TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA GEOMETRÍA AFÍN Y PROYECTIVA.

PATRICIA MARTÍNEZ RODRÍGUEZ Y MARÍA J. VALE GONSALVES

1. Introducción

En geometría sintética, los isomorfismos entre planos proyectivos son las aplicaciones biyectivas que llevan puntos alineados a puntos alineados. Los isomorfismos o colineaciones afines son las aplicaciones biyectivas entre espacios afines de la misma dimensión finita que llevan variedades lineales a variedades lineales de la misma dimensión. En el caso de espacios afines sobre cuerpos con más de 2 elementos, las colineaciones afines son las aplicaciones biyectivas que llevan puntos alineados a puntos alineados. Utilizando el concepto de aplicación semilineal, se definen los isomorfismos semilineales afines, entre los cuales cabe destacar las afinidades, y se prueba que todo isomorfismo semilineal afín es una colineación afín. Se demuestra el teorema fundamental de la geometría afín, que afirma que toda colineación afín entre espacios afines de dimensión ≥ 2 sobre cuerpos K y K', respectivamente, es un isomorfismo semilineal afín.

En el caso de colineaciones entre rectas afines se prueba que el teorema fundamental de la geometría afín no es válido; en particular, si F es un cuerpo finito con más de 4 elementos, existen colineaciones afines de F en F que no son isomorfismos semilineales afines.

En el caso del espacio proyectivo analítico se definen los isomorfismos o colineaciones proyectivas como las aplicaciones biyectivas entre espacios proyectivos de igual dimensión que llevan puntos alineados a puntos alineados. Utilizando de nuevo el concepto de aplicación semilineal, se definen los isomorfismos semilineales proyectivos, entre los cuales cabe destacar las proyectividades, y se prueba que todo isomorfismo semilineal proyectivo es una colineación proyectiva. Se prueba el teorema fundamental de la geometría proyectiva, que afirma que toda colineación entre espacios proyectivos analíticos de dimensión ≥ 2 es un isomorfismo semilineal proyectivo; la demostración realizada utiliza el teorema fundamental de la geometría afín y la relación entre colineaciones afines y proyectivas dada por el encaje del espacio afín en el espacio proyectivo.

En el caso de colineaciones proyectivas entre rectas se demuestra que el teorema fundamental de la geometría proyectiva no es cierto; en particular si F es un cuerpo finito con más de 4 elementos, existen colineaciones proyectivas de $\mathbb{P}(F^2)$ en $\mathbb{P}(F^2)$ que no son isomorfismos semilineales proyectivos.

Finalmente, se prueba que el teorema fundamental de la geometría afín se puede demostrar a partir del teorema fundamental de la geometría proyectiva, utilizando de nuevo el encaje del espacio afín en el espacio proyectivo.

Este trabajo está inspirado en las clases de Geometría Proyectiva impartidas por el profesor Emilio Villanueva Novoa durante varios años en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela.

2. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRÍA AFÍN

2.1. Espacio afín

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Definición 2.1. Un *espacio afín* sobre V es una terna $(\mathbb{A}, V, \to)$, formada por el espacio vectorial V, un conjunto $\mathbb{A}$ cuyos elementos se llaman *puntos*, y una operación externa:

$$\begin{array}{rcl} \to : \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \longrightarrow & V \\ (P\ ,\ Q) & \longmapsto & \overrightarrow{PQ}\,, \end{array}$$

donde por $\overrightarrow{PQ}$ o también por $\overrightarrow{P,Q}$ denotamos la imagen por la aplicación $\to$ del par (P, Q), verificando los siguientes axiomas:

1. Relación de Chasles: Para cualesquiera puntos $P, Q, R \in \mathbb{A}$, se verifica
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

2. Para cada punto $P \in \mathbb{A}$ y cada vector $v \in V$, existe un único punto $Q \in \mathbb{A}$ tal que $\overrightarrow{PQ} = v$. Se escribe $Q = P + v$.

En general denotaremos el espacio afín $(\mathbb{A}, V, \to)$ por $\mathbb{A}$.

2.2. Propiedades Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V. Se tiene

(1) $\overrightarrow{P\,P} = 0$ para todo $P \in \mathbb{A}$.

(2) Dados $P, Q \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{P\,Q} = 0 \Rightarrow Q = P$.

(3) $\overrightarrow{Q\,P} = -\overrightarrow{P\,Q}$, para todo $P, Q \in \mathbb{A}$.

(4) Regla del paralelogramo: $\overrightarrow{P\,Q} = \overrightarrow{R\,T} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P\,R} = \overrightarrow{Q\,T}$

(5) $P + (u + v) = (P + u) + v$, para todo $P \in \mathbb{A}$ y para cualesquiera $u, v \in V$.

(6) P+0=P, para todo $P \in \mathbb{A}$.

Definición 2.3. Se llama *dimensión* del espacio afín $(\mathbb{A}, V, \to)$ a la dimensión de V.

Definición 2.4. Sea A un punto de $\mathbb{A}$ y sea U un subespacio de V. Se llama *variedad lineal* de $\mathbb{A}$ que pasa por A y con dirección U al conjunto

$$A + U = \{\, A + u \mid u \in U \,\}.$$

Obsérvese que $\mathbb{A}$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. En efecto, $\mathbb{A} = A + V$, para todo $A \in \mathbb{A}$.

2.5. Propiedades. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V.

(1) Sea U un subespacio de V y sean $A, B \in \mathbb{A}$. Se tiene

$$A + U = B + U \iff B \in A + U \iff \overrightarrow{AB} \in U.$$

(2) Sean V_1 y V_2 subespacios de V y sean $A, B \in \mathbb{A}$. Se tiene

$$A + V_1 \subset B + V_2 \iff \overrightarrow{AB} \in V_2,\ V_1 \subset V_2\,.$$

y en particular,

$$A + V_1 = B + V_2 \ \Rightarrow\ V_1 = V_2.$$

Definición 2.6. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión finita n y sea $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dirección U. Se llama *dimensión* de L a la dimensión del subespacio U,

$$\dim L = \dim_K U.$$

Se llaman *rectas* y *planos* a las variedades lineales de dimensiones 1 y 2, respectivamente. Se llaman *hiperplanos* de $\mathbb{A}$ a las variedades lineales de dimensión $n-1$. Si la variedad lineal L tiene dimensión 0, entonces $L = A + \{0\} = \{A\}$. Se considera el conjunto vacío $\varnothing$ como una variedad lineal de dimensión -1.

Ejemplos 2.7. (1) El conjunto de los puntos del plano (espacio) ordinario, junto con el espacio vectorial de los vectores libres del plano (espacio) y con la aplicación que lleva cada par de puntos P, Q del plano (espacio) al vector libre $[\overrightarrow{PQ}]$, forman un espacio afín.

(2) Sea V un espacio vectorial sobre K. La terna $(V, V, \rightarrow)$, donde para cualesquiera $a, b \in V$, $\overrightarrow{ab} = b - a$, es un espacio afín. Este espacio afín se llama el *espacio afín* de V; lo denotaremos por V.

(3) Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y $L = A + U$ una variedad lineal de $\mathbb{A}$. La terna $(L, U, \rightarrow)$, siendo $\rightarrow\, : L \times L \longrightarrow U$ la aplicación que lleva cada par $(P, Q) \in L \times L$ al vector $\overrightarrow{PQ}$ de U, es un espacio afín sobre U.

Proposición 2.8. *Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$. La intersección $\bigcap_{i\in I} L_i$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}$. Además, si $\bigcap_{i\in I} L_i \neq \varnothing$ y $L_i = A_i + V_i$, entonces $L_i = C + V_i$ con $C \in \bigcap_{i\in I} L_i$ y se tiene*

$$\bigcap_{i\in I} L_i \,=\, C \,+\, \bigcap_{i\in I} V_i.$$

Definición 2.9. Sea $S \subset \mathbb{A}$. Se llama *variedad lineal generad*a por S y la denotaremos por $\langle\langle S\rangle\rangle$ a la menor variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a S, es decir,

$$\langle\langle S\rangle\rangle = \bigcap_{i\in I} L_i\,,$$

donde $\{L_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$ que contienen a S.

Observación 2.10. Si $S \neq \varnothing$ es un subconjunto de $\mathbb{A}$ entonces

$$\langle\langle S\rangle\rangle = A + \langle\, \overrightarrow{AP} \ \mid\ P \in S\rangle,$$

para cualquier $A \in S$.

En general, si L_1 y L_2 son variedades lineales de $\mathbb{A}$, su unión conjuntista $L_1 \cup L_2$ no es una variedad lineal de $\mathbb{A}$.

Definición 2.11. Sea $\{L_i\}_{i\in I}$ un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se llama *variedad lineal unión* o *suma* de las variedades $\{L_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{A}$ a la menor variedad lineal de $\mathbb{A}$ que contiene a L_i, para cada $i \in I$; la denotaremos por $\circ_{i\in I} L_i$. Entonces

$$\circ_{i\in I} L_i = \langle\langle \bigcup_{i\in I} L_i \rangle\rangle.$$

En particular, si $S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ entonces escribiremos $P_1 \circ \ldots \circ P_r = \langle\langle S \rangle\rangle$.

2.12. Propiedades. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Sean $L_1 = A + V_1$ y $L_2 = B + V_2$ variedades lineales de $\mathbb{A}$. Se tiene

(1) $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \iff \overrightarrow{AB} \in V_1 + V_2$.

(2) $L_1 \circ L_2 = B + \langle \overrightarrow{AB} \rangle + V_1 + V_2$.

(3) Identidad de Grassmann para variedades lineales afines:
Si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, entonces

$$\dim(L_1 \circ L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

(4) Si $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces

$$\dim(L_1 \circ L_2) = 1 + \dim(V_1 + V_2).$$

Definición 2.13. Se dice que las variedades lineales $L_1 = A + V_1$ y $L_2 = B + V_2$ son *paralelas*, si $V_1 \subset V_2$ o $V_2 \subset V_1$. Se escribe $L_1 \parallel L_2$.

Proposición 2.14. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín y sean L_1, L_2 y L variedades lineales no vacías de $\mathbb{A}$.*

(1) *Si $L_1 \parallel L_2$ y $\dim L_1 = \dim L_2$, entonces L_1 y L_2 tienen la misma dirección.*

(2) *Si $L_1 \parallel L_2$ y $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, entonces $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.*

(3) *Sea P un punto de $\mathbb{A}$ tal que $P \notin L$. Existe una única variedad lineal L' de igual dimensión que L que pasa por P y es paralela a L.*

Demostración. (1) Sean $L_1 = A_1 + V_1$ y $L_2 = A_2 + V_2$. Dado que $V_1 \subset V_2$ o $V_2 \subset V_1$ y $\dim V_1 = \dim V_2$, se tiene que $V_1 = V_2$.

(2) Si $C \in L_1 \cap L_2$, entonces $L_1 = C + V_1$ y $L_2 = C + V_2$. Dado que $V_1 \subset V_2$ o $V_2 \subset V_1$, se tiene que $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$.

(3) Si $L = A + U$, entonces $L' = P + U$. $\square$

Definición 2.15. Sean L_1 y L_2 variedades lineales del espacio afín $\mathbb{A}$ sobre V. Se dice que L_1 y L_2 se *cortan* si $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$. Se dice L_1 y L_2 se *cruzan* si no son paralelas y no se cortan.

Proposición 2.16. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión $n > 1$ sobre un espacio vectorial.*

(1) *Si L es una variedad lineal no vacía y P es un punto de $\mathbb{A}$ tal que $P \notin L$, entonces* $\dim(L \circ P) = 1 + \dim L$.

(2) *Si L es una variedad lineal no vacía y H un hiperplano tal que $L \nparallel H$, entonces* $\dim(L \cap H) = \dim L - 1$.

(3) *Si L es una variedad lineal no vacía y H un hiperplano tal que $L \cap H = \varnothing$, entonces L y H son variedades lineales paralelas.*

(4) *Si L_1, L_2 son variedades lineales no vacías tales que $L_1 \cap L_2 = \varnothing$, entonces L_1 y L_2 son paralelas si, y sólo si, $dim(L_1 \circ L_2) = 1 + máx\{dim L_1, dim L_2\}$*

Demostración. (1) Se sigue de 2.12 (4).

(2) Sean $L = A + U$ y $H = B + W$. Dado que $U \not\subset W$ y $\dim W = n - 1$, se tiene que $U + W = V$ y $L \circ H = \mathbb{A}$. Puesto que $\overrightarrow{AB} \in U + W$, se tiene que $L \cap H \neq \varnothing$. La identidad de Grassmann para L y H da el resultado.

(3) Si $L = A + U$ y $H = B + W$, dado que $\overrightarrow{AB} \notin U + W$, se tiene que $U + W \neq V$. Por ser $\dim W = n - 1$, se obtiene que $U + W = W$ y por tanto $U \subset W$.

(4) Sean $L_1 = A + U_1$ y $L_2 = B + U_2$. De 1.12 (4) se sigue que $\dim(L_1 \circ L_2) = 1 + \dim(U_1 + U_2)$. El resultado se sigue de que $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$ si, y sólo si, $\dim(U_1 + U_2) = \max\{\dim U_1, \dim U_2\}$.

□

Definición 2.17. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre un espacio vectorial. Se dice que los puntos $P_1, \dots P_r \in \mathbb{A}$ son *afínmente independientes* si los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}$ son vectores linealmente independientes.

Proposición 2.18. (1) *Sean $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{A}$. Son equivalentes:*

- (a) *$P_1, \dots, P_r$ son afínmente independientes.*
- (b) $\dim(P_1 \circ \dots \circ P_r) = r - 1$.
- (c) $P_i \notin P_1 \circ \dots \circ \widehat{P_i} \circ \dots \circ P_r$, $i = 1, \dots, r$.

(2) *Si la dimensión de $\mathbb{A}$ es n, el número máximo de puntos afínmente independientes es $n + 1$.*

(3) *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín de dimensión n. Si $P_1, \dots P_r$, $r \leq n + 1$, son puntos afínmente independientes, existen puntos $P_{r+1}, \dots, P_{n+1}$ tales que $P_1, \dots, P_{n+1}$ son afínmente independientes y generan $\mathbb{A}$.*

Demostración. (1) $(a) \Leftrightarrow (b)$ Se sigue de que $P_1 \circ \dots \circ P_r = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle$.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ Se sigue de que

$$\overrightarrow{P_1P_i} \in \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \widehat{\overrightarrow{P_1P_i}} \dots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle \iff P_i \in P_1 \circ \dots \circ \widehat{P_i} \circ \dots \circ P_r.$$

(2) Si $P_1, \dots, P_r$ son puntos afínmente independientes entonces los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_1P_r}$ son vectores linealmente independientes y por tanto $r - 1 \leq n$. Veamos que existen $n + 1$ puntos afínmente independientes. En efecto, si A es un punto y $v_1, \dots, v_n$ vectores linealmente independientes, entonces los puntos $A, A + v_1, \dots, A + v_n$ son afínmente independientes.

