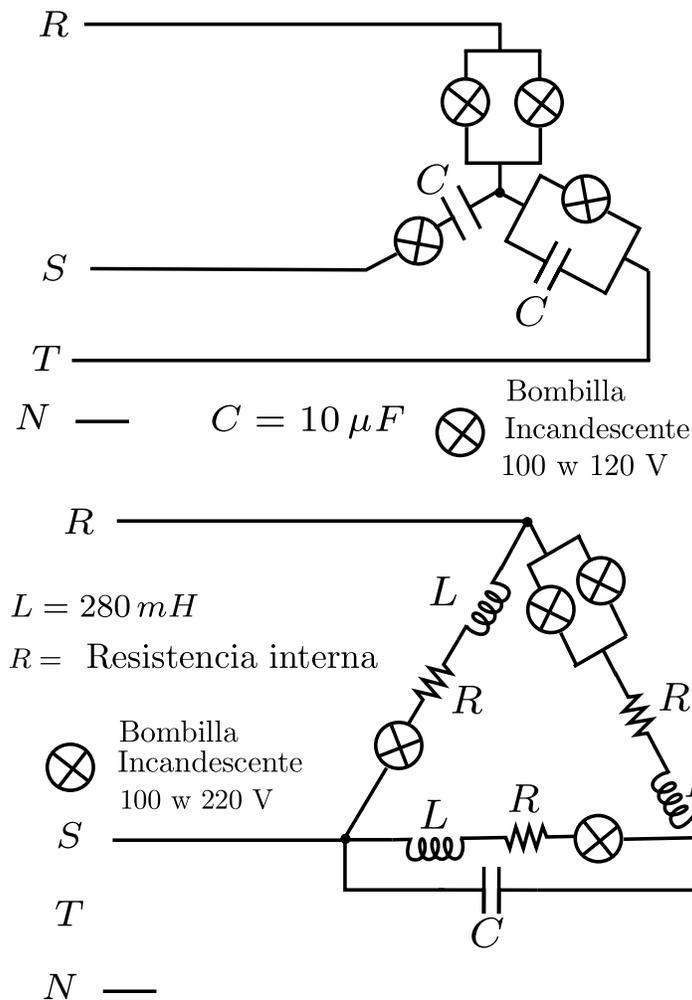


Figura 5 Cargas trifásicas balanceadas en estrella y en triángulo.

Práctica

1. Montar el circuito con carga trifásica balanceada en estrella de la Figura 4 y medir corrientes, voltajes y potencias y comparar con los obtenidos en el preinforme.
2. Con un vatímetro análogo medir la potencia trifásica reactiva de la carga trifásica balanceada en estrella.
3. Montar el circuito con carga balanceada en triángulo de la Figura 4 y medir corrientes, voltajes y potencias y comparar con los obtenidos en el preinforme.
4. Con un vatímetro análogo medir la potencia trifásica reactiva de la carga trifásica balanceada en triángulo.
5. Montar el circuito con carga desbalanceada en estrella de la Figura 5 y medir

corrientes, voltajes y potencias y comparar con los obtenidos en el preinforme.

6. Montar el circuito con carga desbalanceada en triángulo de la Figura 4 y medir corrientes, voltajes y potencias y comparar con los obtenidos en el preinforme.

Nota:

Utilizar el método de los dos vatímetros para hallar la potencia trifásica total $P_{3\phi}$.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

Resonancia Serie y Paralelo

Objetivos

1. Investigar el fenómeno de resonancia que resulta de una excitación sinusoidal de frecuencia igual a la frecuencia natural del sistema (mecánico o eléctrico).
2. Determinar experimentalmente la frecuencia de resonancia del circuito RLC serie y paralelo, útiles como modelos matemáticos de sistemas mecánicos.
3. Comparar los resultados obtenidos experimentalmente con los predichos teóricamente.

Teoría

Respuesta en frecuencia del Circuito Serie $R-L-C$

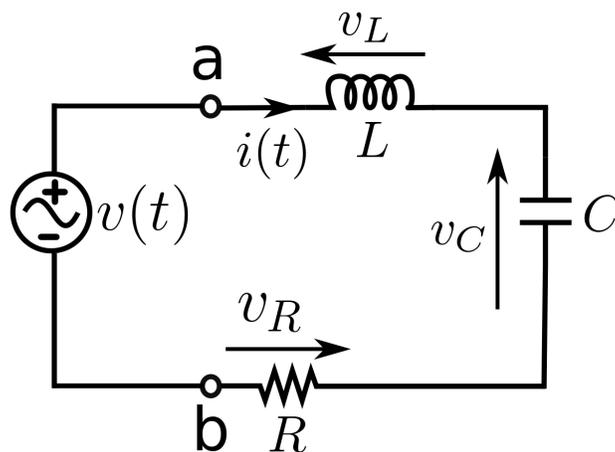
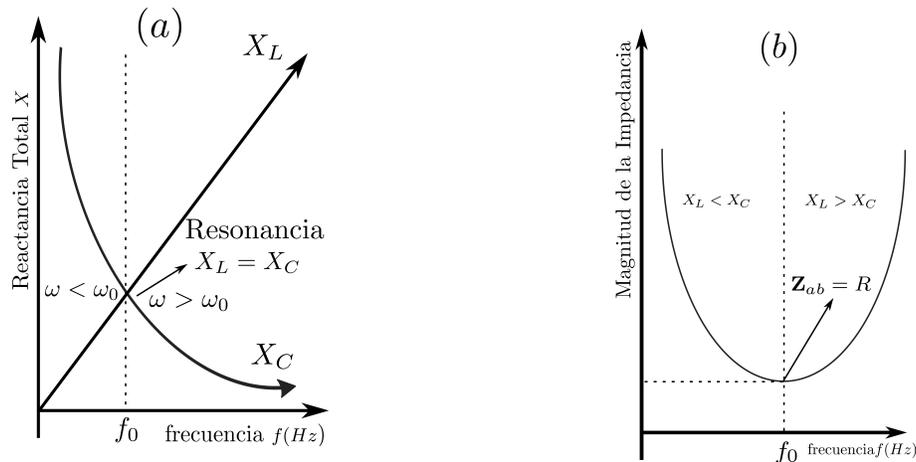


Figura 1 Circuito serie $R-L+C$ excitado con fuente sinusoidal de frecuencia variable.

En la Figura 1 la impedancia entre los nodos a y b Z_{ab} viene dada por:

$$Z_{ab} = R + j(X_L - X_C) \quad (1)$$

Como se sabe la impedancia Z de los elementos almacenadores de energía (inductor L y capacitor C), en régimen sinusoidal permanente, es función de la frecuencia. Es decir,



- (a) La frecuencia de resonancia del circuito serie $R-L+C$ debe satisfacer la ecuación $X_L = X_C$.
- (b) En Resonancia serie la impedancia Z_{ab} es mínima e igual a R .

Figura 2 Reactancia e impedancia en función de la frecuencia.

$$\mathbf{Z}_L = jX_L = j\omega L \quad \mathbf{Z}_C = -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} \quad \omega = 2\pi f \quad (2)$$

donde $X_L = \omega L$ y $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se denominan las reactancias, inductiva y capacitiva, respectivamente.

La Figura 2a muestra la variación de X_L y de X_C con la frecuencia, respectivamente. Puesto que en la impedancia del circuito serie ellas se suman (ver ecuación (1)), en el punto donde se cortan, ocurre la frecuencia de resonancia f_0 .

La Figura 2b muestra la variación de la magnitud de la impedancia $|\mathbf{Z}_{ab}|$ con la frecuencia, en la que se puede apreciar que a la frecuencia de resonancia se obtiene su valor mínimo.

La Figura 4a muestra la respuesta en frecuencia de la corriente la cual alcanza su valor máximo a la frecuencia de resonancia. Por lo tanto, en resonancia el voltaje en el capacitor también es máximo.

En la Figura 4b se muestra las variaciones con la frecuencia del desplazamiento angular o diferencia de phase entre el voltaje y la corriente. Nótese que para frecuencias menores a la de resonancia el circuito se comporta como un circuit $R-C$ (capacitivo) y la corriente adelanta el voltaje ($\Phi < 0$) y que para frecuencias mayores a la de resonancia el circuito se comporta como un circuito $R-L$ y el voltaje adelanta la corriente ($\Phi > 0$).

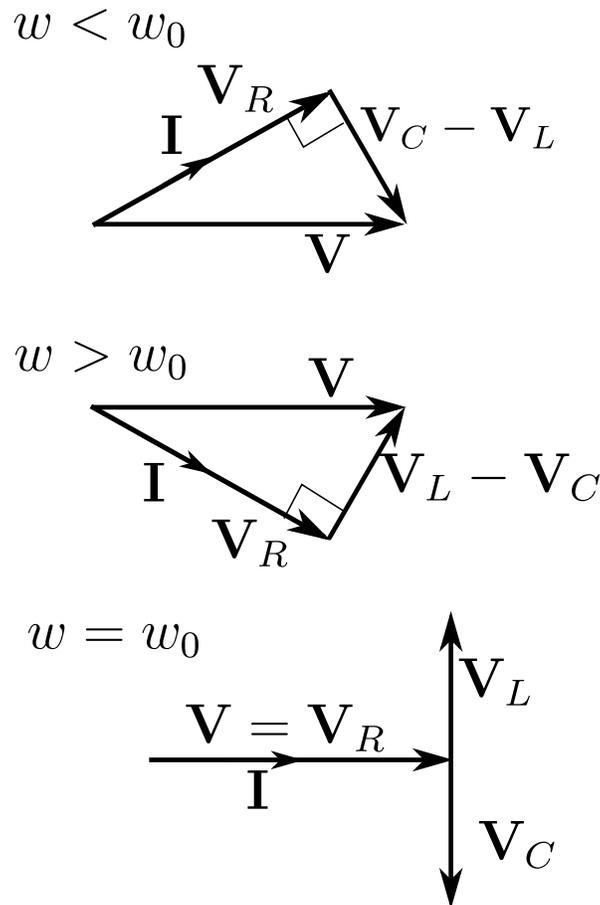


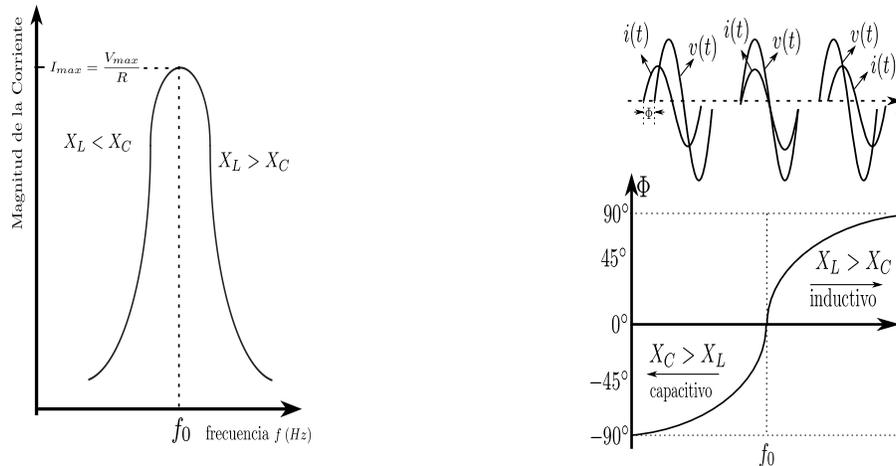
Figura 3 Diagrama Fasorial a una frecuencia constante menor, igual y mayor a la de resonancia

A la frecuencia de resonancia el circuito se comporta como uno resistivo y la corriente y el voltaje están en fase ($\Phi = 0$).

La Figura 3 muestra los diagramas fasoriales suponiendo frecuencia constante menor, igual y mayor a la de resonancia ω_0 .

Ancho de banda de un circuito resonante serie

La Figura 5 muestra la respuesta en frecuencia de la magnitud de la corriente para diferentes valores del parámetro resistivo R , cuyo valor tiene un efecto de aplastamiento en la medida en que R crece. Se define el *ancho de banda* B_w como el rango de frecuencias por encima (ω_2) y por debajo (ω_1) de la de resonancia ω_0 , en las cuales la potencia disipada en el resistor es la mitad de la disipada a la frecuencia de resonancia. El siguiente cálculo permite estimar su valor:



- (a) En resonancia serie la magnitud de la corriente es máxima a la frecuencia de resonancia f_0 .
- (b) Variación del ángulo de fase Φ en función de la frecuencia.

Figura 4 Respuesta en frecuencia de la magnitud de la corriente y de su desplazamiento angular Φ con respecto al ángulo de fase del voltaje.

Frecuencia de Resonancia:

$$X_{L0} - X_{C0} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi f_0$$

Valor de corriente en frecuencias de corte:

$$\frac{P_{max}}{2} = \frac{I_{max}^2}{2} R = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \right)^2 R \quad \text{donde } P_{max} = I_{max}^2 R \quad (3)$$

Puesto que $I_{max} = \frac{V_{max}}{R}$, de (3) puede verse que la magnitud de la impedancia a estas frecuencias (llamadas de corte) ω_1 y ω_2 debe ser igual $\sqrt{2} R$ para que el valor de la corriente sea $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$. Ya que la reactancia total del circuito serie se suma en el eje imaginario, la condición anterior ocurre cuando la reactancia total $|X_T| = R^1$

En ancho de banda $B_w = \omega_2 - \omega_1$ se puede obtener entonces de la siguiente manera:

¹Independientemente de la zona en la que el circuito se comporta como capacitivo $X_C > X_L$ o en la zona donde el circuito se comporta como inductivo $X_L > X_C$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_1 C} - w_1 L &= R \quad \therefore \quad w_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ w_2 L - \frac{1}{w_2 C} &= R \quad \therefore \quad w_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ B_w = w_2 - w_1 &= \frac{R}{L} \end{aligned} \quad (4)$$

Nótese que el ancho de banda B_w es proporcional al valor de la resistencia R , por lo cual un valor pequeño de este parámetro produce mayor selectividad.

Se define el *factor de calidad* Q como la relación entre la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, es decir,

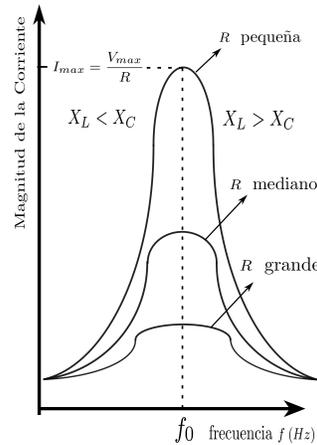


Figura 5 Dependiendo del valor de R se obtiene mayor (R pequeño) o menor selectividad (R grande).

$$Q = \frac{w_0}{B_w} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5)$$

Nótese que el factor de calidad Q es inversamente proporcional al valor de la resistencia R , por lo cual un valor pequeño de este parámetro produce un factor de calidad de mayor valor.

Respuesta en frecuencia del Circuito Paralelo R - L - C

En la Figura 6 la impedancia equivalente entre los terminales \underline{a} y \underline{b} se obtiene de la ecuación:

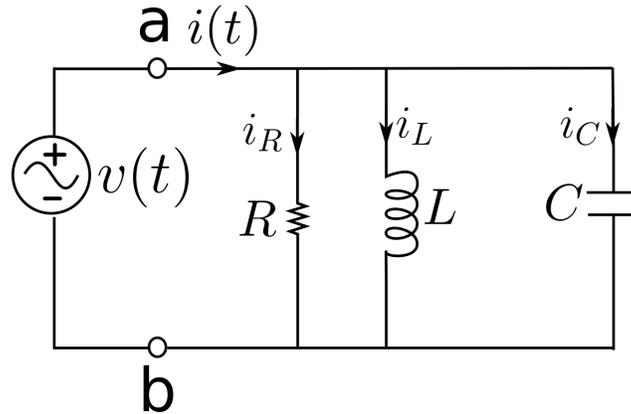


Figura 6 Circuito R - L - C paralelo excitado con fuente sinusoidal de voltaje de frecuencia variable.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_R} + \frac{1}{\mathbf{Z}_L} + \frac{1}{\mathbf{Z}_C} \\ \frac{1}{\mathbf{Z}_{eq}} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\end{aligned}\quad (6)$$

La frecuencia a la cual $\mathbf{Z}_{eq} = R$ (para que la corriente total esté en fase con el voltaje) se requiere que la parte imaginaria sea nula, ecuación de la cual se obtiene la frecuencia de resonancia:

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0 \quad \therefore \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\quad (7)$$

La Figura 7 muestra los diagramas fasoriales del circuito R - L - C paralelo para frecuencias constantes menor, igual y mayor a la de resonancia ω_0 .

De la aplicación de la primera ley de Kirchhoff al nodo \underline{a} , a la frecuencia de resonancia, se sigue que $i(t) = i_R(t)$, por lo cual $i_L(t) + i_C(t) = 0 \quad \forall t$. Es decir, el inductor y el capacitor intercambian energía permanentemente. Puede demostrarse que en todo instante la suma de las energías almacenadas permanece constante, es decir,

$$\frac{1}{2}C[v_C(t)]^2 + \frac{1}{2}L[i_L(t)]^2 = K = \frac{1}{2}C[v_{Cmax}]^2 = \frac{1}{2}L[i_{Lmax}]^2\quad (8)$$

Para el circuito R - L - C paralelo la Figura 8a muestra la respuesta en frecuencia de la impedancia equivalente y la Figura 8b muestra la respuesta en frecuencia de la magnitud de la corriente.

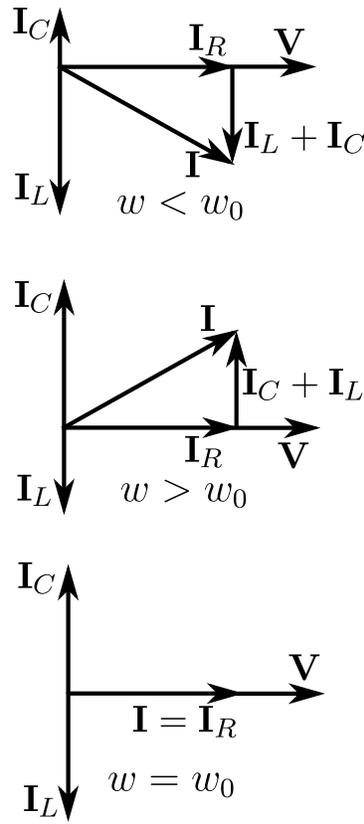


Figura 7 Diagramas fasoriales para el circuito R - L - C paralelo para frecuencias constantes menor, igual y mayor a la de resonancia ω_0

Ancho de banda y selectividad de un circuito resonante paralelo R - L - C

El ancho de banda B_w del circuito paralelo R - L - C se define lo mismo que para el circuito serie, es decir, la diferencia entre las frecuencias (una mayor y otra menor que la de resonancia ω_0) para las cuales la potencia activa disipada es la mitad de la que se disipa a la frecuencia de resonancia. Matemáticamente,

$$p \Big|_{\omega = \omega_0} = \frac{V_{ef}^2}{R} \quad \therefore \quad \frac{P_{max}}{2} = \frac{V_{ef}^2}{2R} = \left(\frac{I_{ef}}{\sqrt{2}} \right)^2 R \quad (9)$$

donde $I_{ef} = \frac{V}{R}$ es la corriente a la frecuencia de resonancia. Es decir, cuando $|\mathbf{I}_L + \mathbf{I}_C| = \frac{V}{R} = I_R$, independiente de la zona por encima y por debajo de ω_0 . Matemáticamente, como el voltaje a través de los elementos es el mismo e $\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}$, cuando $|\mathbf{Y}_L + \mathbf{Y}_C| = \mathbf{Y}_R$, es decir,

Circuito real o tanque

En la discusión anterior se ha supuesto que la resistencia interna del inductor $R_s = 0$.

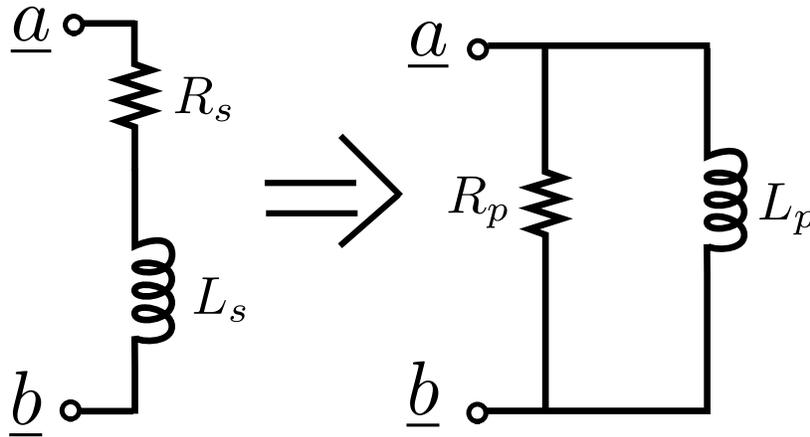


Figura 9 Circuito auxiliar para tener en cuenta la resistencia interna del inductor en el circuito resonante.

