

## Tema 14: Elementos de óptica geométrica

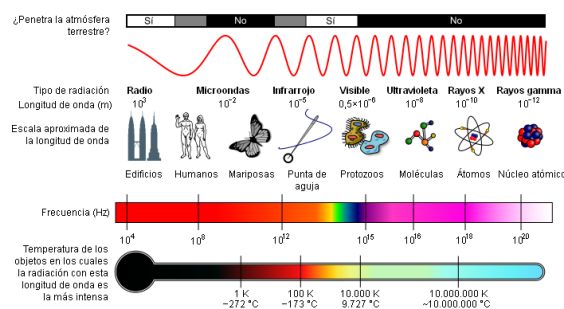
- 14.0.- Introducción.
- 14.1.- Reflexión y refracción.
- 14.2.- Fibras ópticas.
- 14.3.- Sistemas ópticos.
- 14.4.- Dioptrios y espejos.
- 14.5.- Sistemas ópticos centrados. Lentes delgadas.
- 14.6.- Resumen.
- 14.7.- Bibliografía.

**Nota sobre nomenclatura;** durante todo el tema nos referiremos al espacio objeto y el espacio imagen, para el primero se asignará a cada definición un subíndice 1 o nada mientras que en el espacio imagen se le designará el subíndice 2 o una comilla.

### 14.0.- Introducción.

Históricamente se tenían dos puntos de vista acerca de la naturaleza de la luz: uno, debido a Huygens, suponía que la luz era de origen ondulatorio y explicaba lo que se denomina Óptica física, y otro, defendido por Newton, que propugnaba que la luz está compuesta por partículas explicando la Óptica geométrica. Uno de los mayores logros de la Física en el siglo XIX fue la unificación de las fuerzas eléctricas y magnéticas, junto al descubrimiento de las ondas electromagnéticas, cuya velocidad resultó ser precisamente la de la luz. El dilema de los dos puntos de vista quedó zanjado con el principio de la dualidad onda-corpúsculo de Broglie.

Así, la Óptica estudia los fenómenos relacionados con la propagación de la radiación electromagnética en un rango determinado del espectro electromagnético (rango de frecuencias ópticas).



Este rango comprende tres franjas divididas en las siguientes longitudes de ondas.

- Ultravioleta de 10 nm a 390 nm
- Visible de 390 nm a 760 nm
- Infrarrojo de 760 nm a 1 mm

Figura 14.0.1. Espectro electromagnético.

Dentro del espectro visible se dividen los colores en ciertas subfranjas particulares: Rojo (650 a 760 nm), Naranja (590 a 650 nm), Amarillo (570 a 590 nm), Verde (490 a 570 nm), Azul (420 a 490 nm) y Violeta (390 nm a 420 nm).

La Óptica geométrica es la parte de la óptica que trata, a partir de representaciones geométricas, de los cambios de dirección que experimentan los rayos luminosos en los distintos fenómenos de reflexión y refracción. Es válida siempre que la longitud de onda sea menor que las dimensiones características de los objetos con los que se encuentran. El rayo luminoso, en óptica geométrica, es una línea perpendicular a la superficie de la onda y representa la dirección por la que la luz se propaga.

### 14.1.- Reflexión y refracción.

Como las demás ondas, la luz al llegar a una superficie que separa dos medios en parte se refleja y en parte se transmite al segundo medio.

#### 14.1.1.- Reflexión.

En la reflexión un rayo, que avanza por un medio homogéneo, incide sobre una superficie completamente reflectante haciendo que el rayo retroceda cambiando de dirección y sentido. En la figura 14.1.1.1, se observa que el ángulo de incidencia  $\phi_i$ , que es el que forma el rayo incidente con la normal a la superficie, es igual al reflejado  $\phi_r$ . Esta propiedad se conoce como la ley de reflexión. Además se cumple también que el rayo incidente y el reflejado están en el mismo plano.

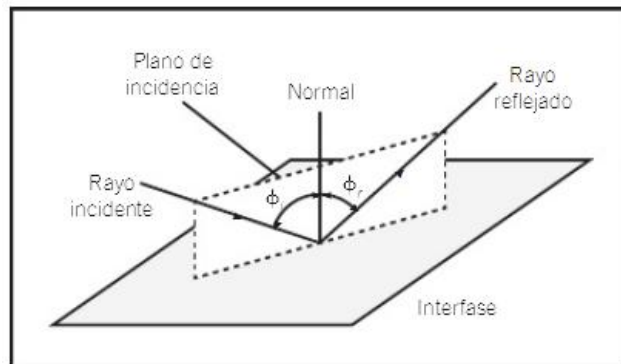


Figura 14.1.1.1. Reflexión de la luz.

#### 14.1.2.- Refracción.

La refracción es el cambio de dirección que experimentan los rayos luminosos al pasar oblicuamente de un medio a otro en el que se propagan con diferentes velocidades.

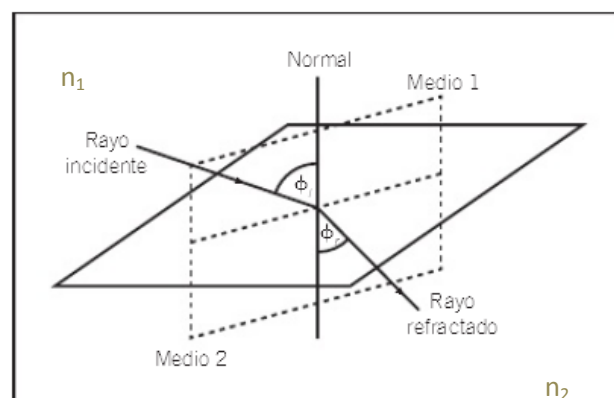


Figura 14.1.2.1. Refracción.

En la refracción de ondas se cumple la **ley de Snell**, que dice que la razón entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es, para dos medios dados, constante e igual a la razón de las velocidades con que se propaga la onda en ambos medio.

$$\boxed{c_1 / \sin \phi_1 = c_2 / \sin \phi_2} \quad (14.1.2.1)$$



Se define "n" como el **índice de refracción** del medio que se corresponde como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y en el medio donde se propaga.

$$n_m = \frac{c}{c_m} \quad (14.1.2.2)$$

Al considerar dos medios transparentes e isotropos distintos a los que llamaremos 1 y 2 (Figura 14.1.2.1.), si dividimos sus índices de refracción, obtenemos:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} \quad (14.1.2.3)$$

Así, la ley de Snell nos queda:

$$n_1 \sin \phi_1 = n_2 \sin \phi_2 \quad (14.1.2.4)$$

En el vacío, el índice de refracción es  $n=1$  y, aproximadamente, también en el aire. En otros medios materiales,  $n$  es mayor que la unidad, ya que,  $c$  es siempre mayor que la velocidad en ese medio.

Tenemos que considerar:

- La velocidad de la luz es mayor en el vacío que en los medios materiales.
- En el vacío, la velocidad de las radiaciones luminosas no dependen de la longitud de onda, sino que es constante. Sin embargo en los medios materiales sí depende de ella.
- La frecuencia de la luz sólo depende de la fuente que la emite y no cambia al pasar de un medio a otro, de modo que conserva el mismo color en ese paso.

Como la velocidad de una onda es el producto de su longitud de onda y frecuencia, se

tiene entonces que

$$n_m = \frac{c}{c_m} = \frac{\lambda_c * f}{\lambda_m * f} = \frac{\lambda_c}{\lambda_m} \quad (14.1.2.5)$$

y despejando tenemos que

$$\lambda_m = \frac{\lambda_c}{n_m} \quad (14.1.2.6)$$

es decir, la longitud de onda se reduce en un factor que es el índice de refracción.

Como ejemplo de aplicación de la ley de Snell, tenemos que si miramos un objeto inmerso en un líquido por encima de la superficie de éste se observa una imagen "aparente" en la que la verdadera orientación y profundidad aparece cambiada (Figura 14.1.2.2). Podemos hacer la prueba con la pajita que se usa para aspirar refrescos. Si la observamos desde arriba, nos da la impresión de que se dobla al entrar en el líquido. Sin embargo, si la observamos lateralmente, veremos que hay otro tipo de distorsión, debido al vidrio y la superficie del líquido, pero la pajita presenta el mismo ángulo dentro y fuera del líquido.

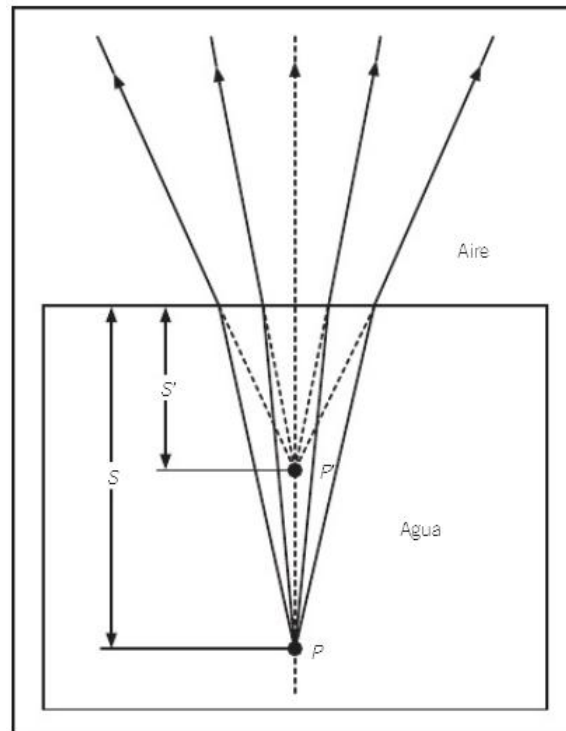


Figura 14.1.2.2.- Efecto óptico causado por la refracción.