(3) Sean $v_r, \ldots, v_n$ vectores tales que $\overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r}, v_r, \ldots, v_n$ son linealmente independientes. Los puntos $P_1, \ldots, P_r, P_1 + v_r, \ldots, P_1 + v_n$ son afínmente independientes. $\square$

Ejemplos 2.19. (1) Si $\dim \mathbb{A} \geq 1$, entonces P_1, P_2 son puntos afínmente independientes si, y solo si, $P_1 \neq P_2$.

(2) Si $\dim \mathbb{A} \geq 2$, entonces P_1, P_2, P_3 son puntos afínmente independientes si, y solo si, P_1, P_2, P_3 no están alineados.

(3) Si $\dim \mathbb{A} \geq 3$, entonces P_1, P_2, P_3, P_4 son afínmente independientes si, y solo si, P_1, P_2, P_3, P_4 no son coplanarios.

Proposición 2.20. (1) *Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos afínmente independientes y $P_{r+1} \notin P_1 \circ \ldots P_r$, entonces los puntos $P_1, \ldots, P_r, P_{r+1}$ son afínmente independientes.*

(2) *Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r, entonces existen puntos afínmente independientes $P_1, \ldots, P_{r+1} \in L$ tales que $L = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$.*

(3) *Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r y $P_1, \ldots, P_{r+1} \in L$ son puntos afínmente independientes, entonces $L = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$.*

(4) *Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ de dimensión r y $L = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$, entonces $P_1, \ldots, P_{r+1}$ son puntos afínmente independientes.*

(5) *Sean $P_1, \ldots, P_r$ puntos de $\mathbb{A}$. Existen puntos afinmente independientes $Q_1 \ldots Q_s \in \{P_1, \ldots, P_r\}$ tales que $P_1 \circ \ldots \circ P_r = Q_1 \circ \ldots \circ Q_s$.*

Demostración. (1) Por la proposición 2.16 (1), $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}) = 1 + \dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$. El resultado se sigue de la proposición 2.18 (1).

(2) Sea $L = A + U$ una variedad lineal de dimensión r y sea $B = \{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de U. Los puntos $A, A + v_1, \ldots, A + v_r$ son afínmente independientes y generan L.

(3) Si $P_1, \ldots, P_{r+1} \in L$, entonces $P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1} \subset L$. Dado que $P_1, \ldots, P_{r+1}$ son puntos afínmente independientes, $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}) = r = \dim L$, de donde se sigue que $L = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$.

(4) Dado que $\dim L = \dim(P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}) = r$, por la proposición 2.18 los puntos $P_1 \ldots P_{r+1}$ son afínmente independientes.

(5) Se tiene $P_1 \circ \ldots \circ P_r = P_1 + \langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots \overrightarrow{P_1P_r} \rangle$. Si $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = s - 1 \geq 0$, entonces existen vectores $\overrightarrow{P_1P_{i_1}}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_{i_s}} \in \left\{ \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_{i_s}} \right\}$ tales que

$$\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_r} \rangle = \langle \overrightarrow{P_1P_{i_1}}, \ldots, \overrightarrow{P_1P_{i_s}} \rangle.$$

Poniendo $Q_1 = P_{i_1}, \ldots, Q_s = P_{i_s}$, se tiene que $P_1 \circ \ldots \circ P_r = Q_1 \circ \ldots \circ Q_s$. $\square$

2.2. Colineaciones afines

En esta sección V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K y V' es un espacio vectorial sobre el cuerpo K'.

Definición 2.21. ([7, Ch. 1, p. 65]) Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión finita $n \geq 1$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Se dice que una aplicación $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una *colineación afín* o *isomorfismo de espacios afines* si verifica:

1. τ es una aplicación biyectiva.
2. Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$ entonces $\tau(L)$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}'$ y $\dim L = \dim \tau(L)$.

Se dice que los espacios afines $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ son *isomorfos* si existe una colineación afín $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$.

Observación 2.22. Obsérvese que para $n = 1$, todas las aplicaciones biyectivas de una recta afín en otra recta afín son colineaciones afines.

Lema 2.23. *Sea $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una colineación afín. Se tiene*

(1) *Los puntos $P_1, \ldots, P_r$ de $\mathbb{A}$ son afínmente independientes si, y sólo si, los puntos $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_r)$ son afínmente independientes.*

(2) *Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes, entonces*

$$\tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r).$$

.

Demostración. (1) Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $\tau(P_i) \in \tau(P_1) \circ \ldots \circ \widehat{\tau(P_i)} \circ \ldots \circ \tau(P_r)$, Dado que $\tau(P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P}_i \circ \ldots \circ P_r)$ es una variedad lineal se tiene

$$\tau(P_1) \circ \ldots \circ \widehat{\tau(P_i)} \circ \ldots \circ \tau(P_r) \subset \tau(P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P}_i \circ \ldots \circ P_r).$$

Por tanto $\tau(P_i) \in \tau(P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P}_i \circ \ldots \circ P_r)$ y así, $P_i \in P_1 \circ \ldots \circ \widehat{P}_i \circ \ldots \circ P_r$.

Recíprocamente, si $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_r)$ son afínmente independientes, entonces $\dim \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r) = r-1$. De la inclusión $\tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r) \subset \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$ se sigue que $\dim \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) \geq r-1$. Dado que $\dim \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = \dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$ y $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) \leq r-1$, se tiene que $\dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = r-1$. Por la proposición 2.18 (1), los puntos $P_1, \ldots, P_r$ son afínmente independientes.

(2) Se tiene que $\tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r) \subset \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$. Veamos que las variedades lineales $\tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r)$ y $\tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$ tienen igual dimensión. Por ser τ coalineación afín, se tiene que $\dim \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = \dim(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = r-1$. Por (1), $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_r)$ son puntos afínmente independientes y entonces de 2.18 (1) se sigue que $\dim \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r) = r-1$. ☐

Proposición 2.24. (1) *Si $\tau \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ y $\tau' \colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ son colineaciones afines, entonces $\tau' \circ \tau$ es una colineación afín.*

(2) *Sea $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una colineación afín.*

(a) *Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos de $\mathbb{A}$, entonces $\tau(P_1 \circ \cdots \circ P_r) = \tau(P_1) \circ \cdots \circ \tau(P_r)$.*

(b) *Si P, P_1 y P_2 son puntos de $\mathbb{A}$ y $P \in P_1 \circ P_2$, entonces $\tau(P) \in \tau(P_1) \circ \tau(P_2)$.*

(c) *$\tau^{-1} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ es una colineación afín.*

(d) *Si $\{L_i\}_{i \in I}$ un conjunto de variedades lineales de $\mathbb{A}$, entonces*

$$\tau(\, \cap_{i \in I} L_i) = \cap_{i \in I}\, \tau(L_i), \quad \tau(\, \circ_{i \in I} L_i) = \circ_{i \in I}\, \tau(L_i),$$

(e) *Si L_1 y L_2 son variedades lineales afines de $\mathbb{A}$, entonces se tiene*

$$L_1 \parallel L_2 \iff \tau(L_1) \parallel \tau(L_2).$$

Demostración. (1) Dado que τ y τ' son aplicaciones biyectivas, $\tau' \circ \tau$ es una aplicación biyectiva. Por ser τ y τ' colineaciones afines, si L una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\tau(L)$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}'$ y $\tau'(\tau(L))$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}''$ y además $\dim L = \dim \tau(L) = \dim \tau'(\tau(L))$.

(2) (a) Por la proposición 2.20 (5), existen puntos $Q_1, \ldots, Q_s \in P_1 \circ \ldots \circ P_r$, tales que $Q_1 \circ \ldots \circ Q_s = P_1 \circ \ldots \circ P_r$. Por el lema 2.23 (2), se tiene

$$\tau(Q_1 \circ \ldots \circ Q_s) = \tau(Q_1) \circ \ldots \circ \tau(Q_s).$$

Dado que $\tau(P_i) \in \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = \tau(Q_1 \circ \ldots \circ Q_s)$, para $i = 1, \ldots, r$, entonces

$$\tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r) \subset \tau(Q_1 \circ \ldots \circ Q_s) = \tau(Q_1) \circ \ldots \circ \tau(Q_s),$$

y así, $\tau(Q_1) \circ \ldots \circ \tau(Q_s) = \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r)$

(b) Se sigue de (a).

(c) Sea L' una variedad lineal de $\mathbb{A}'$ de dimensión r. Por la proposición 2.20 (2), existen puntos $P'_1, \ldots, P'_{r+1}$ afínmente independientes tales que $L' = P'_1 \circ \ldots \circ P'_{r+1}$. Sea $P_i \in \mathbb{A}$, tal que $P'_i = \tau(P_i)$, para $i = 1, \ldots, r+1$. Por el lema 2.23 (1), los puntos $P_1, \ldots, P_{r+1}$ son afínmente independientes. Se tiene

$$L' = \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_{r+1}) = \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}),$$

y por tanto $\tau^{-1}(L') = P_1 \circ \ldots \circ P_{r+1}$ es una variedad lineal de dimensión r.

(d) La identidad $\tau(\cap_{i\in I} L_i) = \cap_{i\in I}\, \tau(L_i)$ se tiene por ser τ aplicación biyectiva.

Dado que $\tau(\circ_{i\in I} L_i)$ es una variedad lineal, se tiene

$$\circ_{i\in I}\, \tau(L_i) \subset \tau(\circ_{i\in I} L_i).$$

Por otra parte

$$L_i = \tau^{-1}(\tau(L_i)) \subset \tau^{-1}(\circ_{i\in I}\, \tau(L_i)),$$

para cada $i \in I$. Por ser τ^{-1} una colineación afín, $\tau^{-1}(\circ_{i\in I}\, \tau(L_i))$ es una variedad lineal y entonces

$$\circ_{i\in I} L_i \subset \tau^{-1}(\circ_{i\in I}\, \tau(L_i)),$$

de donde se sigue

$$\tau(\circ_{i\in I} L_i) \subset \circ_{i\in I}\, \tau(L_i).$$

(f) Si $L_1 \subset L_2$ o $L_2 \subset L_1$, entonces $\tau(L_1) \subset \tau(L_2)$ o $\tau(L_2) \subset \tau(L_1)$. Si $L_1 \not\subset L_2$, $L_2 \not\subset L_1$ y $L_1 \parallel L_2$, entonces $L_1 \cap L_2 = \varnothing$. Por la proposición 2.16 (4), $L_1 \parallel L_2$ si, y sólo si, $\dim(L_1 \circ L_2) = 1 + \max\{\dim L_1, \dim L_2\}$, equivalentemente si

$$\dim(\tau(L_1) \circ \tau(L_2)) = 1 + \max\{\dim \tau(L_1), \dim \tau(L_2)\},$$

es decir si $\tau(L_1) \parallel \tau(L_2)$. □

Proposición 2.25. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V y $\mathrm{S}(\mathbb{A})$ el conjunto de colineaciones afines de $\mathbb{A}$. Se tiene que $\mathrm{S}(\mathbb{A})$ es un grupo con la operación composición.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.24. □

Definición 2.26. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Se dice que la aplicación biyectiva $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ *lleva puntos alineados a puntos alineados*, si verifica la siguiente condición

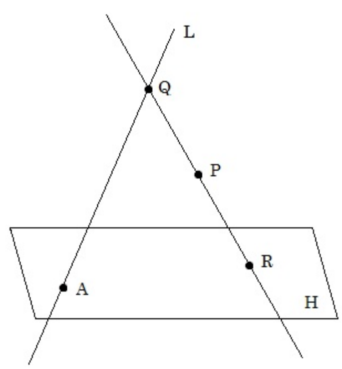
$$P \in P_1 \circ P_2 \Longrightarrow \tau(P) \in \tau(P_1) \circ \tau(P_2).$$

Lema 2.27. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V de dimensión $n \geq 2$ y K un cuerpo con más de dos elementos. Sean L una recta y H un hiperplano tales que $L \cap H = \{A\}$. Si P es un punto de $\mathbb{A}$, entonces existen puntos $Q \in L$, $R \in H$, $Q \neq R$, tales que P, Q y R están alineados.*

Demostración. Para $P \in L$ o $P \in H$, la demostración es trivial. Supongamos que $P \notin L$ y $P \notin H$.

Si $n = 2$, sea $Y \in L$, $Y \neq A$. Si $(P \circ Y) \cap H = \{Z\}$, entonces tomamos $Q = Y$ y $R = Z$. Si $(P \circ Y) \cap H = \varnothing$, entonces por la proposición 2.16 (3), la recta $P \circ Y$ es paralela a la recta H. Dado que K tiene más de dos elementos, las rectas de $\mathbb{A}$ tienen al menos tres puntos. Sea $Y' \in L$ tal que $Y' \neq Y$, $Y' \neq A$. Dado que la recta $P \circ Y'$ no puede ser paralela a H, entonces $(P \circ Y') \cap H = \{Z'\}$. En este caso tomamos $Q = Y'$ y $R = Z'$.

Si $n \geq 3$, sea $Y \in L$, $Y \neq A$. Si $(P \circ Y) \cap H = \{Z\}$, entonces tomamos $Q = Y$ y $R = Z$. Si $(P \circ Y) \cap H = \varnothing$, entonces por la proposición 2.16 (3), la recta $P \circ Y$ es paralela al hiperplano H. Sea $Y' \in L$ tal que $Y' \neq Y$, $Y' \neq A$. Veamos que $(P \circ Y') \cap H \neq \varnothing$. En efecto, si $(P \circ Y') \cap H = \varnothing$, entonces la recta $P \circ Y$ es paralela a H y el plano $P \circ Y \circ Y'$ es tambien paralelo a H. Dado que $L \subset P \circ Y \circ Y'$ llegamos a que la recta L es paralela a H, lo cual es una contradicción. Por tanto $(P \circ Y') \cap H = \{Z'\}$. En este caso tomamos $Q = Y'$



y $R = Z'$. □

Lema 2.28. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión finita $n \geq 2$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente y supongamos que el cuerpo K tiene más de dos elementos. Sea $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación biyectiva que lleva puntos alineados a puntos alineados. Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes, entonces se tiene*

$$\tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) \subset \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r), \quad 1 \leq r \leq n+1.$$

Demostración. Razonaremos por inducción sobre r. Para $r = 2$ el resultado es cierto por hipótesis. $\tau(P_1 \circ P_2) \subset \tau(P_1) \circ \tau(P_2)$. Supongamos el resultado cierto para $r - 1 \geq 2$. Sean $P_1, \ldots, P_r$ puntos afínmente independientes. Pongamos $H = P_2 \circ \ldots \circ P_r$ y $L = P_1 \circ P_2$. Las variedades lineales H y L son un hiperplano y una recta de $P_1 \circ \ldots \circ P_r$, respectivamente, y por la proposición 2.16 (2), $L \cap H = \{P_2\}$.

