Musterlösung Single Choice Aufgaben 11

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

Die folgenden Aufgaben betreffen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ mit $0, 1 \in A$ bezeichnen wir die Menge der daraus konstruierbaren Punkte mit $\mathrm{Kons}(A)$.

1. Für welchen Körper K existiert ein solches A mit $K = \mathrm{Kons}(A)$?

   (a) $\mathbb{Q}(i)$

   (b) $\mathbb{R}$

   (c) $\mathbb{Q}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\mathbb{C}$

   Erklärung: Wegen $\mathrm{Kons}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ist (d) richtig. Wegen $i^2 = -1$ ist $i \in \mathrm{Kons}(A)$ für jedes A; darum sind (b) und (c) falsch. Ausserdem ist $\sqrt{2} \in \mathrm{Kons}(A)$ für jedes A. Nach Beispiel 3.2.13 der Vorlesung ist aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}(i)$; darum ist auch (a) falsch.

2. Welche Eigenschaft ist *nicht* notwendig, damit ein $a \in \mathbb{C}$ aus $\{0, 1\}$ konstruierbar ist?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $[\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}] = 2$.

   (b) Es gibt einen Körperturm $\mathbb{Q}(a) \subset K_n/K_{n-1}/\ldots/K_0 = \mathbb{Q}$ mit $[K_{i+1}/K_i] = 2$.

   (c) a ist algebraisch.

   (d) Der Grad des Minimalpolynoms von a über $\mathbb{Q}$ ist eine Zweierpotenz.

   Erklärung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Konstruierbarkeit von a äquivalent zur Eigenschaft (b) ist. Aus (b) folgt (c) und (d), weshalb diese Eigenschaften für ein konstruierbares Element a immer erfüllt sind. Hingegen muss (a) nicht gelten, zum Beispiel ist $\sqrt[4]{2}$ konstruierbar, obwohl $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}] = 4$ ist.

3. Welche der folgenden Zahlen ist nicht aus $\{0, 1\}$ konstruierbar?

   (a) $\sqrt[4]{2}$

   (b) $\cos(\frac{\pi}{8})$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\sqrt[6]{2}$

   (d) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

   Erklärung: Für jede aus $\{0, 1\}$ konstruierbare Zahl a ist $[\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}]$ eine Zweierpotenz. Wegen $[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})/\mathbb{Q}] = 6$ ist darum (c) die richtige Antwort. Wegen $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$ ist diese Zahl konstuierbar. Die Zahl $\cos(\frac{\pi}{8})$ ist genau dann konstruierbar, wenn sich der Winkel π achteln lässt, was durch wiederholtes Halbieren aber möglich ist. Schliesslich ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ als Summe konstruierbarer Zahlen auch konstruierbar.

4. Welche Aussage bezüglich der Teilung eines Winkels in gleiche Teile ist richtig?

   (a) Jeder Winkel lässt sich dreiteilen.

   (b) Kein Winkel lässt sich dreiteilen.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Dreiteilung eines gegebenen Winkels ist genau dann möglich, wenn dessen Sechsteilung möglich ist.

   (d) Die Dreiteilung eines gegebenen Winkels ist genau dann möglich, wenn dessen Verdreifachung möglich ist.

   Erklärung: Wir wissen aus der Vorlesung, dass sich nicht jeder Winkel dreiteilen lässt. Dagegen lässt sich der Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreiteilen, da $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ konstruierbar ist. Also sind sowohl (a) als auch (b) falsch. Wenn die Dreiteilung eines Winkels möglich ist, so kann durch Halbierung des entstandenen Winkels der gegebene Winkel sechsgeteilt werden. Umgekehrt ist durch eine Verdoppelung des sechsgeteilten Winkels eine Dreiteilung möglich. Also ist Aussage (c) richtig. Schliesslich ist die Verdreifachung jedes Winkels möglich, aber nicht die Dreiteilung, also ist Aussage (d) falsch.

5. Welche der folgenden Figuren ist aus $\{0, 1\}$ konstruierbar?

   (a) Ein Kreis mit Flächeninhalt 1.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Ein Quadrat mit Flächeninhalt 3.

   (c) Ein Würfel mit Volumen 3.

   (d) Keine der obigen Figuren ist konstruierbar.

   Erklärung: Ein Quadrat mit Flächeninhalt 3 hat Seitenlänge $\sqrt{3}$. Weil dies konstruierbar ist, ist Antwort (b) richtig. Ein Kreis mit Flächeninhalt 1 hat den Radius $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Da dies eine transzendente Zahl ist, ist (a) nicht konstruierbar. Ein Würfel mit Volumen 3 hat eine Seitenlänge von $\sqrt[3]{3}$. Diese Zahl hat das Minimalpolynom $X^3 - 3$ über $\mathbb{Q}$; somit ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}] = 3$ und $\sqrt[3]{3}$ nicht konstruierbar. Daher ist auch (c) nicht konstruierbar.