Esto es porque la refracción desde el líquido al aire aleja los rayos de la vertical, la imagen en el líquido presenta un ángulo respecto a la vertical que es mayor al que en realidad existe. En concreto, la relación entre el ángulo “virtual”, el ángulo de incidencia, y el real de la pajita vendrá dado por la ley de Snell.

$$\sin \phi_{virtual} = \frac{n_{liquido}}{n_{aire}} \sin \phi_{real} \quad (14.1.2.7)$$

Y puesto que  $n_{liquido} > n_{aire}$ , se aprecia que  $\phi_{virtual} > \phi_{real}$ .

### 14.1.3.- Reflexión total.

De la ley de Snell se deduce que si  $n_1 < n_2$ , se tiene que  $\phi_1 > \phi_2$ , es decir, el rayo se acerca a la vertical al pasar de un medio a otro; por el contrario, cuando pasa de un medio con mayor índice de refracción ( $n_1 > n_2$ ) a otro con menor índice, se separa de la vertical.

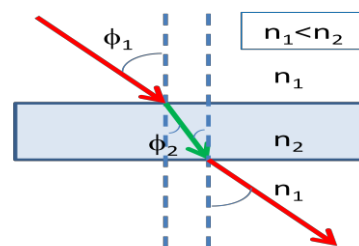


Figura 14.1.3.1.- Ley de Snell

En esta última situación donde la luz pasa de un medio con mayor a otro con menor índice de refracción se produce la **reflexión total**. En efecto, como se ve en la Figura 14.1.3.2,

los rayos refractados se van acercando hacia la horizontal, y hay un ángulo de incidencia a partir del cual no se produce refracción, sino que el rayo es completamente reflejado. Al ángulo a partir del cual se da la reflexión total se denomina **ángulo límite**. Este ángulo se calcula fácilmente a partir de la ley de Snell.

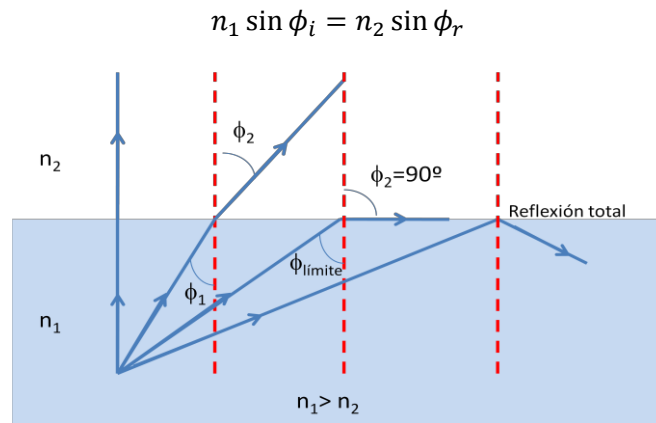


Figura 14.1.3.2.

El ángulo límite se tiene cuando el refractado es igual a 90°, es decir, su seno tiene el valor 1. Se tiene entonces que;

$$\sin \phi_{\text{límite}} = \frac{n_2}{n_1} \quad (14.1.3.1)$$

#### 14.2.- Fibras ópticas.

La reflexión total es también el fundamento del uso de las fibras ópticas, compuestas de un material plástico, flexible y de alto índice de refracción, de modo que la luz que entra por uno de sus extremos se refleja sobre las paredes de la fibra y sale por el otro extremo (Figura 14.2.1), a pesar de que la fibra no siga una línea recta. Las aplicaciones médicas de la fibra van en aumento, sobre todo en los aparatos de endoscopia, que sirven para hacer exploraciones con un cable que lleva incorporadas algunas fibras para iluminar la zona a examinar (Figura 14.2.2), y otras que recogen la imagen. Hay fibras ópticas que pueden transmitir señales de potencia, haciendo posible aplicar haces láser directamente en zonas donde no se puede acceder sin intervención quirúrgica, lo cual ha permitido el desarrollo de una cirugía no invasiva que ha reducido espectacularmente el grado de dificultad de muchas intervenciones y el tiempo de recuperación tras las mismas.

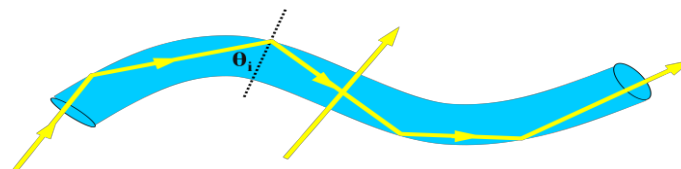


Figura 14.2.1.- Fibra óptica.

La fibra óptica consta de tres partes: un filamento central (núcleo) con alto índice de refracción rodeado de una capa de material (recubrimiento o cladding) con un índice de

refracción menor y un recubrimiento de protección alrededor del revestimiento. Esta diferencia de índice de refracción es la que hace que se cumpla la reflexión total interna y permite que la luz transmitida se mantenga y propague a través del núcleo.

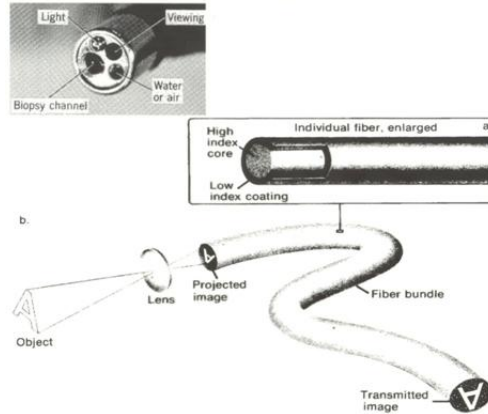


Figura 14.2.2.- Tubo de endoscopia.

### 14.3.- Sistema óptico.

Se define como sistema óptico (SO) al conjunto de superficies, planas o esféricas, que separan medios transparente, homogéneos e isótropos de distinto índice de refracción que son atravesados por rayos luminosos. El SO puede ser simple o compuesto y consta de (Figura 14.3.1);

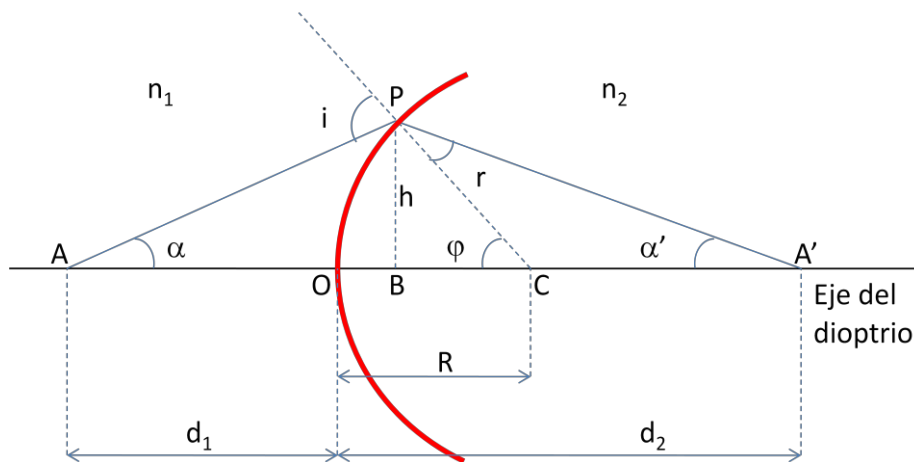


Figura 14.3.1.- Sistema óptico simple

- Eje óptico; es el eje de simetría del SO.
- Centro de curvatura (C); centro de la superficie en el caso de que sea esférica.
- Radio de curvatura (R); radio de la superficie esférica.
- Vértice o centro óptico (O); punto de intersección del sistema óptico con el eje óptico.
- Objeto (A); punto o conjunto de puntos de los que queremos obtener imagen a través del SO.

- Imagen ( $A'$ ); punto o conjunto de puntos que son imagen de un objeto. Puede ser:
  - Real; es el punto de convergencia de todos los rayos procedentes de un punto  $A$ , tras atravesar el dioptrio (con distancia imagen positiva).
  - Virtual; es el punto de convergencia formado por las prolongaciones de los rayos que traspasan el SO (con distancia de imagen negativa), cuando estos se refractan divergentes y no se juntan en ningún punto.
  - Derecha; imagen cuyo aumento lateral es positivo. Está en el mismo lado del eje que el objeto.
  - Invertida; imagen cuyo aumento lateral es negativo. Está en el lado opuesto del eje.
- Foco objeto ( $F$ ); punto situado en el eje óptico cuya imagen está en el infinito.
- Foco imagen ( $F'$ ); punto situado en el eje óptico cuyo objeto está en el infinito.
- Aumento lateral ( $A_l$ ); Relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto.