Sea $P \in P_1 \circ \ldots \circ P_r$. Por el lema 2.27, existen puntos $Q \in L$ y $R \in H$, $Q \neq R$ tales que $P \in Q \circ R$. Por hipótesis, $\tau(P) \in \tau(Q) \circ \tau(R)$. Dado que

$$\tau(Q) \in \tau(P_1) \circ \tau(P_2) \subset \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r)$$

y que por hipótesis de inducción

$$\tau(R) \in \tau(P_2 \circ \ldots \circ P_r) \subset \tau(P_2) \circ \ldots \circ \tau(P_r) \subset \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r),$$

se tiene que $\tau(P) \in \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r)$.

□

Proposición 2.29. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión finita $n \geq 2$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente y supongamos que el cuerpo K tiene mas de dos elementos. Sea $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación biyectiva que lleva puntos alineados a puntos alineados.*

(1) *Si los puntos $P_1, \ldots, P_r$ de $\mathbb{A}$ son afínmente independientes entonces los puntos $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_r)$ son afínmente independientes.*

(2) *Si $P_1, \ldots, P_r$ son puntos de $\mathbb{A}$ afínmente independientes, entonces*

$$\tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r) = \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r).$$

.

Demostración. (1) Por la proposición 2.18 existen puntos $P_{r+1}, \ldots, P_{n+1} \in \mathbb{A}$ tales que $P_1, \ldots, P_{n+1}$ son afínmente independientes y $P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1} = \mathbb{A}$. Por el lema 2.28,

$$\tau(P_1 \circ \ldots \circ P_{n+1}) \subset \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_{n+1}),$$

y entonces $\tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_{n+1}) = \mathbb{A}'$. Dado que $\dim \mathbb{A}' = n$, por la proposición 2.20 (4), los puntos $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_{n+1})$ son afínmente independientes y entonces los puntos $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_r)$ también lo son.
(2) Veamos, por reducción al absurdo, que $\tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r) \subset \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$. Supongamos que $Q' \in \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r)$ y $Q' \notin \tau(P_1 \circ \ldots \circ P_r)$. Sea $Q \in \mathbb{A}$ tal que $Q' = \tau(Q)$. Se tiene que $Q \notin P_1 \circ \ldots \circ P_r$. Por la proposición 2.20 (1), los puntos $P_1, \ldots, P_r, Q$ son afínmente independientes. Por (1), $\tau(P_1), \ldots, \tau(P_r), Q'$ son afínmente independientes y entonces $Q' \notin \tau(P_1) \circ \ldots \circ \tau(P_r)$. □

Teorema 2.30. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión finita $n \geq 2$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente y supongamos que el cuerpo K tiene mas de dos elementos. La aplicación $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una colineación afín si, y sólo si, τ es una aplicación biyectiva que lleva puntos alineados a puntos alineados.*

Demostración. Si $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una colineación afín, entonces τ es una aplicación biyectiva que lleva puntos alineados a puntos alineados, por la proposición 2.24 (2)(b).

Recíprocamente, sea $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación biyectiva que lleva puntos alineados a puntos alineados y L variedad lineal de $\mathbb{A}$, $\dim L = r$. Por la proposición 2.20 (2), existen puntos $P_1, \dots, P_{r+1} \in L$ afínmente independientes tales que $L = P_1 \circ \dots \circ P_{r+1}$. Por la proposición 2.29 (2), $\tau(L) = \tau(P_1) \circ \dots \circ \tau(P_{r+1})$. Así, $\tau(L)$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}'$ y por la proposición 2.29 (1), $\dim \tau(L) = r$. □

Observación 2.31. Si el cuerpo K tiene solo dos elementos, las rectas de $\mathbb{A}$ son los conjuntos con dos elementos y por tanto todas las aplicaciones biyectivas de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A}$ llevan puntos alineados a puntos alineados. Si además, $n \geq 3$ es facil dar ejemplos de aplicaciones biyectivas de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A}$ que no llevan planos en planos.

Por ejemplo, si $n = 3$ y $K = \mathbb{Z}_2$, entonces $\mathbb{A}$ tiene ocho puntos y cada plano de $\mathbb{A}$ está formado por cuatro puntos cada tres no alineados. Sean P, Q, R y S los cuatro del plano Π y T un punto tal que $T \notin \Pi$. La aplicación biyectiva $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tal que $\tau(P) = T$, $\tau(T) = P$ y deja fijos los otros seis puntos de $\mathbb{A}$ no es una colineación afín. En efecto, $\tau(\Pi) = \{T, Q, R, S\}$ y si τ fuese colineación afín, entonces

$$\tau(\Pi) = \tau(Q \circ R \circ S) = \tau(Q) \circ \tau(R) \circ \tau(S) = Q \circ R \circ S = \Pi,$$

de donde se seguiría que $T \in \Pi$.

2.3. Aplicaciones semilineales afines

En esta sección V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K y V' es un espacio vectorial sobre el cuerpo K'.

Definición 2.32. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de dimensión finita ≥ 1 sobre V y V', respectivamente. Se dice que una aplicación $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es *semilineal afín* si existe una aplicación semilineal (ver apéndice) $(f, \mu) : V \to V'$ tal que

$$\overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(Q)} = f(\overrightarrow{P\,Q}), \quad \forall\, P, Q \in \mathbb{A}$$

La aplicación (f, μ) se dice que es una aplicación semilineal asociada a α. Un *isomorfismo semilineal afín* $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación semilineal afín que tiene inversa, es decir existe una aplicación semilineal afín $\beta\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ tal que $\beta \circ \alpha = 1_{\mathbb{A}}$ y $\alpha \circ \beta = 1_{\mathbb{A}'}$.

Si $\mu = 1_K$, entonces α es una aplicación afín. Las isomorfismos afines se llaman *afinidades.*

Proposición 2.33. *Si $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es un aplicación semilineal afín no constante, entonces tiene una única aplicación semilineal asociada.*

Demostración. Sean $(f, \mu), (g, \nu)\colon V \to V'$ aplicaciones semilineales afines asociadas a α. Dado que α no es una aplicación constante, $f \neq 0$ y $g \neq 0$. Si $P \in \mathbb{A}$, entonces

$$f(v) = \overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(P + v)} = g(v),$$

para cada $v \in V$. Así $f = g$.

Sea $v \in V$ tal que $f(v) \neq 0$. Para cada $a \in K$ se tiene

$$\mu(a)\, f(v) = f(a\, v) = g(a\, v) = \nu(a)\, g(v) = \nu(a)\, f(v).$$

Por tanto, $\mu(a) = \sigma(a)$ para cada $a \in K$ y entonces $\mu = \nu$. $\square$

Proposición 2.34. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente.*

(1) *Sea A un punto de $\mathbb{A}$, A' un punto de $\mathbb{A}'$ y $(f, \mu)\colon V \to V'$ una aplicación semilineal. La aplicación $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$, es una aplicación semilineal afín cuya aplicación semilineal asociada es (f, μ).*

(2) *Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación semilineal afín con aplicación semilineal asociada (f, μ) y $A \in \mathbb{A}$, entonces $\alpha(P) = \alpha(A) + f(\overrightarrow{AP})$, para cada $P \in \mathbb{A}$.*

(3) *Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación semilineal afín con aplicación semilineal asociada (f, μ), $P \in \mathbb{A}$ y $v \in V$, entonces $\alpha(P + v) = \alpha(P) + f(v)$.*

Demostración. (1) Sean $P, Q \in \mathbb{A}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(Q)} &= \overrightarrow{A' + f(\overrightarrow{AP})\ A' + f(\overrightarrow{AQ})} = \overrightarrow{A' + f(\overrightarrow{AP})\ A'} + \overrightarrow{A'\ A' + f(\overrightarrow{AQ})} \\ &= - f(\overrightarrow{AP}) + f(\overrightarrow{AQ}) = f(\overrightarrow{PA}) + f(\overrightarrow{AQ}) = f(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}) = f(\overrightarrow{PQ})\end{aligned}$$

(2) Dado que $\overrightarrow{\alpha(A)\,\alpha(P)} = f(\overrightarrow{AP})$, entonces $\alpha(P) = \alpha(A) + f(\overrightarrow{AP})$.
(3) Se sigue de (2). $\square$

Proposición 2.35. (1) *Si $\alpha\colon \mathbb{A}_1 \to \mathbb{A}_2$ y $\beta : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_3$ son aplicaciones semilineales afines, entonces $\beta \circ \alpha$ es una aplicación semilineal afín.*

(2) *$1_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación semilineal afín.*

(3) *Si $\alpha : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una aplicación semilineal afín con aplicación semilineal asociada (f, μ). Son equivalentes*

   (a) *α es un isomorfismo semilineal afín.*

   (b) *α es una aplicación biyectiva*

   (c) *(f, μ) es un isomorfismo semilineal.*

(4) *Sea $\alpha\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación semilinal afín. Se tiene:*

   (a) *Si L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces $\alpha(L)$ es una variedad lineal de $\mathbb{A}'$.*

   (b) *Si α es un isomorfismo semilineal afín y L es una variedad lineal de $\mathbb{A}$, entonces* $\dim \alpha(L) = \dim L$.

Demostración. (1) Sean (f, μ) aplicación semilineal asociada a α y (g, ν) aplicación semilineal asociada a β. Se tiene

$$\overrightarrow{(\beta \circ \alpha)(P)\,(\beta \circ \alpha)(Q)} = g(\overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(Q)}) = g(f(\overrightarrow{PQ})) = (g \circ f)(\overrightarrow{PQ}).$$

de donde se sigue que $\beta \circ \alpha$ es una aplicación semilineal afín con aplicación semilineal asociada $(g \circ f, \nu \circ \mu)$.

(2) $1_{\mathbb{A}} \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ es una aplicación semilineal afín cuya aplicación semilineal afín asociada es $(1_V, 1_K)$.

(3) $(a) \Rightarrow (b)$ Se sigue de la definición de isomorfismo semilineal afín.

$(b) \Rightarrow (c)$ Para probar que f es inyectiva es suficiente probar que el núcleo de f es $\{0\}$. Sea $v \in V$ tal que $f(v) = 0$. Se tiene que $0 = f(v) = \overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(P+v)}$ y por tanto $\alpha(P) = \alpha(P+v)$. Así, $P = P + v$ y entonces $v = 0$.

Veamos que f es suprayectiva. Sea $v' \in V'$ y $P \in \mathbb{A}$. Si $Q \in \mathbb{A}$ es un punto tal que $\alpha(Q) = \alpha(P) + v'$, entonces

$$f(\overrightarrow{P\,Q}) = \overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(Q)} = \overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(P) + v'} = v'.$$

$(c) \Rightarrow (a)$ Por A.6 (2), (f^{-1}, μ^{-1}) es un isomorfismo semilineal afín. Sea $A \in \mathbb{A}$ y consideremos la aplicación semilineal afín $\beta \colon \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$, dada por $\beta(P') = A + f^{-1}(\overrightarrow{\alpha(A)\,P'})$. Se tiene que $\beta \circ \alpha = 1_{\mathbb{A}}$ y $\alpha \circ \beta = 1_{\mathbb{A}'}$.

(4) (a) Sea $L = A + U$ variedad lineal afín de $\mathbb{A}$ y sea (f, μ) una aplicación semilineal asociada a α. Se tiene

$$\alpha(L) = \{\alpha(A+u) \mid u \in U\} = \{\alpha(A) + f(u) \mid u \in U\} = \alpha(A) + f(U),$$

es una variedad lineal.

(b) Si α es un isomorfismo semilineal afín y $L = A + U$ es una variedad lineal, entonces por (a) y por A.6

$$\dim \alpha(L) = \dim_{\mathbb{K}'} f(U) = \dim_{\mathbb{K}} U = \dim L.$$

□

Proposición 2.36. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V y $\mathrm{GS}(\mathbb{A})$ el conjunto de isomorfismos semilineales afines de $\mathbb{A}$. Se tiene que $\mathrm{GS}(\mathbb{A})$ es un grupo con la operación composición.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.35. □

Proposición 2.37. *Todo isomorfismo semilineal afín es una colineación afín.*

Demostración. Se sigue de la proposición 2.35 (4). □

Teorema 2.38. *Sea V y V' espacios vectoriales de igual dimensión sobre el cuerpo K. Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente, entonces $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ son espacios afines isomorfos.*

Demostración. Sea $f \colon V \to V'$ un isomorfismo de espacios vectoriales, $A \in \mathbb{A}$ y $A' \in \mathbb{A}'$. La aplicación $\alpha \colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ dada por $\alpha(P) = A' + f(\overrightarrow{AP})$, es una afinidad. □

Ejemplos 2.39. (1) Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V y v un vector de V. La aplicación traslación $t_v : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, $t_v(P) = P + v$, es una afinidad. Las traslaciones de $\mathbb{A}$ forman un grupo abeliano con la operación composición.

(2) Sean $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V, C un punto de $\mathbb{A}$ y $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$. La homotecia de centro C y razón λ, $h_\lambda^C : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ dada por $h_\lambda^C(P) = C + \lambda \overrightarrow{CP}$, es una afinidad.

(3) Sean V y V' espacios vectoriales sobre los cuerpos K y K', respectivamente. Toda aplicación semilineal $(f, \mu) : V \to V'$ es una aplicación semilineal afín.

(4) Si V y V' son espacios vectoriales, entonces toda aplicación semilineal afín $\alpha\colon V \to V'$ es de la forma $\alpha = t_v \circ (f, \mu)$ donde $v \in V'$ y $(f, \mu) : V \to V'$ es una aplicación semilineal afín.

Teorema 2.40. *Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. La aplicación ϕ : $\mathrm{GS}(\mathbb{A}) \to \mathrm{GSm}(V)$ que lleva cada isomorfismo semilineal afín a su isomorfismo semilineal asociado es un homomorfismo de grupos suprayectivo cuyo núcleo es $T(\mathbb{A})$.*

Demostración. De la demostración de la proposición 2.35 (1) se sigue que ϕ es homomorfismo de grupos y de la proposición 2.34 que ϕ es una aplicación suprayectiva. Si $\alpha \in \mathrm{GS}(\mathbb{A})$ es un elemento del núcleo de ϕ, entonces la aplicación semilineal asociada a α es 1_V. Por tanto

$$\overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(Q)} = \overrightarrow{PQ},$$

para todo P, $Q \in \mathbb{A}$. Por la regla del paralelogramo

$$\overrightarrow{P\,\alpha(P)} = \overrightarrow{Q\,\alpha(Q)},$$

para todo P, $Q \in \mathbb{A}$. Pongamos $v = \overrightarrow{P\,\alpha(P)}$. Se tiene

$$\alpha(P) = P + \overrightarrow{P\,\alpha(P)} = t_v(P),$$

para todo $P \in \mathbb{A}$. Así, $\alpha = t_v \in T(\mathbb{A})$. □

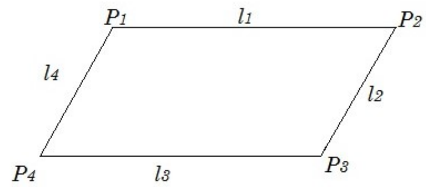
2.4. Teorema fundamental de la geometría afín

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y V' un espacio vectorial sobre el cuerpo K'. Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión $n \geq 2$ sobre V y V', respectivamente. En esta sección vamos a probar que toda colineación afín $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es un isomorfismo semilineal afín. Para esto vamos a construir un isomorfismo semilineal $(f, \mu) : V \to V'$ tal que (f, μ) es el isomorfismo semilineal asociado a τ.

