Universität Potsdam

Arithmetik und ihre Didaktik

Bruchstücke der Schulmathematik

Aspekte zu Brüchen

Mathematischer Begriff und Bruchzahlaspekte

Was sind Bruchzahlen überhaupt?

Abgesehen davon, dass wir sie als Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen definiert haben – diese mathematische Definition hilft uns erst einmal nicht weiter.

- Können wir Bruchzahlen als **Kardinalzahlen** auffassen?

  Nein: Keine Menge hat 534/23 Elemente.

- Können wir Bruchzahlen als **Ordinalzahlen** auffassen?

  Nein: Es gibt keinen nächsten Bruch nach 2/3.

Was sind geeignete Zahlaspekte für Bruchzahlen?

Fun fact: Zwischen zwei Brüchen gibt es immer noch (mindestens) einen weiteren – zum Beispiel den Mittelwert der beiden Brüche.

Begriffsklärung: Eine **Bruchzahl** kann durch verschiedene **Brüche** dargestellt werden. So bezeichnen die **verschiedenen Brüche** 3/4 und 6/8 die **gleiche Bruchzahl.**

Immer feiner: Messen mit Brüchen

Da zwischen zwei Bruchzahlen *p* und *q* immer noch eine weitere liegt, die zu beiden Zahlen den gleichen **Abstand** hat, eignen sich Brüche hervorragend zum immer genaueren Messen. Daraus ergibt sich der **Maßzahl-** oder **Größenaspekt**.

Kinder kennen diesen Aspekt schon aus ihren Alltagserfahrungen:

- 1/4 Liter Milch
- Anderthalb Kilometer,
- 3/4 Stunde
- ...

Jede Größe muss immer auf eine Einheit bezogen sein - der Urmeter, das Urkilogramm, ... und somit wird jeder Bruch eigentlich immer über zwei Größen beschrieben, die gemessene Größe und die Einheitsgröße.

Fun fact: Zwischen zwei Brüchen gibt es immer noch (mindestens) einen weiteren – zum Beispiel den Mittelwert der beiden Brüche.

Beschreibung einer Operation

So, wie eine Zahl als Multiplikations-Operator aufgefasst werden kann („das dreifache“), kann das Paar aus Zähler und Nenner als eine zusammengesetzte Operation aufgefasst werden, die sowohl Dividieren als auch Multiplizieren umfasst.

$$E \xrightarrow{\quad : n \quad} \frac{1}{n}E \xrightarrow{\quad \cdot z \quad} \frac{z}{n}E$$

Ausgangsgröße oder Einheit	Einheit in *n* gleichgroße Teile geteilt	Von diesen Teilen *z* Stück genommen

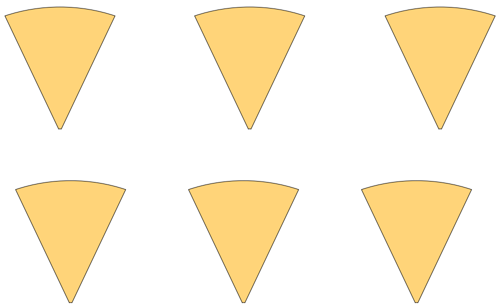
Daraus ergibt sich der **Operatoraspekt**.

Größenaspekt

Zählen. Quasi eine Anzahl.

Sehr ähnlich ist die Interpretation eines Bruches als eine bestimmte Anzahl z von Teilen, wobei jedes dieser Teile ein n-tel eines Ganzen ist.

Da es sich hier um eine Anzahl handelt, arbeiten wir doch fast kardinal und man bezeichnet dies als **Quasikardinalaspekt.**



Hier sieht man 6 Sechstel, oder?

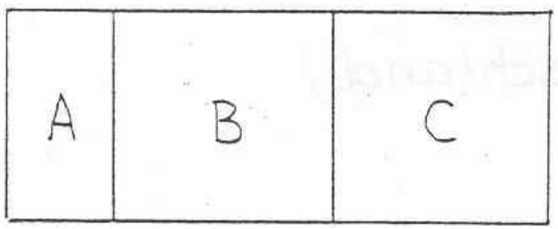
Größenaspekt

Operatoraspekt

(An)Teil eines Ganzen

Zunächst begrenzt hilfreich ist der **Anteilaspekt** – mit diesem kann man einen Anteil eines Ganzen beschreiben.