Para construir la imagen (Figura 14.3.2) basta con trazar dos de los rayos siguientes a partir del punto objeto ( $A$ );

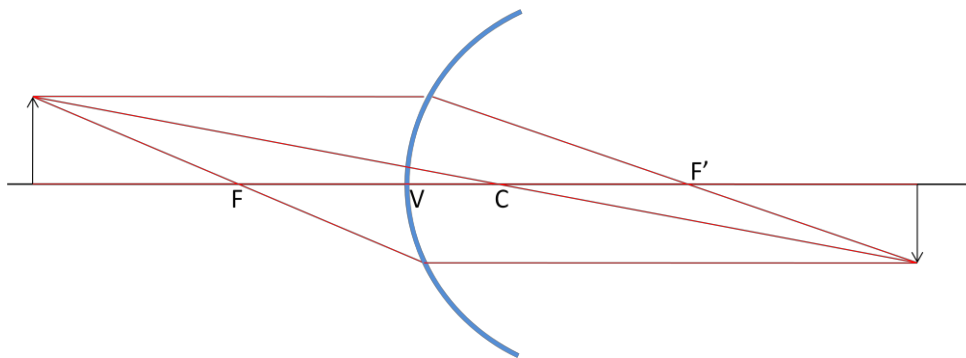


Figura 14.3.2.- Trazado de rayos para la formación de imagen

- Rayo paralelo; incide paralelamente al eje óptico y una vez refractado, pasa por el foco imagen.
- Rayo focal; pasa por el foco objeto  $F$  y después de la refracción, emerge paralelamente al eje óptico.
- Rayo radial; pasa por el centro de curvatura  $C$  y no experimenta desviación alguna, puesto que es paralelo a la normal de la superficie.

En las condiciones de validez de la óptica geométrica, El criterio de signos utilizados en los sistemas ópticos son los siguientes (Figura 14.3.3);

- Las distancias son positivas cuando están a la derecha de  $V$  o por encima del eje óptico y negativas si están a la izquierda de  $V$  o por debajo del eje óptico.
- Los ángulos que los rayos forman con el eje óptico son positivos si, al abatirlos con el eje por el camino más corto, se gira al contrario de las agujas del reloj. Con los ángulos de incidencia, refracción y reflexión (que se cortan con la superficie del SO) ocurre al contrario; serán positivos cuando se giran en el sentido de las agujas del reloj, al abatirlos sobre su normal.

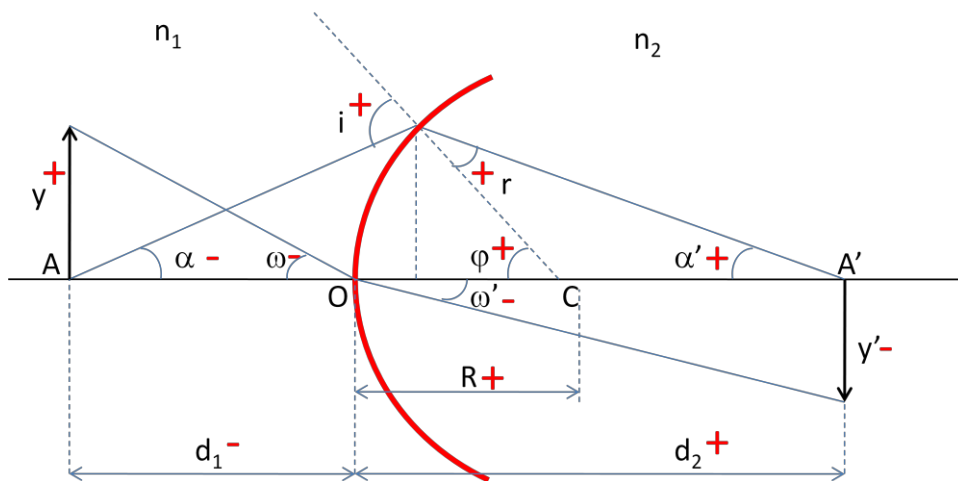


Figura 14.3.3.- Criterio de signos en SO

Un **sistema óptico es perfecto** cuando se cumplen las tres condiciones de Maxwell;

1. A un punto objeto le corresponde un solo punto imagen.
2. A un plano objeto perpendicular a eje óptico, le corresponde un plano imagen también perpendicular al eje, de tal forma que todo punto objeto contenido en el plano objeto, tiene su correspondiente punto imagen contenido en el plano imagen.
3. A una figura contenida en el plano objeto, le corresponde una figura semejante en el plano imagen. La razón de semejanza entre las dos figuras debe ser constante para el par de planos conjugados y se denomina aumento lateral, definido como el cociente entre el tamaño de la imagen y el del objeto.

Por otra parte se dice que un SO es **estigmático** cuando reproduce todos los puntos objetos en sus puntos imagen, es decir, un sistema será estigmático respecto a dos puntos, cuando todos los rayos que parten de uno de ellos y atraviesan el sistema, salen pasando por el otro punto.

También es importante decir, que normalmente siempre vamos a utilizar la aproximación paraxial de la óptica geométrica. Esta aproximación se lleva a cabo en una zona muy cercana al eje óptico del sistema y los rayos forman ángulos muy pequeños con las normales a las superficies de separación de los diferentes medios, por lo que se podrá sustituir el seno o la tangente por el valor del ángulo expresado en radianes, así como el coseno por la unidad. La zona en cuestión se denomina **zona paraxial** o zona de Gauss.



## 14.4.- Dioptrios y espejos.

### 14.4.1.- Dioptrio.

Llamamos dioptrio al sistema óptico formado por una sola superficie que separa dos medios de distinto índice de refracción. Según esto, decimos que un SO es simple si está constituido por un solo dioptrio.

Un **dioptrio esférico** es una superficie esférica que separa dos medios de diferente índice de refracción. Decimos que es **convexo** si su radio de curvatura es positivo y en caso contrario, es **cóncavo**.

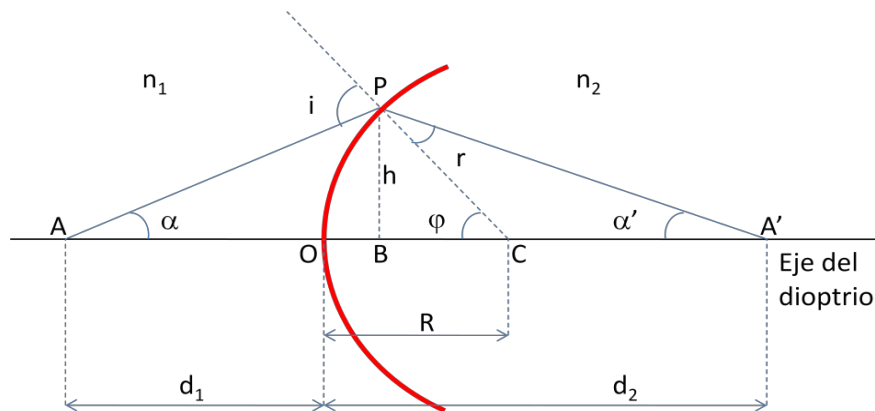


Figura 14.4.1.1

Como hemos comentado anteriormente, consideramos que estamos en la zona paraxial de forma que; la distancia O-B es despreciable frente a los valores de  $d_1$ ,  $d_2$  y  $R$ , y los ángulos medidos en radianes se confunden con sus senos y tangentes.

Así, según la ley de Snell;

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad (14.4.1.1)$$

En la zona paraxial tendremos que,

$$n_1 i = n_2 r \quad (14.4.1.2)$$

en los triángulos APC y CPA' se deduce que,

$$i = \varphi - \alpha \quad r = \varphi - \alpha' \quad (14.4.1.3)$$

además, como el ángulo es prácticamente igual a la tangente,

$$\varphi = \frac{h}{R}; \alpha' = \frac{h}{d_2}; \alpha = \frac{h}{d_1} \quad (14.4.1.4)$$

sustituyendo en la ley de Snell para zona paraxial,

$$n_1 \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{d_1} \right) = n_2 \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{d_2} \right) \quad (14.4.1.5)$$

Por último, si simplificamos y ordenamos la ecuación del dioptrio esférico quedará;

$$\boxed{\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}} \quad (14.4.1.6)$$

Como ya hemos comentado el foco objeto (F) es el punto situado en el eje óptico cuya imagen está en el infinito, y el foco imagen (F') es el punto situado en el eje óptico cuyo objeto está en el infinito. Si aplicamos estas definiciones a la ecuación podremos calcular sus valores;

Distancia focal imagen

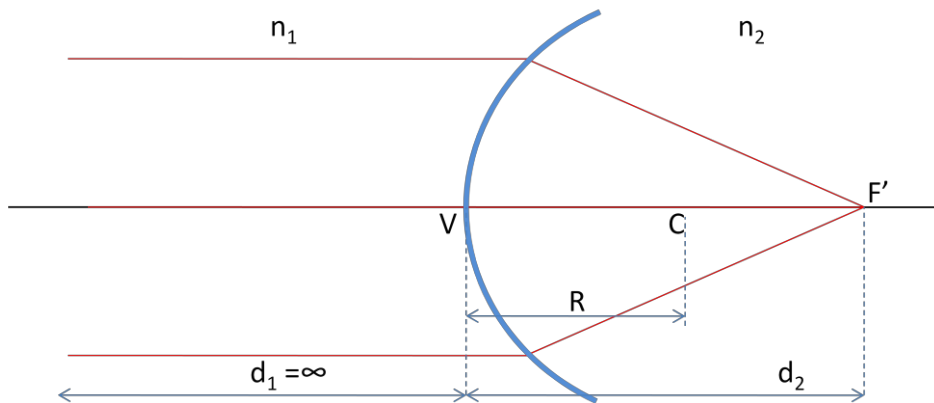


Figura 14.4.1.2- Esquema de foco imagen en dioptrio esférico

$$\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{y por lo tanto} \quad \boxed{d_2 = f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R} \quad (14.4.1.7)$$