Definición 2.41. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Sean P_1, P_2, P_3 yP_4 cuatro puntos distintos y l_1, l_2, l_3 y l_4 cuatro rectas distintas. Se dice que los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 *son los vértices del paralelogramo de lados* l_1, l_2, l_3, l_4 si se verifican las siguientes condiciones

(1) $l_1 \parallel l_3$, $l_2 \parallel l_4$.

(2) $l_1 \cap l_4 = \{P_1\}$, $l_1 \cap l_2 = \{P_2\}$, $l_2 \cap l_3 = \{P_3\}$, $l_3 \cap l_4 = \{P_4\}$.



Lema 2.42. *Sean P_1, P_2, P_3, P_4 los vértices de un paralelogramo. Se tiene*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_4P_3}\,, \quad \overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{P_2P_3}.$$

Demostración. Dado que $P_1 \circ P_2 \parallel P_4 \circ P_3$ y $P_1 \circ P_4 \parallel P_2 \circ P_4$, existen escalares $a, b \in K$ tales que $\overrightarrow{P_1\,P_2} = a\,\overrightarrow{P_4\,P_3}$ y $\overrightarrow{P_1\,P_4} = b\,\overrightarrow{P_2\,P_3}$. Veamos que $a = b = 1$. Por la relación de Chasles

$$\overrightarrow{P_1\,P_2} + \overrightarrow{P_2\,P_3} = \overrightarrow{P_1\,P_3} = \overrightarrow{P_1\,P_4} + \overrightarrow{P_4\,P_3},$$

y por lo tanto

$$a\,\overrightarrow{P_4\,P_3} + \overrightarrow{P_2\,P_3} = b\,\overrightarrow{P_2\,P_3} + \overrightarrow{P_4\,P_3},$$

de donde se sigue

$$(a-1)\,\overrightarrow{P_4\,P_3} = (b-1)\,\overrightarrow{P_2\,P_3}.$$

Dado que $l_2 \cap l_3 = \{P_3\}$, los vectores $\overrightarrow{P_4\,P_3}$ y $\overrightarrow{P_2\,P_3}$ son linealmente independientes; por tanto $a = b = 1$. □

Lema 2.43. *Sea $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una colineación afín y sea $v \in V$. El vector $\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)}$ no depende del punto $P \in \mathbb{A}$.*

Demostración. Si $v = 0$,

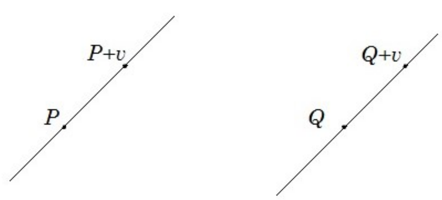
$$\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+0)} = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P)} = 0,$$

para todo $P \in \mathbb{A}$.

Sea $v \neq 0$ y sean P y Q en $\mathbb{A}$. Vamos a probar que

$$\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)} = \overrightarrow{\tau(Q)\,\tau(Q+v)}.$$

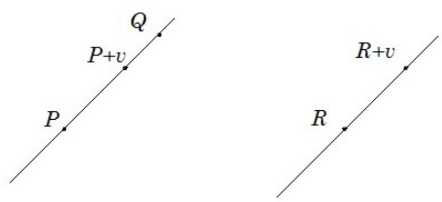
Caso 1: Si $Q \notin P + \langle v \rangle$. Los cuatro puntos P, Q, $Q+v$, $P+v$ forman un paralelogramo.



Por ser τ colineación afín, los puntos $\tau(P)$, $\tau(Q)$, $\tau(Q+v)$, $\tau(P+v)$ forman un paralelogramo. De acuerdo con el lema 2.42, se tiene

$$\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)} = \overrightarrow{\tau(Q)\,\tau(Q+v)}.$$

Caso 2: Si $Q \in P + \langle v \rangle$. Dado que $\dim \mathbb{A} = n \geq 2$, existe $R \notin P + \langle v \rangle = Q + \langle v \rangle$.



Por el caso 1,

$$\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)} = \overrightarrow{\tau(R)\,\tau(R+v)} = \overrightarrow{\tau(Q)\,\tau(Q+v)}.$$

$\square$

Proposición 2.44. *La aplicación* $f\colon V \to V'$ *dada por*

$$f(v) = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)},$$

es un isomorfismo del grupo aditivo de V *en el grupo aditivo de* V'.

Demostración. 1. Veamos que f es homomorfismo de grupos para la adición. Sea $P \in \mathbb{A}$. Se tiene

$$f(v) = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)}, \quad f(w) = \overrightarrow{\tau(P+v)\,\tau(P+v+w)}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} f(v) + f(w) =& \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)} + \overrightarrow{\tau(P+v)\,\tau(P+v+w)} \\ =& \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v+w)} = f(v+w). \end{aligned}$$

Dado que f es un homomorfismo de gupos para la adición, para probar que f es una aplicación inyectiva es suficiente probar que el núcleo de f es $\{0\}$. Si $v \in \ker(f)$ y $P \in \mathbb{A}$, entonces $0 = f(v) = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)}$ y por lo tanto $\tau(P) = \tau(P+v)$. Por ser τ una aplicación biyectiva concluimos que $P = P + v$ o, equivalentemente, que $v = 0$.

Veamos que f es suprayectiva. Si $v' \in V'$, $P \in \mathbb{A}$, $Q = \tau^{-1}(\tau(P) + v')$ y $v = \overrightarrow{PQ}$, entonces

$$f(v) = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(Q)} = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P) + v'} = v'. \qquad \square$$

Lema 2.45. *Sea* $\tau : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ *una colineación afín,* $P \in \mathbb{A}$ *y* $v \in V$, $v \neq 0$. *Se tiene*

(1) $\tau(P + \langle v \rangle) = \tau(P) + \langle f(v) \rangle$.

(2) $f(\langle v \rangle) = \langle f(v) \rangle$.

Demostración. (1) Dado que τ es una coalineación afín, por la proposición 2.24 se tiene

$$\begin{aligned}\tau(P+\langle v\rangle) =&\tau(P\circ(P+v)) = \tau(P)\circ\tau(P+v)\\ =&\tau(P)+\langle\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)}\rangle = \tau(P)+\langle f(v)\rangle.\end{aligned}$$

(2) Veamos que $f(\langle v\rangle)\subset\langle f(v)\rangle$. Sea $a\in K$. Si $a=0$, $f(0\,v)=0$. Si $a\neq 0$, entonces $\langle v\rangle=\langle a\,v\rangle$. Por (1),

$$\tau(P)+\langle f(v)\rangle = \tau(P+\langle v\rangle) = \tau(P+\langle a\,v\rangle) = \tau(P)+\langle f(a\,v)\rangle.$$

Por tanto $\langle f(v)\rangle = \langle f(a\,v)\rangle$ y así, $f(a\,v)\in\langle f(v)\rangle$.

Sea ahora $a'\,f(v)\in\langle f(v)\rangle$ con $a'\in K'$. Dado que $\tau(P)+a'\,f(v)\in\tau(P)+\langle f(v)\rangle = \tau(P+\langle v\rangle)$, existe $a\in K$ tal que $\tau(P)+a'\,f(v)=\tau(P+a\,v)$. Se tiene

$$f(a\,v) = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+a\,v)} = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P)+a'\,f(v)} = a'\,f(v),$$

de donde se sigue que $a'\,f(v)\in f(\langle v\rangle)$. □

Sea $a\in K$ y $v\in V$, $v\neq 0$. Dado que $f(\langle v\rangle)=\langle f(v)\rangle$, existe $\mu_v(a)\in K'$ tal que $f(a\,v)=\mu_v(a)\,f(v)$.

Lema 2.46. *Se tiene que* $\mu_v(a)=\mu_w(a)$*, para todo* $v,w\in V-\{0\}$ *y para todo* $a\in K$*.*

Demostración. Caso 1: Sean v y w vectores linealmente independientes. Si $a\in K$, se tiene

$$\begin{aligned}&f(a\,v)=\mu_v(a)\,f(v),\quad f(a\,w)=\mu_w(a)\,f(w),\\ &f(a\,v+a\,w)=f(a\,(v+w))=\mu_{v+w}(a)\,f(v+w).\end{aligned}$$

Veamos que $f(v)$ y $f(w)\in V'$ son vectores linealmente independientes. En efecto, sea $P\in\mathbb{A}$. Por ser v y w vectores linealmente independientes, los puntos P, $P+v$ y $P+w$ son afínmente independientes. Por 2.23 (1), los puntos $\tau(P)$, $\tau(P+v)$, $\tau(P+w)$ son afínmente independientes. Así, los vectores

$$\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+v)} = f(v),\quad \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P+w)} = f(w),$$

son linealmente independientes.

Dado que

$$\mu_{v+w}(a)\,f(v+w) = \mu_{v+w}(a)\,f(v)+\mu_{v+w}(a)\,f(w) = \mu_v(a)\,f(v)+\mu_w(a)\,f(w),$$

concluimos que

$$\mu_v(a)=\mu_{v+w}(a)=\mu_w(a).$$

Caso 2: Sean v y w vectores linealmente dependientes, equivalentemente $\langle v\rangle=\langle w\rangle$. Dado que $\dim V\geq 2$, existe $u\in V$ de tal que $u\notin\langle v\rangle$, de donde se sigue que u y v son linealmente independientes y que u y w también lo son. Por el caso 1,

$$\mu_v(a)=\mu_u(a)=\mu_w(a)$$

□

Proposición 2.47. *La aplicación $\mu\colon K \to K'$, dada por $\mu(a) = \mu_v(a)$, siendo v cualquier vector no nulo de V, es un isomorfismo de cuerpos.*

Demostración. Veamos que μ es un homomorfismo de cuerpos. Sean a, $b \in K$ Se tiene

$$f((a+b)\,v) = \mu(a+b)\,f(v),$$

y por ser f homomorfismo de grupos

$$f((a+b)\,v) = f(a\,v + b\,v) = f(a\,v) + f(b\,v) = (\mu(a) + \mu(b))\,f(v).$$

Dado que $f(v) \neq 0$, concluimos que $\mu(a+b) = \mu(a) + \mu(b)$. Por otra parte,

$$f((a\,b)\,v) = \mu(a\,b)\,f(v).$$

y también

$$f((a\,b)\,v) = f(a\,(b\,v)) = \mu(a)\,f(b\,v) = \mu(a)\,\mu(b)\,f(v).$$

Dado que $f(v) \neq 0$, se tiene que $\mu(a\,b) = \mu(a)\,\mu(b)$. Además,

$$f(v) = f(1\,v) = \mu(1)\,f(v).$$

Luego, $\mu(1) = 1$.

Probemos que μ es una aplicación inyectiva o equivalentemente que el núcleo es $\{0\}$. Sea $a \in K$ tal que $\mu(a) = 0$. Se tiene que $f(a\,v) = \mu(a)\,f(v) = 0$. Por ser f homomorfismo de grupos inyectivo, $a\,v = 0$ y por lo tanto $a = 0$.

La aplicación μ es suprayectiva. En efecto, sea $a' \in K'$. Por el lema 2.45 (2), existe $a \in K$ tal que $f(a\,v) = a'\,f(v)$. Dado que $f(a\,v) = \mu(a)\,f(v)$, concluímos que $\mu(a) = a'$. $\square$

Corolario 2.48. *La aplicación f es un isomorfismo semilieal respecto a μ.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 2.44 y 2.47. $\square$

El siguiente teorema es el teorema fundamental de la geometría afín.

Teorema 2.49. (Teorema fundamental de la geometría afín) *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión $n \geq 2$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente. Si $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una colineación afín, entonces τ es un isomorfismo semilineal afín.*

Demostración. Sea (f, μ) el isomorfismo semilineal asociado a τ construido en las proposiciones 2.44 y 2.47 y sean P,$Q \in \mathbb{A}$. Se tiene

$$\overrightarrow{\tau(P)\,\tau(Q)} = \overrightarrow{\tau(P)\,\tau(P + \overrightarrow{PQ})} = f(\overrightarrow{PQ}).$$

$\square$

Teorema 2.50. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ espacios afines de igual dimensión $n \geq 2$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente y supongamos que el cuerpo K tiene más de dos elementos. Sea $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una aplicación biyectiva. Son equivalentes*

(1) *La aplicación τ lleva puntos alineados a puntos alineados.*

(2) *La aplicación τ es un isomorfismo semilineal afín.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Se sigue de los teroremas 2.30 y 2.49. (2) $\Rightarrow$ (1) Se sigue de la proposición 2.24 (2)(b) y de la proposición 2.37. $\square$

Observación 2.51. Obsérvese que si $\dim \mathbb{A} = \dim \mathbb{A}' = 1$, las colineaciones afines de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A}'$ son las aplicaciones biyectivas; en este caso, no toda aplicación biyectiva de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A}'$ es un isomorfismo semilineal afín.

Por ejemplo, ninguna aplicación biyectiva $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ distinta de la identidad que deje fijos dos puntos distintos es una afinidad.

Si F es un cuerpo finito con más de 4 elementos, existen aplicaciones biyectivas $\tau\colon F \to F$ que no son isomorfismos semilineales afines. En efecto, sea $|F| = q = p^t$, con p primo. Se tiene un isomorfismo de grupos

$$\frac{\mathrm{GS}(F)}{T(F)} \simeq \mathrm{GSm}(F)$$

y entonces

$$|\mathrm{GS}(F)| = |\mathrm{GSm}(F)|\ |T(F)|\,.$$

El número de isomorfismos μ-semilineales de F en F es $q-1$ y el número de automorfismos de cuerpos de F es t. Por tanto $|\mathrm{GSm}(F)| = t(q-1)$. Dado que $|T(F)| = |F| = q$, concluimos que $|\mathrm{GS}(F)| = t\,(q-1)\,q$. El número de aplicaciones biyectivas de F en F es $q!$. Para $q \geq 5$ se tiene que $t(q-1)q < q!$ y por tanto existen más aplicaciones biyectivas de F en F que isomorfismos semilineales afines.

3. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

3.1. Espacio proyectivo

Definición 3.1. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Se llama *espacio proyectivo* o *espacio proyectivo analítico* asociado a V al conjunto cociente

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V - \{0\}}{\sim},$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por

$$v_1, v_2 \in V - \{0\}, \quad v_1 \sim v_2 \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in K\,,\ \lambda \neq 0 \ \mid\ v_2 = \lambda\, v_1.$$

Se tiene que $[v] = \{\lambda\, v \mid \lambda \in K\,,\ \lambda \neq 0\} = \langle\, v\,\rangle - \{0\}$, para todo vector $v \in V$. Llamaremos *puntos* a los elementos de $\mathbb{P}(V)$, es decir a las clases de equivalencia $[v]$ con $v \in V - \{0\}$.

Ejemplo 3.2. El espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto cociente

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \frac{\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim},$$

donde

$$(x_0, x_1, x_2) \sim (x_0', x_1', x_2') \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \lambda \neq 0 \ \mid\ (x_0', x_1', x_2') = \lambda\,(x_0, x_1, x_2).$$

Se tiene que

$$[(x_0, x_1, x_2)] = \langle (x_0, x_1, x_2) \rangle - \{(0,0,0)\},$$

donde $\langle (x_0, x_1, x_2) \rangle$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por (x_0, x_1, x_2).

Definición 3.3. Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n+1$, $n \geq 0$. Se dice que la *dimensión proyectiva* de $\mathbb{P}(V)$, que denotaremos por $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(V)$, es n.

- Si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}\,(V) = 1$, se dice que $\mathbb{P}(V)$ es una recta proyectiva.
- Si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(V) = 2$, se dice que $\mathbb{P}(V)$ es un plano proyectivo.

Obsérvese que los espacios proyectivos de dimensión proyectiva cero son conjuntos con un único punto. Si $V = 0$ entonces $\mathbb{P}(V) = \varnothing$ y diremos que $\varnothing$ es el espacio proyectivo de dimensión -1.

Definición 3.4. Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo de dimensión n. Una *variedad lineal proyectiva* de $\mathbb{P}(V)$ es cualquier subconjunto de la forma $\mathbb{P}(U)$, donde U es un subespacio de V.

- Se dice que $\mathbb{P}(U)$ es una *recta* de $\mathbb{P}(V)$ si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(U) = 1$.
- Se dice que $\mathbb{P}(U)$ es un *plano* de $\mathbb{P}(V)$ si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(U) = 2$.
- Se dice que $\mathbb{P}(U)$ es un *hiperplano* de $\mathbb{P}(V)$ si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(U) = n - 1$.

Obsérvese que $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(U) = \dim_K U - 1$ y que las variedades lineales proyectivas de dimensión proyectiva cero son conjuntos con un único punto.

Proposición 3.5. *Sean U y W subespacios de V. Se tiene*

(1) $U \subset W \Longleftrightarrow \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$.

(2) *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un conjunto de subespacios de V. Se tiene*

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} U_i) = \cap_{i\in I}\mathbb{P}(U_i).$$

Demostración. (1) Es trivial. (2) La inclusión $\mathbb{P}(\cap_{i\in I}U_i) \subset \cap_{i\in I}\mathbb{P}(U_i)$ se sigue de (1). Si $[v] \in \cap_{i\in I}\mathbb{P}(U_i)$, para cada $i \in I$ existen $u_i \in U_i$ de tal forma que $[v] = [u_i]$. Por tanto existen escalares $\lambda_i \in \mathbb{K} - \{0\}$ tales que $v = \lambda_i\, u_i$. Así, $v \in \cap_{i\in I}U_i$.

□

Definición 3.6. Sea $S \subset \mathbb{P}(V)$. Se llama variedad lineal proyectiva *generad*a por S y la denotaremos por $\overline{S}$ a la menor variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ que contiene a S, es decir

$$\overline{S} = \bigcap_{i\in I} \mathbb{P}(U_i),$$

donde $\{\mathbb{P}(U_i)\}_{i\in I}$ es el conjunto de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}(V)$ que contienen a S.

Observación 3.7. Si $S \neq \varnothing$ es un subconjunto de $\mathbb{P}(V)$ entonces

$$\overline{S} = \mathbb{P}(\langle v \in V \mid [v] \in S\rangle).$$

En general, la unión de un conjunto de variedades lineales proyectivas no es una variedad lineal proyectiva.

Definición 3.8. Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un conjunto de subespacios de V. Se llama *variedad lineal unión* de las variedades $\{\mathbb{P}(U_i)\}_{i\in I}$ a la menor variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ que contiene a $\mathbb{P}(U_i)$, para cada $i \in I$; la denotaremos por $\circ_{i\in I}\, \mathbb{P}(U_i)$. Entonces

$$\circ_{i\in I}\, \mathbb{P}(U_i) = \overline{\bigcup_{i\in I} \mathbb{P}(U_i)}.$$

Si $P_0, \dots, P_r$ son puntos de $\mathbb{P}(V)$ denotaremos $\{P_0\} \circ \dots \circ \{P_r\}$ por $P_0 \circ \dots \circ P_r$ y diremos que es la variedad lineal generada por $P_0, \dots, P_r$.

Proposición 3.9. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un conjunto de subespacios de V. Se tiene*

$$\circ_{i\in I}\, \mathbb{P}(U_i) = \mathbb{P}(\sum_{i\in I} U_i).$$

Demostración.

$$\circ_{i\in I}\,\mathbb{P}(U_i)=\mathbb{P}(<v\in V/[v]\in\bigcup_{i\in I}\mathbb{P}[U_i]>)=\mathbb{P}(<v\in V/v\in\bigcup_{i\in I}U_i>)=$$

$$=\mathbb{P}(<\bigcup_{i\in I}U_i>)=\mathbb{P}(\sum_{i\in I}U_i).$$

□

La siguiente relación entre las dimensiones de la variedad lineal unión e intersección no es siempre cierta en geometría afín, pero sí lo es en geometría proyectiva.

3.10. Identidad de Grassmann para variedades lineales proyectivas.

Sean U y W subespacios de V. Se tiene

$$\text{pdim}\,\mathbb{P}(U)+\text{pdim}\,\mathbb{P}(W)=\text{pdim}\,(\mathbb{P}(U)\cap\mathbb{P}(W))+\text{pdim}\,(\mathbb{P}(U)\circ\mathbb{P}(W)).$$

Demostración. Se sigue de la identidad de Grassmann para subespacios de un espacio vectorial. □

Como aplicación se tienen las siguientes propiedades de incidencia características de espacio proyectivo

Proposición 3.11. *Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión $n+1$, $n\geq 0$.*

(1) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ y P es un punto, $P\notin\mathbb{L}$, entonces* $\text{pdim}\,(\mathbb{L}\circ P)=\text{pdim}\,\mathbb{L}+1$.

(2) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{H}$ es un hiperplano y $\mathbb{L}\not\subset\mathbb{H}$, entonces* $\text{pdim}\,(\mathbb{L}\cap\mathbb{H})=\text{pdim}\,\mathbb{L}-1$.

(3) *Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ rectas de $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{L}_1\neq\mathbb{L}_2$. Se tiene*

  (a) $\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2$ *es un punto si, y solo si, $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ son coplanarias.*

  (b) *Si $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ no se cortan, entonces no son coplanarias y están contenidas en una variedad lineal proyectiva de dimensión* 3.

Demostración. (1) Sea $\mathbb{L}\subset\mathbb{P}(V)$ una variedad lineal proyectiva y $P\notin\mathbb{L}$. Dado que $\mathbb{L}\cap\{P\}=\varnothing$, aplicando la identidad de Grassmann se tiene que $\text{pdim}\,(\mathbb{L}\circ P)=\text{pdim}\,\mathbb{L}+0-1=\text{pdim}\,\mathbb{L}-1$.

(2) Sean $\mathbb{L}$ una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{H}\subset\mathbb{P}(V)$ un hiperplano tal que $\mathbb{L}\not\subset\mathbb{H}$. Entonces $\mathbb{H}\neq\mathbb{L}\circ\mathbb{H}$ y dado que $\text{pdim}\,\mathbb{H}=n-1$, se tiene que $\mathbb{L}\circ H=\mathbb{P}(V)$. Aplicando de nuevo la identidad de Grassmann se obtiene que $\text{pdim}\,(\mathbb{L}\cap H)=\text{pdim}\,\mathbb{L}+\text{pdim}\,H-\text{pdim}\,(\mathbb{L}\circ H)=\text{pdim}\,\mathbb{L}+n-1-n=\text{pdim}\,\mathbb{L}-1$.

(3) (a) Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ rectas de $\mathbb{P}(V)$. Si $\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2$ es un punto, entonces $\dim\,(\mathbb{L}_1\circ\mathbb{L}_2)=\dim\,\mathbb{L}_1+\dim\,\mathbb{L}_2-0=2$ y por tanto las rectas $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ están contenidas en el plano $\mathbb{L}_1\circ\mathbb{L}_2$. Recíprocamente, si existe un plano $\mathbb{H}$ tal que $\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_2\subset\mathbb{H}$, $\mathbb{L}_1\neq\mathbb{L}_2$, se tiene que $\mathbb{L}_1\circ\mathbb{L}_2=\mathbb{H}$. Así, $\text{pdim}\,(\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2)=\text{pdim}\,\mathbb{L}_1+\text{pdim}\,\mathbb{L}_2-\text{pdim}\,\mathbb{H}=0$.

(3) (b) Sean $\mathbb{L}_1$ y $\mathbb{L}_2$ rectas de $\mathbb{P}(V)$. Dado que $\mathbb{L}_1\cap\mathbb{L}_2=\varnothing$, se tiene que $\text{pdim}(\mathbb{L}_1\circ\mathbb{L}_2)=\text{pdim}\,\mathbb{L}_1+\text{pdim}\,\mathbb{L}_2+1=3$. □

Definición 3.12. Sean $P_0 = [v_0], \dots, P_r = [v_r]$ puntos del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$. Se dice que $P_0, \dots, P_r$, son *proyectivamente independientes* si los vectores $v_0, \dots, v_r$ son linealmente independientes.

Proposición 3.13. (1) *Sean $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{P}(V)$. Son equivalentes:*

(a) *$P_0, \dots, P_r$ son proyectivamente independientes.*

(b) $\operatorname{pdim}(P_0 \circ \dots \circ P_r) = r$.

(c) $P_i \notin P_0 \circ \dots \circ \widehat{P_i} \circ \dots \circ P_r$, $i = 0, \dots, r$.

(2) *Si la dimensión proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ es n, entonces el número máximo de puntos proyectivamente independientes es $n+1$.*

(3) *Si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(V) = n$ y $P_0, \dots P_r \in \mathbb{P}(V)$, $r \leq n$, son puntos proyectivamente independientes, existen $P_{r+1}, \dots, P_n \in \mathbb{P}(V)$ tales que $P_0, \dots, P_n$ son proyectivamente independientes y generan $\mathbb{P}(V)$.*

Demostración. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Se sigue de que $P_0 \circ \dots \circ P_r = \mathbb{P}(\langle v_o, \dots, v_r \rangle)$.

$(a) \Leftrightarrow (c)$ Se sigue de que

$$v_i \in \langle v_0, \dots \widehat{v_i}, \dots, v_r \rangle \Longleftrightarrow P_i \in P_0 \circ \dots \circ \widehat{P_i} \circ \dots \circ P_r.$$

(2) Si $P_0, \dots, P_r$ son puntos proyectivamente independientes entonces los vectores $v_0, \dots, v_r$ son vectores linealmente independientes y por tanto $r \leq n$. Veamos que existen $n+1$ puntos proyectivamente independientes. En efecto, si $\{v_0, \dots, v_n\}$ es una base de V, entonces los puntos $[v_0], \dots, [v_n]$, son proyectivamente independientes.

(3) Sean $v_{r+1}, \dots, v_n$ vectores tales que $v_0, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ son linealmente independientes y pongamos $P_{r+1} = [v_{r+1}], \dots, P_n = [v_n]$. Los puntos $P_0, \dots, P_r, P_{r+1}, \dots, P_n$ son proyectivamente independientes. □

Ejemplos 3.14. Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo.

(1) P_0, P_1 son puntos proyectivamente independientes si, y solo si, $P_0 \neq P_1$.

(2) P_0, P_1, P_2 son puntos proyectivamente independientes si, y solo si, P_0, P_1, P_2 no están alineados.

(3) P_0, P_1, P_2, P_3 son proyectivamente independientes si, y solo si, P_0, P_1, P_2, P_3 no son coplanarios.

Proposición 3.15. (1) *Si $P_0, \dots, P_r$ son puntos proyectivamente independientes y $P_{r+1} \notin P_0 \circ \dots \circ P_r$, entonces los puntos $P_0, \dots, P_r, P_{r+1}$ son proyectivamente independientes.*

(2) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ de dimensión r, entonces existen puntos $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{L}$ proyectivamente independientes tales que $L = P_0 \circ \dots \circ P_r$.*

(3) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ de dimensión r y $P_0, \dots, P_r \in \mathbb{L}$ son puntos proyectivamente independientes, entonces $\mathbb{L} = P_0 \circ \dots \circ P_r$.*

(4) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ de dimensión r y $\mathbb{L} = P_0 \circ \dots \circ P_r$, entonces los puntos $P_0, \dots, P_r$ son proyectivamente independientes.*

(5) *Sean* $P_0, \ldots, P_r$ *puntos de* $\mathbb{P}(V)$. *Existen puntos* $Q_0, \ldots, Q_s \in \{P_0, \ldots, P_r\}$, *proyectivamente independientes, tales que* $P_0 \circ \ldots \circ P_r = Q_0 \circ \ldots \circ Q_s$.

Demostración. (1) Por la proposición 3.11 (1),

$$\operatorname{pdim}(P_0 \circ \ldots \circ P_{r+1}) = 1 + \operatorname{pdim}(P_0 \circ \ldots \circ P_r) = r + 1.$$

El resultado se sigue de la proposición 3.13 (1).

(2) Sea $\mathbb{L} = \mathbb{P}(U)$ una variedad lineal proyectiva de dimensión proyectiva r y sea $B = \{v_0, \ldots, v_r\}$ una base de U. Los puntos $P_0 = [v_0], \ldots \circ P_r = [v_r]$ son proyectivamente independientes y generan $\mathbb{L}$.

(3) Si $P_0, \ldots, P_r \in \mathbb{L}$, entonces $P_0 \circ \ldots \circ P_r \subset \mathbb{L}$. Dado que $P_0, \ldots, P_r$ son puntos proyectivamente independientes, $\operatorname{pdim}(P_0 \circ \ldots \circ P_r) = r = \operatorname{pdim} \mathbb{L}$, de donde se sigue que $\mathbb{L} = P_0 \circ \ldots \circ P_r$.