La equivalencia ilustrada en la Figura 9 se obtiene resolviendo las dos ecuaciones con dos incógnitas R_p y L_p , que resultan de igualar sus correspondientes admitancias. Es decir,

$$\frac{1}{R_s + j\omega L_s} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{j\omega L_p}$$

$$\frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{\omega L_p}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\omega L_p} = \frac{\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2} \quad (2) \quad (12)$$

De (2) en (5), se obtiene:

$$\omega^2 L_p L_s = R_s^2 + (\omega L_s)^2$$

$$L_p = \frac{R_s^2}{\omega^2 L_s} + L_s$$

La frecuencia de resonancia en este caso se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 &= \frac{1}{L_p C} \\
&= \frac{1}{\frac{R_s^2 C}{\omega_0^2 L_s} + L_s C} \\
\omega_0^2 &= \frac{\omega_0^2 L_s}{R_s^2 C + \omega_0^2 L_s^2 C} \\
R_s^2 C + \omega_0^2 L_s^2 C &= L_s \\
\omega_0^2 &= \frac{1}{L_s C} - \frac{R_s^2}{L_s^2} \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{L_s C} - \left(\frac{R_s}{L_s}\right)^2} \tag{13}
\end{aligned}$$

Problemas Preparatorios

1. Determinar la frecuencia de resonancia (frecuencia natural) para cada uno de los siguientes sistemas mecánicos:
 - a) un péndulo simple;²
 - b) un resorte y una masa;
 - c) un resorte y una masa a la que se aplica una fuerza $f(t)$.
2. Demostrar que $\sqrt{\frac{L}{C}}$, en sistema MKS, tiene dimensiones de Ω , razón por la cual se le conoce como “impedancia característica”.
3. (a) Para un filtro pasabanda serie R - L - C compuesto por los siguientes elementos: un inductor de $L_s = 20 \text{ mH}$, resistencia interna $R_s = 26,3 \Omega$, un capacitor $C = 0,02 \mu\text{F}$ y un detector (resistencia externa) de $R_d = 8 \Omega$, calcular Q_0 , ω_0 , f_0 y ancho de banda y frecuencias de potencias medias en kHz .
 - (b) Encontrar la respuesta en frecuencia del filtro usando el comando *bode* de Matlab.
 - (c) Alimentar el filtro con una señal compuesta de la suma de una senoide de amplitud 2 V y frecuencia de 200 Hz y otra de amplitud $1,2 \text{ V}$ y frecuencia

²En el siguiente enlace puede consultar los fundamentos físicos:
<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/trabajo/pendulo/pendulo.htm>.

de 7957 Hz , usando el comando *lsim* de Matlab³.

4. (a) Conectar los mismos elementos del problema anterior como se muestra en la Figura 10 y obtener la curva $|V_R(\omega)|$ usando Matlab.
- (b) Encontrar $|V_R(\omega)|$ para $R_d = 200\ \Omega$ y para $R_d = 2000\ \Omega$
- (c) Implementar filtros pasabanda de segundo y cuarto orden usando el comando *butter* de Matlab y compare la respuesta en el tiempo con la del filtro serie diseñado.

Práctica

1. Montar el circuito de la Figura 1 con $R = 0$ (circuito L - C serie) y $v(t)$ una fuente sinusoidal de frecuencia variable con los siguientes valores $L = 25\text{ mH}$, $C = 1\ \mu\text{F}$:
 - a) Variar la frecuencia del generador de onda hasta que el voltaje en el capacitor sea máximo y verificar el cálculo obtenido en (3).
 - b) Tratando de mantener el voltaje de entrada constante, variar la frecuencia del generador desde $f_0 - 3000$ hasta $f_0 + 3000$ en incrementos de 500 Hz medir el voltaje en el capacitor para cada frecuencia.
 - c) Determinar las frecuencias, mayor y menor a la frecuencia de resonancia, para las cuales el valor del voltaje en el capacitor es el 70 % de su valor máximo y de su diferencia estimar el ancho de banda.
 - d) Dibujar la curva de respuesta en frecuencia
2. Insertar un resistor de $470\ \Omega$ y repetir pero monitoreando v_R .
3. Montar el circuito de la Figura 10 con $R_d = 100\text{ k}\Omega$ y $v(t)$ una fuente sinusoidal de frecuencia variable con los siguientes valores $20 \leq L \leq 35\text{ mH}$, $C = 0,01\ \mu\text{F}$:
 - a) Calcular la frecuencia de resonancia f_0 de (13).
 - b) Variar la frecuencia del generador de onda hasta que el voltaje en el resistor sea máximo y verificar el cálculo obtenido en a).
 - c) Tratando de mantener el voltaje de entrada constante, variar la frecuencia del generador desde $f_0 - 3000$ hasta $f_0 + 3000$ en incrementos de 500 Hz medir el voltaje en el resistor para cada frecuencia.
 - d) Determinar las frecuencias, mayor y menor a la frecuencia de resonancia, para las cuales el valor del voltaje en el resistor es el 70 % de su valor máximo y de su diferencia estimar el ancho de banda.

³En el siguiente enlace pueden ver un video para el uso de los comandos "*bode*" y "*lsim*", para obtener respuesta en frecuencia de circuitos eléctricos, para lo cual se debe obtener previamente la correspondiente función de transferencia:

<https://www.youtube.com/watch?v=0FbJ9HGvYaM>

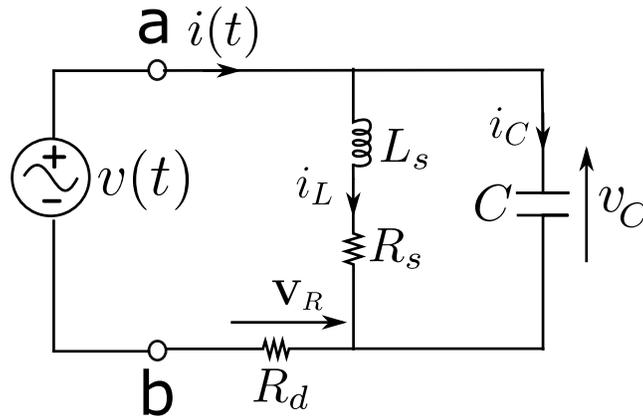


Figura 10

- e) Dibujar la curva de respuesta en frecuencia.
- f) Alimentar el circuito con una onda cuadrada de 8 kHz y observar la onda en el detector.

En el siguiente enlace pueden ver un video para el uso de los comandos "bodez" "lsim", para obtener respuesta en frecuencia de circuitos eléctricos, para lo cual se debe obtener previamente la correspondiente función de transferencia.

Informe

1. a) Comparar Q_0 , ω_0 , ω_1 y ω_2 , tanto del circuito serie como del tanque, obtenidos experimentalmente con los teóricos.
 - b) Construir curvas experimentales y compararlas con las teóricas, tanto del circuito serie como del tanque.
2. Auxiliándose de las series de Fourier explicar las formas de onda para el caso de la excitación con la onda cuadrada.
3. Explicar por qué el circuitos R - L - C serie podría servir para obtener alto voltaje como aplicación del concepto de resonancia.
4. Investigar aplicaciones del circuito resonante serie.
5. Comparar las respuestas teóricas y experimentales del circuito tanque.
6. Investigar aplicaciones prácticas del circuito tanque.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

TEOREMAS DE CIRCUITO

Objetivo

Verificar el cumplimiento de los teoremas de reciprocidad, de sustitución, de superposición y el de Thévenin bajo condiciones de régimen sinusoidal permanente.

Problemas Preparatorios

1. Enunciar los teoremas de sustitución, reciprocidad, superposición, Thévenin y Norton.
2. Demostrar el teorema de Thévenin.
3. Para los circuitos de la Figura 1 y los valores de los parámetros que aparecen en ella, hallar $v_2(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$, $\hat{i}_1(t)$, $\hat{i}_2(t)$ y $\hat{v}_2(t)$. Verificar el cumplimiento del **principio de reciprocidad**. En el informe tener en cuenta la resistencia interna de los inductores L y L_1 .

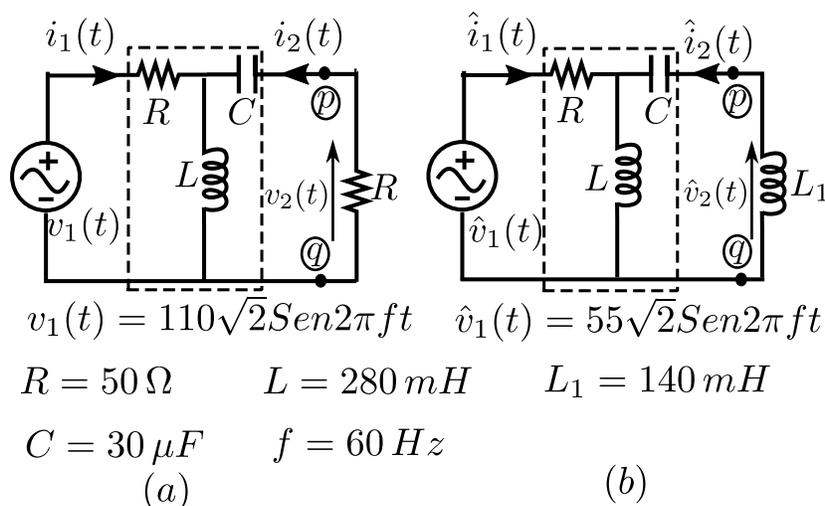


Figura 1

4. Obtener V_a en el circuito de la Figura 2 para los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 10 V & E_2 &= 6 V & R_1 &= 2 k\Omega \\
 R_2 &= 3,9 k\Omega & R_3 &= 6,8 k\Omega & &
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

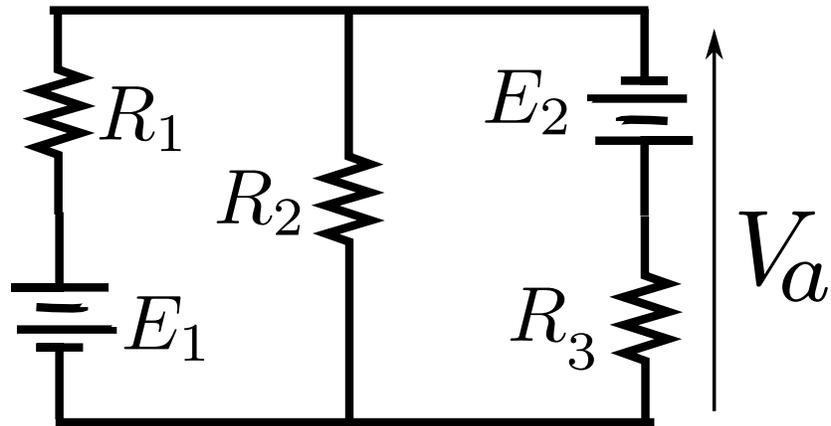


Figura 2

Reemplazar R_2 por una fuente de voltaje igual a V_a y verificar el teorema de sustitución.

5. En el circuito de la Figura 3 obtener el voltaje y la corriente a través de cada uno de los elementos pasivos cuando ambas fuentes independientes actúan simultáneamente y cuando cada una actúa por separado habiendo reemplazado la otra por un corto-circuito y verificar el cumplimiento del teorema de superposición, utilizando los parámetros de la ecuación (2).

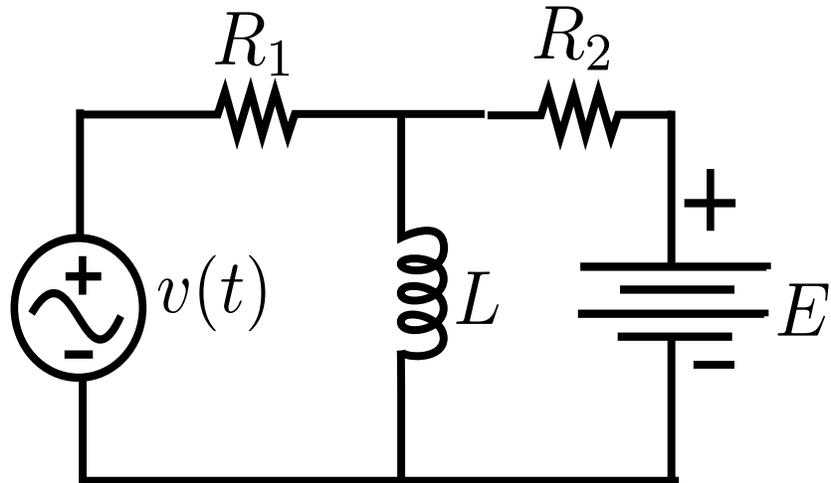


Figura 3

$$\begin{aligned}
 R_1 &= 50 \, \Omega & R_2 &= 88,4 \, \Omega & L &= 280 \, mH \\
 v(t) &= 120\sqrt{2} \text{Sen } 2\pi ft & f &= 60 \, Hz & E &= 12 \, V
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

-
6. Determinar el equivalente de Thèvenin en el estado estacionario sinusoidal a la izquierda de los terminales $\underline{p-q}$, en las Figuras 1(a) (considerar como carga el resistor R) y 1(b) (considerar como carga el inductor L_1)

Práctica

- Montar el circuito de la Figura 1(a) con los parámetros que aparecen en ella y medir experimentalmente los fasores \mathbf{I}_1 , \mathbf{V}_1 , \mathbf{I}_2 y \mathbf{V}_2 .
 - Montar el circuito de la Figura 1(b) con los parámetros que aparecen en ella y medir experimentalmente los fasores $\hat{\mathbf{I}}_1$, $\hat{\mathbf{V}}_1$, $\hat{\mathbf{I}}_2$ y $\hat{\mathbf{V}}_2$.
 - Verificar el cumplimiento del principio de reciprocidad, con los resultados obtenidos en (a) y en (b).
- Montar el circuito de la Figura 2 con los parámetros del problema preparatorio 4 y verificar experimentalmente el cumplimiento del teorema de sustitución.
- Montar el circuito de la Figura 3 con los parámetros del problema preparatorio 5 y verificar experimentalmente el cumplimiento del teorema de superposición.
- Construir los equivalentes de Thèvenin obtenidos en el problema preparatorio 6 y verificar experimentalmente el cumplimiento del teorema de Thèvenin.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

SIMULADOR TINA

Objetivos

1. Utilizar el paquete de simulación Tina para resolver circuitos en régimen sinusoidal permanente numérica, semi-simbólica y simbólicamente.
2. Visualizar las respuestas transitorias y del estado estacionario en el dominio del tiempo utilizando el mismo programa.

Problemas Preparatorios

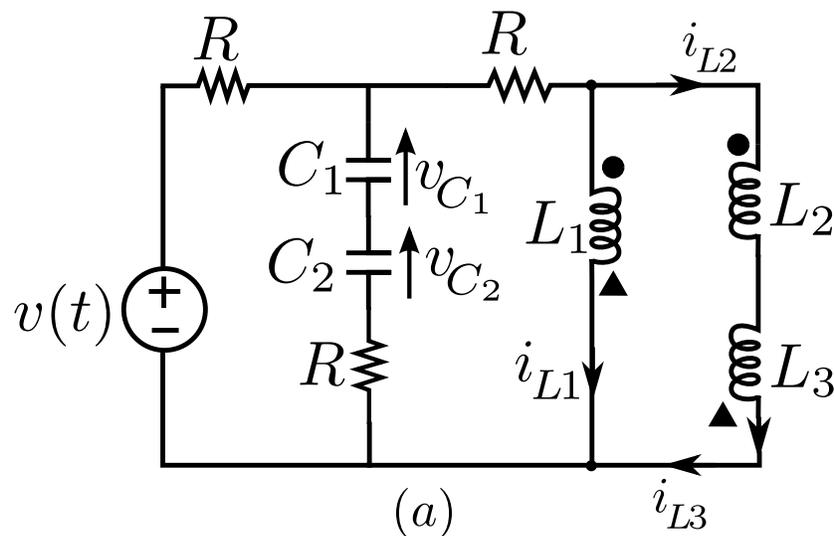


Figura 1 Circuito para Verificar las leyes de Kirchhoff en régimen sinusoidal permanente.

1. Determinar los voltajes y corrientes de régimen permanente en cada uno de los elementos del circuito de la Figura 1 con los parámetros de la ecuación (1) y los sentidos de referencia indicados suponiendo que las corrientes se han definido en los sentidos de las caídas de potencial, para cada uno de los siguientes casos:

(a) $v(t) = 24 V$

(b) $v(t) = 86 \text{Sen}(10^3 t + 53,13^\circ)$

$$\begin{aligned}
 R &= 3\Omega & C_1 &= 300\mu F & C_2 &= 1500\mu F \\
 L_1 &= 6mH & L_2 &= 1,5mH & L_3 &= 3mH \\
 M_{12} &= 1mH & M_{13} &= 2mH & &
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

2. Transitorios en Circuitos de Primer orden

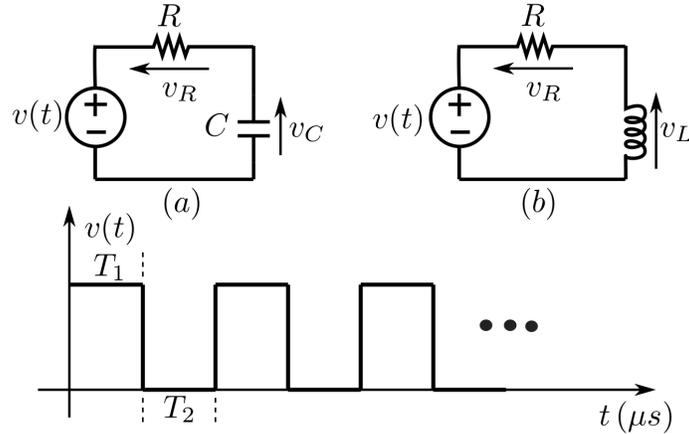


Figura 2 Transitorios en Circuitos de Primer orden

- a) Demostrar que $\tau = RC$ y $\tau = \frac{L}{R}$ tienen dimensiones de tiempo (segundos en el sistema MKS)
- b) En el circuito de la Figura 2(a) suponer $v(t) = V = \text{constante}$ y $v_C(0) = V_{C0}$. Demostrar las siguientes expresiones en función del tiempo para los voltajes en el resistor y en el capacitor:

$$v_R(t) = (V - V_{C0}) e^{-\frac{t}{T}} \quad v_C(t) = V_{C0} + (V - V_{C0}) \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad T = RC
 \tag{2}$$

- c) En el circuito de la Figura 2(a) suponer $v(t) = V = \text{constante}$ e $i_L(0) = I_{L0}$. Hallar expresiones del tiempo para $v_R(t)$ y $v_L(t)$.

Hallar v_R , v_C y v_L en cada uno de los circuitos de la Figura 2 para los siguientes parámetros: En la Figura 2(a): $R = 1k\Omega$ $C = 0,1\mu F$. En la Figura 2(b): $R = 2,7k\Omega$ $L = 280mH$ para cada uno de los siguientes valores de T_1 y T_2 :

- (a) $T_1 = T_2 = 400\mu s$
 (b) $T_1 = T_2 = 800\mu s$
 (c) $T_1 = T_2 = 200\mu s$

Precisiones con respecto al manejo del programa de Simulación

1. Para construir el circuito se utilizarán las pestañas “Basic” (Elementos de circuito comunes), “Sources” (Fuentes) y “Meters” (Medidores).
2. Cuando se selecciona un elemento de circuito pasivo y se arrastra al área de trabajo se muestra horizontal con su terminal 1 a la izquierda y su terminal 2 a la derecha. Cuando dicho elemento se rota hacia la derecha el terminal 1 se ubica en la parte superior y el 2 en la parte inferior. Este detalle es importante por cuanto los resultados de cualquier análisis siempre suponen un sentido de referencia de 1 a 2 para las corrientes y voltaje del terminal 1 con respecto al terminal 2.
3. Cuando el cursor pasa cerca de cualquier terminal (de un elemento de circuito, de un medidor o de una fuente) se pasa automáticamente al modo de alambrado para realizar conexiones con los demás elementos.
4. Tanto los medidores como las fuentes también tienen polaridad o sentido de referencia (interpretación para los valores positivos de las funciones del tiempo)
5. Para ver los resultados se usa la opción más apropiada del sub-menú “AC analysis” de “Analysis”, cada una de las cuales merece un comentario aparte:
 - a) Calculate nodal voltages. Aparece tabla para mostrar resultados y una punta de prueba. Cuando dicha punta se coloca en un nodo la tabla muestra el nivel DC, amplitud, valor eficaz y ángulo de fase del voltaje de nodo. Cuando la punta de prueba se coloca en el interior de un elemento la tabla muestra los valores de los fasores voltaje y corriente a través de dicho elemento.
 - b) Table de AC results. Muestra los fasores voltaje y corriente para todos los elementos así como los voltajes de nodo, las entradas (fuentes independientes o excitaciones) y las salidas (donde hay conectados instrumentos de medida).
 - c) AC Transfer Characteristic. Requiere una única excitación y al menos una salida y muestra la respuesta en frecuencia o los Diagramas de Bode.
 - d) Phasor Diagram. Muestra un diagrama fasorial o vectorial de las salidas.
 - e) Time Function... Muestra gráficas de las salidas. Debe especificar un tiempo final, un tiempo inicial y el número de puntos.
 - f) Network Analysis. Se usa para determinar parámetros de cuadripolos.

El sub-menú “DC Analysis” incluye “Calculate nodal voltages”, “Table de DC results”, “DC Transfer Characteristic” y “Temperature Analysis”.

Para estudiar el comportamiento transitorio se requiere al menos una salida y se realiza mediante la opción “Transient” del menú “Analysis”. Se debe especificar un tiempo final apropiado.

Práctica

1. Simular los circuitos del preinforme y comparar los resultados del programa con los obtenidos teóricamente.
2. Excitar el circuito de la Figura 2(a) con una fuente sinusoidal de frecuencia que satisfaga la condición $R = \frac{1}{2\pi fC}$, es decir, $f = \frac{1}{R2\pi C} = \frac{10^7}{10^3 2\pi} \approx 1590 \text{ Hz}$ y medir el desplazamiento angular entre \mathbf{V} y \mathbf{V}_C .
3. Excitar el circuito de la Figura 2(b) con una fuente sinusoidal de frecuencia que satisfaga la condición $R = 2\pi fL$, es decir, $f = \frac{R}{2\pi L} = \frac{2,7 \times 10^3}{2\pi 280 \times 10^{-3}} \approx 1540 \text{ Hz}$ y medir el desplazamiento angular entre \mathbf{V} y \mathbf{V}_L .

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER Y SU RELACIÓN CON LAS SERIES DE FOURIER

Objetivos

1. Analizar los armónicos que aparecen en la corriente de excitación de un transformador con núcleo de hierro, usando la Transformada Discreta de Fourier.
2. Recuperar señales análogas a partir del muestreo apropiado de ellas.

Teoría

Transformada Discreta de Fourier

Es el equivalente a la transformada continua para señales conocidas únicamente en N instantes separados por un intervalo, denominado *período de muestreo* T , es decir para una secuencia finita de datos.

Sea $f(t)$ la señal continua que origina el conjunto de datos y $f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n), \dots, f(t_{N-1})$, los valores de cada una de las muestras, donde $t_n = nT$.

La transformada de Fourier de la señal continua $f(t)$ sería:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

donde se debe notar que variable t se puede ser reemplazar por cualquiera otra.