Haciendo lo mismo con la distancia focal objeto

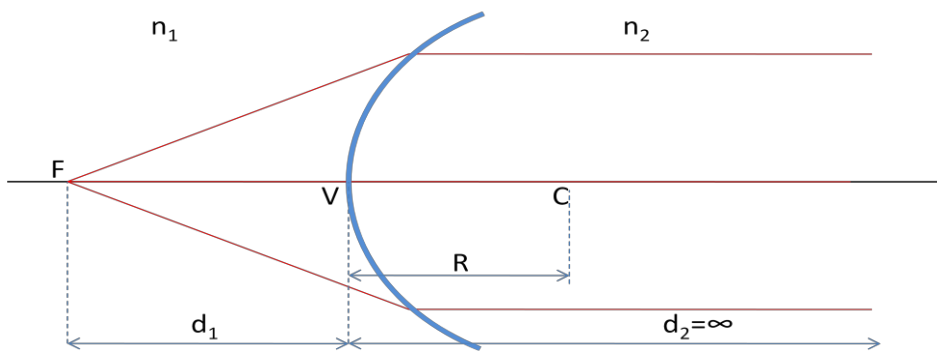


Figura 14.4.1.3- Esquema de foco objeto en dioptrio esférico

$$\frac{n_2}{\infty} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad \text{y por lo tanto} \quad \boxed{d_1 = f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R} \quad (14.4.1.8)$$

Operando se tendrá las siguientes relaciones:

$$\boxed{\frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_2} \quad f + f' = R \quad \frac{f'}{d_2} + \frac{f}{d_1} = 1} \quad (14.4.1.9)$$

Un dioptrio es **convergente o divergente** según sea positiva o negativa la distancia entre  $VF'=f'$ . El signo de la focal en un dioptrio cualquiera viene determinado por la relación entre los índices de refracción de los espacios objeto e imagen, además del signo del radio de curvatura. Según el valor que tomen dichos índices, un dioptrio convexo puede resultar convergente o divergente, al igual que un dioptrio cóncavo, tal y como se observa en la siguiente figura;

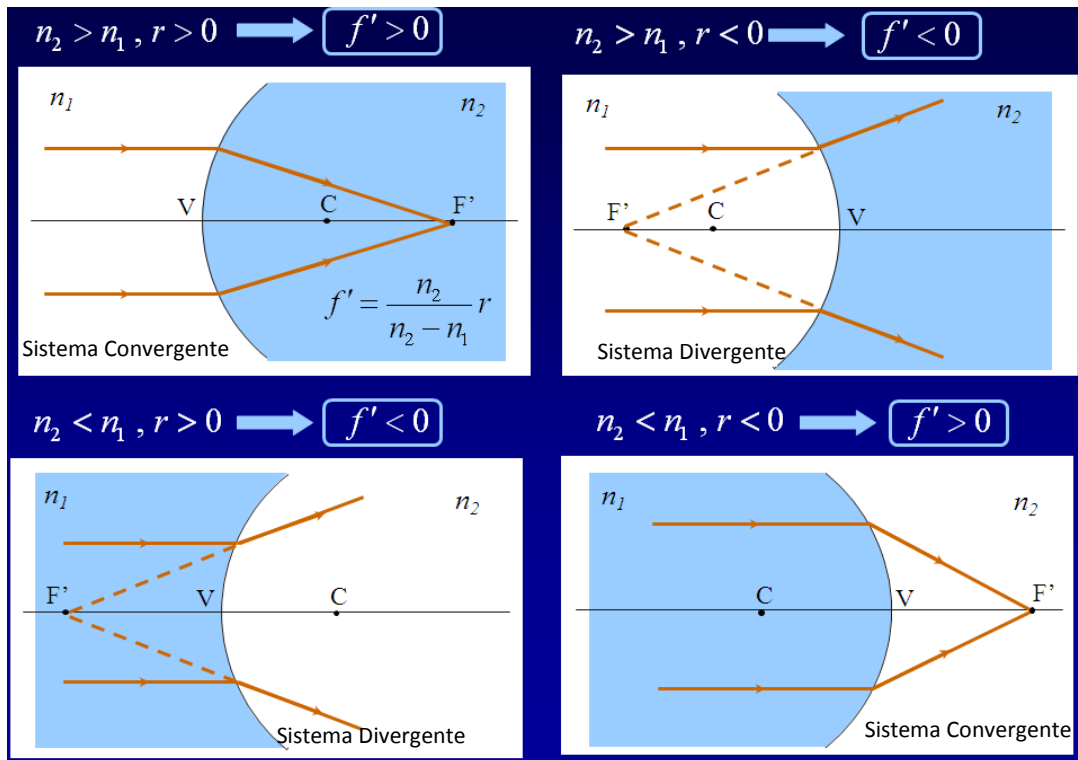


Figura 14.4.1.4.

A continuación desarrollamos esquemáticamente la formación de imágenes para dioptrios esféricos;

- Dioptrio convexo con un objeto situado antes del foco objeto (Figura 14.4.1.5), en este caso se observa como al proyectar los rayos, tal y como se explicaba anteriormente, obtenemos una imagen real e invertida.

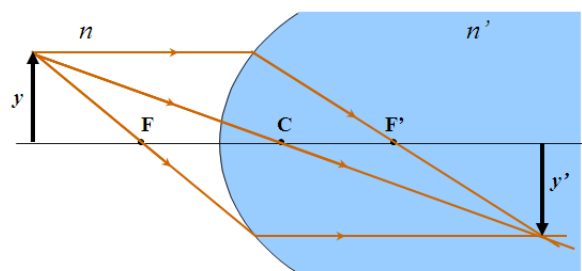


Figura 14.4.1.5.

- Dioptrio convexo con un objeto situado entre el foco y la superficie del dioptrio (Figura 14.4.1.6), observamos como los rayos que pasan por el centro de curvatura y el foco



imagen son divergentes y por lo tanto no se cruzarán nunca. Obtenemos la imagen virtual mediante las proyecciones de estos rayos.

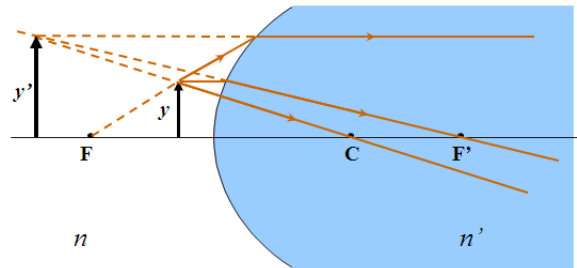


Figura 14.4.1.6.

- Dioptrio cóncavo con el objeto por delante del foco (Figura 14.4.1.7), nuevamente los rayos que cortan el centro de curvatura no sufre desviación, los rayos que salen paralelos al eje se desvían hacia el foco imagen cuando llegan a la superficie del dioptrio y los rayos que van al foco objeto salen paralelos al llegar al dioptrio.

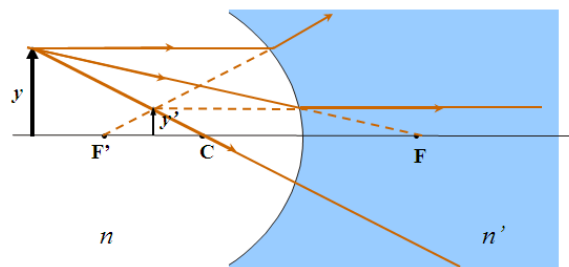


Figura 14.4.1.7.

Por último, definir el **aumento lateral** como el cociente entre el tamaño de la imagen y la del objeto (Figura 14.4.1.8), el **aumento angular** es la relación entre el ángulo  $\sigma'$  que forma el rayo emergente con el eje óptico y el ángulo  $\sigma$  que forma el rayo incidente con el eje óptico.

$$\beta = \frac{y'}{y} \quad \gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} \quad (14.4.1.9)$$

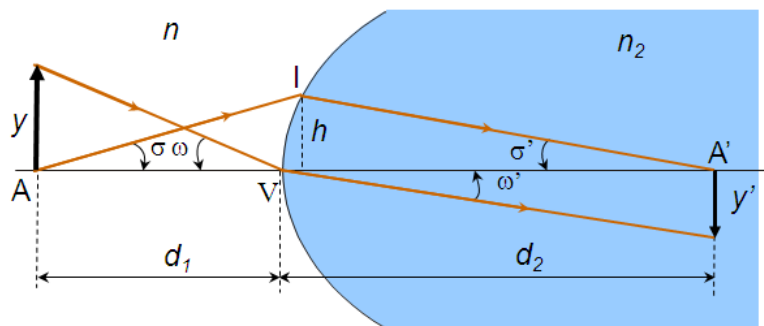


Figura 14.4.1.8.