(4) Dado que $\operatorname{pdim} \mathbb{L} = \dim(P_0 \circ \ldots \circ P_r) = r$, por la proposición 3.13(1) los puntos $P_0 \ldots P_r$ son proyectivamente independientes.

(5) Sea $P_i = [v_i]$, $i = 1, \ldots, r$. Se tiene que $P_0 \circ \ldots \circ P_r = \mathbb{P}(\langle v_0, \ldots, v_r \rangle)$. Supongamos que $\operatorname{pdim}(P_0 \circ \ldots \circ P_r) = s \geq 0$. Existen vectores $w_0, \ldots, w_s \in \{v_0, \ldots, v_r\}$ tales que

$$\langle v_0, \ldots, v_r \rangle = \langle w_0, \ldots, w_s \rangle.$$

Poniendo $Q_0 = [w_0], \ldots, Q_s = [w_s]$, se tiene que $P_0 \circ \ldots \circ P_r = Q_0 \circ \ldots \circ Q_s$. □

3.2. Colineaciones proyectivas

Definición 3.16. ([6, p. 103]) Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y K', respectivamente, de igual dimensión finita $n \geq 2$. Se dice que una aplicación $\sigma : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es una *colineación proyectiva* o *isomorfismo de espacios proyectivos* si verifica:

(1) σ es una aplicación biyectiva.

(2) σ *lleva puntos alineados a puntos alineados*, es decir

$$P \in P_1 \circ P_2 \Longrightarrow \sigma(P) \in \sigma(P_1) \circ \sigma(P_2).$$

Se dice que los espacios proyectivos $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$ son *isomorfos* si existe una colineación proyectiva $\sigma : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$.

Observación 3.17. Obsérvese que para $n = 2$, todas las aplicaciones biyectivas de una recta proyectiva en otra recta proyectiva son colineaciones proyectivas.

Proposición 3.18. (1) *Sean* V, V' *y* V'' *espacios vectoriales de igual dimensión finita sobre los cuerpos* K, K' *y* K'', *respectivamente. Si* $\sigma : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ *y* $\sigma' : \mathbb{P}(V') \to \mathbb{P}(V'')$ *son colineaciones proyectivas, entonces* $\sigma' \circ \sigma$ *es una colineación proyectiva.*

(2) *Sea* $\sigma : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ *es una colineación proyectiva. Se tiene:*

(a) *Si* $P_i \in \mathbb{P}(V)$, $i = 0, \ldots, r$, *entonces*

$$\sigma(P_0 \circ \cdots \circ P_r) \subset \sigma(P_0) \circ \cdots \circ \sigma(P_r).$$

(b) *Si* $P, P_1, P_2 \in \mathbb{P}(V)$, *entonces*

$$\sigma(P) \in \sigma(P_1) \circ \sigma(P_2) \Longrightarrow P \in P_1 \circ P_2.$$

(c) $\sigma^{-1} : \mathbb{P}(V') \to \mathbb{P}(V)$ *es una colineación proyectiva.*

(d) *Si* $P_i \in \mathbb{P}(V)$, $i = 0, \ldots, r$, *entonces*

$$\sigma(P_0 \circ \cdots \circ P_r) = \sigma(P_0) \circ \cdots \circ \sigma(P_r).$$

(e) $\mathbb{L}$ *variedad lineal proyectiva de* $\mathbb{P}(V) \iff \sigma(\mathbb{L})$ *variedad lineal proyectiva de* $\mathbb{P}(V')$.

(f) *Si* $\mathbb{L}$ *y* $\mathbb{L}'$ *son variedades lineales proyectivas de* $\mathbb{P}(V)$, *entonces*

$$\mathbb{L} \subset \mathbb{L}' \iff \sigma(\mathbb{L}) \subset \sigma(\mathbb{L}').$$

(g) *Sea* $\mathbb{L}$ *es una variedad lineal proyectiva de* $\mathbb{P}(V)$. *Se tiene*

$$\operatorname{pdim} \mathbb{L} = \operatorname{pdim} \sigma(\mathbb{L}).$$

Demostración. (1) Dado que σ y σ' son aplicaciones biyectivas, $\sigma' \circ \sigma$ es una aplicación biyectiva. Sea $P \in P_1 \circ P_2$. Por ser σ y σ' colineaciones proyectivas se tiene

$$P \in P_1 \circ P_2 \Rightarrow \sigma(P) \in \sigma(P_1) \circ \sigma(P_2) \Rightarrow \sigma'(\sigma(P)) \in \sigma'(\sigma(P_1)) \circ \sigma'(\sigma(P_2)).$$

(2) (a) Razonaremos por inducción sobre r. El caso $r = 0$ es trivial. Supongamos el resultado cierto para $r - 1 \geq 0$. Veamos es cierto para r. Sea $Q \in \sigma(P_0 \circ \ldots \circ P_r)$. Por ser σ aplicación biyectiva existe $P \in P_0 \circ \ldots \circ P_r$ tal que $\sigma(P) = Q$. Veamos que existe $[y] \in P_0 \circ \ldots \circ P_{r-1}$ tal que $P \in [y] \circ P_r$.

Sea $P_i = [v_i]$, para $i = 0, \ldots, r$. Existen escalares $\lambda_i \in K$ tales que $P = [\lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_r v_r]$. Si $y = \lambda_0 v_0 + \ldots + \lambda_{r-1} v_{r-1}$, entonces $P \in [y] \circ P_r$. Por definición de colineación afín se tiene que $\sigma(P) \in \sigma([y]) \circ \sigma(P_r)$ y por hipótesis de inducción $\sigma([y]) \in \sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_{r-1})$. Por tanto

$$\sigma([y]) \circ \sigma(P_r) \subset \sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r),$$

y así, $Q \in \sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r)$.

(2) (b) Vamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos que $\sigma(P) \in \sigma(P_1) \circ \sigma(P_2)$ y que $P \notin P_1 \circ P_2$. Dado que $P \notin P_1 \circ P_2$ por la proposición 3.15 (1) P, P_1, P_2 son proyectivamente independientes.

Sea $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(V) = n$. Por la proposición 3.13, existen $P_3, \ldots, P_n \in \mathbb{P}(V)$ tales que $P, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ son proyectivamente independientes y además $\mathbb{P}(V) = P \circ P_1 \circ \ldots \circ P_n$. Por (2) (a)

$$\mathbb{P}(V') = \sigma(P \circ P_1 \circ \ldots \circ P_n) \subset \sigma(P) \circ \sigma(P_1) \circ \ldots \circ \sigma(P_n) = \sigma(P_1) \circ \ldots \circ \sigma(P_n).$$

Así, $\mathbb{P}(V') = \sigma(P_1) \circ \ldots \circ \sigma(P_n)$ y entonces $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(V') \leq n - 1$, lo cual es una contradicción.

(2) (c) Se sigue de (b).

(2) (d) La inclusión $\sigma(P_0 \circ \ldots \circ P_r) \subset \sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r)$ se sigue de (a).

Dado que σ^{-1} es colineacción proyectiva se tiene

$$\sigma^{-1}(\sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r)) \subset \sigma^{-1}(\sigma(P_0)) \circ \ldots \circ \sigma^{-1}(\sigma(P_r)) = P_0 \circ \ldots \circ P_r.$$

Por tanto

$$\sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r) = \sigma(\sigma^{-1}(\sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r))) \subset \sigma(P_0 \circ \ldots \circ P_r).$$

(2) (e) Sea $\mathbb{L}$ una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$. Existen puntos $P_0, \ldots, P_r$ tales que $\mathbb{L} = P_0 \circ \ldots \circ P_r$. Por (d), $\sigma(\mathbb{L}) = \sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r)$ que es una variedad lineal proyectiva. Recíprocamente, si $\sigma(\mathbb{L})$ es una variedad lineal proyectiva, existen $P'_0, \ldots, P'_r \in \mathbb{P}(V)$ tales que $\sigma(\mathbb{L}) = P'_0 \circ \ldots \circ P'_r$. Por ser σ^{-1} colineación proyectiva

$$\mathbb{L} = \sigma^{-1}(\sigma(\mathbb{L})) = \sigma^{-1}(P'_0) \circ \ldots \circ \sigma^{-1}(P'_r).$$

(2) (f) Se sigue de que σ es aplicación biyectiva.

(2) (g) Si $\operatorname{pdim} \mathbb{L} = r$, entonces existen puntos $P_0, \ldots, P_r$ tales que

$$\mathbb{L} = P_0 \circ \ldots \circ P_r.$$

Por (d) $\sigma(\mathbb{L}) = \sigma(P_0) \circ \ldots \circ \sigma(P_r)$, de donde se sigue que $\operatorname{pdim} \sigma(\mathbb{L}) \leq r$.

Análogamente, por ser σ^{-1} colineación proyectiva $\operatorname{pdim} \mathbb{L} = \operatorname{pdim} \sigma^{-1}(\sigma(\mathbb{L})) \leq \operatorname{pdim} \sigma(\mathbb{L})$. □

Proposición 3.19. *Sean V y V' espacios vectoriales de igual dimensión finita $n \geq 2$ sobre K y K', respectivamente. La aplicación $\sigma : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es una colineación proyectiva si, y solo si,*

(1) *σ es una aplicación biyectiva.*

(2) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ entonces $\sigma(\mathbb{L})$ es una variedad lineal de $\mathbb{P}(V')$ y $\operatorname{pdim} \mathbb{L} = \operatorname{pdim} \sigma(\mathbb{L})$.*

Demostración. Si σ es una colineación proyectiva, (2) se sigue de la proposición 3.18.

Supongamos que se verifican las condiciones (1) y (2). Sea $P \in P_1 \circ P_2$ y veamos que $\sigma(P) \in \sigma(P_1) \circ \sigma(P_2)$. El caso $P_1 = P_2$ es trivial. Supongamos que $P_1 \neq P_2$. Por ser σ aplicación biyectiva, $\sigma(P_1) \neq \sigma(P_2)$ y entonces $\sigma(P_1) \circ \sigma(P_2)$ es una recta.

Dado que $\sigma(P_1), \sigma(P_2) \in \sigma(P_1 \circ P_2)$, se tiene que $\sigma(P_1) \circ \sigma(P_2) \subset \sigma(P_1 \circ P_2)$. Además tenemos que $\operatorname{pdim}(\sigma(P_1) \circ \sigma(P_2)) = 1 = \operatorname{pdim}(P_1 \circ P_2) = \operatorname{pdim} \sigma(P_1 \circ P_2)$ y por tanto $\sigma(P) \in \sigma(P_1 \circ P_2) = \sigma(P_1) \circ \sigma(P_2)$. □

Proposición 3.20. *Sea V un espacio vectorial sobre K y $\mathbb{P}\mathrm{G}(V)$ el conjunto de colineaciones proyectivas de $\mathbb{P}(V)$. Se tiene que $\mathbb{P}\mathrm{G}(V)$ es un grupo con la operación composición.*

Demostración. Se sigue de la proposición 3.18. □

3.3. Aplicaciones semilineales proyectivas

Proposición 3.21. *Si $f \colon V \to V'$ es un isomorfismo semilineal respecto a $\mu \colon K \to K'$, entonces (f, μ) induce la aplicación biyectiva*

$$\mathbb{P}(f, \mu) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V'), \quad \mathbb{P}(f, \mu)[\, v\,] = [\, f(v)\,], \quad \forall\, [\, v\,] \in \mathbb{P}(V).$$

Demostración. La aplicacióm $\mathbb{P}(f,\mu)$ es inyectiva. En efecto, si $v_1, v_2 \in V$ son tales que $[\,f(v_1)\,] = [\,f(v_2)\,]$, entonces existe $\lambda' \in K'$ tal que $f(v_1) = \lambda' f(v_2)$. Sea $\lambda \in K$ tal que $\mu(\lambda) = \lambda'$. Se tiene que $f(v_1) = \mu(\lambda)\, f(v_2) = f(\lambda\, v_2)$. Así, $v_1 = \lambda\, v_2$ y por tanto $[v_1] = [v_2]$. La aplicación $\mathbb{P}(f,\mu)$ es suprayectiva puesto que f es suprayectiva. □

Definición 3.22. Se dice que una aplicación $\beta\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es un *isomorfismo semilineal proyectivo* si existe un isomorfismo semilineal $(f,\mu)\colon V \to V'$, tal que $\beta = \mathbb{P}(f,\mu)$.

Ejemplo 3.23. La aplicación $\beta\colon \mathbb{P}(\mathbb{C}^3) \to \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ dada por $\beta([x_0,x_1,x_2)]) = [\mathrm{i}\bar{x_0}+\bar{x_1}, 2\bar{x_0}+(1+\mathrm{i})\bar{x_1}, (1-\mathrm{i})\bar{x_1}+\bar{x_2})]$, donde $\bar{x_i}$ es el complejo conjugado de x_i, para $i = 0,1,2$, es un isomorfismo semilineal proyectivo.

Proposición 3.24. (1) *Si $\beta\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ y $\beta'\colon \mathbb{P}(V') \to \mathbb{P}(V'')$ son isomorfismos semilineales proyectivos, entonces $\beta \circ \beta'$ es un isomorfismo semilineal proyectivo.*

(2) $1_{\mathbb{P}(V)}\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ *es un isomorfismo semilineal proyectivo.*

(3) *Si $\beta : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es un isomorfismo semilinal proyectivo, entonces β^{-1} es un isomorfismo semilineal proyectivo.*

(4) *Sea $\beta : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ un isomorfismo semilinal proyectivo. Se tiene:*

   (a) *Si $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$, entonces $\beta(\mathbb{L})$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V')$.*

   (b) *Si V tiene dimensión finita y $\mathbb{L}$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$, entonces* $\operatorname{pdim}\beta(\mathbb{L}) = \operatorname{pdim}(\mathbb{L})$.

Demostración. (1) Si $\beta = \mathbb{P}(f,\mu)$ y $\beta' = \mathbb{P}(f',\mu')$, entonces

$$\beta' \circ \beta = \mathbb{P}(f' \circ f, \mu' \circ \mu).$$

(2) $1_{\mathbb{P}(V)} = \mathbb{P}(1_V, 1_K)$.
(3) Si $\beta = \mathbb{P}(f,\mu)$, entonces $\beta^{-1} = \mathbb{P}(f^{-1}, \mu^{-1})$.
(4) Sea $\mathbb{L} = \mathbb{P}(U)$ siendo U un subespacio de V. Se tiene que $\beta(\mathbb{L}) = \mathbb{P}(f(U))$.
(4) (a) Por la proposición A.6 (3) (d), $f(U)$ es subespacio de V'. Así, $\mathbb{P}(f(U))$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V')$.
(4) (b) Por la proposición A.6 (3) (d), $\dim_K U = \dim_{K'} f(U)$. Por tanto, $\operatorname{pdim}\mathbb{L} = \operatorname{pdim}\beta(\mathbb{L})$. □

Proposición 3.25. *Sean V y V' espacios vectoriales de igual dimensión finita sobre los cuerpos K y K', respectivamente. Si $\beta\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es un isomorfismo semilineal proyectivo, entonces β es una colineación proyectiva.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 3.19 y 3.24 (4). □

Proposición 3.26. *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $\mathbb{P}\mathrm{GSm}(V)$ el conjunto de isomorfismos semilineales proyectivos de V. Se tiene que el conjunto $\mathbb{P}\mathrm{GSm}(V)$ es un grupo con la operación composición.*

Demostración. Se sigue de la proposición 3.24 (1), (2) y (3). □

Definición 3.27. Se llama *homotecia de razón* $\lambda \in K - \{0\}$ a la aplicación K-lineal $\overline{\lambda}\colon V \to V$ dada por $\overline{\lambda}(v) = \lambda\, v$, para cada $v \in V$. Denotaremos por $\mathcal{H}(V)$ el conjunto de las homotecias de V.