Diese Beschreibung engt auf **echte Brüche** ein (bei diesen ist der Zähler vom Betrag kleiner oder gleich dem Nenner). Damit ist klar, dass solche Anteile nicht einfach addiert werden können!



Anna erbt $\frac{1}{5}$ des Vermögens
Berta erbt $\frac{2}{5}$ des Vermögens
Christa erbt $\frac{2}{5}$ des Vermögens

Abbildung aus Malle: Bruchrechnen, Überlegungen zum Kernstoff

Größenaspekt

Operatoraspekt

Quasikardinalaspekt

Verhältnis zu einem Ganzen

Besser geeignet und den Anteilaspekt umfassend ist der **Verhältnisaspekt**. Hier beschreibt man wie sich eine Zahl (oder Größe) zu einer anderen Zahl (oder gleichartigen Größe) verhält.

So ist beispielsweise das Verhältnis Brutto zu Netto 119 zu 100, also $\frac{119}{100}$.

Das umgekehrte Verhältnis wird durch den Kehrbruch beschrieben.

Größenaspekt

Operatoraspekt

Quasikardinalaspekt

Anteilaspekt

Bruchzahlen als Resultate von Divisionen

Ein Bruch kann als das Resultat einer Division aufgefasst werden.

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

Dies passt zu den Grundvorstellungen zur Division natürlicher Zahlen – „drei Pizzen sollen auf 4 Leute aufgeteilt werden“.

Dieser **Rechenzahlaspekt** hilft aber nicht sonderlich beim Aufbau von Grundvorstellungen.

Größenaspekt

Operatoraspekt

Quasikardinalaspekt

Anteilaspekt

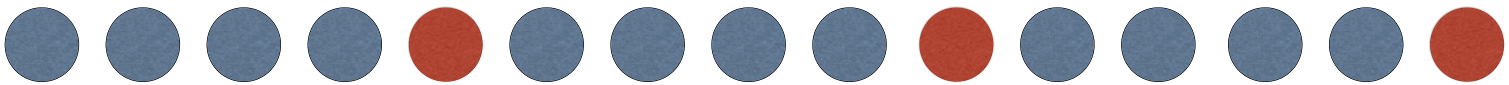
Verhältnisaspekt

Quasiordinal? Geht das?

Eine typische Interpretation von Stammbrüchen (Zähler ist 1) ist der **Quasiordinalaspekt** - nicht der nächste, sondern der übernächste, drittnächste, viertnächste...

Der Bruch 1/5 kann in diesem Aspekt als „jeder fünfte" interpretiert werden.

Malle unterscheidet hier zwischen „strikt" und „statistisch":



strikt jeder fünfte

Größenaspekt

Operatoraspekt

Quasikardinalaspekt

Anteilaspekt

Verhältnisaspekt

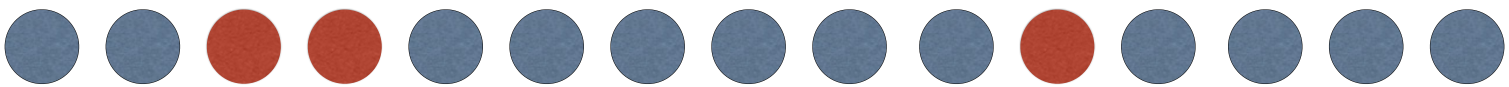
Rechenzahlaspekt

Quasiordinal? Geht das?

Eine typische Interpretation von Stammbrüchen (Zähler ist 1) ist der **Quasiordinalaspekt** - nicht der nächste, sondern der übernächste, drittnächste, viertnächste...

Der Bruch 1/5 kann in diesem Aspekt als „jeder fünfte“ interpretiert werden.