Considerando el SO descrito en la Figura 14.4.1.8 y que estamos en zona paraxial, se puede obtener una relación entre el índice de refracción del espacio objeto, el tamaño del



objeto, y el ángulo  $\sigma$  con las magnitudes homólogas del espacio imagen. Se tiene así la **ecuación de Langrange-Helmholtz** (ecuación 14.4.1.10) y a partir de esta poder relacionar el aumento de tamaño con el angular.

$$ny\sigma = n'y'\sigma' \quad (14.4.1.10)$$

Un **dioptrio plano** es una superficie plana que separa dos medios de diferente índice de refracción. Es por lo tanto un caso particular del dioptrio esférico, en el que el radio de curvatura es  $R=\infty$ .

$$\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (14.4.1.11)$$

$$\frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1}{d_1} \quad (14.4.1.12)$$

Y así

$$d_2 = \frac{n_2}{n_1} d_1 \quad (14.4.1.13)$$

Gráficamente

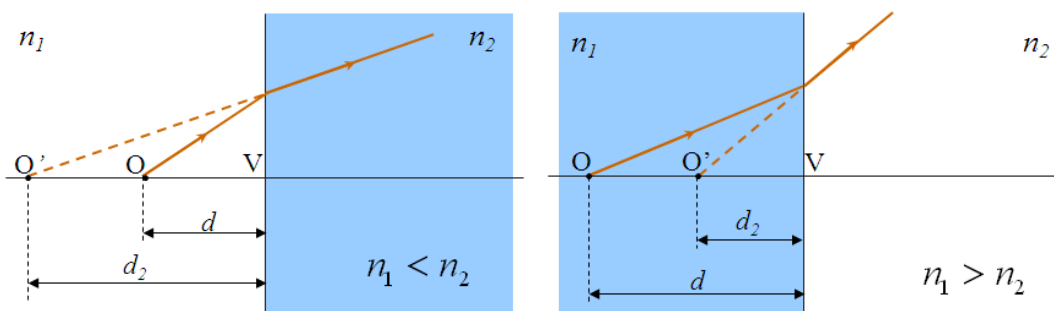


Figura 14.4.1.9.- Esquema de dioptrio plano

El **aumento lateral** para un dioptrio vendrá dado por;

$$\beta = \frac{y'}{y} \text{ de la ecuación de Langrange-Helmholtz } \beta = \frac{n_1 d_2}{n_2 d_1} \quad (14.4.1.14)$$

y de la ecuación 14.4.1.13, se tiene que el aumento lateral será,

$$\beta = 1 \quad (14.4.1.15)$$

De forma análoga, considerando que en la zona paraxial los senos y tangentes se puede igualar a los valores de sus ángulos en radianes, se puede llegar a que;

$$(14.4.1.16)$$



$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{d_1}{d_2}$$

Entonces

$$\beta = \frac{n_1 \sigma}{n_2 \sigma'} = 1 \quad (14.4.1.17)$$

Y así el **aumento angular** será

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{n_1}{n_2} \quad (14.4.1.18)$$

Es decir, tenemos una imagen con el mismo tamaño que el objeto y un aumento angular que dependerá de la diferencia entre los índices de refracción.

Por último, definimos la potencia de un dioptrio como, siendo su unidad 1/metro llamada dioptría

$$P = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

#### 14.4.2.- Espejos.

Un espejo es una superficie pulimentada que refleja toda la luz que recibe. Según la forma geométrica de su superficie, podemos clasificar los espejos en dos tipos, planos y curvos, y dentro de estos podemos distinguir los cóncavos, en los que la superficie pulimentada se encuentra en la cara interior de la superficie esférica, de los convexos, en los que se encuentran en la cara exterior.

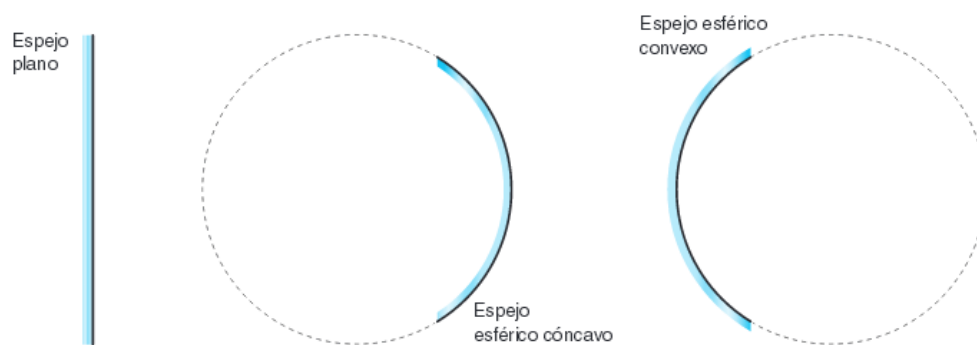


Figura 14.4.2.1.

En un **espejo plano**, las imágenes se caracterizan porque:

- Se encuentran a la misma distancia del espejo que el objeto.
- Son de igual tamaño que el objeto.
- Son simétricas respecto al espejo.

Para los espejos el índice de refracción es el mismo, aunque lo tomamos con signo opuesto ya que el rayo viaja en sentido contrario, por lo tanto  $n_1 = -n_2$  por lo que los ángulos serán iguales.



Según la ley de Snell tendremos;

$$-n_2 \sin \varepsilon_1 = n_2 \sin \varepsilon_2 \quad (14.4.2.1)$$

por lo tanto;

$$\boxed{\varepsilon_1 = -\varepsilon_2} \quad (14.4.2.2)$$

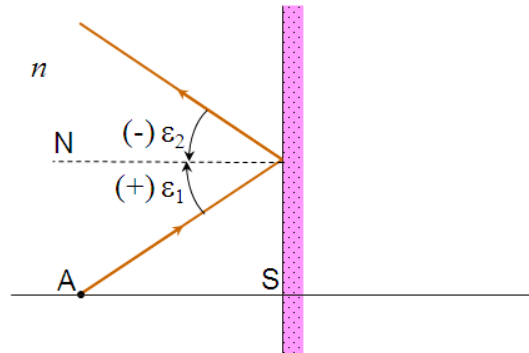


Figura 14.4.2.2.

La distancia del objeto al espejo coincide con la distancia de la imagen al espejo. Para verlo sustituimos la condición de los índices de refracción y que el radio de curvatura es infinito, en la ecuación de dioptrio (Figura 14.4.2.3);

$$\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (14.4.2.3)$$

$$\frac{n_2}{d_2} = -\frac{n_2}{d_1} \quad (14.4.2.4)$$

Es decir;

$$\boxed{d_2 = -d_1} \quad (14.4.2.5)$$

Sin embargo, la imagen es virtual porque después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto A' situado detrás del espejo y por lo tanto la luz no procede realmente de esta imagen.

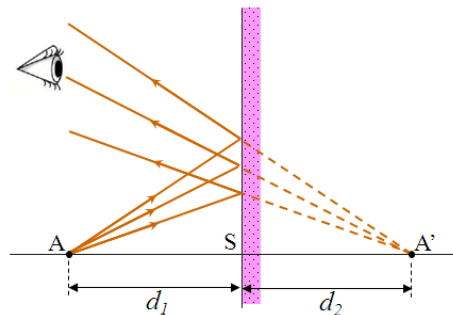


Figura 14.4.2.3.

Los **espejos curvos**, como su nombre indica, presentan cierta curvatura en la superficie reflectante. Dependiendo del tipo de curvatura tendremos espejos hiperbólicos, parabólicos, elípticos o esféricos. Aquí se consideran únicamente estos últimos. Los **espejos esféricos** se clasifican según el signo de su radio de curvatura en cóncavos  $R < 0$  y convexos  $R > 0$ .

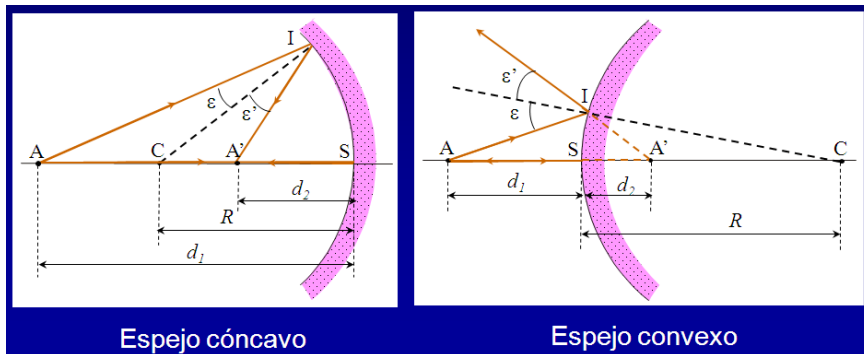


Figura 14.4.2.4. Tipos de espejos según signo de su curvatura.

Estos espejos se caracterizan porque cuando incide sobre él un haz de rayos paralelos, los refleja haciéndolos convergir en el foco. Al igual que en el caso del espejo plano, el esférico es un caso particular del dioptrio esférico en el que los índices de refracción son opuestos  $n_1 = -n_2$  pero su radio de curvatura no es infinito, y por lo tanto en la ecuación del dioptrio tendremos;

$$\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (14.4.2.6)$$

$$\frac{n_2}{d_2} - \frac{-n_2}{d_1} = \frac{2n_2}{R} \quad (14.4.2.7)$$

Y así;

$$\boxed{\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} = \frac{2}{R}} \quad (14.4.2.7)$$

De esta forma se tiene que tanto la distancia focal imagen como la objeto es la mitad del radio de curvatura del espejo.