Proposición 3.28. *$\mathcal{H}(V)$ es un grupo abeliano con la operación composición.*

Demostración. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in K - \{0\}$, entonces $\overline{\lambda}_1\,\overline{\lambda}_2 = \overline{\lambda_1\lambda_2}$. Además, $\overline{1} = 1_V$ y $\overline{\lambda}^{-1} = \overline{\lambda^{-1}}$. □

Proposición 3.29. *Sean V y V' espacios vectoriales de dimensión finita sobre los cuerpos K y K', respectivamente, con* $\operatorname{pdim}\mathbb{P}(V) = \operatorname{pdim}\mathbb{P}(V') \geq 1$. *Sean (f_1, μ_1) y (f_2, μ_2) isomorfismos semilineales. Son equivalentes*

(1) $\mathbb{P}(f_1, \mu_1) = \mathbb{P}(f_2, \mu_2)$.

(2) $\mu_1 = \mu_2$ *y existe* $\lambda \in K' - \{0\}$*, tal que* $f_2 = \overline{\lambda} \circ f_1$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Para todo $v \in V$, $[f_1(v)] = [f_2(v)]$, de lo que se sigue que $f_2(v) = \lambda_v\, f_1(v)$ con $\lambda_v \in K' - \{0\}$. Veamos que $\lambda_v = \lambda_{v'}$, para todo $v, v' \in V$. Si v, $v' \in V$ son vectores linealmente independientes, se tiene

$$\begin{aligned} f_2(v + v') &= f_2(v) + f_2(v') = \lambda_v\, f_1(v) + \lambda_{v'}\, f_1(v') \\ f_2(v + v') &= \lambda_{v+v'}\, f_1(v + v') = \lambda_{v+v'}\, f_1(v) + \lambda_{v+v'}\, f_1(v'). \end{aligned}$$

Dado que $f_1(v)$ y $f_1(v')$ son K'-linealmente independientes, se sigue que $\lambda_v = \lambda_{v+v'} = \lambda_{v'}$. Si v y v' son linealmente dependientes, como $\dim V \geq 2$ existe $v'' \in V$ tal que $v'' \notin \langle v\rangle = \langle v'\rangle$. Por tanto $\lambda_v = \lambda_{v''} = \lambda_{v'}$. Poniendo $\lambda = \lambda_v$, se tiene $f_2 = \overline{\lambda} \circ f_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $f_2 = \overline{\lambda} \circ f_1$ y $\mu_1 = \mu_2$. Para todo $v \in V$, se tiene

$$\mathbb{P}(f_2, \mu_2)[v] = \mathbb{P}(\bar{\lambda} \circ f_1, \mu_1)[v] = [(\bar{\lambda} \circ f_1)(v)] = [\lambda\, f_1(v)] = [f_1(v)] = \mathbb{P}(f_1, \mu_1)[v]. \qquad \square$$

Definición 3.30. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K. Se dice que el isomorfismo semilineal $\beta = \mathbb{P}(f, \mu)\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es una *proyectividad* si $\mu = 1_K$.

Proposición 3.31. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita ≥ 2. La aplicación:*

$$\mathcal{P}\colon \mathrm{GSm}(V) \to \mathbb{P}\mathrm{GSm}(V), \quad \mathcal{P}(f, \mu) = \mathbb{P}(f, \mu).$$

es un homomorfismo de grupos sobreyectivo cuyo núcleo es el grupo $\mathcal{H}(V)$.

Demostración. La aplicación $\mathcal{P}$ es un homomorfismo de grupos puesto que

$$\mathcal{P}((f', \mu') \circ (f, \mu)) = \mathcal{P}(f' \circ f, \mu'\, \mu) = \mathbb{P}(f' \circ f, \mu'\, \mu) = \mathbb{P}(f', \mu') \circ \mathbb{P}(f, \mu)$$

Si $(f, \mu) \in \mathrm{GSm}(V)$ está en el núcleo de f, entonces $\mathbb{P}(f, \mu) = 1_{\mathbb{P}(V)} = \mathbb{P}(1_V, 1_K)$. Por la proposición 3.29, existe $\lambda \in K' - \{0\}$ tal que $f = \bar{\lambda}$. Por tanto $f \in \mathcal{H}(V)$. □

3.4. Encaje de un espacio afín en un espacio proyectivo

Proposición 3.32. *Sea V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita ≥ 2, $\mathbb{H} = \mathbb{P}(H)$ un hiperplano de $\mathbb{P}(V)$ y $c \in V - H$. La aplicación:*

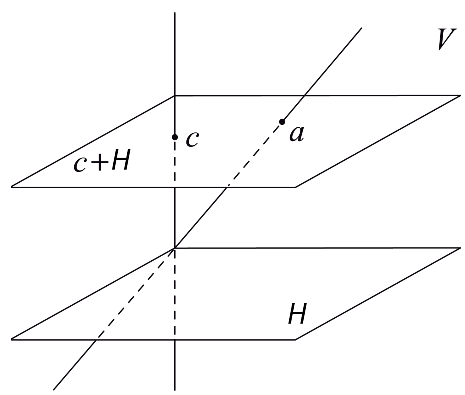
$$\varphi\colon c + H \to \mathbb{P}(V)$$

dada por $\varphi(v) = [\, v\,]$, es una aplicación inyectiva y su imagen es $\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}$.

Demostración. Si $[\, c+h_1\,] = [\, c+h_2\,]$, entonces existe $\lambda \in K - \{0\}$ tal que $c+h_1 = \lambda\,(c+h_2)$. Como $c \notin H$, se tiene que $1 - \lambda = 0$ y por tanto $v_1 = v_2$.

Claramente $\varphi(c + H) \subset \mathbb{P}(V) - \mathbb{H}$. Además, si $[v] \in \mathbb{P}(V) - \mathbb{H}$, dado que $v \notin H$ y $V = \langle\, c\,\rangle + H$, entonces $v = \lambda\, c + h$, para algún $\lambda \in K - \{0\}$ y $h \in H$. Así, $[v] = [\lambda\, c + h] = [c + \lambda^{-1}h] = \varphi(c + \lambda^{-1}h)$. □

Definición 3.33. La aplicación $\varphi\colon c + H \to \mathbb{P}(V)$, dada por $\varphi(v) = [\, v\,]$, se llama *encaje del espacio afín $c + H$ en el espacio proyectivo* $\mathbb{P}(V)$. El hiperplano $\mathbb{H} = \mathbb{P}(H)$ se llama *hiperplano de puntos en el infinito.*



Definición 3.34. Sea L una variedad lineal afín de $c + H$. Se llama *variedad lineal completada proyectiva* de L respecto al encaje $\varphi\colon c + H \to \mathbb{P}(V)$ a la menor variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V)$ que contiene a $\varphi(L)$, es decir a $\overline{\varphi(L)}$.

Proposición 3.35. ([4, Ch. II, Theorem 7]) *Sea $L = a + U$ una variedad lineal afín de $c + H$. Se tiene:*

(1) $\overline{\varphi(L)} = \mathbb{P}(\langle\, L\,\rangle) = \mathbb{P}(\langle\, a\,\rangle + U)$.

(2) $\overline{\varphi(L)} = \varphi(L) \cup \mathbb{P}(U)$, *puesto que*

$$\varphi(L) = \overline{\varphi(L)} \cap (\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}), \quad \overline{\varphi(L)} \cap \mathbb{H} = \mathbb{P}(U).$$

(3) $\operatorname{pdim} \overline{\varphi(L)} = \dim L$.

(4) $\operatorname{pdim} (\overline{\varphi(L)} \cap \mathbb{H}) = \dim L - 1$.

(5) *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de variedades lineales no vacías de $c+H$ y el conjunto de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}(V)$ que no están contenidas en $\mathbb{H}$, dada por $L \mapsto \overline{\varphi(L)}$. Además, si L_1 y L_2 son variedades lineales de $c+H$, entonces:*

(a) $L_1 \subset L_2 \iff \overline{\varphi(L_1)} \subset \overline{\varphi(L_2)}$.

(b) $L_1 \parallel L_2 \iff \overline{\varphi(L_1)} \cap \mathbb{H} \subset \overline{\varphi(L_2)} \cap \mathbb{H}$ *o* $\overline{\varphi(L_2)} \cap \mathbb{H} \subset \overline{\varphi(L_1)} \cap \mathbb{H}$.

Demostración. (1) Probemos que $\langle L\rangle = \langle a\rangle + U$. Sea W subespacio de V tal que $L \subset W$. Como $a \in L$, $\langle a\rangle \subset W$. Además, $U \subset W$ puesto que para todo $u \in U$, $u = -a+a+u \in W$. Así, $\langle\, L\,\rangle = \langle\, a\,\rangle + U \subset W$.

Veamos que $\mathbb{P}(\langle L\rangle)$ es la menor variedad lineal proyectiva que contiene a $\varphi(L)$. Sea $\mathbb{P}(W)$ variedad lineal proyectiva tal que $\varphi(L) \subset \mathbb{P}(W)$. Como $L \subset W$, $\mathbb{P}(\langle L\rangle) \subset \mathbb{P}(W)$.

(2) Claramente $\varphi(L) \subset \mathbb{P}(V) - \mathbb{H}$. Sea ahora $P \in \mathbb{P}(V)$, $P \in \overline{\varphi(L)}$ y $P \notin \mathbb{H}$. Existe $\lambda\, a + u \notin H$ tal que $P = [\lambda\, a + u]$. Dado que $\lambda\, a + u \notin H$, se tiene que $\lambda \neq 0$. Así $P = [a + \lambda^{-1}u] = \varphi(a + \lambda^{-1}u) \in \varphi(L)$. Por otra parte, puesto que $\lambda a + u \in H$ implica $\lambda = 0$, se tiene que $\overline{\varphi(L)} \cap \mathbb{H} = \mathbb{P}((\langle\, a\,\rangle + U) \cap H) = \mathbb{P}(U)$.

(3) Por (1) $\overline{\varphi(L)} = \mathbb{P}(\langle\, a\,\rangle + U)$, y dado que $\langle\, a\,\rangle \cap U = \{0\}$, se tiene que

$$\operatorname{pdim} \overline{\varphi(L)} = \dim_K(\langle\, a\,\rangle + U) - 1 = \dim_K\langle\, a\,\rangle + \dim_K U - 1 = \dim L.$$

(4) Por (2), $\operatorname{pdim} \overline{\varphi(L) \cap \mathbb{H}} = \operatorname{pdim}(\mathbb{P}(U)) = \dim_K U - 1 = \dim L - 1$.

(5) Si $L = a + U$ es una variedad lineal de $c+H$, entonces $\overline{\varphi(L)} = \mathbb{P}(\langle a\rangle + U) \not\subset \mathbb{H}$, puesto que $\langle a\rangle + U \not\subset H$.

Denotemos por $\mathcal{A}$ el conjunto de variedades lineales afines de $c+H$ y por $\mathcal{P}(V)$ el conjunto de variedades lineales proyectivas de $\mathbb{P}(V)$. La aplicación

$$\overline{\varphi}\colon \{L \in \mathcal{A} \,|\, L \neq \varnothing\,\} \to \{\mathbb{L} \in \mathcal{P}(V) \,|\, \mathbb{L} \not\subset \mathbb{H}\,\},$$

dada por $\overline{\varphi}(L) = \overline{\varphi(L)}$, es una aplicación inyectiva. En efecto, si L_1 y L_2 son variedades lineales afines no vacías y $\overline{\varphi(L_1)} = \overline{\varphi(L_2)}$, entonces por (2),

$$\varphi(L_1) = \overline{\varphi(L_1)} \,\cap\, (\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}) = \overline{\varphi(L_2)} \,\cap\, (\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}) = \varphi(L_2),$$

y por ser φ una aplicación inyectiva, se tiene $L_1 = L_2$.

Sea ahora $\mathbb{P}(W)$ una variedad lineal proyectiva tal que $\mathbb{P}(W) \not\subset \mathbb{H}$. Dado que $W \not\subset H$, entonces $W + H = V$. Utilizando la identidad de Grasman se tiene

$$\dim_K(W \cap H) = \dim_K W + \dim_K H - \dim_K V = \dim_K W - 1,$$

y por tanto $W \cap H$ es un hiperplano de W. Sea $w \in W$, $w \notin H$. Se tiene que $\langle\, w\,\rangle + (W \cap H) = W$ y $\langle\, w\,\rangle + H = V$. Si $c = \lambda\, w + h$, entonces $\lambda\, w = c - h \in c + H$ y la variedad lineal afín $\lambda\, w + (W \cap H)$ verifica

$$\overline{\varphi(\lambda\, w + (W \cap H))} = \mathbb{P}(\langle \lambda\, w\rangle + (W \cap H)) = \mathbb{P}(\langle w\rangle + (W \cap H)) = \mathbb{P}(W)$$

(5) (*a*) Sean L_1 y L_2 variedades lineales no vacías de $c+H$. Si $L_1 \subset L_2$, entonces $\varphi(L_1) \subset \varphi(L_2)$ y por tanto $\overline{\varphi(L_1)} \subset \overline{\varphi(L_2)}$. Recíprocamente, si $\overline{\varphi(L_1)} \subset \overline{\varphi(L_2)}$, por (2),

$$\varphi(L_1) = \overline{\varphi(L_1)} \,\cap\, (\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}) \subset \overline{\varphi(L_2)} \,\cap\, (\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}) = \varphi(L_2),$$

y por ser φ una aplicación inyectiva, se tiene $L_1 \subset L_2$.

(7) Sean $L_1 = a_1 + U_1$ y $L_2 = a_2 + U_2$ variedades lineales afines de $\mathbb{A}$. Se tiene que $L_1 \parallel L_2$ si, y solo si, $U_1 \subset U_2$ o $U_2 \subset U_1$ o, equivalentemente, si $\mathbb{P}(U_1) \subset \mathbb{P}(U_2)$ o $\mathbb{P}(U_2) \subset \mathbb{P}(U_1)$. El resultado se sigue de (2). $\square$

Definición 3.36. Se llama *encaje* de un espacio afín de dimensión n sobre un cuerpo K, en un espacio proyectivo de dimensión n sobre K, a la composición de una colineación afín y un encaje como el de la definición 3.42.