Si cada muestra se interpreta como una función impulso de área $f(t_n)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$), puesto que el integrando existe únicamente en dichos instantes de (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^{(N-1)T} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= f(0)e^{-j\omega 0} + f(T)e^{-j\omega T} + \dots + f(nT)e^{-j\omega nT} + \dots + f[(N-1)T]e^{-j\omega(N-1)T} \\ F(j\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n)e^{-j\omega nT} \end{aligned} \quad (2)$$

Aunque en principio $F(j\omega)$ se podría evaluar para cualquier valor de ω , puesto que se dispone de un número finito de datos de entrada, únicamente N valores serían significativos. Además la transformada discreta de Fourier supone que la señal de entrada es periódica, es decir, los valores $f(t_N)$ hasta $f(t_{2N-1})$ son los mismos que hay entre $f(t_0)$ a $f(t_{N-1})$. Generalizando matemáticamente,

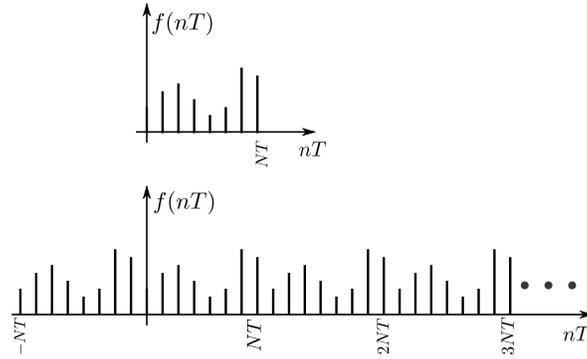


Figura 1

$$f_p(t_n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(t_n + rNT) \quad (3)$$

La ecuación (3) se ilustra en la Figura 1. Las razones anteriores nos mueven a evaluar la Transformada Discreta de Fourier para la frecuencia fundamental $\frac{1}{NT} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{NT}$ [rad/s] y sus armónicos $k \frac{2\pi}{NT}$, es decir,

$$F_p(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-j\omega_k t_n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

donde:

$f(t_n)$	es el valor de la señal en el instante t_n
$t_n = nT$	n -Ésimo instante de muestreo (en segundos), n es un entero ≥ 0
T	intervalo de muestreo (en segundos)
$F_p(\omega_k)$	espectro de f (valor complejo) a la frecuencia ω_k
$\omega_k = k\Omega$	k -Ésima muestra de frecuencia en <i>radianes por segundo</i>
$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$	intervalo de frecuencia angular de muestreo (<i>radianes/segundo</i>)
N	número de muestras de $x(t)$
$f_s = \frac{1}{T}$	frecuencia de muestreo o número de muestras por segundo en <i>Hertz o Hz</i>

(5)

Reemplazando (12) en (5) se obtiene:

$$F_p(jk\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)e^{-jk\Omega nT} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (6)$$

La ecuación (6) se puede re-escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F(j\omega_0) \\ F(j\omega_1) \\ F(j\omega_2) \\ \vdots \\ F(j\omega_{N-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{N-2} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & \dots & W^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{N-2} & W^{N-3} & \dots & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ y se ha tenido en cuenta que $e^{\pm j2r\pi} = 1 \forall r$ entero y que $e^{j\frac{2\pi}{N}k} = (e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)})$, como se puede verificar para el caso $N = 8$ en la Figura 4.

Ejemplo 1

Sea

$$f(t) = \underbrace{5}_{dc} + \underbrace{3\cos(8\pi t)}_{4\text{ Hz}} + \underbrace{2\text{sen}(4\pi t)}_{2\text{ Hz}} \quad (8)$$

la fuente de los datos, la cual se muestra en la Figura 2. Puesto que la máxima frecuencia presente es 4 Hz , de acuerdo al teorema del muestreo la mínima frecuencia de muestreo es de $f_s = 8 = N$ muestras por segundo, es decir el período de muestreo $T = \frac{1}{N} = 0,125\text{ s}$ y, por lo tanto se tienen los siguientes valores a partir de $f(t)$:

$$\begin{bmatrix} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) \\ 8 & 4 & 8 & 0 & 8 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde

$$f(n) = 5 + 3\text{Cos}\left(8\pi\frac{n}{N}\right) + 2\text{Sen}\left(4\pi\frac{n}{N}\right) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$= 5 + 3\text{Cos}(\pi n) + 2\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad (10)$$

Nótese que que la señal continua origen de los datos [ecuación (8)] se puede obtener de la discretizada [ecuación (10)] multiplicando el argumento por N (8 en nuestro caso) y cambiando n por t .

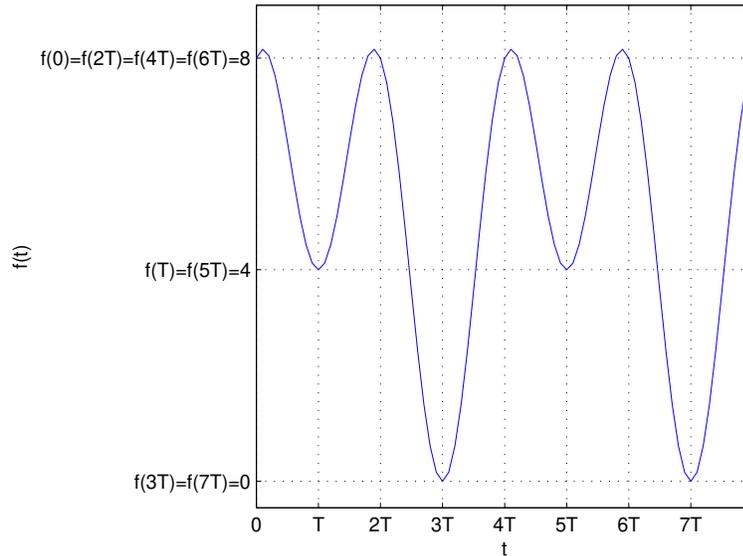


Figura 2

Las soluciones complejas de $x^N - 1 = 0$ son $e^{\pm jk\frac{2\pi}{N}}$ y para nuestro ejemplo como $N = 8$, las soluciones de $x^8 - 1 = 0$ son $e^{\pm jk\frac{\pi}{4}}$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 7 = N - 1$ y la ecuación (7) toma la forma:

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \\ F(4) \\ F(5) \\ F(6) \\ F(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W & W^6 & W^3 \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) = 8 \\ f(1) = 4 \\ f(2) = 8 \\ f(3) = 0 \\ f(4) = 8 \\ f(5) = 4 \\ f(6) = 8 \\ f(7) = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ -8j \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 8j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde se ha tenido en cuenta que, en este caso ($N = 8$) la función exponencial elevada a una potencia, positiva o negativa, múltiplo de 8 es igual a la unidad. Nótese la simetría de los resultados alrededor del punto $F\left(\frac{N}{2}\right) = F(4)$.

Interpretación de los resultados del ejemplo

Recordando siempre que en este caso $N = 8$:

1. $F(0) = 40$ significa una componente constante $\frac{1}{N}F(0) = \frac{1}{8} \times 40 = 5$ que es el primer término del segundo miembro de la ecuación (10).
2. $F(1) = [f(7)]^* = 0$ implica ausencia de una componente fundamental ($f = 1 \text{ Hz}$).

3. $F(2) = [f(6)]^* = -8j$ implica una componente de amplitud pico $\frac{2}{N}|F(2)| = 2$ y ángulo de fase $\arg[F(2)] = -90^\circ$, es decir, $2\cos\left(\frac{2\pi}{N}2n - 90^\circ\right) = 2\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ que es el tercer término del segundo miembro de la ecuación (10).
4. $F(4) = F\left(\frac{N}{2}\right) = 24$ implica una componente de amplitud pico $\frac{1}{N}|F(4)| = 3$ y ángulo de fase $\arg[F(4)] = 0^\circ$, es decir, $3\cos\left(\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n - 0^\circ\right) = 3\cos(\pi n)$ que es el segundo término del segundo miembro de la ecuación (10).

La Figura 3 muestra una gráfica del espectro, es decir de los valores eficaces de las frecuencias presentes en la señal continua que origina el conjunto de datos.

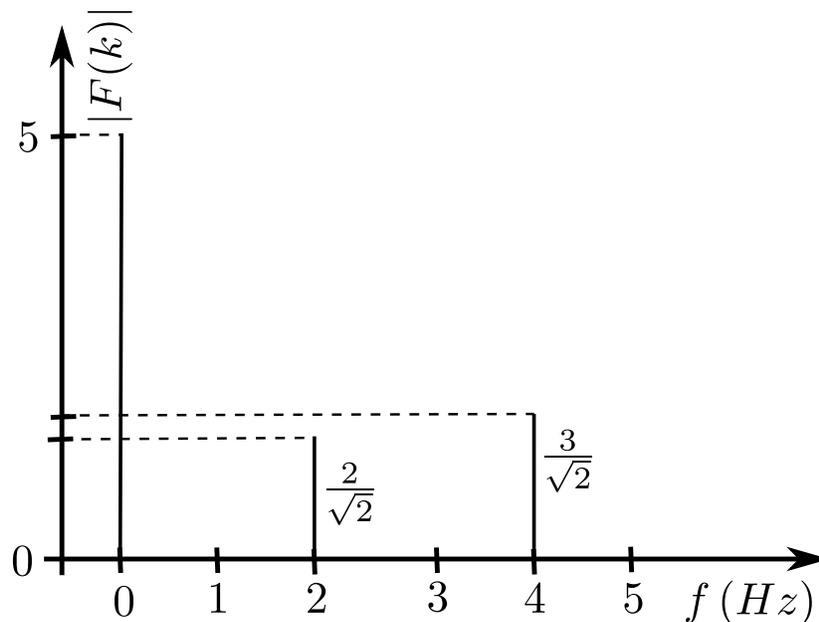


Figura 3

Para evitar el efecto de “*solapamiento*” (que causa que señales continuas distintas sean indistinguibles cuando se muestrean digitalmente: aliasing en inglés), debido a muestras a intervalos grandes, se acostumbra, cuando es posible, aumentar el número de muestras por segundo y prefiltrar la señal para minimizar el contenido de frecuencias altas en la señal de origen.

Debe recordarse que la Transformada Continua de Fourier de una onda periódica requiere que el intervalo de integración sea entre $-\infty$ e $+\infty$ o que corresponda a un número entero de ciclos de la forma de onda. Cuando se calcula la Transformada Discreta de Fourier con muestras que corresponden a un número no entero de ciclos de la señal de entrada, se corrompe el resultado, ya que en el resultado aparecen otras frecuencias. Así por ejemplo, una onda sinusoidal pura de la forma $A_m \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$, muestreada durante intervalo correspondiente a un período y un cuarto, correspondería a la ilustrada en la

Figura 3, recordando que siempre se supone que después de esta secuencia los datos se repiten, como se indica en la ecuación (3).

Transformada Inversa Discreta de Fourier

Es la operación por la cual se obtiene $f(t_n)$ a partir de $F_p(j\omega_k)$:

$$f(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_p(j\omega_k) e^{j\omega_k t_n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

de (5) se obtiene:

$$s_k(t_n) = e^{j\omega_k t_n} = e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad (13)$$

y reemplazando (13) en (4) y (12) se obtiene:

$$F_p(j\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (a)$$

$$f(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_p(j\omega_k) e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (b) \quad (14)$$

Debe recordarse que en (14)(a) cuando se hace la sumatoria sobre n el valor de k

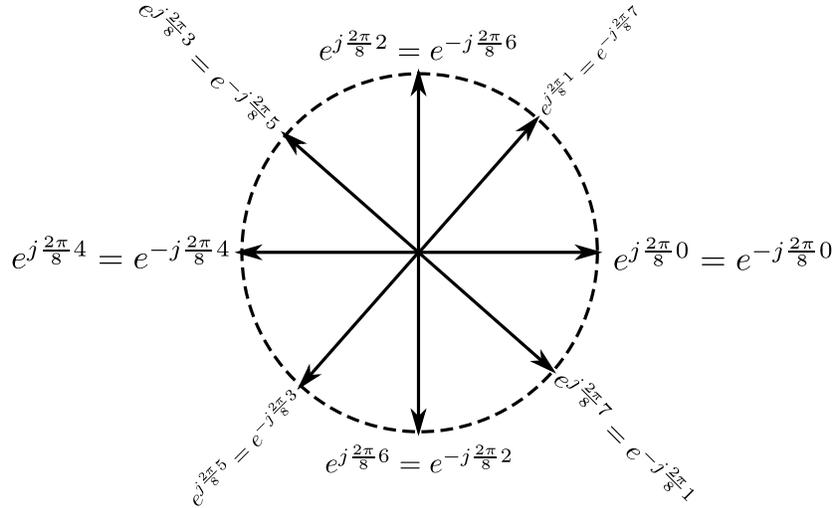


Figura 4

permanece constante y similarmente, en (14)(b) cuando se hace la sumatoria sobre k el valor de n permanece constante.

La Figura 4 muestra las raíces complejas de la ecuación $x^N - 1 = 0$ para $N = 8$ ($x^8 - 1 = 0$) y corresponde a los valores complejos $e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$ en (14)(a) o $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ en (14)(b) y forman una *base*, $\{s_k\}_{k=0}^{k=N-1}$. La definición (13), permiten re-escribir la Transformada

Discreta de Fourier, ecuación (14), como un producto escalar (suma de productos de muestras de la primera función por los correspondientes conjugados de las muestras de la segunda función), es decir,

$$F_p(j\omega_k) = \langle f(t_n), s_k(t_n) \rangle \quad (15)$$

El producto escalar de las dos funciones $f(t_n)$ y $s_k(t_n)$ es la proyección de una en la otra o “cuanto de s_k hay en f y a que Ángulo de fase” (s_k es complejo).

Similarmente, la transformada inversa se puede entender como la suma de proyecciones de $f(t_n)$ en $\{s_k\}_{k=0}^{N-1}$, es decir,

$$f(t_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{F}_p(j\omega_k) s_k(t_n) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (16)$$

donde $\bar{F}_k = \frac{F_p(j\omega_k)}{N}$.

Ejemplo 2

Obtener las muestras de la ecuación (9) a partir de los resultados en la ecuación (17). Aplicando (14)(b) con $N = 8$ y notando que $e^{j\frac{2\pi}{N}k} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-k)} = W^{(N-k)}$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W \\ 1 & W^6 & W^4 & W^2 & 1 & W^6 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W & W^6 & W^3 \\ 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 & 1 & W^4 \\ 1 & W^3 & W^6 & W & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(0) = 40 \\ F(1) = 0 \\ F(2) = -8j \\ F(3) = 0 \\ F(4) = 24 \\ F(5) = 0 \\ F(6) = 8j \\ F(7) = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A continuación se muestra el código Matlab para la verificación de los resultados anteriores, tanto por el método presentado, como también aplicando directamente la ecuación (14).

```
N=8;
pi=3.1416;
W=exp(-i*2*pi/N);
T=[0:0.125:0.875];
f=5+3*cos(8*pi*T)+2*sin(4*pi*T);
M=[1 1 1 1 1 1 1 1;1 W W^2 W^3 W^4 W^5 W^6 W^7;1 W^2 W^4 W^6 1 W^2 W^4 W^6;1 W^3 W^6 W W^4 W^7 W^2 W^5
1 W^4 1 W^4 1 W^4;1 W^5 W^2 W^7 W^4 W W^6 W^3;1 W^6 W^4 W^2 1 W^6 W^4 W^2;1 W^7 W^6 W^5 W^4 W^3
F=M*f';
t=[0:0.0125:1];
ft=5+3*cos(8*pi*t)+2*sin(4*pi*t);
```

```

plot(t,ft);
axis([0 1 -0.5 9]);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
T = linspace(0,0.125,1);
set(gca,'XTick',[0 0.125 0.25 0.375 0.5 0.625 0.75 0.875]);
set(gca,'xticklabel',{'0','T','2T','3T','4T','5T','6T','7T'});
y=linspace(0,4,8);
set(gca,'YTick',[0 4 8]);%[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]);
set(gca,'yticklabel',{'f(3T)=f(7T)=0','f(T)=f(5T)=4','f(0)=f(2T)=f(4T)=f(6T)=8'});
grid;
% Transformada inversa
MI=[1 1 1 1 1 1 1 1;1 W^7 W^6 W^5 W^4 W^3 W^2 W;1 W^6 W^4 W^2 1 W^6 W^4 W^2;1 W^5 W^2 W^7 W^4 W W^6 W
1 W^4 1 W^4 1 W^4;1 W^3 W^6 W W^4 W^7 W^2 W^5;1 W^2 W^4 W^6 1 W^2 W^4 W^6;1 W W^2 W^3 W^4 W^5 W
x=(1/8)*MI*F;
% Transformada discreta de Fourier
Fw=zeros(N,1);
fn=zeros(N,1);
for k=0:N-1
    for n=0:N-1
        Fw(k+1)=Fw(k+1)+f(n+1)*W^(k*n);
    end
end
% Fw=F;
% Transformad discreta de Fourier Inversa;
for n=0:N-1
    for k=0:N-1
        fn(n+1)=fn(n+1)+F(k+1)*W^(-k*n);
    end
end
fn =(1/N)*fn;
% fn=f;

```

Transformada Rápida de Fourier

El tiempo requerido para evaluar la Transformada Discreta de Fourier depende principalmente del número de multiplicaciones, puesto que ésta es la operación mas lenta. De la ecuación (7) el producto de una matriz de orden N por un vector de dimensión N involucra N^2 multiplicaciones. Además, para la mayoría de los problemas $N \geq 256$, razón por la cual la rapidez de cómputo es una consideración muy importante.

Desde mediados de los años sesenta se desarrollaron algoritmos eficientes para obtener la Transformada Discreta de Fourier, de ahí su nombre de Transformada Rápida de Fourier o FFT por sus siglas en inglés, que se basan en que en el método convencional se realizan muchos cálculos redundantes.

La ecuación (6) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)W_N^{nk} \quad (18)$$

donde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$.

Nótese que el producto nk se repite muchas veces para diferentes valores de n y de k .

Además, de la Figura 4 puede verse que $W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$ es una función periódica con únicamente N valores distintos.

Como se notará más adelante, la eficiencia del algoritmo se potencia cuando N es una potencia de 2.

A continuación se analiza la redundancia en el ejemplo 1 ($N = 8$):

$$\begin{aligned} W_8^4 &= -W_8^0 \\ W_8^5 &= -W_8^1 \\ W_8^6 &= -W_8^2 \\ W_8^7 &= -W_8^3 \end{aligned} \quad (19)$$

Además, cuando el producto nk se sale del rango $0 - 7$ se obtiene alguno de los valores anteriores ya que, con r entero, $W_N^{8r} = 1$. Así por ejemplo, $W_8^{35} = W_8^{32}W_8^3 = W_8^3$ ya que 32 es múltiplo de 8.

Reducción en Tiempo

Dividir las N muestras en dos grupos: las pares (ordinal $m = \frac{n}{2}$) y las impares (ordinal $m = \frac{n-1}{2}$) y por tanto la suma de la ecuación (18), se puede reescribir de la siguiente manera:

$$F(k) = \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2m)W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2m+1)W_N^{(2m+1)k} \quad (20)$$

Notando que $W_N^{2mk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2mk} = e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}mk} = W_{\frac{N}{2}}^{mk}$, (20) puede re-escribirse como se indica en (21):

$$F(k) = \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2m)W_{\frac{N}{2}}^{mk}}_{G(k)} + W_N^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1} f(2m+1)W_{\frac{N}{2}}^{mk}}_{H(k)} \quad (21)$$

Es decir, la Transformada Discreta de Fourier de N muestras $F(k)$ se puede obtener a partir de otras dos de $\frac{N}{2}$ datos, que corresponden a las pares $G(k)$ y a las impares

$H(k)$. Nótese que mientras el índice de frecuencia k de la señal original tiene N valores diferentes y W_N^{nk} es periódica con período N , el índice de frecuencia, tanto el de $G(k)$ como el de $H(k)$ tienen solamente $\frac{N}{2}$ valores diferentes y $W_{\frac{N}{2}}^{mk}$ también es periódica con período $\frac{N}{2}$, lo cual puede apreciarse en la gráfica de la Figura 4.

Por ejemplo, para $N = 8$:

Datos de entrada pares: $f(0), f(2), f(4), f(6)$

Datos de entrada impares: $f(1), f(3), f(5), f(7)$

$$\begin{aligned}
 F(0) &= G(0) + W_8^0 H(0) \\
 F(1) &= G(1) + W_8^1 H(1) \\
 F(2) &= G(2) + W_8^2 H(2) \\
 F(3) &= G(3) + W_8^3 H(3) \\
 F(4) &= G(0) + W_8^4 H(4) = G(0) - W_8^0 H(0) \\
 F(5) &= G(1) + W_8^5 H(1) = G(1) - W_8^1 H(1) \\
 F(6) &= G(2) + W_8^6 H(2) = G(2) - W_8^2 H(2) \\
 F(7) &= G(3) + W_8^7 H(3) = G(3) - W_8^3 H(3)
 \end{aligned} \tag{22}$$

La ecuación (22) se ilustra en la Figura 5.

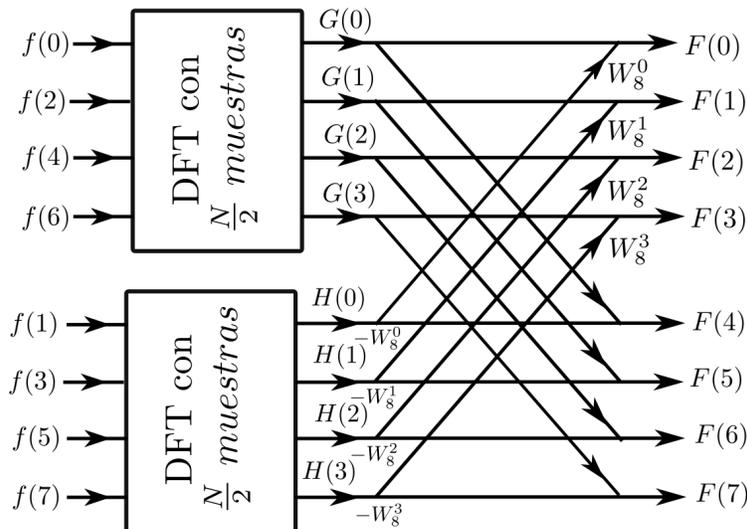


Figura 5

Suponiendo que N es una potencia entera de 2 se puede repetir el proceso anterior a cada uno de los problemas con $\frac{N}{2}$ muestras, en cuyo caso se tendrían dos con $\frac{N}{4}$ muestras cada una y así sucesivamente hasta obtener cuatro con dos muestras cada una, como se ilustra en la Figura 6 para el caso particular de $N = 8$. Generalizando, se requieren

γ etapas donde $N = 2^\gamma$.