- Distancia focal imagen:  $\frac{1}{f'} + \frac{1}{-\infty} = \frac{2}{R}$  y despejando  $f' = R/2$ .
- Distancia focal objeto:  $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$  y despejando  $f = R/2$ .

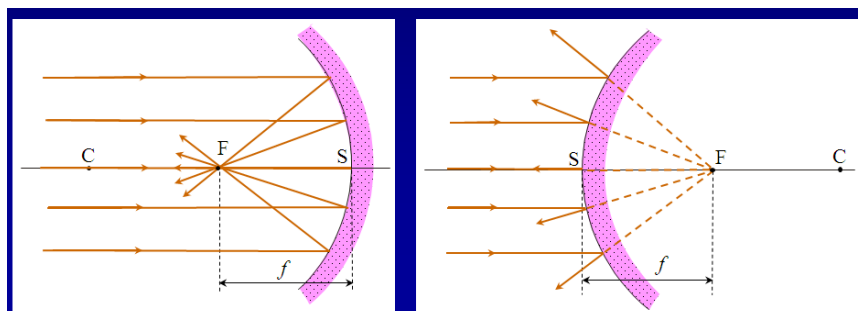


Figura 14.4.2.5. Esquema de formación de foco imagen y objeto.





Gráficamente, la formación de imágenes en espejos esféricos se puede obtener dibujando, al menos, dos rayos de trayectorias conocidas, de los tres de los que se disponen. Estos tres rayos son:

- Un rayo que proceda del objeto y que sea paralelo al eje óptico. Si el espejo es cóncavo, el rayo reflejado pasa por el foco; si es convexo, el rayo reflejado es tal que su prolongación pasa por el foco (Figura 14.4.2.6).

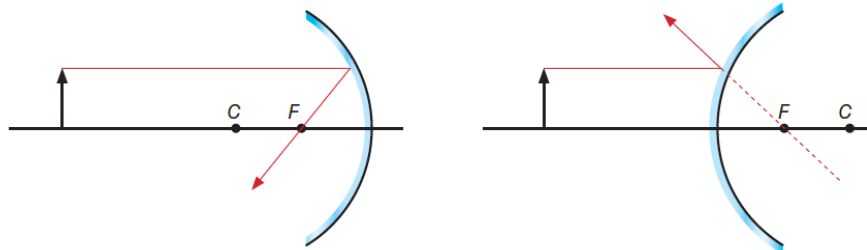


Figura 14.4.2.6. Esquema de rayo procedente del infinito.

- Un rayo que proceda del objeto y que pase por el foco, si el espejo es cóncavo, o se dirija a él, si es convexo. Después de reflejarse, sigue una trayectoria paralela al eje óptico (Figura 14.4.2.7).

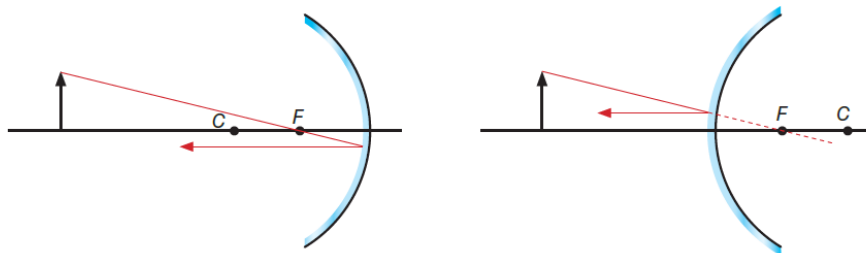


Figura 14.4.2.7. Esquema de rayo que pasa por el foco.

- Un rayo que proceda del objeto y que llegue al espejo pasando por el centro de curvatura, o lo haga su prolongación. Después de reflejarse, sigue la misma dirección (Figura 14.4.2.8).

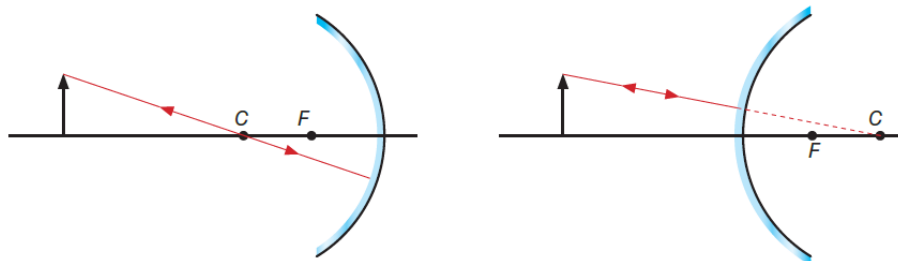
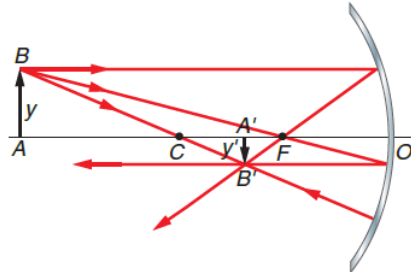


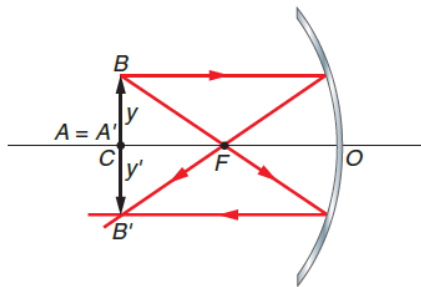
Figura 14.4.2.8. Esquema de rayo que pasa por el centro de curvatura.

Siguiendo estas reglas podemos ver algunos ejemplos;

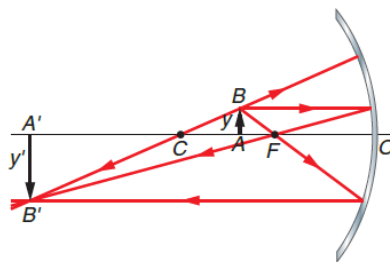
- Espejo cóncavo y objeto a mayor distancia que el radio de curvatura. La imagen que se forma es real, invertida, de menor tamaño que el objeto y situada entre el centro de curvatura y el foco.



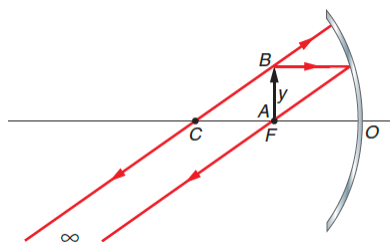
- Espejo cóncavo y objeto situado en el centro de curvatura. En este caso, la imagen que se forma es real, invertida, de igual tamaño que el objeto y situada en el mismo punto.



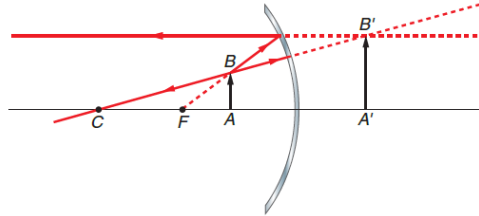
- Espejo cóncavo y el objeto está entre el centro de curvatura y el foco. Ahora, la imagen formada es real, invertida, de mayor tamaño que el objeto y situada a la izquierda del centro de curvatura.



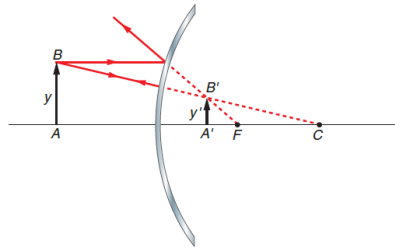
- Espejo cóncavo y objeto situado en el foco. La imagen se forma en el infinito, ya que los rayos reflejados, al salir paralelos, no se cortan.



- Espejo cóncavo y objeto a la derecha del foco. Es el único caso donde la imagen formada es virtual, además, tiene la misma orientación y es de mayor tamaño que el objeto.



- Espejo convexo. A diferencia de los cóncavos, donde las características de la imagen depende de la posición del objeto, en un espejo convexo la imagen que se forma es siempre virtual ya que se genera por las prolongaciones de los rayos trazados, derecha y de menor tamaño que el objeto.



#### 14.5.- Sistemas ópticos centrados, lentes.

Los sistemas ópticos centrados son sistemas ópticos compuestos por más de un dioptrio y cuyos centros ópticos están sobre una misma línea. Los más utilizados son las lentes.

Una **lente** es un sistema óptico centrado formado por dos dioptrios, al menos, uno de los cuales es esférico y que separa dos medios con el mismo índice de refracción. La desviación del rayo es consecuencia de la refracción en ambos dioptrios, sin embargo, consideraremos lentes delgadas donde se considera que la desviación del rayo tiene lugar en el centro de la lente. Las **lentes delgadas** son aquellas en la que el grosor de la misma es despreciable con respecto a los radios de curvatura de los dioptrios que la forman, y son estas el tipo de lentes que se desarrolla en este punto.