Malle unterscheidet hier zwischen „strikt“ und „statistisch“:



statistisch jeder fünfte

Größenaspekt

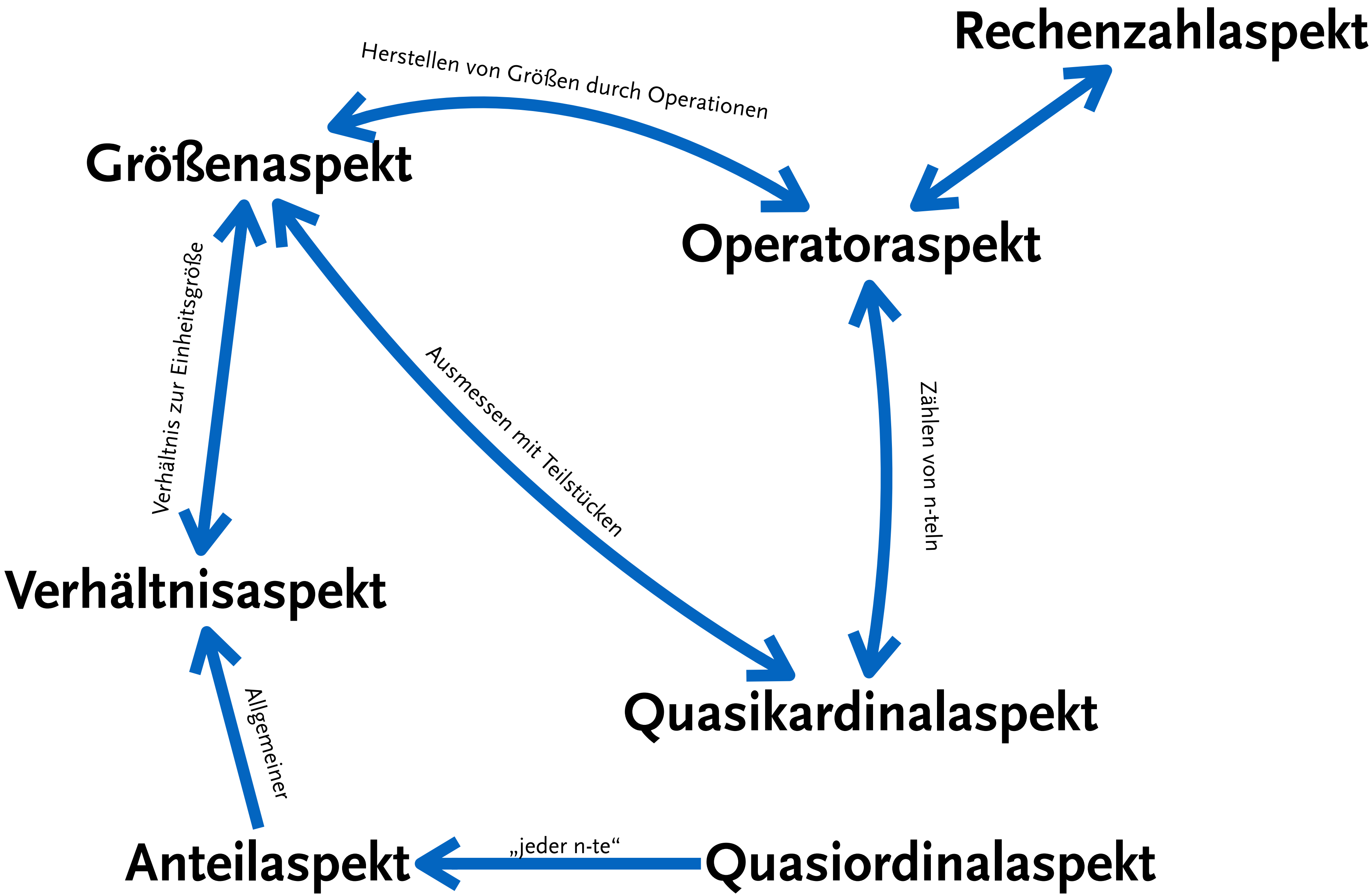
Operatoraspekt

Quasikardinalaspekt

Anteilaspekt

Verhältnisaspekt

Rechenzahlaspekt


Rechenzahlaspekt
Herstellen von Größen durch Operationen
Größenaspekt
Operatoraspekt
Verhältnis zur Einheitsgröße
Ausmessen mit Teilstücken
Zählen von n-teln
Verhältnisaspekt
Quasikardinalaspekt
Allgemeiner
Anteilaspekt
„jeder n-te“
Quasiordinalaspekt

Ein problematischer Aspekt

Gerade bei Statistiken spricht man bei Bruchzahlen wie 2/3 auch von „2 von 3".

Diskutieren Sie mit Ihrer Nachbarin, wie sie dann diese Rechnung zu interpretieren haben. Wo ist der Haken?

$$\frac{4}{7} + \frac{5}{8} = \frac{9}{15}$$