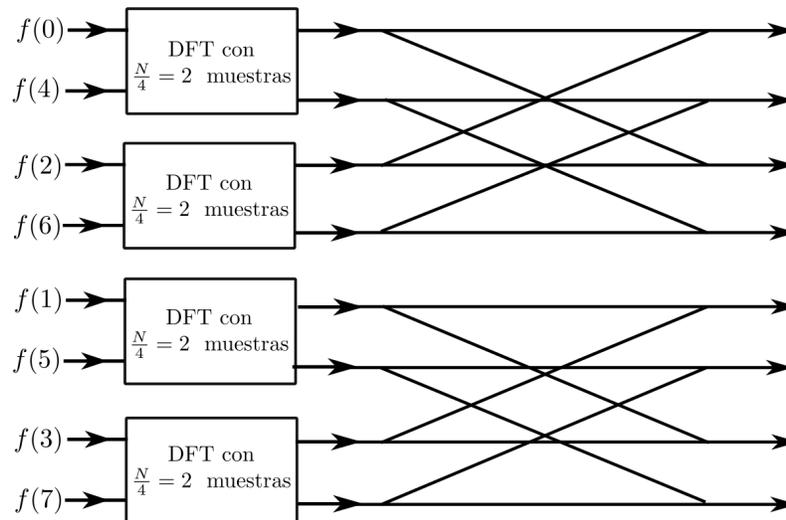


Figura 6

Se concluye que la Transformada Rápida de Fourier se calcula dividiendo o diezmando la secuencia de muestras en subsecuencias hasta obtener únicamente cuatro con dos muestras cada una. Puesto que los datos de entrada son muestras en el dominio del tiempo este proceso se denomina “Reducción en Tiempo”. Como es lógico suponer el de la Transformada Inversa de Fourier se le conoce con el nombre de “Reducción en Frecuencia”.

Preinforme

Hallar las series de Fourier para cada una de las ondas periódicas mostradas en las Figuras 7 y 8.

Práctica

1. Montar el circuito de la Figura 9 y variar el voltaje \mathbf{V}_s y/o la resistencia R hasta que la magnitud del voltaje aplicado al primario de transformador $|\mathbf{V}_p|$ sea el 120 % de su voltaje nominal, con el secundario en circuito abierto o en vacío (sin carga). Utilizando el osciloscopio, midiendo \mathbf{V}_R , obtener la corriente de excitación i_ϕ del transformador y muestrearla (utilizando los cursores del osciloscopio) usando una frecuencia de $3kH_z$, es decir, un intervalo entre muestras de $\frac{1}{3} \times 10^{-3}s$.
2. En la Figura 10 $v(t)$ es una señal cuadrada de frecuencia $f = 300 Hz$ y amplitud pico-pico $V_{pp} = 4 V$, $R = 2k\Omega$, $C = 0,133 \mu F$, $L = 0,2005 H$ y $R_L = 144,2 \Omega$.

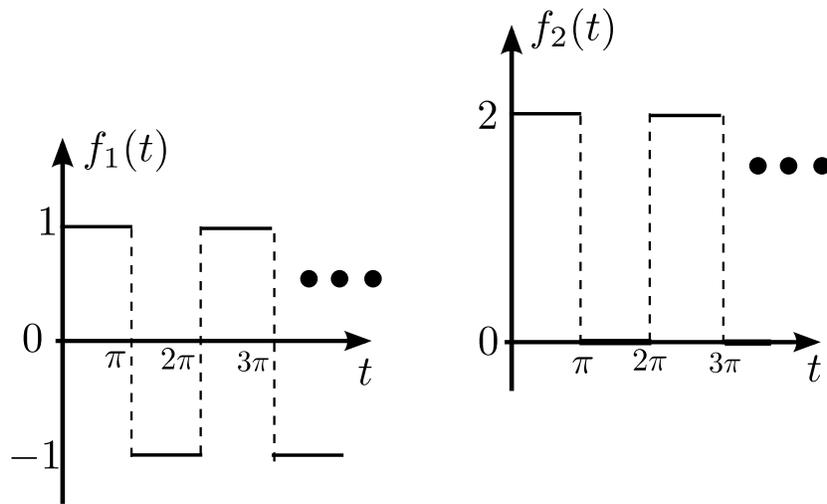


Figura 7

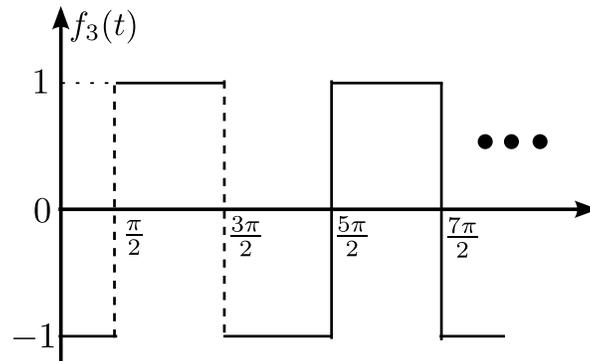


Figura 8

Medir con un osciloscopio la señal v_c y muestrearla con un tiempo de muestreo apropiado.

NOTA

En el informe a partir de las muestras de las señales, usando la Transformada Discreta de Fourier y su relación con las series de Fourier, obtener las expresiones para las respectivas señales análogas. Ver artículo de la revista “SCIENTIA ET TECHNICA”, No. 6, Diciembre 1997, pags 15-20, “La Transformada Discreta de Fourier”, Didier Giraldo y otros.

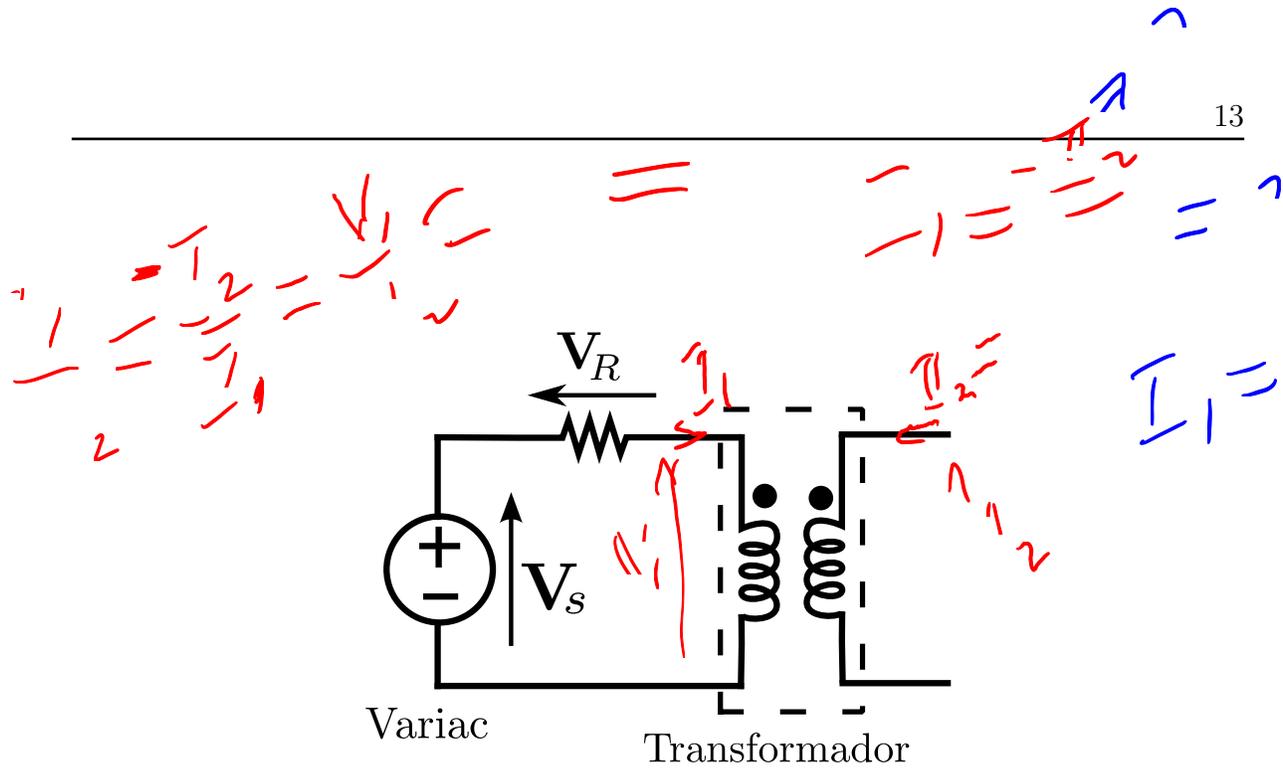


Figura 9

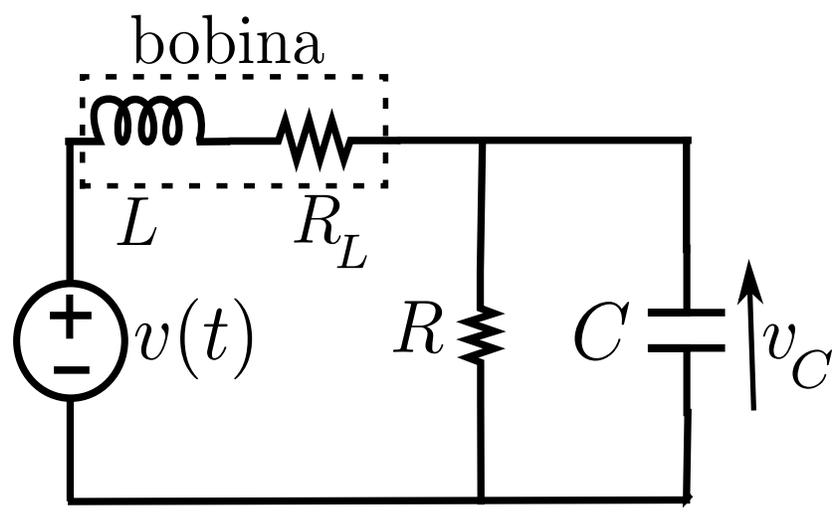


Figura 10

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

EL TRANSFORMADOR

Objetivos

1. Determinar experimentalmente la ubicación de las marcas de los devanados de un transformador cuyos sentidos de arrollamiento se desconocen.
2. Estudiar el comportamiento del transformador ideal y los criterios que deben tenerse en cuenta para conectarlos en paralelo.
3. Determinar experimentalmente el coeficiente de acoplamiento entre dos inductores mutuamente acoplados.

TEORÍA

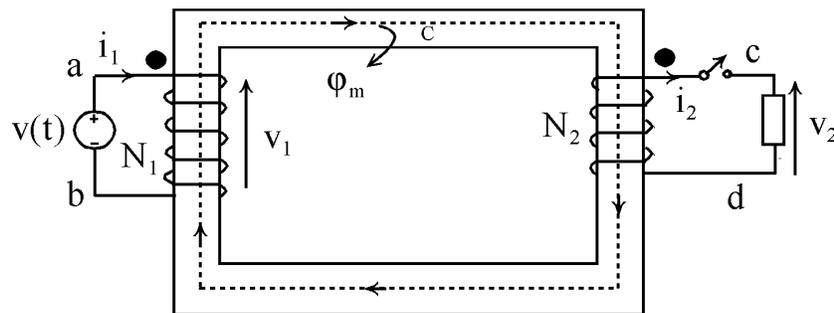


Figura 1 Detalles constructivos de un transformador

La Figura 1 ilustra dos bobinas arrolladas alrededor de un núcleo de material ferromagnético (transformador) uno de cuyos devanados, que generalmente se le denomina *primario*, se ha excitado mediante una fuente de voltaje. El segundo arrollamiento se llama *secundario* y se conecta a una *carga* (aparato o conjunto de ellos que absorben energía y se representa como una puerta).

Se dice que el transformador es IDEAL cuando se hacen las siguientes suposiciones:

1. Todo el flujo magnético resultante (el debido a la acción simultánea de ambas corrientes) se confina a través del núcleo. Por lo tanto, todas las espiras (vueltas) de ambas bobinas enlazan, en cada instante, el mismo flujo magnético $\Phi_M(t)$. Esto es equivalente a desprestigiar la dispersión, lo cual se justifica en el hecho de que la permeabilidad relativa μ_r (la relación entre la permeabilidad magnética del material de que está hecho el núcleo y la del vacío) de los materiales ferro-magnéticos es muy grande (para los más utilizados comercialmente en la construcción de transformadores $2000 \leq \mu_r \leq 7000$).¹
2. No hay calentamiento en el cobre de los devanados (efecto Joule) ni en el núcleo (se desprestigian los efectos de las corrientes de Foucault y de histéresis) y, en consecuencia, no hay pérdidas.

Ley de Lenz

EL SENTIDO DE LA CORRIENTE INDUCIDA (i_2 en este caso) es tal que ella produciría un flujo magnético que **SE OPONE A LA CAUSA QUE LO PRODUCE, ES DECIR, A LA VARIACIÓN DEL FLUJO MAGNÉTICO EXTERNO**. Es decir, cuando el valor absoluto del flujo magnético está creciendo en un cierto sentido, la corriente inducida crea un campo magnético de sentido contrario (opuesto al externo) para oponerse al crecimiento. Similarmente, cuando el valor absoluto del flujo magnético externo está decreciendo en algún sentido, la corriente inducida crea un campo magnético del mismo sentido (que refuerza el externo) para oponerse al decrecimiento.

Es importante recordar que la ubicación de las marcas se hace de tal manera que cuando las corrientes fluyen de los terminales marcados a los no marcados o de los no marcados a los marcados se producen flujos magnéticos del mismo sentido.

Si, para los sentidos de referencia de i_1 y Φ_M indicados en la Figura 1, se aplica la ley de Lenz a cada uno de todos los casos posibles enumerados en la Tabla 1 e ilustrados en la Figura 2 se obtienen los resultados de las dos últimas columnas, es decir, cuando el terminal marcado a está a mayor potencial con respecto al terminal b, el terminal marcado c está a mayor potencial con respecto al terminal d. Se puede concluir que **en cualquier instante los terminales marcados tienen la misma polaridad relativa**.

Denotando por N_1 y N_2 el número de espiras del primario y secundario, respectivamente, por λ_1 y λ_2 los flujos totales enlazado por el primario y el secundario, respectivamente, donde $\lambda_1 = N_1\Phi_M$ y $\lambda_2 = N_2\Phi_M$, de la **segunda ley de Kirchhoff**² y

¹Aunque se han logrado valores de 10^5 [Permalloy 78 (78,5 Ni)], 2×10^5 (Hierro purificado) y 10^6 (Superpermalloy (5 Mo-79 Ni)).

²La suma algebraica de *caídas* de tensión (voltajes) a través de los elementos que conforman cualquier trayectoria cerrada es igual a cero en todo instante.

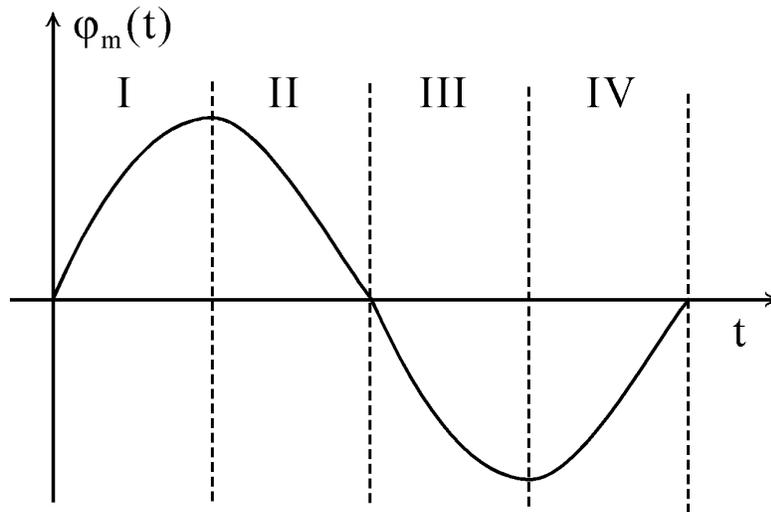


Figura 2 Casos posibles para aplicación de la ley de Lenz

CASO ↓	i_1	$\frac{di_1}{dt}$	Φ_M	$\frac{d\Phi_M}{dt}$	$\frac{d \Phi_M }{dt}$	$V_a - V_b$	$i_2 \text{ o } V_c - V_d$
I	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0	> 0
II	> 0	< 0	> 0	< 0	< 0	< 0	< 0
III	< 0	< 0	< 0	< 0	> 0	< 0	< 0
IV	< 0	> 0	< 0	> 0	< 0	> 0	> 0

Tabla 1 Demostración de que los terminales marcados siempre tienen la misma polaridad relativa.

de la ley de inducción de Faraday se sigue que:

$$\begin{aligned}
 v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} &= \frac{d}{dt} N_1 \Phi_M = N_1 \frac{d\Phi_M}{dt} \\
 v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} &= \frac{d}{dt} N_2 \Phi_M = N_2 \frac{d\Phi_M}{dt} \\
 \therefore \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} &= \frac{N_1}{N_2} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Si se supone que la permeabilidad relativa del núcleo es infinita, la aplicación de la ley de Ampère [Ecuación (??)] a la trayectoria C interna al núcleo indicada en la Figura 1 mediante la línea de trazos discontinuos conduce a:

$$\frac{1}{\mu} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum i = N_1 i_1 - N_2 i_2 = 0 \quad \therefore \Rightarrow \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) se obtiene:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1} \quad \therefore \Rightarrow v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad \forall t \quad (3)$$

Nótese de la Figura 1 que la ecuación (3) significa que, en cada instante, el primario absorbe energía de la red con la misma rapidez con la que el secundario la entrega a la carga y, por lo tanto, *el transformador no almacena energía*.

La representación circuital del transformador ideal se muestra en la Figura 3, donde se indican los sentidos de referencia para las variables de las ecuaciones (1), (2) y (3).

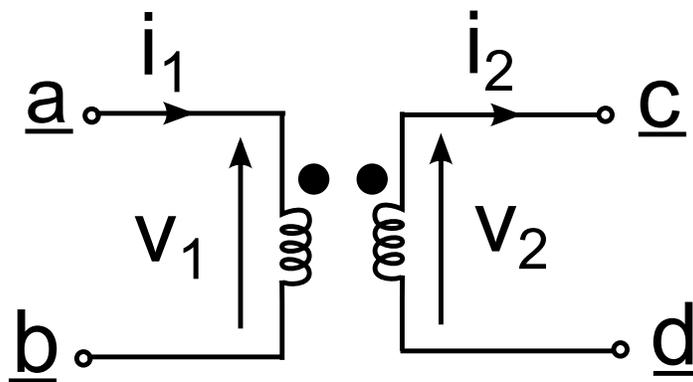


Figura 3 Representación circuital del transformador ideal

De (1) se observa que $v_2 = \frac{N_2}{N_1} v_1$ es igual al producto de la relación del número de espiras (que se define como la *relación de transformación*) que es una constante mayor que cero y del voltaje aplicado al primario v_1 y, por lo tanto, si el primario se conecta a una fuente ideal de voltaje, es decir, $v_1 = v(t)$, entonces v_2 es independiente de la carga conectada y, por tanto, *el secundario se comporta también como una fuente ideal de voltaje* que suministra energía a la carga.

Frecuentemente los lugares en los cuales es posible transformar otras formas de energía a electromagnética se encuentran lejanos de los centros de consumo, razón por la cual es necesario transportar grandes cantidades de energía a través de distancias apreciables. De (A-3) y de la Figura 4 puede verse que si entre el generador y los conductores del sistema de transmisión se conecta un transformador elevador, es decir, el generador en el lado de baja tensión, el primario por ejemplo, y el sistema de transmisión al lado de alta tensión, el secundario por ejemplo, en cuyo caso se está suponiendo $N_H < N_X$, es posible disminuir la corriente y por lo tanto las pérdidas en el sistema de transmisión. Además, en el sitio lejano en el que se realiza el consumo de energía, un transformador reductor ($N_1 > N_2$), cuyo lado de alta se conecta al sistema de transmisión de energía, permite aplicar a cada aparato eléctrico el nivel

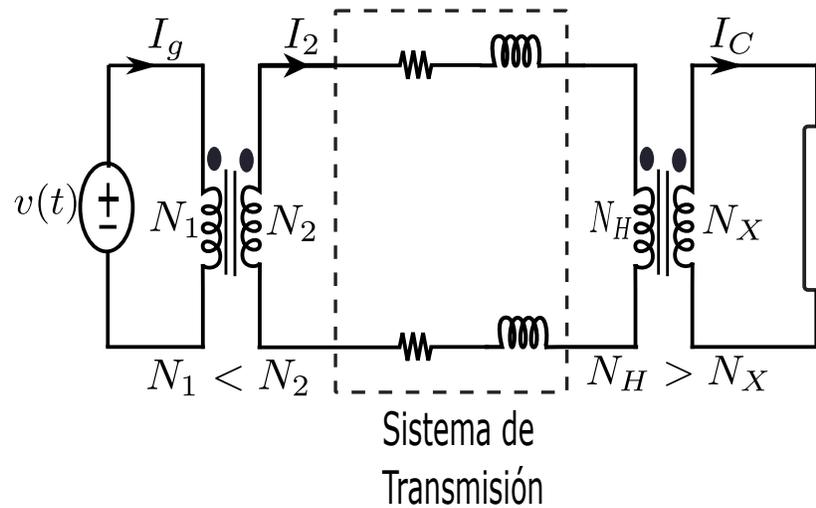


Figura 4

de *voltaje nominal*, que se define como aquél para el cual el fabricante garantiza el comportamiento óptimo del mismo y una vida útil larga.