La aplicación más importante de la ecuación 14.4.1.6 para la refracción en una superficie simple consiste en hallar la posición de la imagen formada por una lente siendo ésta un medio transparente de índice de refracción  $n_l$  limitado por dos superficies esféricas de radios  $r_1$  y  $r_2$  y de espesor despreciable, es decir, en una lente delgada. Esta lente separa dos medios del mismo índice de refracción  $n_m$ . De esta forma para una lente (Figura 14.5.1) tendremos que;

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{n_l - n_m}{n_m} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.5.1)$$

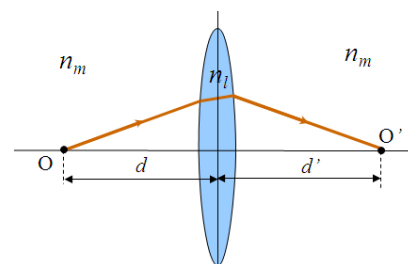


Figura 14.5.1

Desarrollemos este punto detenidamente, según la figura 14.5.2, si un objeto está a una distancia  $d$  de la primera superficie de la lente se puede encontrar la distancia  $d'_1$  de la imagen  $O'_1$  debido a la refracción. Esta imagen no llega a formarse porque la luz se refracta de nuevo en la segunda superficie, por lo tanto  $d'_1$  es negativa indicando que sería una imagen virtual.

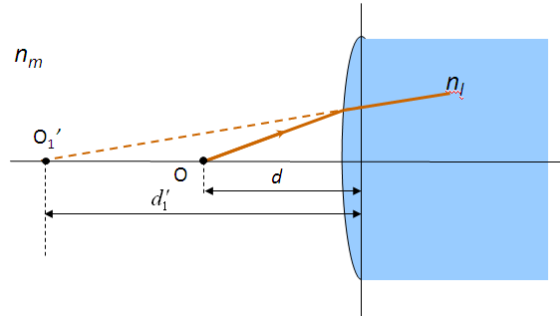


Figura 14.5.2. Refracción en el primer dioptrio

entonces, de la ecuación;

$$\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

obtenemos que;

$$\frac{n_l}{d'_1} - \frac{n_m}{d} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \quad (14.5.2)$$

Los rayos dentro del vidrio, refractados por la primera superficie, divergen como si procediesen del punto  $O'_1$ . Estos inciden sobre la segunda superficie formando los mismos ángulos que si se encontrara un objeto en este punto imagen. Por consiguiente, la imagen dada por la primera superficie se convierte en objeto para la segunda superficie. Si aplicamos estas condiciones (Figura 14.5.3) a la segunda superficie, tendremos que;

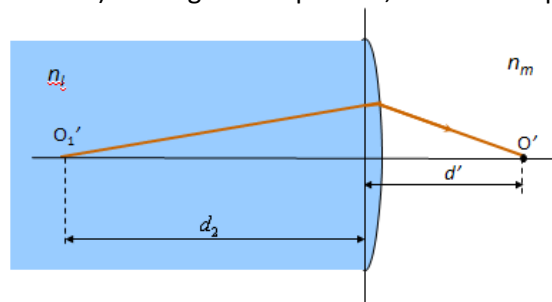


Figura 14.5.3. Refracción en el segundo dioptrio

Así,

$$\frac{n_m}{d'} - \frac{n_l}{d_2} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad (14.5.3)$$

Como la lente es delgada se tiene que  $d_2 = d'_1$ , de forma que sumando las ecuaciones 14.5.2 y 14.5.3 obtenemos la relación entre la distancia y su imagen para una lente delgada.

$$\boxed{\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{n_l - n_m}{n_m} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (14.5.4)$$

Además, si consideramos que los medios anterior y posterior a la lente son aire,  $n_m=1$ ;

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.5.5)$$

Distinguiremos entre dos tipos de lentes, las convergentes y las divergentes.

- **Lente convergente**, es un tipo de lente que es más gruesa por su parte central que en los extremos. Los rayos que inciden paralelos al eje óptico convergen en el foco imagen ( $f' > 0$ ) y según su forma pueden ser biconvexas, planoconvexas o meniscoconvexas. Esquemáticamente se representan por una línea acabada en puntas de flecha (Figura 14.5.4).
- **Lente divergente**, es aquella que es más gruesa en sus extremos que en la parte central. Los rayos que inciden paralelos al eje óptico divergen como si procediesen del foco imagen ( $f' < 0$ ) y según su forma pueden ser bicóncavas, planocóncavas o meniscodivergentes. Esquemáticamente se representan por una línea recta acabada en puntas de flechas invertidas (Figura 14.5.4).

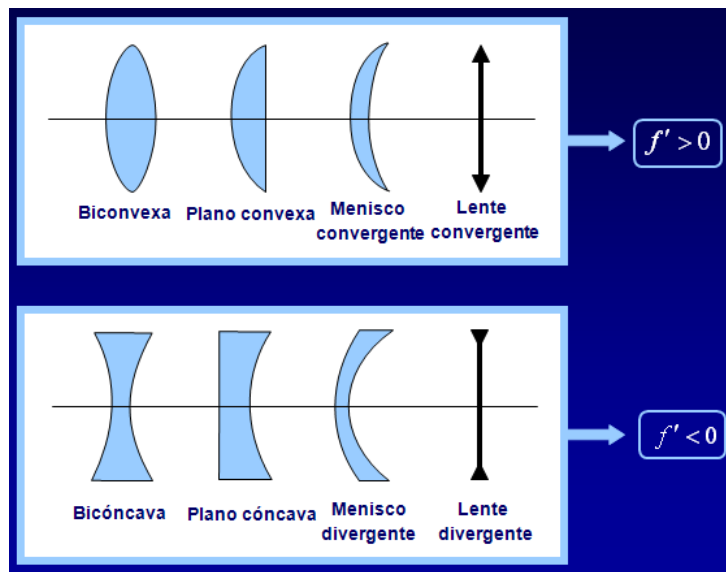


Figura 14.5.4.- Tipos de lentes.

**Potencia de la lente** es el valor del inverso de la distancia focal se denomina potencia de la lente, y nos mide la capacidad de la misma para enfocar los rayos paralelos a una distancia corta de la misma. Cuando se expresa en metros la distancia focal, lo potencia viene dado en recíprocos de metros denominados dioptrías (D).

$$P = \frac{1}{f} \quad (14.5.6)$$

Como en el caso de los espejos y los dioptrios, la distancia focal objeto de una lente delgada se define como la distancia donde se posiciona el objeto para que su imagen esté en el

infinito y la distancia focal imagen es aquella que se forma de un objeto situado en el infinito. Sustituyendo estas definiciones en la ecuación 14.5.4 nos quedará;

• Foco imagen 
$$\frac{1}{f'} = \frac{n_l - n_m}{n_m} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.5.7)$$

• Foco objeto 
$$\frac{1}{f} = -\frac{n_l - n_m}{n_m} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.5.8)$$

Al igual que antes, si consideramos  $n_m=1$ ;

• Foco imagen,  $n_m=1$  
$$\frac{1}{f'} = (n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.5.9)$$

• Foco objeto,  $n_m=1$  
$$\frac{1}{f} = -(n_l - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14.5.10)$$

Es decir, las distancias focales objeto e imagen son opuestas.

$$\boxed{f' = -f} \quad (14.5.11)$$

Además, de las ecuaciones 14.5.4 y 14.5.6 se obtiene la relación entre las distancia objeto, distancia imagen y foco imagen;

$$\boxed{\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}} \quad (14.5.12)$$

En una lente delgada los dos puntos focales, objeto  $f$  e imagen  $f'$ , están simétricamente ubicados a ambos lados de la lente.

En la figura 14.5.5, se representan los focos objeto e imagen para lentes convergentes y divergentes;

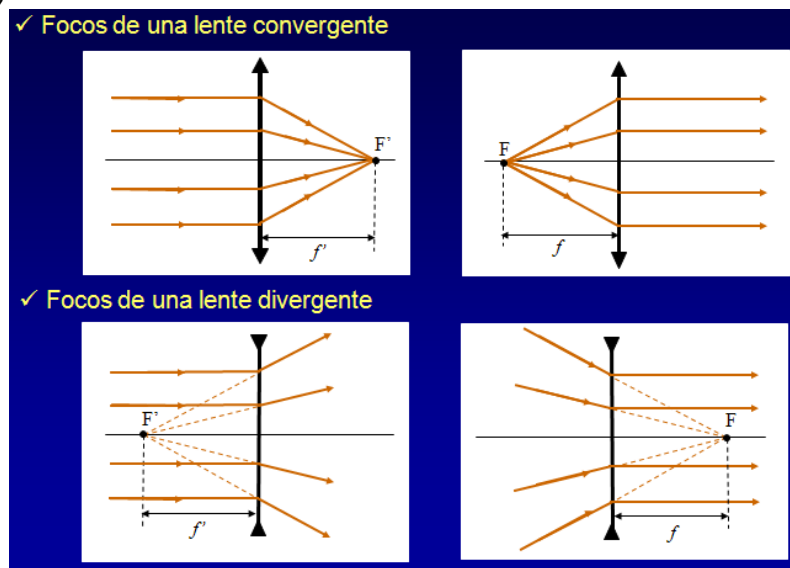
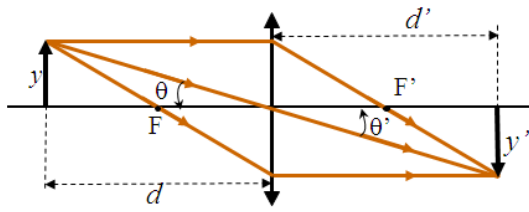


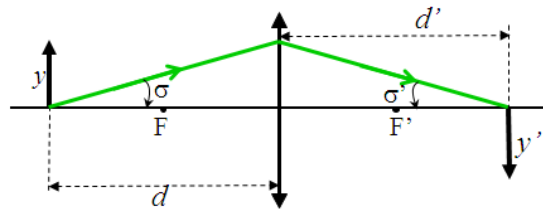
Figura 14.5.5.- Representación gráfica de focos en lentes.