Para un transformador ya construido el calibre de los conductores de las bobinas es constante y tienen un límite máximo de corriente (capacidad). A medida que se conectan cargas en paralelo la corriente a través del secundario aumenta, ya que los voltajes permanecen constantes, lo cual, según (2) representa un aumento proporcional en la corriente primaria. A medida que aumenta el número de cargas (debido, por ejemplo, al crecimiento de la población, nuevas urbanizaciones, aumento en los niveles de consumo de energía, etc.) se hace necesario o bien cambiar el transformador por otro de más capacidad o conectar otro en paralelo. Frecuentemente esta última solución resulta ser la más económica.

Conexión de dos transformadores en paralelo

la Figura 5, en la que *marcas similares identifican devanados pertenecientes al mismo transformador*, es decir, las marcas triangulares identifican un transformador y las circulares el otro, se muestra cada una de las cuatro posibilidades de conexión de los dos primarios que se identifican mediante las letras A, B, C y D y de los dos secundarios que se identifican mediante los números naturales 1, 2, 3 y 4. Si cada conexión primaria se combina con cada uno de los casos de conexión secundaria se obtendrían un total de 16 formas de conectar dos transformadores en paralelo. Sin embargo, si se identifican los terminales de uno de los devanados, el primario por ejemplo, mediante las letras a y b y los del otro, el secundario por ejemplo, mediante las letras c y d y

se recuerda que tener las marcas en a y c es lo mismo que tenerlas en b y d, las 16 posibilidades se reducen a ocho de acuerdo a las siguientes equivalencias:

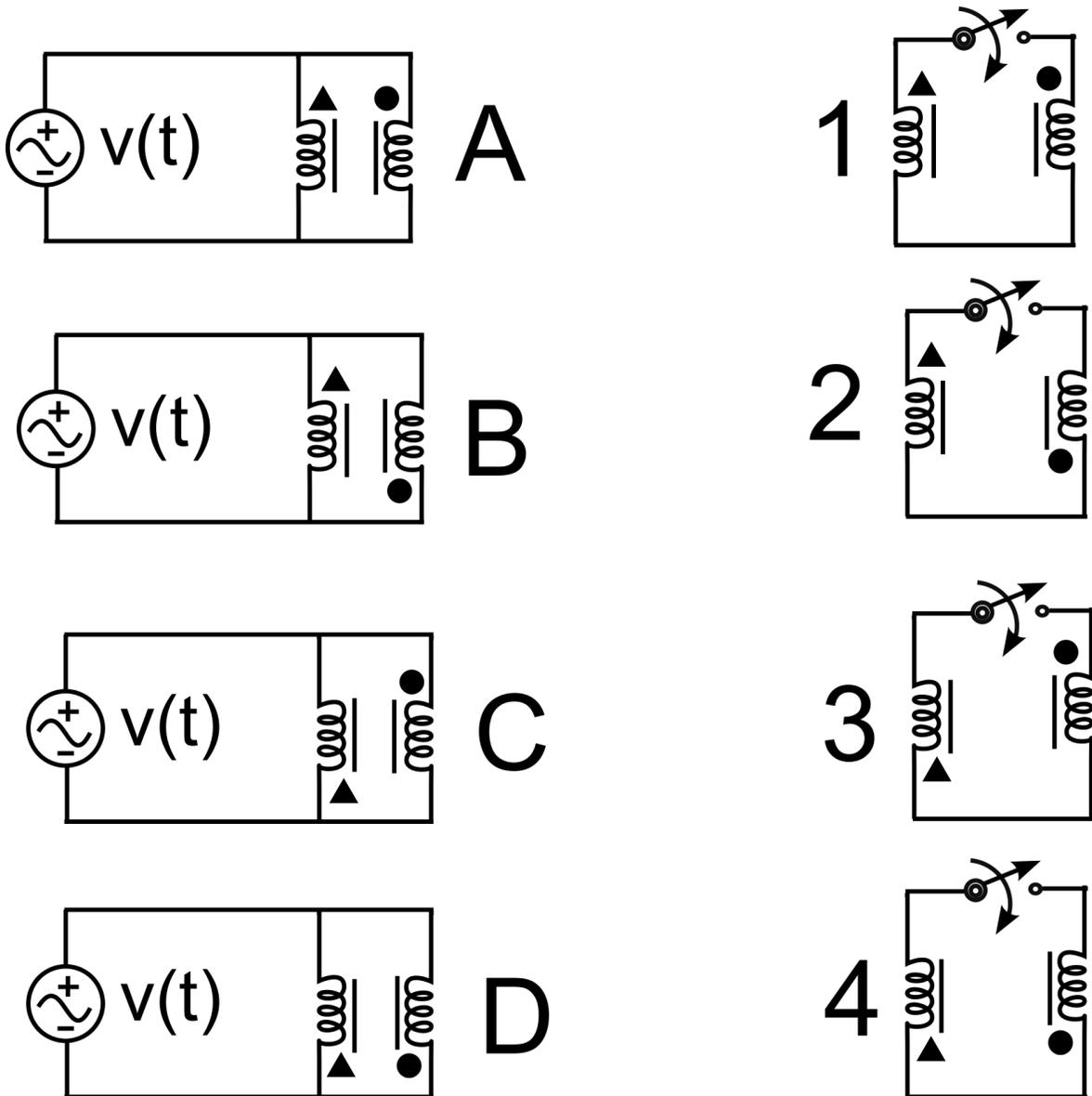


Figura 5 Posibilidades de conexión de los devanados primarios (A, B,C y D) y de los secundario (1, 2,3 y 4) de dos transformadores.

$$\begin{aligned}
 A - 1 &= D - 4 & A - 2 &= D - 3 \\
 B - 2 &= C - 3 & B - 3 &= C - 2 \\
 A - 4 &= D - 1 & B - 4 &= C - 1 \\
 B - 1 &= C - 4 & A - 3 &= D - 2
 \end{aligned}$$

La Figura 6 muestra los ocho casos posibles de conexión de dos transformadores en paralelo. Para estudiar la viabilidad de cada uno de ellos se debe obtener el voltaje en terminales del interruptor abierto del secundario teniendo en cuenta los siguientes criterios:

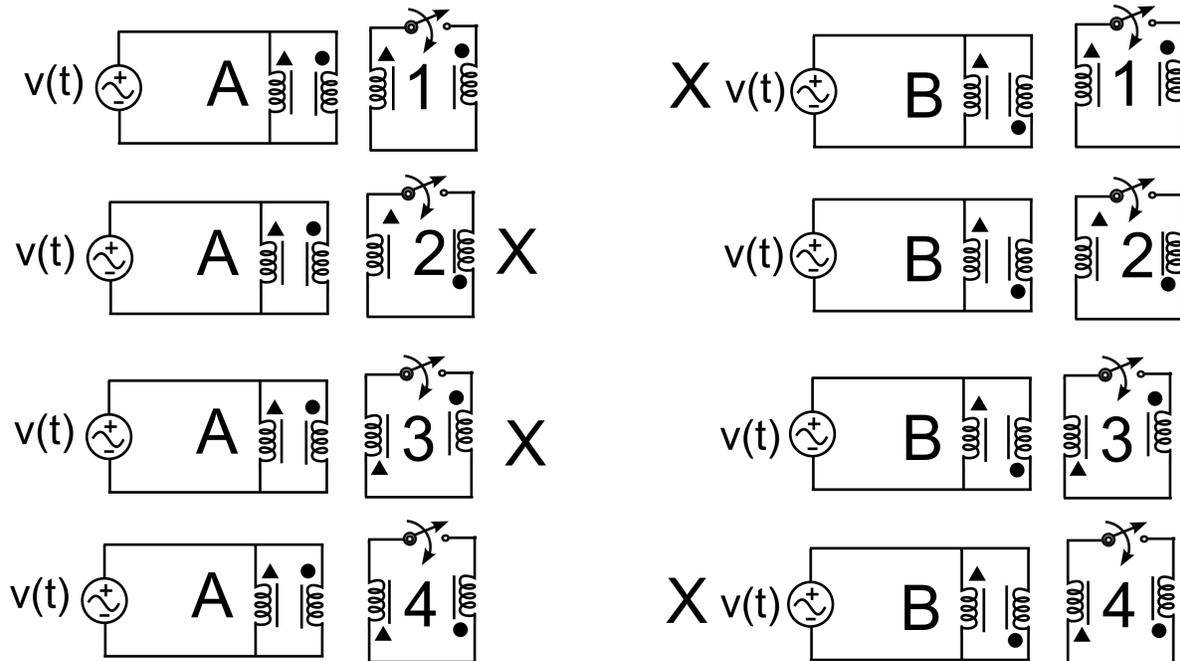


Figura 6 Ocho posibilidades de conexión de dos transformadores en paralelo.

- * En cada instante la polaridad del voltaje de los devanados que se conectan a la fuente ideal de voltaje ideal la determina ésta.
- * En cada instante los terminales marcados tienen la misma polaridad relativa, lo cual implica que los no marcados también la tienen.
- * El secundario de cada transformador se comporta como una fuente ideal de voltaje de valor:

$$v_2 = \frac{N_2}{N_1} v(t) \quad \text{primer transformador}$$

$$v_x = \frac{N_y}{N_x} v(t) \quad \text{segundo transformador}$$

y sus polaridades dependen de la localización de las marcas en el secundario y de si el terminal que está a mayor potencial en el devanado primario conectado a la fuente ideal de voltaje $v(t)$ es el marcado o el no marcado.

Nótese que para que el voltaje en terminales del interruptor sea cero se requiere que la polaridad de los voltajes secundarios se opongan cuando se recorre la trayectoria cerrada de la que hace parte y también que, para garantizar que el voltaje que se aplique a la carga sea el mismo,

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N_y}{N_x}$$

Es decir, **los transformadores deben tener la misma relación de transformación.**

Cuando la polaridad de los voltajes secundarios es aditiva el voltaje que aparece en los terminales del interruptor abierto es $\pm \left(\frac{N_1}{N_2} + \frac{N_x}{N_y} \right) v(t)$. Es evidente que si se cerrara el interruptor se produciría una corriente circulante de corto circuito ya que únicamente estaría limitada por la resistencia de los cables y de los devanados cuyo valor es despreciable. En virtud de la ecuación (3) las corrientes que se presentarían en los devanados primarios (los conectados a la fuente independiente de voltaje) serían proporcionales a las de corto circuito de los secundarios. En la Figura 6 se identifican mediante una X los casos que darían origen a esta condición y a la destrucción de ambos transformadores.

La Figura 7 ilustra la aplicación de los anteriores criterios a los casos $A - 2$ y $B - 3$. Los demás son dejados como ejercicio.

Se puede concluir, entonces, que la conexión irreflexiva de dos transformadores en paralelo puede destruirlos y que para este fin es, absolutamente indispensable el conocimiento de la localización de las marcas de las bobinas mutuamente acopladas, las cuales están contenidas en una caja metálica cerrada y son accesibles solamente a través de terminales exteriores. Por esta razón los fabricantes de transformadores casi siempre especifican la localización de las marcas de acuerdo a normas ampliamente difundidas. Sin embargo, a menudo surge la necesidad de recurrir a procedimientos experimentales para determinarlas cuando los sentidos de sus arrollamientos se desconocen.

Determinación Experimental de la localización de las marcas de un transformador

La Figura 8 muestra un transformador ideal uno de cuyos devanados (el de mayor número de espiras N_1) se ha excitado mediante una fuente independiente de voltaje $v(t)$.

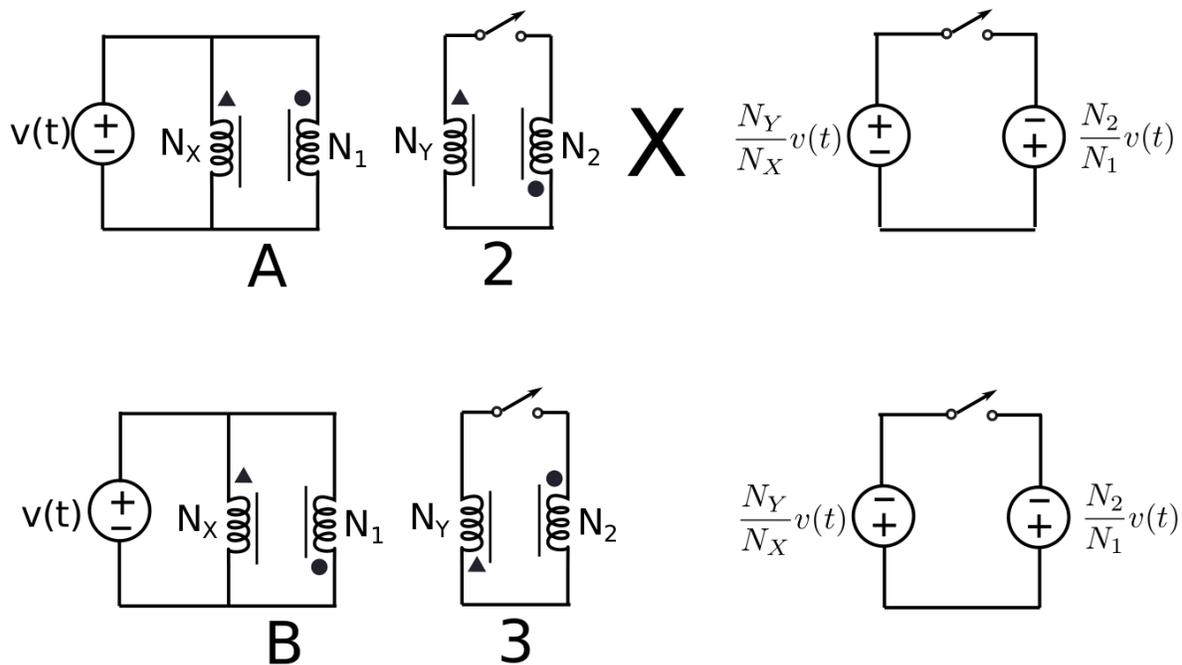


Figura 7 Análisis de dos de las posibilidades de conexión de dos transformadores en paralelo.

Sendos terminales de ambas bobinas se han puesto al mismo potencial. De (1) se sigue que si $v(t) = v_1(t)$ es sinusoidal de amplitud V_m también lo es el voltaje inducido en el secundario $v_2 = \frac{N_2}{N_1}v_1(t)$ y su sentido de referencia depende de la localización de las marcas. Por lo tanto,

$$V_{ac} = \left(1 \mp \frac{N_2}{N_1}\right) v(t) \quad (4)$$

donde el signo menos se aplica a la Figura 8(a) y el signo más + a la Figura 8(b).

Si se supone la existencia de un aparato cuya lectura sea proporcional a la amplitud del voltaje sinusoidal entre los terminales a los que se aplique, teniendo en cuenta que $\frac{N_2}{N_1} < 1$, (4) sugiere que al voltímetro se aplica un voltaje sinusoidal de amplitud mayor o menor que V_m según las marcas estén en los terminales a y d [Figura 8(b)] o en a y c [Figura 8(a)], respectivamente.

Recuérdese los instrumentos de medida deben poseer características tales que su introducción en un sistema no afecte el estado de éste. De este principio se puede

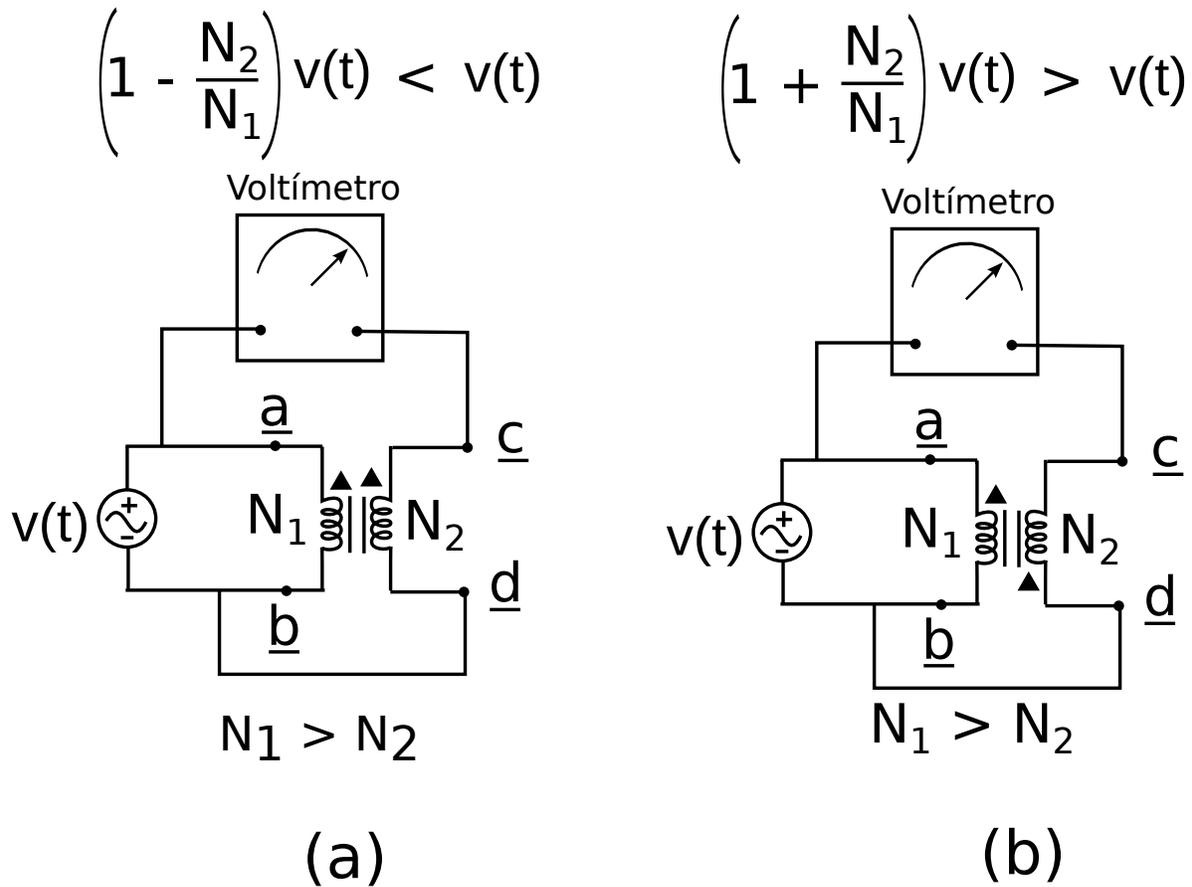


Figura 8 Determinación experimental de la ubicación de las marcas de un transformador

concluir entonces:

- i la resistencia interna de un *amperímetro* debe ser idealmente cero para que cuando se *conecte en serie* con la puerta la corriente que se produzca a través de ella continúe siendo la misma que antes de la introducción del aparato de medida, es decir, para que a través del amperímetro no se produzca ninguna caída de tensión.
- i la resistencia interna de un voltímetro debe ser idealmente infinita para que cuando se conecta en paralelo con la puerta la corriente a través de ella continúe siendo la misma que antes de la introducción del aparato de medida, es decir, para que a través del voltímetro no se derive ninguna corriente.

Problemas Preparatorios

1. Qué son las corrientes de Foucault? Con qué otros nombres se les conoce?

2. En qué consiste el efecto conocido con el nombre de “histéresis.”
3. Enunciar la ley de inducción de Faraday.
4. Enumerar las aplicaciones m’as importantes de los transformadores.
5. Analizar cada uno de las conexiones de la Figura 6 y definir las que se pueden hacer sin causar daño a los transformadores.
6. Obtener el inductor equivalente entre los terminales \underline{a} y \underline{b} para cada una de las interconexiones de las Figuras 9 y 10.

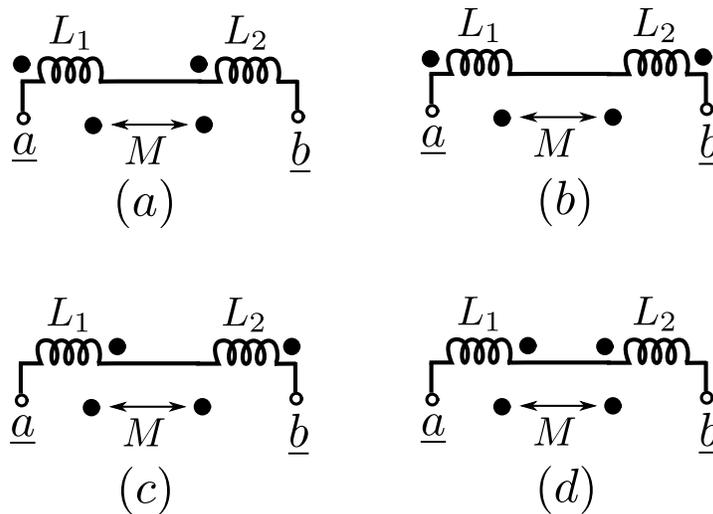


Figura 9

Práctica

- (1) Montar el circuito de la Figura 11 dejando inicialmente todas las bombillas desconectadas.
- (2) Medir el voltaje disponible en la red de suministro de energía.
- (3) Seleccionar los devanados del transformador multidevanado de tal manera que excitado el primario mediante el voltaje disponible en la red de suministro de energía, se obtenga en el secundario un valor eficaz lo más ajustado posible a 120 voltios. Identificar la potencia nominal del transformador.
- (4) Medir la relación de voltajes cuando no hay cargas conectadas en el secundario o en vacío (relación de transformación).

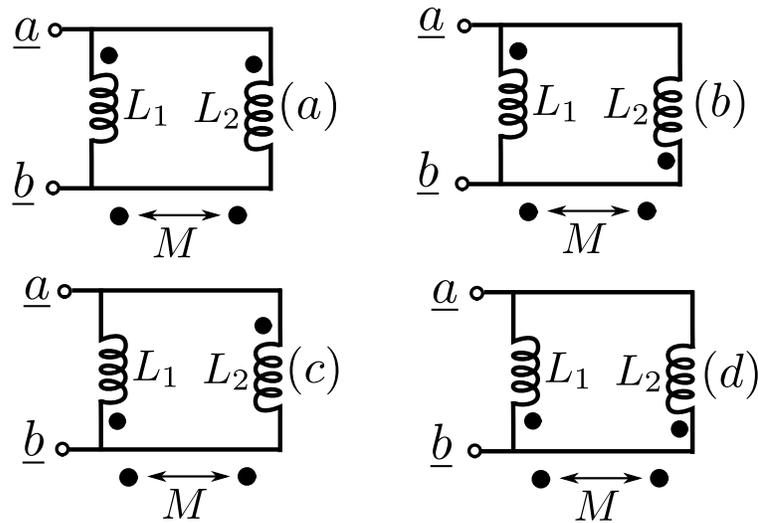


Figura 10

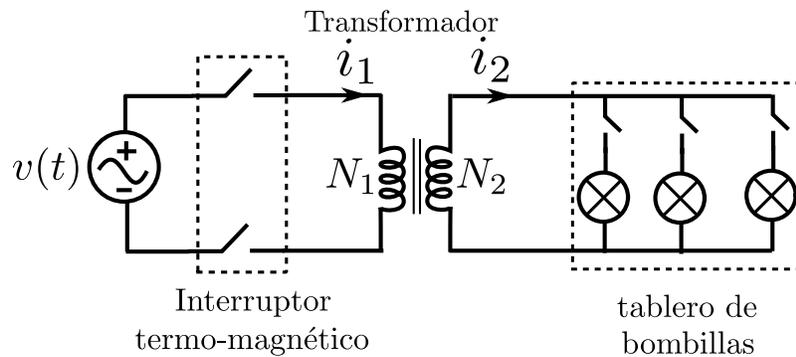


Figura 11

- (5) Medir la corriente y la potencia en el primario cuando no hay cargas conectadas en el secundario. Idealmente cuánto deberían ser estas lecturas y por qué?. Explicar cualitativamente la diferencia entre los valores predichos por la teoría y los resultados obtenidos experimentalmente.
- (6) Conectar cargas paulatinamente hasta una sobrecarga del 25% de la potencia nominal del transformador y para cada caso tomar las siguientes lecturas y tabularlas:
 - (a) Corriente en primario y secundario y su relación.
 - (b) Voltaje primario y secundario y su relación.

-
- (c) Potencia absorbida por la carga y la del conjunto transformador carga. Cuál es el significado de la diferencia?
- (7) Determinar la localización de las marcas del transformador mediante el procedimiento descrito en esta guía.
- (8) Conectar dos transformadores idénticos en paralelo conectando los secundarios mediante un **interruptor termo-magnético adicional**.
- (9) Conectar cargas paulatinamente hasta completar la suma de las potencia nominales de ambos transformadores y para cada caso tomar y tabular las cantidades solicitadas en la instrucción 6.
- (10) Obtener una estimación aproximada del coeficiente de acoplamiento para los devanados del transformador de la siguiente manera:
- (a) Aplicar a cada devanado voltaje reducido y obtener la impedancia cuando el otro devanado se deja en vacío. De esta manera se obtienen valores numéricos de $R_1 + j\omega L_1$ y $R_2 + j\omega L_2$.
- (b) Aplicar voltaje reducido a los devanados conectados en serie y obtener la impedancia equivalente. La parte real debe ser igual a la suma de R_1 y R_2 . Como ya se conoce la ubicación de las marcas y los resultados del problema preparatorio 4 se pueden actualizar para incluir $\pm j\omega M$ y se puede determinar el coeficiente de acoplamiento. Recuerdese que la expresión para el coeficiente de acoplamiento es:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{(\omega L_1)(\omega L_2)}} \quad (5)$$

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

TRANSITORIOS EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Objetivo

Estudiar la respuesta de circuitos R-L, R-C y R-L-C serie excitados con fuentes de valor constante y ondas cuadradas que simulan la carga y descarga de los elementos almacenadores de energía.

TEORÍA: Transitorios en Circuitos de Segundo Orden

En el circuito de la Figura 6, $v_C(0^-) = v_C(0^+) = V_{C0} = 0$ e $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_{L0} = 0$ el CEGIDLI, en función de corrientes de enlace, suponiendo un gráfico orientado cuyo unico enlace es el inductor, es el siguiente:

$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \left\{ v_c(0^+) + \frac{1}{C} \int_{0^+}^t i(\tau) d\tau \right\} \quad \forall t \geq 0^+ \quad (1)$$

y la ecuación diferencial para $i(t)$ se obtiene derivando la ecuación anterior y es:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} &= 0 \\ \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

A partir de (2) se puede obtener la ecuación diferencial para $v_C(t)$, notando que $i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t) \therefore \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2}$ y hallando el voltaje en cada elemento de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_R = Ri &= RC \frac{dv_C}{dt} \\ v_L &= L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} \end{aligned} \quad (3)$$

y aplicando la segunda ley de Kirchoff al único anillo del circuito. Es decir,

$$\begin{aligned}
 E &= v_R + v_L + v_C \\
 E &= RC \frac{dv_C}{dt} + LC \frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C \\
 E &= \frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C
 \end{aligned} \tag{4}$$

Las condiciones iniciales para resolver (2) se obtiene de la condición inicial y de evaluar (1) en $t = 0+$. Es decir,

$$i(0+) = I_{L0} = 0 \quad \frac{di}{dt}(0+) = \frac{E - V_{C0} - RI_{L0}}{L} = \frac{E}{L} \tag{5}$$

Las raíces de la ecuación característica para la solución a la homogénea [y solución total ya que el segundo miembro es nulo] son

$$LD^2 + RD + \frac{1}{C} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ D_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{array} \right. \tag{6}$$

Se pueden considerar los siguientes casos:

1. Raíces reales diferente cuando $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} > 0$

Nótese que, en el plano complejo, dichas raíces se ubican sobre el eje real y que la más cercana al eje imaginario es la predominante (la que más demora en desvanecerse, ya que ambas raíces son negativas.)

En este caso la solución de (2) es de la forma:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= K_1 e^{D_1 t} + K_2 e^{D_2 t} \\
 \frac{di(t)}{dt} &= K_1 D_1 e^{D_1 t} + K_2 D_2 e^{D_2 t}
 \end{aligned} \tag{7}$$

donde las constantes K_1 y K_2 se evalúan a partir de las condiciones iniciales (5). Es decir,

$$\begin{aligned}
K_1 + K_2 &= 0 & K_2 &= -K_1 \\
K_1(D_1 - D_2) &= \frac{E}{L} \\
K_1 &= \frac{E}{L(D_1 - D_2)} \\
i(t) &= \frac{E}{L(D_1 - D_2)} (e^{D_1 t} - e^{D_2 t}) \quad (8)
\end{aligned}$$

Para los parámetros de la Tabla 3, caso 3, con $E = 5 V$, se obtienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
D_1 &= -2,4025 & D_2 &= -378,40 & K_1 &= 2,6596 \times 10^{-3} \\
i(t) &= 2,6596 \times 10^{-3} (e^{-2,4025 t} - e^{-378,40 t}) \quad (9)
\end{aligned}$$

Nótese que en este caso se tienen dos constantes de tiempo, a saber:

$$T_1 = \frac{1}{2,4025} = 0,41623 \text{ s} \quad T_2 = \frac{1}{378,4} = 2,6427 \times 10^{-3} \text{ s} \quad (10)$$

razón por la cual el tiempo de simulación debe ser en cada semi-período $4 \max \{T_1, T_2\} = 1,6649 \text{ s}$.

La gráfica para $v_C(t)$ se muestra en la Figura 1.

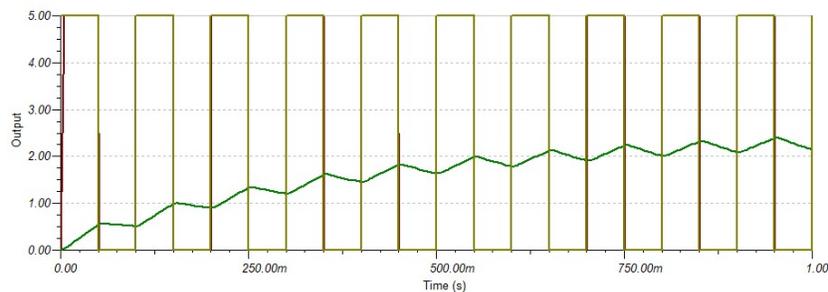


Figura 1 Respuesta $v_C(t)$ amortiguada del circuito R-L-C serie, con raíces reales diferentes.

2. Raíces reales repetidas cuando $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$ en cuyo caso la solución de (2) es de la forma

$$\begin{aligned}
i(t) &= (K_1 + K_2 t) e^{D_1 t} \\
\frac{di(t)}{dt} &= (K_1 + K_2 t) D_1 e^{D_1 t} + K_2 e^{D_1 t} \quad (11)
\end{aligned}$$

donde $D_1 = -\frac{R}{2L}$

Aplicando a (11) las condiciones iniciales (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} i(0+) &= K_1 = 0 \\ \frac{di}{dt}(0+) &= \frac{E}{L} = K_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Reemplazando (12) en (11), se obtiene:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t} \quad (13)$$

Para los parámetros de la Tabla 3, caso 1, con $E = 5V$, se obtiene:

$$\begin{aligned} D_1 = D_2 &= -\frac{R}{2L} = -407,73 \\ i(t) &= 24,938 t e^{-407,73t} \quad \forall t \geq 0+ \end{aligned} \quad (14)$$

De (14) se puede obtener $v_C(t)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{0+}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{0+}^t \frac{E}{L} \tau e^{D_1 \tau} d\tau \\ &= -\frac{2E}{RC} e^{D_1 t} - \frac{4EL}{R^2 C} (e^{D_1 t} - 1) \\ &= -2038,7 e^{-407,73t} - 5 (e^{-407,73t} - 1) \quad \forall t \geq 0+ \end{aligned} \quad (15)$$

donde se ha supuesto que $v_C(0+) = 0$.

La gráfica de carga y descarga de $v_C(t)$ se muestra en la Figura 2.

3. Raíces complejas conjugados cuando $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} < 0$ en cuyo caso la solución de (2) es de la forma

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{\alpha t} (K_1 \text{Sen } \beta t + K_2 \text{Cos } \beta t) \\ \frac{di}{dt} &= \alpha e^{\alpha t} (K_1 \text{Sen } \beta t + K_2 \text{Cos } \beta t) + e^{\alpha t} \beta (K_1 \text{Cos } \beta t - K_2 \text{Sen } \beta t) \end{aligned} \quad (16)$$

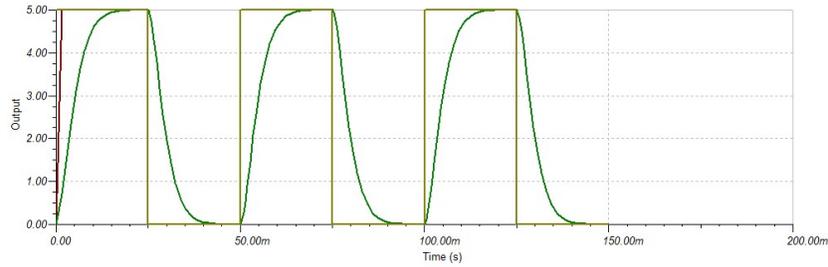


Figura 2 Carga y descarga del capacitor en el caso de raiz repetida de multiplicidad 2, en el circuito R-L-C serie

$$\text{donde } \alpha = -\frac{R}{2L} \text{ y } \beta = \left| \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right|.$$

Aplicando a (16) las condiciones iniciales (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} K_2 &= 0 \\ \beta K_1 &= \frac{E}{L} \\ i(t) &= \frac{E}{L\beta} e^{\alpha t} \text{Sen}\beta t \end{aligned} \quad (17)$$

Del resultado (17) se puede obtener $v_C(t)$

$$\begin{aligned} v_C(t) &= \frac{1}{C} \int_{0+}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{E}{LC\beta} \int_{0+}^t e^{\alpha\tau} \text{Sen}\beta\tau d\tau \\ &= \frac{E}{LC\beta} \left[\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha^2 + \beta^2} (-\beta \text{Cos}\beta\tau + \alpha \text{Sen}\beta\tau) \right]_{0+}^t \quad \forall t \geq 0+ \\ &= \frac{E}{LC\beta} \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (-\beta \text{Cos}\beta t + \alpha \text{Sen}\beta t) - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} (-\beta) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Para los valores de la Tabla 3, caso 2, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= -288,9 \\
 \beta &= 7779,6 \\
 \frac{E}{LC(\alpha^2 + \beta^2)} &= 5,0 \\
 \frac{E\alpha}{LC\beta(\alpha^2 + \beta^2)} &= -0,18568 \\
 v_C(t) &= (-5,0\cos 7779,6t - 0,18568\text{Sen } 7779,6t)e^{-288,9t} + 5
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 3.

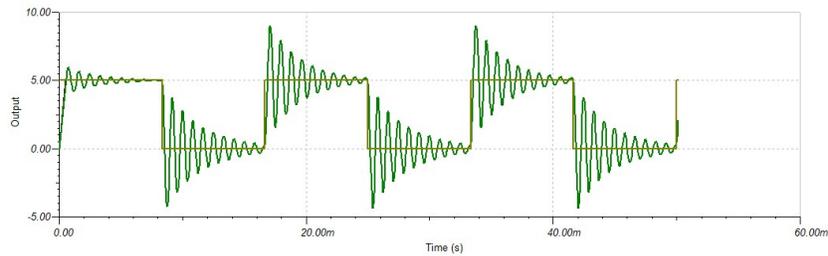


Figura 3 $v_C(t)$ para el circuito serie R-L-C, caso de raíces complejas conjugadas.

Problemas Preparatorios

- El circuito de la Figura 4 está inicialmente desenergizado. En un instante que se toma como referencia ($t = 0$) el interruptor S se coloca en la posición a. Determinar en función de E , R y C :
 - $i_R(t)$, $v_R(t)$ y $v_C(t)$;
 - Las respuestas del estado estacionario $i_{R_{ss}} = I$, $v_{R_{ss}} = V_R$, $v_{C_{ss}} = V_C$ y la constante de tiempo τ ;
 - Una expresión para el instante de tiempo t_1 para el cual v_c alcanza el 90% de su valor final, es decir, $v_c(t_1) = 0,9V_C$;
 - Una expresión para el instante de tiempo t_2 para el cual $v_R(t_2) = v_c(t_2)$;
- Para los siguientes valores en la Figura 4: $R = 82\text{ k}\Omega$, $C = 220\text{ }\mu\text{F}$, $E = 12\text{ V}$, realizar gráficas de v_R , i_R y v_c , eligiendo escalas apropiadas.
- Después de que el circuito de la Figura 4 ha alcanzado el estado estacionario con el interruptor S en la posición a éste conmuta a la posición b. Tomando este instante como referencia ($t = 0$) hallar en función de E , R y C :

- (a) $i_R(t)$, $v_R(t)$ y $v_C(t)$;
- (b) Las respuestas del estado estacionario $i_{R_{ss}} = I$, $v_{R_{ss}} = V_R$, $v_{C_{ss}} = V_C$ y la constante de tiempo τ ;
- (c) Una expresión para el instante de tiempo t_1 para el cual v_C alcanza el 90% de su valor final, es decir, $v_C(t_1) = 0,9V_C$;
- (d) Una expresión para el instante de tiempo t_2 para el cual $v_R(t_2) = v_C(t_2)$;
4. Para los siguientes valores en la Figura 4: $R = 82\text{ k}\Omega$, $C = 220\text{ }\mu\text{F}$, $E = 12\text{ V}$, realizar gráficas de v_R , i_R y v_C , eligiendo escalas apropiadas.
5. Para la forma de onda de onda y los circuitos mostrados en la Figura 5 obtener $v_C(t)$ e $i_L(t)$ utilizando los valores de la Tabla 1 para el circuito R - C y los de la Tabla 2 para el circuito R - L . Note que $v(t)$ simula la acción del interruptor S en la Figura 4.

Frecuencia (Hz)	R (k Ω)	C (μF)
12.5	82	0.1
12.5	120	0.1
25	47	0.1
25	6.8	1
25	3.9	1

Tabla 1

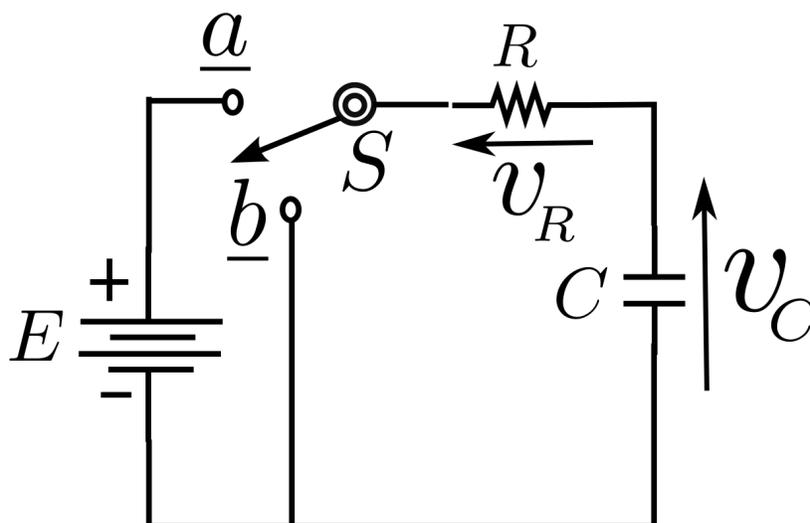


Figura 4

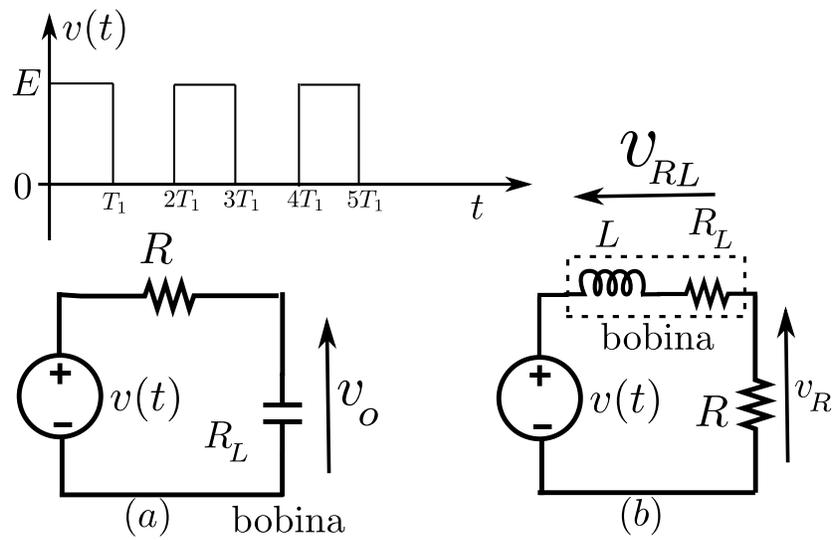


Figura 5

Frecuencia (kHz)	R (k Ω)	L (H)	R_L (Ω)
4	6.8	0.2005	144.2
25	39	0.2005	144.2

Tabla 2

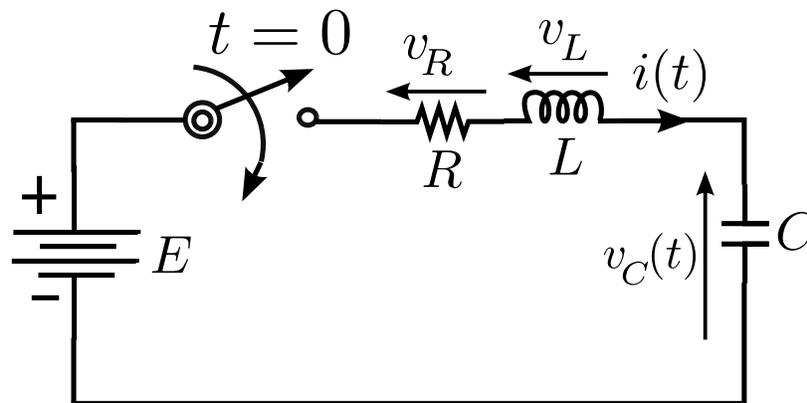


Figura 6

6. (a) En el circuito R - L - C serie excitado con fuente de voltaje constante E de la Figura 6 el interruptor se cierra cuando el estado energético es nulo.

Hallar en función de E , R , L y C :

- i La ecuación diferencial para $i(t)$, las raíces de la ecuación característica e $i(t)$;
 - ii La ecuación diferencial para $v_c(t)$, las raíces de la ecuación característica y $v_c(t)$;
- (b) Para cada conjunto de valores de la Tabla 3 y la señal de la Figura 5 con amplitud $E = 5 V$ obtener una expresión para $i(t)$ y graficarla.
- (c) Clasificar cada una de las respuestas de entre amortiguada, críticamente amortiguada y sobre amortiguada.

Caso	Frecuencia (Hz)	R (Ω)	R_L (Ω)	L (H)	C (μF)
1	20	19.303	144.2	0.2005	30
2	60	1000	1889	5	0.0033
3	10	15	1889	5	220

Tabla 3

Práctica

1. Montar el circuito de la Figura 4 con los valores del problema 2. Antes de colocar el interruptor en la posición a descargar el capacitor mediante un corto circuito entre sus terminales. Utilizando un cronómetro y un osciloscopio (o un voltímetro) medir el voltaje en el capacitor en diferentes instantes de tiempo y determinar experimentalmente:
 - (a) La constante de tiempo del circuito;
 - (b) El valor de t para el cual v_c es el 90 % de su valor final;
 - (c) El valor de t para el cual v_R es igual a v_c ;
 - (d) Las respuestas del estado estacionario.

Repetir (a), (b), (c) y (d) cuando el interruptor se pasa a la posición b después de que se ha alcanzado el estado estacionario con el interruptor en lo posición a. Repetir para $R = 8,2 k\Omega$.

2. Montar el circuito de la Figura 5(a) con cada conjunto de valores de la Tabla 1. Utilizando los cursores del osciloscopio realizar mediciones en las formas de onda mostradas en él. Comparar las respuestas obtenidas experimentalmente con las predichas teóricamente en el pre-informe.