En el caso de las lentes delgadas, y tal como se desarrolló anteriormente, el aumento lateral y angular serán;



$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{d'}{d}$$



$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{\beta}$$

(14.5.13)

Como sucede con las imágenes formadas por los espejos, es conveniente situar las imágenes dadas por las lentes mediante métodos gráficos.

Para lentes convergentes se trazarán tres rayos desde el objeto y su intersección nos da la imagen, su representación se muestra en la Figura 14.5.1.1:

1. Rayo paralelo al eje óptico que al llegar a la lente se desvía pasando por el foco imagen.
2. Rayo que pasa por el centro de la lente y que no sufre desviación dado que las caras de la lente son paralelas en este punto y consideramos una lente delgada.
3. Rayo focal, que pasa por el foco objeto y que al llegar a la lente emerge paralelo al eje óptico.

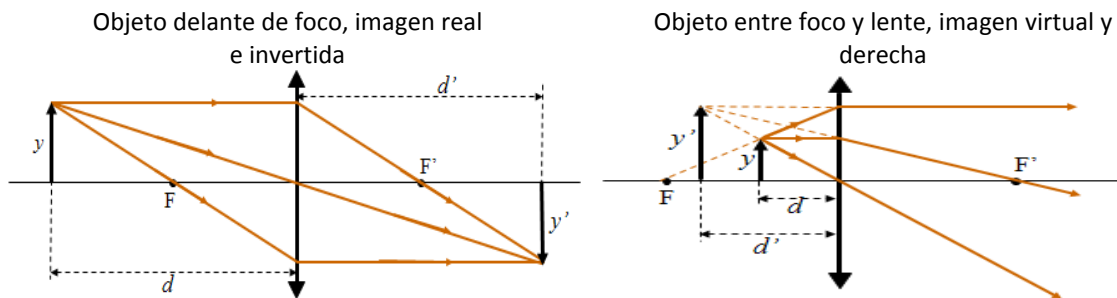


Figura 14.5.1.1.- Diagrama de rayos para lentes convergentes

Para lentes divergentes tendrá un diagrama de rayos tal y como se muestra en la Figura 14.5.1.2. Sus rayos principales son:

1. Rayo paralelo al eje óptico que al llegar a la lente diverge como si procediese del foco imagen.
2. Rayo central que no sufre desviación.

3. Rayo focal, que se dirige hacia el foco objeto y que al llegar a la lente emerge paralelo al eje óptico.

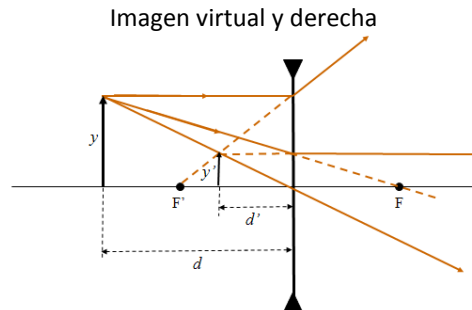


Figura 14.5.1.2.- Diagrama de rayos para lentes divergentes

#### 14.5.1.- Lentes delgadas acopladas.

Si combinamos en un sistema óptico dos o más lentes delgadas, podemos hallar la imagen final producida por el sistema de lentes múltiples hallando la distancia imagen correspondiente a la primera lente y utilizándola junto con la distancia entre lentes para hallar la distancia objeto correspondiente a la segunda lente. Es decir, se considera cada imagen, sea virtual o real, como el objeto para la siguiente lente. En caso de que las dos lentes delgadas de distancia focales  $f_1$  y  $f_2$  estén en contacto, la distancia focal equivalente de la combinación viene dada por,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (14.5.1.1)$$

O lo que equivale a decir que la potencia equivalente de la combinación es la suma de las potencias de las lentes,

$$P = P_1 + P_2 \quad (14.5.1.2)$$

#### 14.5.2.- La lupa, ejemplo de lente convergente.

La lupa es una lente convergente que se usa de forma que la imagen esté sin invertir y para ello es necesario que la imagen sea virtual, lo que se consigue situando el objeto entre el foco objeto de la lente y la lente misma. En caso contrario, es decir, si el objeto está más alejado de la lente que su foco objeto, se obtendrá una imagen real e invertida.

Para calcular el aumento angular de la lupa, hay que definir claramente las condiciones de observación. Para ello, supondremos inicialmente el objeto situado en el punto próximo del ojo ( a 25 cm de distancia que representamos por  $d$ ). En este caso, el ángulo entre la distancia al objeto y su altura  $h$  (Figura 14.5.2.1) vendrá dado por

$$\tan \omega = \frac{h}{d} \quad (14.5.2.1)$$



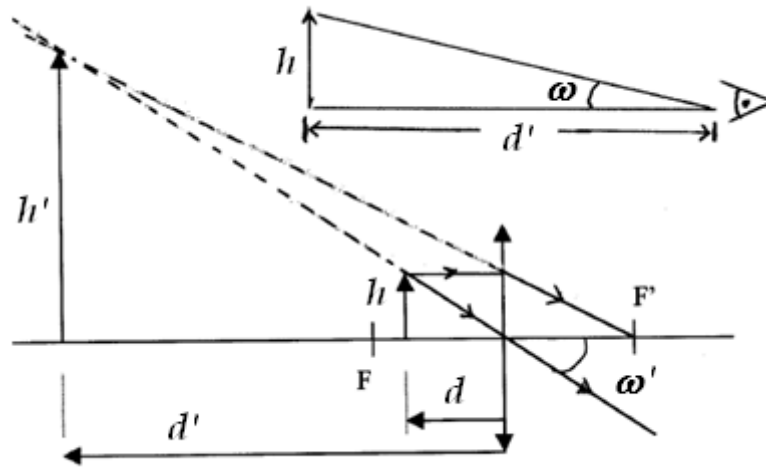


Figura 14.5.2.1. Esquema de funcionamiento de la lupa (suponiendo ojo pegado a la misma)

Ahora se sitúa la lupa de forma que la imagen virtual proporcionada por ésta caiga justamente sobre el punto próximo, para lo que hay que modificar la distancia objeto, que ahora tomará el valor de  $d$ , y supongamos que el ojo está pegado a la lupa. En este caso el ángulo será:

$$\tan \omega' = \frac{h'}{d'} = \frac{h}{d} \quad (14.5.2.2)$$

siendo  $d'=250$  mm. Por tanto, el aumento angular será

$$\gamma = \frac{\tan \omega'}{\tan \omega} = \frac{d'}{d}$$

De la ecuación 14.5.12, que relaciona las distancias objeto e imagen con el foco imagen

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$$

Tenemos entonces que el aumento angular es;

$$\gamma = 1 + \frac{d'}{f'} = 1 + \frac{250\text{mm}}{f'(\text{en mm})} \quad (14.5.2.3)$$

Lo potencia de las lupas es de 40 a 80 dioptrías y depende de las condiciones de observación. Se define entonces un aumento comercial que consiste en suponer que el objeto se sitúa en el foco objeto. En este caso:

$$\gamma = \frac{250\text{mm}}{f'(\text{en mm})} \quad (14.5.2.4)$$



**14.6.- Resumen.**

En este punto se muestra un resumen, a modo de tabla, de las ecuaciones desarrolladas en el tema para dioptrio esférico, espejo esférico y lentes (que se para dos medios con índice de refracción igual a la unidad, aire).

	Dioptrio esférico	Espejo esférico	Lentes
Puntos conjugados	$\frac{n_2}{d_2} - \frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2 - n_1}{r}$	$n_1 = -n_2$ $\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f_2}$	$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} = (1 - n_L) \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$
Aumento lateral	$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{n_1 d_2}{n_2 d_1}$	$\beta = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{d_2}{d_1}$	$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{d_2}{d_1}$
Aumento angular	$\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{d_1}{d_2}$	$\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = -\frac{1}{\beta}$	$\gamma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{\beta}$
Focos	$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot r$ $f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n_2} \cdot r$	$f_2 = f_1 = \frac{r}{2}$	potencia = $\frac{1}{f_2} = (1 - n_L) \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

**14.7.- Bibliografía.**

1. David Jou, Josep Enric Llebot, Carlos Pérez. "Física para Ciencias de la Vida", Editorial Mc Graw Hill (segunda edición).
2. A.S. Frumento. "Biofísica", Editorial Mosby/Doyma.
3. J.W. Kane, M.M. Sternheim. "Física". Editorial Reverte.
4. Miguel Ortuño. "Física para biología, medicina, veterinaria y farmacia". Editorial Critica.