3. Montar el circuito de la Figura 5(b) con cada conjunto de valores de la Tabla 2. Utilizando los cursores del osciloscopio realizar mediciones en las formas de onda mostradas en él. Comparar las respuestas obtenidas experimentalmente con las predichas teóricamente en el pre-informe.
4. Montar el circuito de la Figura 6 pero reemplazar la fuente de voltaje de valor constante y el interruptor por la señal de onda cuadrada de la Figura 5 con amplitud $E = 5V$ con cada conjunto de valores indicados en la tabla 3. Para cada caso observar en el osciloscopio $v_c(t)$ y $v_R(t)$. Utilizando los cursores del osciloscopio realizar las siguientes mediciones de cada una de las ondas observadas en él:
 - (a) la frecuencia f_n . Comparar $\omega_n = 2\pi f_n$ con la parte imaginaria de las raíces de la ecuación característica.
 - (b) Los valores picos consecutivos y los instantes en que ocurren para determinar el exponente de la envolvente que es de la forma Ke^{st} . Comparar s con la parte real de las raíces de la ecuación característica.

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

Programa de Ingeniería Eléctrica

Sistemas trifásicos

Objetivos

1. Investigar las relaciones entre voltajes y entre corrientes en sistemas trifásicos para las conexiones trifásicas (Y o Δ).
2. Estudiar las ventajas que ofrecen los sistemas de energía trifásicos con respecto a los monofásicos.
3. Implementar circuitos trifásicos cuyo comportamiento sea similar al de los sistemas de transmisión y distribución de energía reales.

Teoría

Ventajas de los sistemas trifásicos

En general, la ubicación geográfica de los lugares donde es posible transformar otras formas de energía (casi siempre hidráulica o térmica) en energía eléctrica son muy distantes (decenas de kilómetros) de los centros de demanda o consumo, razón por la cual se requieren los sistemas de transmisión y los transformadores para transportar grandes cantidades de energía a través de grandes distancias con mínimas pérdidas.

La Figura 1 muestra tres circuitos monofásicos independientes donde las fuentes independientes de voltaje representan la generación, las impedancias \mathbf{Z} la carga (conjunto de aparatos conectados a la red que demandan energía de ella), los elementos resistivos R simulan el hecho de que los cables que transportan la energía sufren un calentamiento cuando a través de ellos circula una corriente asociado a la cual se produce un campo magnético que almacena energía lo cual se modelan matemáticamente mediante los elementos inductivos X_L . Las pérdidas activas del sistema de transmisión P_L se calculan de la siguiente manera:

$$P_L = 2R(|\mathbf{I}_a|^2 + |\mathbf{I}_b|^2 + |\mathbf{I}_c|^2) \quad (1)$$

Si las tres fuentes sinusoidales independientes de voltaje monofásicas se sincronizaran de tal manera que su representación fasorial correspondieran a los voltajes de fase de una fuente trifásica, es decir,

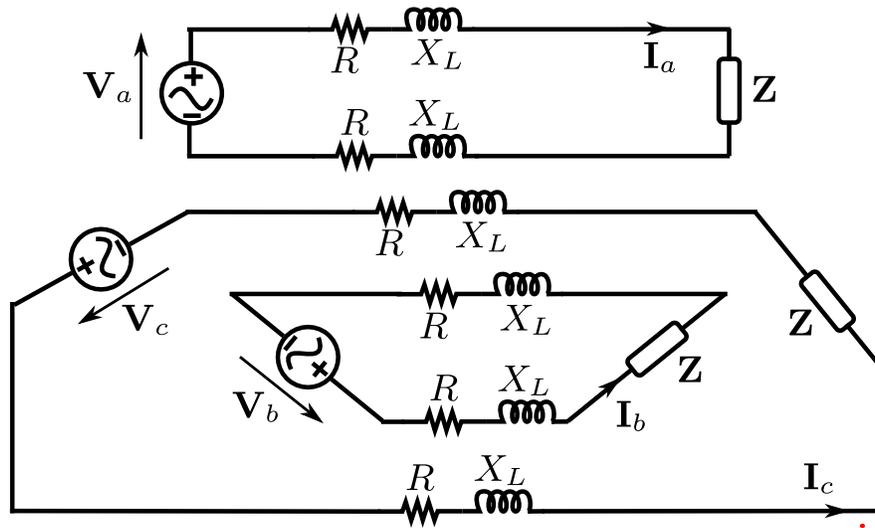


Figura 1 Tres sistemas monofásicos independientes

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= V_m \text{Sen } \omega t \Leftrightarrow \mathbf{V}_a = V_m \angle 0^\circ \\
 v_b(t) &= V_m \text{Sen}(\omega t - 120^\circ) \Leftrightarrow \mathbf{V}_b = V_m \angle -120^\circ \\
 v_c(t) &= V_m \text{Sen}(\omega t + 120^\circ) \Leftrightarrow \mathbf{V}_c = V_m \angle +120^\circ
 \end{aligned} \tag{2}$$

entonces debido a que tanto el modelo de circuito del sistema de transmisión como el de la carga de los tres sistemas monofásicos son idénticos, las corrientes también serían de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 i_a(t) &= I_m \text{Sen}(\omega t - \phi) \Leftrightarrow \mathbf{I}_a = I_m \angle -\phi^\circ \\
 i_b(t) &= I_m \text{Sen}(\omega t - 120^\circ - \phi) \Leftrightarrow \mathbf{I}_b = I_m \angle -120^\circ - \phi \\
 i_c(t) &= I_m \text{Sen}(\omega t + 120^\circ - \phi) \Leftrightarrow \mathbf{I}_c = I_m \angle 120^\circ - \phi
 \end{aligned} \tag{3}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}
 v_a(t) + v_b(t) + v_c(t) &= 0 \forall t \Leftrightarrow \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0 \\
 i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) &= 0 \forall t \Leftrightarrow \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

El anterior resultado nos permite concluir que si se unieran los terminales negativos de las fuentes de voltaje en un neutro N y las impedancias \mathbf{Z} en otro neutro N' , como se muestra en la Figura 2, la corriente \mathbf{I}_n a través de la impedancia equivalente de los tres conductores de retorno conectados en paralelo sería nula, es decir,

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_c = 0 \tag{5}$$

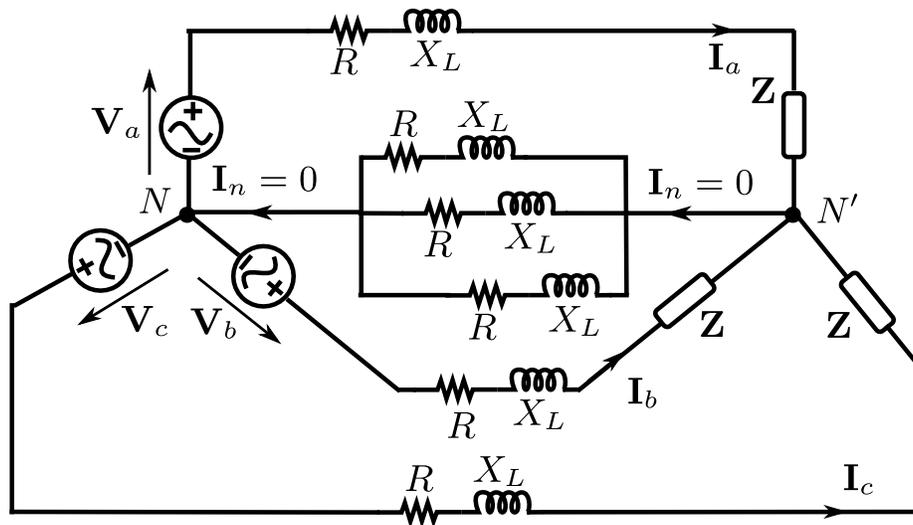


Figura 2 Sistema trifásico balanceado que cumple la misma función de los tres monofásicos de la Figura 1.

lo cual implica que la diferencia de potencial $V_{NN'} = 0$, condición que se sigue cumpliendo cuando se reemplazan por un circuito abierto, como se muestra en la Figura 3, cuyas pérdidas activas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$P_L = R(|\mathbf{I}_a|^2 + |\mathbf{I}_b|^2 + |\mathbf{I}_c|^2) \quad (6)$$

En conclusión: Los sistemas trifásicos ofrecen la ventaja con respecto a 3 circuitos monofásicos independientes de reducir a la mitad las pérdidas en el sistema de transmisión y el número de conductores a la mitad para cumplir la misma función de suministrar energía eléctrica en lugares muy distantes de las ubicaciones donde es posible generarla mediante su transformación a partir de otras formas de energía.

Relaciones entre voltajes de línea y de fase y entre corrientes de línea y de fase para sistemas trifásicos

Fuente de voltaje sinusoidal trifásica

En el diagrama fasorial de la Figura 4 se supone una secuencia de fases $a-b-c$, es decir el orden en que se ven pasar cuando ellos giran en el sentido positivo trigonométrico. La secuencia de los voltajes de línea es $\mathbf{V}_{ab}-\mathbf{V}_{bc}-\mathbf{V}_{ca}$, cada uno de los cuales adelanta 30° , respectivamente a \mathbf{V}_a , \mathbf{V}_b y \mathbf{V}_c .

Recuérdese que un diagrama fasorial se puede rotar en cualquier sentido cualquier número de grados por cuanto cualquiera de ellos lo único que muestra, además de las magnitudes de cada corriente o voltaje, los desplazamientos angulares (diferencias de fase) entre unas y otras. Así por ejemplo, la Figura 5 muestra el mismo diagrama fasorial

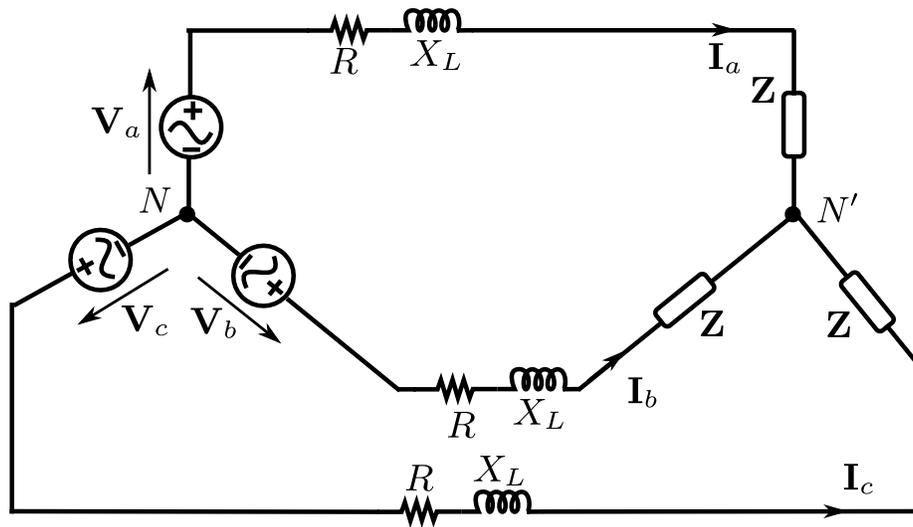


Figura 3 Sistema trifásico sustitutivo de los tres monofásicos de la Figura 1 en el que se han reducido tanto las pérdidas como el número de conductores en la mitad.

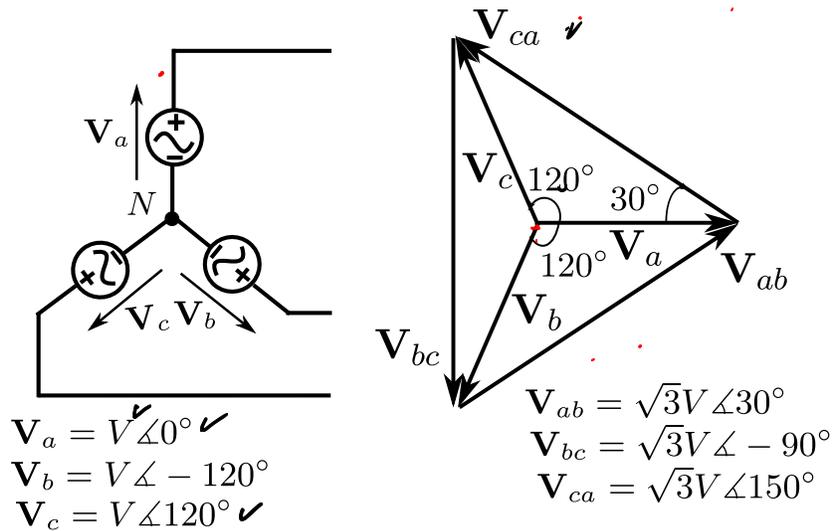


Figura 4 Diagrama fasorial de voltajes en una fuente independiente de voltaje sinusoidal trifásica.

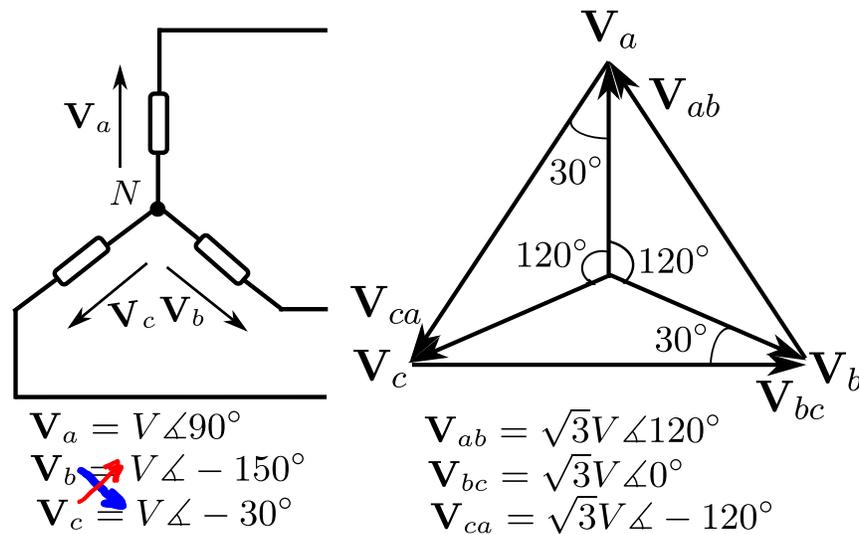


Figura 5 Diagrama fasorial equivalente al de la Figura 4.

de la Figura 4 rotado 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj y ambos son equivalentes.

Diagramas Fasoriales de las cargas en Δ

En la Figura 6 se supone que $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca}$ y que la carga está alimentada por una fuente trifásica. Cuando este no es el caso:

1. El diagrama fasorial de voltajes se modifica a uno en el que el “neutro ficticio” N se desplaza internamente, ya que los voltajes de línea se mantienen por cuanto dependen de la fuente trifásica.
2. El diagrama fasorial de corrientes debe tener en cuenta el hecho de que para cada impedancia de la Δ el ángulo de fase de la corriente a través de ella cambia a valores ϕ_{ab} , ϕ_{bc} y ϕ_{ca} .

Nótese que en condiciones balanceadas:

1. las corrientes de línea I_a , I_b e I_c tienen magnitud $\sqrt{3}$ veces la de fase y se atrasan¹ 30° con respecto a las de fase I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} , respectivamente. En efecto:

¹Se supone que el diagrama fasorial rota en el sentido positivo trigonométrico.

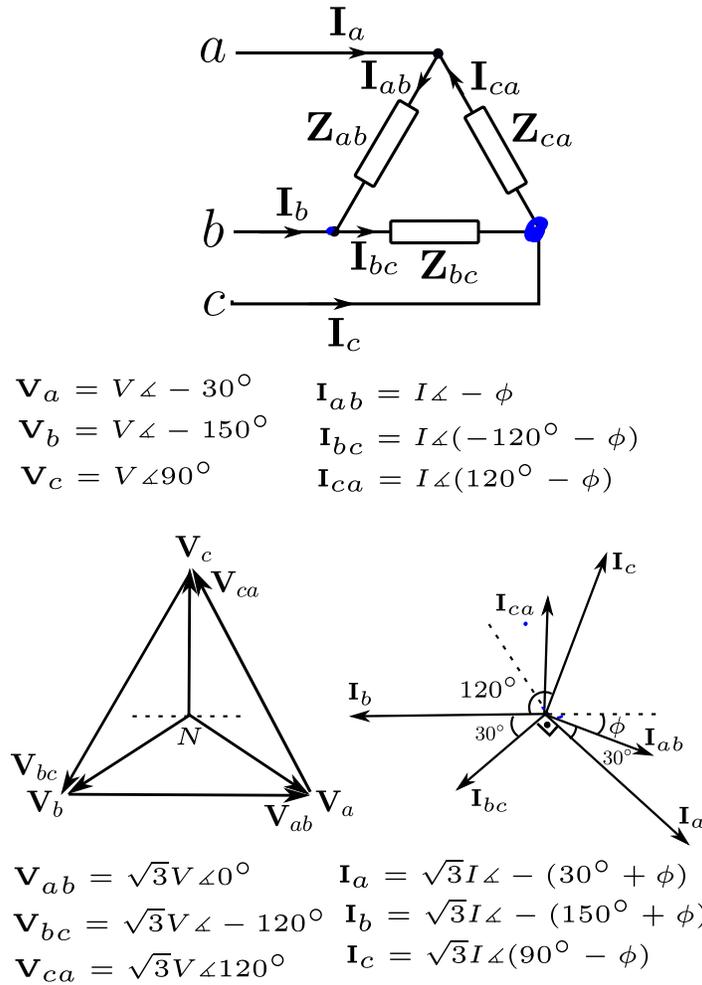


Figura 6 Diagramas fasoriales de corrientes y voltajes para una carga trifásica balanceada conectada en triángulo (Δ)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a &= \mathbf{I}_{ab} - \mathbf{I}_{ca} = Ie^{-j\phi} - Ie^{j120^\circ} e^{-j\phi} = Ie^{-j\phi} + Ie^{-j60^\circ} e^{-\phi} \\ &= \sqrt{3}Ie^{-j30^\circ} e^{-j\phi} \\ \mathbf{I}_b &= \mathbf{I}_{bc} - \mathbf{I}_{ab} = Ie^{-j120^\circ} e^{-j\phi} - Ie^{-j\phi} = Ie^{-j120^\circ} e^{-j\phi} + Ie^{-j180^\circ} e^{-j\phi} \\ &= \sqrt{3}Ie^{-j150^\circ} e^{-j\phi} \\ \mathbf{I}_c &= \mathbf{I}_{ca} - \mathbf{I}_{bc} = Ie^{j120^\circ} e^{-j\phi} - Ie^{-j120^\circ} e^{-j\phi} = Ie^{j120^\circ} e^{-j\phi} + Ie^{j60^\circ} e^{-j\phi} \\ &= \sqrt{3}Ie^{j90^\circ} e^{-j\phi} \end{aligned} \quad (7)$$

2. Los voltajes entre líneas \mathbf{V}_{ab} , \mathbf{V}_{bc} y \mathbf{V}_{ca} son iguales a los de fase multiplicados

por $\sqrt{3}$ y adelantan 30° a las voltajes de fase (“ficticios”) \mathbf{V}_a , \mathbf{V}_b y \mathbf{V}_c , respectivamente. En efecto:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{ab} &= \mathbf{V}_a - \mathbf{V}_b = Ve^{-j30^\circ} - Ve^{-j150^\circ} = Ve^{-j30^\circ} + Ve^{j30^\circ} \\ &= \sqrt{3}Ve^{j0^\circ} \\ \mathbf{V}_{bc} &= \mathbf{V}_b - \mathbf{V}_c = Ve^{-j150^\circ} - Ve^{j90^\circ} = Ve^{-j150^\circ} + Ve^{-j90^\circ} \\ &= \sqrt{3}Ve^{-j120^\circ} \\ \mathbf{V}_{ca} &= \mathbf{V}_c - \mathbf{V}_a = Ve^{j90^\circ} - Ve^{-j30^\circ} = Ve^{j90^\circ} + Ve^{j150^\circ} \\ &= \sqrt{3}Ve^{j120^\circ}\end{aligned}\tag{8}$$

En cada una de las ecuaciones (1) y (8) se ha tenido en cuenta que el negativo de un phasor se obtiene sumándole o restándole 180° a su ángulo de fase.

Diagramas Fasoriales de las cargas en estrella Y

La Figura 7 muestra los diagramas fasoriales de voltajes y corrientes para una carga trifásica balanceada conectada en estrella. Nótese que si no se cumple la condición de balance, es decir, cuando \mathbf{Z}_a , \mathbf{Z}_b y \mathbf{Z}_c , no son idénticas, se desbalancean tanto las corrientes como como los voltajes de fase, pero siempre manteniendo el equilibrio de los voltajes de línea los cuales dependen de la fuente independiente de voltaje trifásica, es decir, siempre se cumple que \mathbf{V}_{ab} , \mathbf{V}_{bc} y \mathbf{V}_{ca} constituyen un conjunto balanceado de magnitud igual y desplazamientos angulares de 120° entre ellos.

Problemas Preparatorios

1. Exprese en forma compleja las tensiones y corrientes de línea y de fase en una estrella equilibrada formada por impedancias de $21\ \Omega$ y factor de potencia 0,8 inductivo que está alimentada por una red de 400 V. Usar la tensión \mathbf{V}_{ab} como referencia.
2. Exprese en forma compleja las tensiones y corrientes de línea y de fase en un triángulo que está alimentado por una red de 400 V 60 Hz. Cada fase de la Δ es una impedancia formada por un resistor de $14,5\ \Omega$ en serie con un inductor de $17,94\ mH$ Usar la tensión \mathbf{V}_{bc} como referencia.
3. Exprese en forma compleja las tensiones y corrientes de línea y de fase en una estrella equilibrada formada por impedancias de $\mathbf{Z} = 10\angle -20^\circ$ y que está alimentada por una red de 693 V. Usar \mathbf{V}_{ca} como referencia.

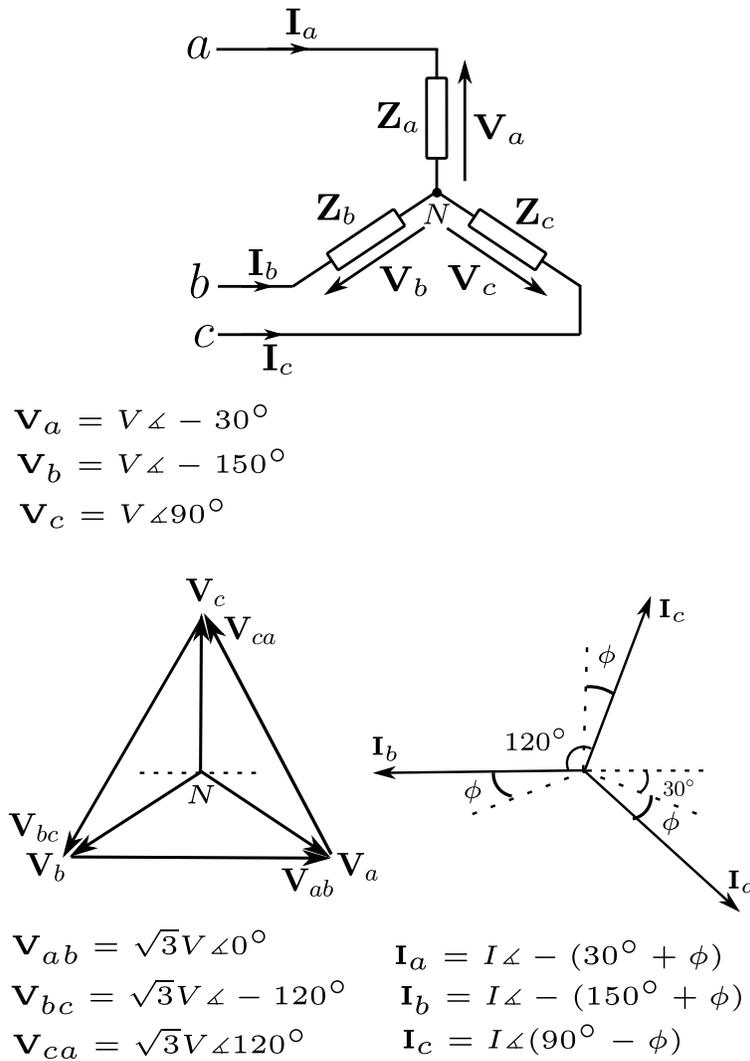


Figura 7 Diagramas fasoriales de voltajes y corrientes en una carga trifásica balanceada conectada en estrella (Y)

4. Seleccionar uno de los circuitos mostrados en la Figura 8 y hallar las corrientes y voltajes en cada uno de los elementos suponiendo una secuencia de fases R - S - T . Para los siguientes valores $R = 10\Omega$, $C = 10\mu F$ y bombillas incandescentes de $100w$ a $220V$. Tomar como referencia \mathbf{V}_{RS} .

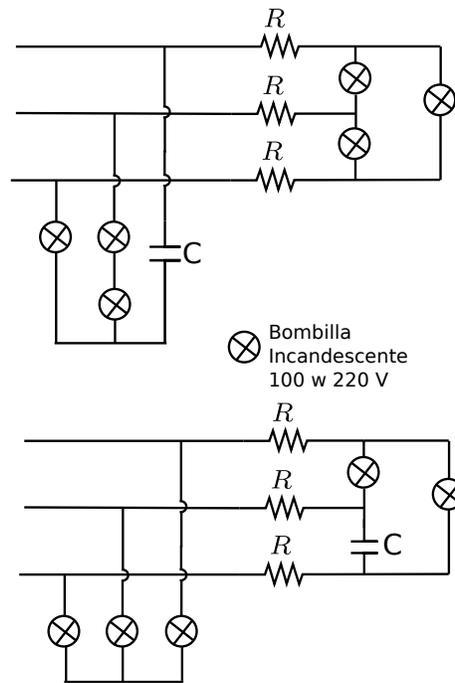


Figura 8 Circuitos trifásicos con carga balanceada y desbalanceada

Práctica

Montar el circuito de la Figura 8 NO resuelto en el preinforme y tomar lecturas de voltajes y corrientes **FASORIALES** en cada uno de los elementos.

Medir la potencia entregada por la fuente.

Verificar experimentalmente el principio de conservación de la potencia.

CIRCUITOS INDUCTIVOS IMPROPIOS

OBJETIVO

Estudiar el comportamiento de circuitos que cuando hay cambios de posición o de estado de los interruptores contienen cortes o nodos formados exclusivamente por inductores, lo cual implica un cambio brusco en las corrientes a través de ellos.

PROBLEMAS PREPARATORIOS

- Después de que el circuito de la Figura 1 alcanza el estado estacionario con el interruptor K cerrado, éste se abre instantáneamente. Tomando este instante como referencia, obtener $i(t) \forall t \geq 0$ y la constante de tiempo del circuito conmutado τ_1 . Nótese que el circuito conmutado es impropio y que $i_{L1}(0^-) \neq i_{L2}(0^-)$ y que $i_{L1}(0^+) = i_{L2}(0^+)$

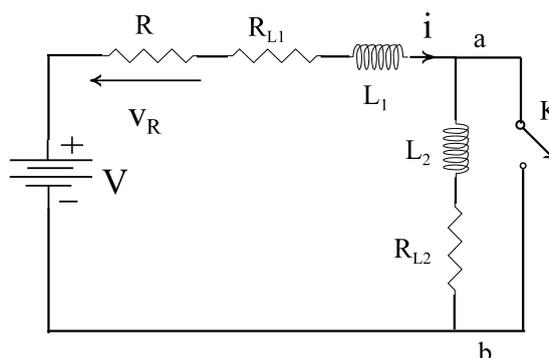


FIGURA 1

- Después de que el circuito de la Figura 1 alcanza el estado estacionario con el interruptor K abierto, éste se cierra instantáneamente. Tomando este instante como referencia, obtener $i(t) \forall t \geq 0$ y la constante de tiempo del circuito conmutado τ_2 del circuito formado por los elementos V, R, R_{L1} , L_1 , R_{L2} , L_2 . Obtener también la constante de tiempo τ_3 del circuito formado por L_2 y R_{L2}
- Si esta apertura y cierre del interruptor K en la Figura 1 se sucede repetitivamente y en forma periódica cada τ_x segundos donde $\tau_x \geq 4 \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ de modo que antes de ocurrir cada cambio en el nivel de voltaje el circuito ya haya alcanzado el estado estacionario, obtener $i(t)$ y $v_R(t)$.
- Realizar gráficas de las respuestas obtenidas en 3 para los siguiente valores:

$$\begin{aligned}
 V &= 10V & R &= 100\Omega & L_1 &= 560mH \\
 R_{L1} &= 4\Omega & L_2 &= 280mH & R_{L2} &= 2\Omega
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

PRÁCTICA

1. Con los valores de la ecuación (1) montar el circuito de la Figura 2. Utilizar un transistor 2N3053, 2N1893 o 2N3904 y $V_p = 5V$ $R_B = 5k\Omega$. Observar y tomar lecturas de $v_R(t)$ con el osciloscopio. La Red encerrada en línea de trazos discontinuos simula la acción del interruptor en la Figura 1. Variar el período de $v(t)$ y observar el comportamiento de $v_R(t)$

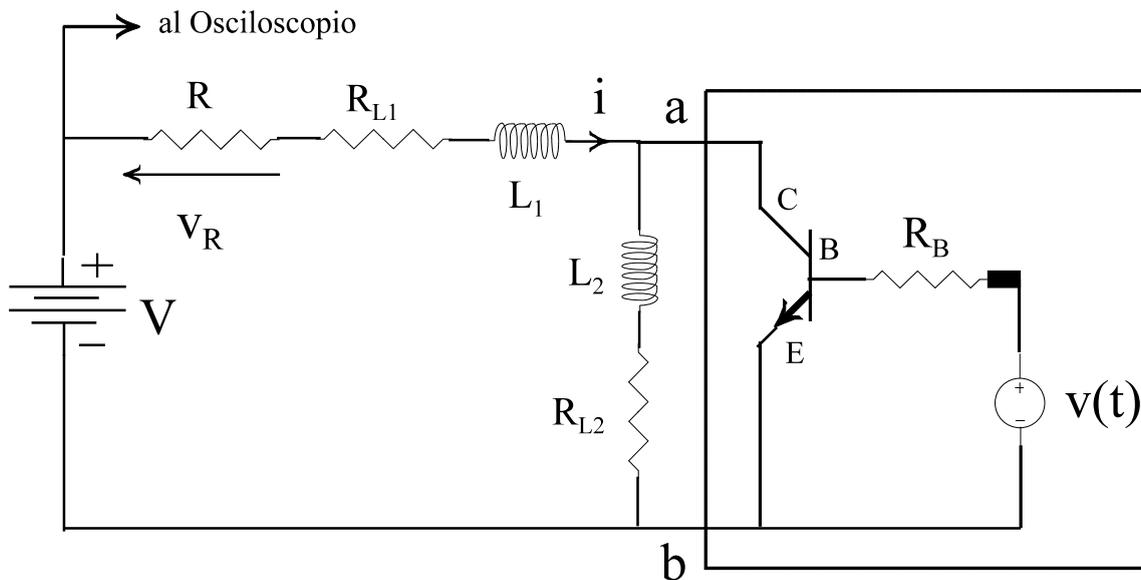
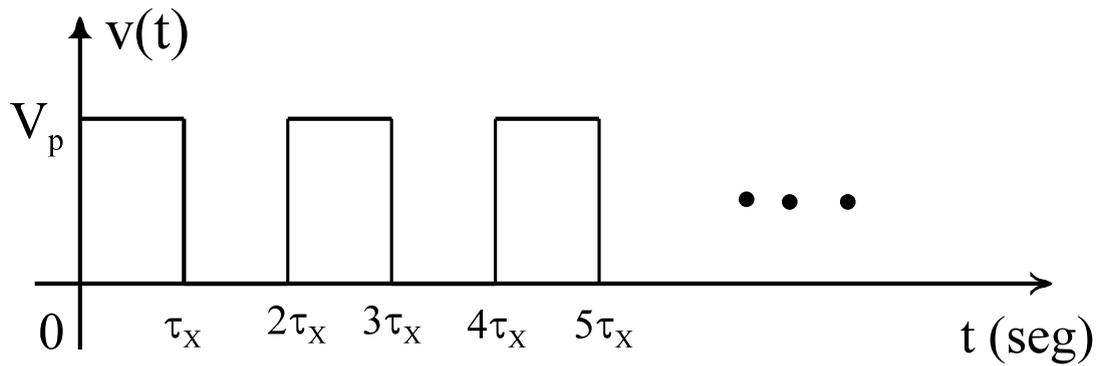


FIGURA 2

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Ingeniería Eléctrica

LABORATORIO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS I

TEOREMAS DE TELLEGEN

OBJETIVOS

- ◆ Verificar experimentalmente cada uno de los teoremas de Tellegen en circuitos excitados con fuentes de voltaje de valor constante (DC) y con fuentes sinusoidales.
- ◆ Aprender a conectar tanto el vatímetro análogo como el digital.

PROBLEMAS PREPARATORIOS

- 1 Obtener la corriente y el voltaje a través de cada uno de los elementos de los circuitos de las Figuras 1 y 2. Suponer un gráfico orientado con la numeración y los sentidos de referencia indicados. Hallar la potencia **“ABSORBIDA”** por cada uno de ellos.

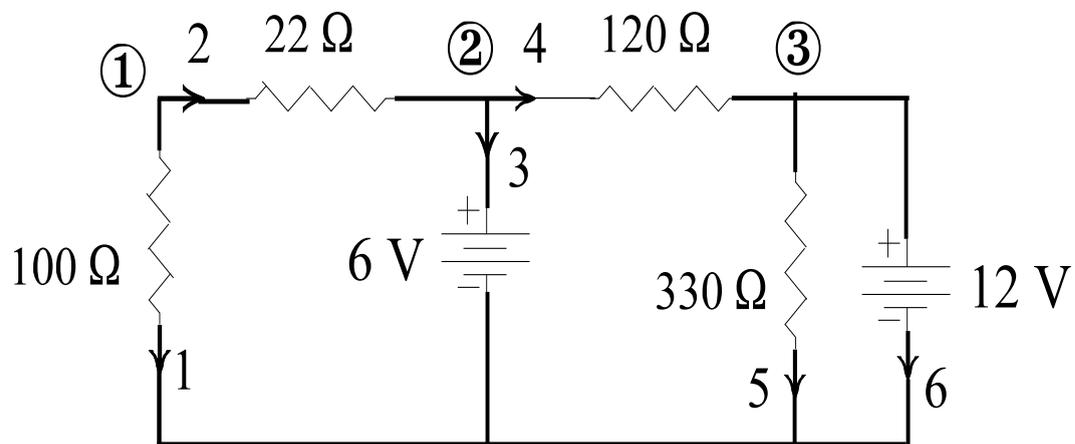


FIGURA 1

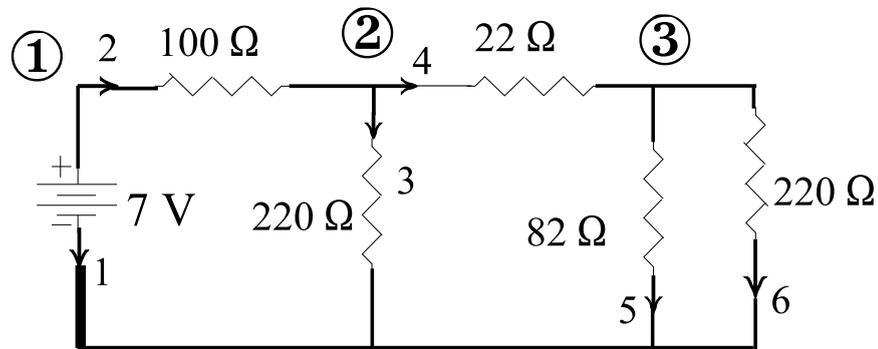


FIGURA 2

- 2 Con los resultados obtenidos en el problema anterior verificar que

$$\sum_{k=1}^6 v_k i_k = 0 \quad \sum_{k=1}^6 \hat{v}_k \hat{i}_k = 0 \quad \sum_{k=1}^6 v_k \hat{i}_k = 0 \quad \sum_{k=1}^6 \hat{v}_k i_k = 0 \quad (1)$$

Donde v_k e i_k son los voltajes y corrientes de los elementos del circuito de la Figura 1(original) y \hat{v}_k e \hat{i}_k son los voltajes y corrientes de los elementos del circuito de la Figura 2 (adjunto).

- 3 Obtener la corriente y el voltaje en el estado estacionario en función del tiempo a través de cada uno de los elementos de los circuitos de las Figuras 3 y 4. Suponer un gráfico orientado con la numeración y los sentidos de referencia indicados. Hallar la potencia **“ABSORBIDA”** por cada uno de ellos. Obtener los fasores que representan cada una de las respuestas.
- 4 Con los resultados obtenidos en el problema anterior verificar que

$$\sum_{k=1}^6 v_k i_k = 0 \quad \sum_{k=1}^6 \hat{v}_k \hat{i}_k = 0 \quad \sum_{k=1}^6 v_k \hat{i}_k = 0 \quad \sum_{k=1}^6 \hat{v}_k i_k = 0 \quad \forall t \quad (2)$$

Donde v_k e i_k son los voltajes y corrientes de los elementos del circuito de la Figura 1(original) y \hat{v}_k e \hat{i}_k son los voltajes y corrientes de los elementos del

circuito de la Figura 2 (adjunto).

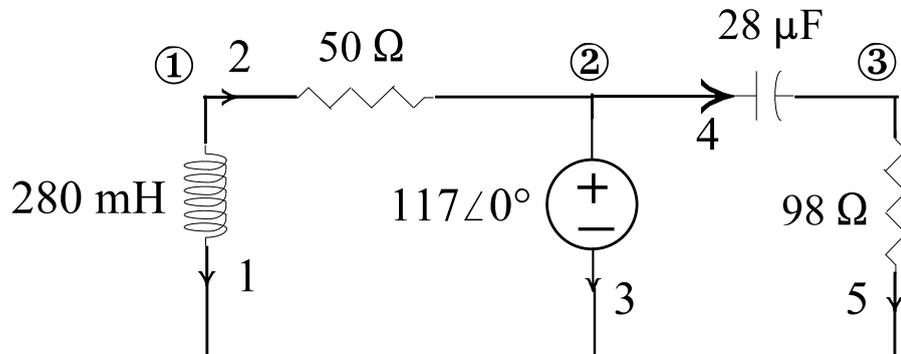


FIGURA 3

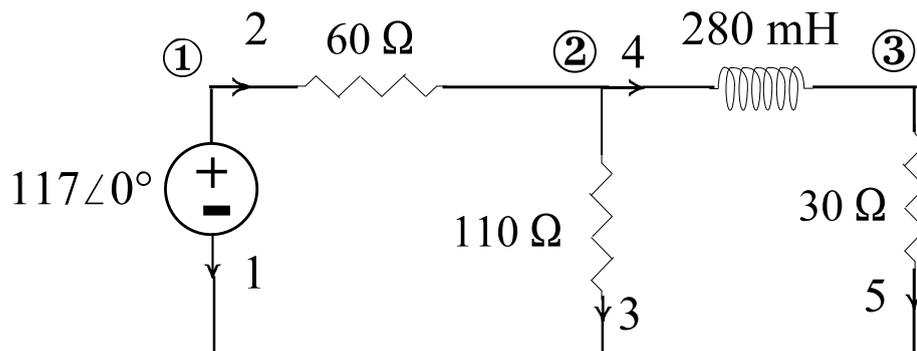


FIGURA 4

- 5 Suponer una puerta a través de la cual hay una diferencia de potencial $v(t) = V_m \text{Sen} \omega t$ y una corriente definida en el sentido de la caída de potencial $i(t) = I_m \text{Sen}(\omega t + \phi)$. Demostrar que la **potencia instantánea** absorbida por dicha puerta $p(t) = v(t) i(t)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$p(t) = p_a(t) + p_q(t)$$

$$p_a(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos \phi (1 - \cos 2\omega t)$$

$$p_q(t) = -\frac{V_m I_m}{2} \sin \phi \sin 2\omega t \quad \omega = 2\pi f$$

donde $p_a(t)$ se denomina **potencia activa instantánea** y $p_q(t)$ la **potencia reactiva instantánea**

Nótese que

$$p_a(t) \geq 0 \quad \forall t \quad P = \overline{p_a(t)} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right) \cos \phi = V_{ef} I_{ef} \cos \phi$$

$$Q = p_q(t) \Big|_{\max} = \left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right) \sin \phi = V_{ef} I_{ef} \sin \phi \quad (3)$$

donde $\overline{(*)}$ es el valor promedio de $(*)$ y $(*) \Big|_{\max}$ es el valor máximo de $(*)$

Obtener $S = VI^*$ donde V e I son los fasores que representan el voltaje y la corriente, respectivamente, a través de la puerta (definida la corriente en el sentido de la caída de potencial) y $()^*$ es el complejo conjugado de $()$. Comparar el valor promedio de $p_a(t)$ con $\text{Re}[S]$ donde $\text{Re}[]$ es la parte real de $[]$ y el valor máximo de $p_q(t)$ con $\text{Im}[S]$ donde $\text{Im}[]$ es la parte imaginaria de $[]$.

PRÁCTICA

- 1 El vatímetro análogo es un aparato de medida utilizado para tomar lecturas del valor promedio de la potencia activa instantánea absorbida por una puerta [P en la ecuación (3)]. Consta de:
 - a) un arrollamiento de alta impedancia (bobina de tensión) que se conecta en paralelo con la puerta cuyo consumo de potencia activa se desea medir.

- b) de una bobina de baja impedancia (amperimétrica) a la que se hace pasar la corriente que circula por la puerta.
- c) Los terminales marcados con \pm (uno de cada bobina) se deben conectar al mismo potencial.

- 2 La Figura 5 muestra la conexión del vatímetro digital en el que los terminales externos se identifican con “power” (potencia) y los centrales con “load” carga. x es la puerta, uno de cuyos terminales pertenece a la red N_A y el otro terminal a la red N_B , a la que se desea medir la potencia activa.

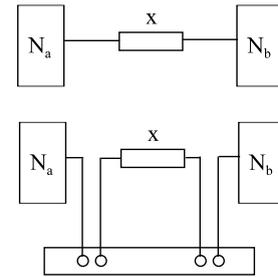


FIGURA 5

- 3 Montar simultáneamente los circuitos de las Figura 1 y 2 y tomar lecturas de voltajes y corrientes en cada elemento de ambos circuitos y verificar el cumplimiento de cada una de las ecuaciones (1).
- 4 Montar simultáneamente los circuitos de las Figura 3 y 4 conectando un interruptor termo-magnético (protección de sobre-corriente) inmediatamente después de la fuente.
- a) Para el circuito de la Figura 3 tomar como referencia el voltaje a través de la fuente independiente V_3 y mediante el osciloscopio determinar la diferencia de fase entre V_1 y V_3 , V_3 y V_5 , $-V_1$ y $-V_2$, $y - V_5$ y V_4 y a partir de estos valores y de las lecturas de las magnitudes de corriente y voltaje a través de cada elemento determinar el fasor que representa cada voltaje y cada corriente. Con estos valores verificar el cumplimiento del teorema de Tellegen tanto en el dominio del tiempo como en el fasorial.
 - a) Para el circuito de la Figura 4 tomar como referencia el voltaje a través de la fuente independiente V_1 y mediante el osciloscopio determinar la diferencia de fase entre V_1 y V_3 , V_3 y V_5 , $-V_1$ y $-V_2$, $y - V_5$ y V_4 y a partir de estos valores y de las lecturas de las magnitudes de corriente y voltaje a través de cada elemento determinar el fasor que representa cada voltaje y cada corriente. Con estos valores verificar el cumplimiento

del teorema de Tellegen tanto en el dominio del tiempo como en el fasorial.

- c) Con los valores obtenidos en a) y en b) verificar el cumplimiento de los teoremas cruzados de Tellegen.
- d) Medir la potencia activa a través de cada uno de los elementos de los circuitos de las figuras 3 y 4 y verificar que en cada uno se cumple la ley del equilibrio de potencia.