Ejemplo 3.37. La aplicación

$$j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$$

dada por $j(x_1, x_2) = [(1, x_1, x_2)]$ es un encaje de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ que se llama encaje canónico. La recta $\mathbb{H} = \{[(0, x_1, x_2)] \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}\}$, se dice que es la recta de puntos del infinito de $\mathbb{R}^2$.

3.5. Teorema fundamental de la geometría proyectiva

Sean V y V' espacios vectoriales sobre los cuerpos K y K', respectivamente, tales que $\dim V = \dim V' \geq 3$. En esta sección vamos a probar el teorema fundamental de la geometría proyectiva, que afirma que toda colineación proyectiva $\sigma\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es un isomorfismo semilineal proyectivo. La demostración dada utiliza el encaje del espacio afín en el espacio proyectivo, estudiado en la sección anterior, para relacionar las colineaciones afines y proyectivas, y también el teorema fundamental de la geometría afín

Finalmente, veremos que el teorema fundamental de la geometría afín se puede obtener a partir del teorema fundamental de la geometría proyectiva, definiendo el espacio vectorial universal asociado a un espacio afín y utilizando de nuevo el encaje del espacio afín en el espacio proyectivo.

Teorema 3.38. (Teorema fundamental de la geometría proyectiva) *Sean V y V' espacios vectoriales de igual dimensión finita $n \geq 3$ sobre los cuerpos K y K', respectivamente. Si $\sigma\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ es una colineación proyectiva, entonces σ es un isomorfismo semilineal proyectivo.*

Demostración. Sea $\mathbb{H} = \mathbb{P}(H)$ un hiperplano de $\mathbb{P}(V)$ y $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{P}(H') = \mathbb{H}'$. Sean $c \in V - H$ y $c' \in V' - H'$. Dado que $\varphi'\colon c' + H' \to \mathbb{P}(V')$ es una aplicación inyectiva cuya imagen es $\mathbb{P}(V') - \mathbb{P}(H')$, también denotamos $\varphi'\colon c' + H' \to \mathbb{P}(V') - \mathbb{P}(H')$. Consideremos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} c + H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{P}(V) \arrow[d, "\sigma"] \\ c' + H' \arrow[r, "\varphi'"] & \mathbb{P}(V') \end{tikzcd}$$

donde φ y φ' con los encajes de $c + H$ y $c' + H'$ en $\mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{P}(V')$, respectivamente, y

$$\alpha = \varphi'^{-1} \circ \sigma \circ \varphi\colon c + H \longrightarrow c' + H'.$$

Veamos que α es una colineación afín. La aplicación α es biyectiva, puesto que si $\alpha(x) = \alpha(y)$, entonces $\sigma(\varphi(x)) = \sigma(\varphi(y))$ y por ser σ y φ aplicaciones inyectivas, $x = y$. Además si $x' \in c' + H'$, existe $[x] \in \mathbb{P}(V) - \mathbb{H}$ tal que $\sigma[x] = [x']$. Si $y \in c + H$ es tal que $[x] = [y]$, entonces $\alpha(y) = x'$.

Sea L una variedad lineal afín de $c + H$. Probemos que $\alpha(L)$ es una variedad lineal afín de $c' + H'$ y que $\dim L = \dim \alpha(L)$. Se tiene

$$\begin{aligned}\alpha(L) =& {\varphi'}^{-1}\sigma(\varphi(L)) = {\varphi'}^{-1}\sigma(\overline{\varphi(L)} \cap (\mathbb{P}(V) - \mathbb{H}))\\ =& {\varphi'}^{-1}(\sigma(\overline{\varphi(L)}) \cap (\mathbb{P}(V') - \mathbb{H}')).\end{aligned}$$

Dado que $\overline{\varphi(L)} \not\subset \mathbb{H}$, $\sigma(\overline{\varphi(L)}) \not\subset \mathbb{H}'$. Por ser σ colineación proyectiva, $\sigma(\overline{\varphi(L)})$ es una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(V')$. Por la proposición 3.35 (5), existe una variedad lineal afín L' de $c' + H'$ tal que $\sigma(\overline{\varphi(L)}) = \overline{\varphi'(L')}$. Por tanto

$$\alpha(L) = {\varphi'}^{-1}(\overline{\varphi'(L')}) \cap (\mathbb{P}(V') - \mathbb{H}')) = {\varphi'}^{-1}(\varphi'(L')) = L'.$$

Además,

$$\dim L = \operatorname{pdim} \overline{\varphi(L)} = \operatorname{pdim} \sigma(\overline{\varphi(L)}) = \operatorname{pdim} (\overline{\varphi'(L')}) = \dim L'.$$

Por el teorema fundamental de la geometría afín (teorema 2.49), α es un isomorfismo semilineal afín, es decir, existe una aplicación semilineal $(f, \mu)\colon H \to H'$ tal que

$$\alpha(a + h) = \alpha(a) + f(h), \quad a \in c + H,\ h \in H.$$

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon V = \langle\, c\,\rangle \oplus H &\longrightarrow \langle\, \alpha(c)\,\rangle \oplus H' = V'\\ \lambda\, c + h &\longmapsto \mu(\lambda)\, \alpha(c) + f(h).\end{aligned}$$

Veamos que $\tilde{f}$ es una aplicación semilineal respecto a μ.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda_1\, c + h_1 + \lambda_2\, c + h_2) =& \mu(\lambda_1 + \lambda_2)\, \alpha(c) + f(h_1 + h_2)\\ =& \mu(\lambda_1)\, \alpha(c) + f(h_1) + \mu(\lambda_2)\, \alpha(c) + f(h_2)\\ =& \tilde{f}(\lambda_1\, c + h_1) + \tilde{f}(\lambda_2\, c + h_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}(a(\lambda c + h) =& \tilde{f}(a\lambda c + ah) = \mu(a\lambda)\alpha(c) + g(ah)\\ =& \mu(a)\, \mu(\lambda)\, \alpha(c) + \mu(a)\, f(h) = \mu(a)\tilde{f}(\lambda\, c + h),\end{aligned}$$

para todo $a \in K$. Además, $\tilde{f}$ es una aplicación biyectiva; para probar que $\tilde{f}$ es una aplicación inyectiva, como V y V' son espacios vectoriales de igual dimensión finita, es suficiente probar que $\tilde{f}$ es inyectiva. Supongamos que $\tilde{f}(\lambda\, c + h) = 0$ y que $\alpha(c) = c' + h'$, $h' \in H'$. Se tiene

$$\tilde{f}(\lambda\, c + h) = \mu(\lambda)\alpha(c) + f(h) = \mu(\lambda)\, c' + \mu(\lambda)\, h' + f(h) = 0.$$

Luego, $\mu(\lambda)\, c' = -\mu(\lambda)h' - f(h) \in \langle c'\rangle \cap H' = \{0\}$. Así, $\mu(\lambda) = 0$, $f(h) = 0$. Por tanto, $\lambda\, c + h = 0$.

Dado que $\mathbb{P}(\tilde{f}, \mu)[h] = [f(h)]$, se tiene que $\mathbb{P}(\tilde{f}, \mu)(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$. Además,

$$(\mathbb{P}(\tilde{f}, \mu) \circ \varphi)(c + h) = [\alpha(c) + f(h)] = (\varphi' \circ \alpha)(c + h).$$

Veamos que $\mathbb{P}(\tilde{f}, \mu) = \sigma$:

- Si $[x] \in \mathbb{P}(V) - \mathbb{H}$, $[x] = [\lambda\, c + h]$, $\lambda \in K - \{0\}$, $h \in H$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma[x] =&\sigma[c + \lambda^{-1}h] = (\sigma \circ \varphi)(c + \lambda^{-1}h) = (\varphi' \circ \alpha)(c + \lambda^{-1}h)\\ =&\varphi'(\alpha(c) + \mu(\lambda^{-1})f(h)) = [\mu(\lambda)\alpha(c) + f(h)] = \mathbb{P}(\tilde{f}, \mu)[x].\end{aligned}$$

- Si $[h] \in \mathbb{H}$, veamos que $\sigma[h] = [f(h)]$. Dado que $\varphi'\, \alpha(c + \langle\, h\,\rangle) = \sigma\, \varphi(c + \langle\, h\,\rangle)$, se tiene

$$\overline{\varphi'(\alpha(c + \langle\, h\,\rangle))} \subset \sigma(\overline{\varphi(c + \langle\, h\,\rangle)}),$$

y teniendo en cuenta las identidades

$$\begin{aligned}\operatorname{pdim} \overline{\varphi'(\alpha(c + \langle\, h\,\rangle))} =&\dim\, \alpha(c + \langle\, h\,\rangle) = \dim\,(c + \langle\, h\,\rangle)\\ =&\operatorname{pdim} \overline{\varphi(c + \langle\, h\,\rangle)} = \operatorname{pdim} \sigma(\overline{\varphi(c + \langle\, h\,\rangle)}),\end{aligned}$$

se llega a la igualdad $\sigma(\overline{\varphi(c+ <\ h\ >)}) = \overline{\varphi'\, \alpha(c+ <\ h\ >)}$. Por tanto

$$\begin{aligned}\sigma\{[h]\} =&\sigma(\overline{\varphi(c+ <\ h\ >)} \cap \mathbb{H}) = \sigma(\overline{\varphi(c+ <\ h\ >)}) \cap \mathbb{H}'\\ =&(\overline{\varphi'(\alpha(c+ <\ h\ >))}) \cap \mathbb{H}' = \overline{\varphi'(\alpha(c)+ <\ f(h)\ >)} \cap \mathbb{H}' = \{[f(h)]\}\\ =&\mathbb{P}(\tilde{f}, \mu)\{[h]\}.\end{aligned}$$

Así, $\sigma = \mathbb{P}(\tilde{f}, \mu)$. $\square$

Observación 3.39. El teorema fundamental de la geometría proyectiva no es cierto, en general, si $\operatorname{pdim} \mathbb{P}(\mathrm{V}) = \operatorname{pdim} \mathbb{P}(\mathrm{V}') = 1$. En este caso las colineaciones proyectivas de $\mathbb{P}(V)$ en $\mathbb{P}(V')$ son las aplicaciones biyectivas y no toda aplicación biyectiva de $\mathbb{P}(V)$ en $\mathbb{P}(V')$ es un isomorfismo semilineal afín.

Por ejemplo, ninguna aplicación biyectiva $\sigma\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ distinta de la identidad que deje fijos tres puntos distintos es una proyectividad. En efecto, sea $\mathbb{P}(f)\colon \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ una proyectividad que deja fijos los puntos $[v_1]$, $[v_2]$ y $[v_3]$, $[v_1] \neq [v_2] \neq [v_3]$. Dado que los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes tenemos $v_3 = av_1 + bv_2$ con $a \neq 0$ por ser $[v_3] \neq [v_2]$ y $b \neq 0$ por ser $[v_3] \neq [v_1]$. Los vectores $v_1' = a\, v_1$ y $v_2' = b\, v_2$ son linealmente independientes, luego $\{v_1', v_2'\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Se tiene

$$\sigma[v_1'] = [f(v_1')] = [v_1'],\ \sigma[v_2'] = [f(v_2')] = [v_2'],\ \sigma[v_1' + v_2'] = [f(v_1' + v_2')] = [v_1' + v_2'],$$

y entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $f(v_1') = \lambda_1\, v_1'$, $f(v_2') = \lambda_2\, v_2'$ y $f(v_1' + v_2') = \lambda_3\,(v_1' + v_2')$. Por tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Poniendo $\lambda = \lambda_1$ se tiene que $f = \overline{\lambda}$ y por tanto $\sigma = 1_{\mathbb{P}(V)}$.

Si F es un cuerpo finito con más de 4 elementos, existen aplicaciones biyectivas σ : $\mathbb{P}(F^2) \to \mathbb{P}(F^2)$ que no son isomorfismos semilineales afines. En efecto, sea $|F| = q = p^t$, con p primo. Por la proposición 3.31 se tiene un isomorfismo de grupos

$$\frac{\mathrm{GSm}(F^2)}{\mathcal{H}(F^2)} \simeq \mathbb{P}\mathrm{GSm}(F^2)$$

y entonces

$$\left|\mathrm{GSm}(F^2)\right| = \left|\mathbb{P}\mathrm{GSm}(F^2)\right|\, \left|\mathcal{H}(F^2)\right|.$$

El número de isomorfismos μ-semilineales de F^2 en F^2 es $(q^2-1)(q^2-q)$ y el número de automorfirmos de F es t. Por tanto $\left|\mathrm{GSm}(F^2)\right| = t(q^2-1)(q^2-q)$. Dado que $\left|\mathcal{H}(F^2)\right| = q-1$, $\left|\mathbb{P}\mathrm{GSm}(F^2)\right| = t\,(q^2-1)\,q$.

El número de elementos de $\mathbb{P}(F^2)$ es $q+1$ y por tanto el número de aplicaciones biyectivas de F^2 en F^2 es $(q+1)!$. Para $q \geq 5$ se tiene que $t(q^2-1)q < (q+1)!$, y por tanto existen más colineaciones proyectivas de $\mathbb{P}(F^2)$ en $\mathbb{P}(F^2)$ que isomorfismos semilineales proyectivos.

Definición 3.40. [2, (3.1.7)] Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Se llama *espacio vectorial universal* asociado al espacio afín $\mathbb{A}$ al conjunto $\widetilde{V} = (K^* \times \mathbb{A}) \bigsqcup V$ con las operaciones:

- $(\lambda, P) + (\lambda', P') = (\lambda + \lambda', P + \dfrac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}\overrightarrow{PP'})$, si $\lambda + \lambda' \neq 0$,
- $(\lambda, P) + (\lambda', P') = \lambda\,\overrightarrow{P'P}$, si $\lambda + \lambda' = 0$,
- $(\lambda, P) + v = (\lambda, P + \lambda^{-1}v)$,
- $k(\lambda, P) = (k\,\lambda, P)$, para todo $k \in K^*$,
- $0(\lambda, P) = 0$,

  para todo $P, P' \in \mathbb{A}$, $\lambda, \lambda' \in K^*$ y para todo $v \in V$ y donde además la adición de elementos de V y su multiplicación por escalares es la original.

Vamos a construir un encaje del espacio afín $\mathbb{A}$ en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\widetilde{V})$. Para esto, definiremos una afinidad de $\alpha\colon \mathbb{A} \to \{1\} \times \mathbb{A}$, donde $\{1\} \times \mathbb{A}$ es un hiperplano afín de $\widetilde{V}$.

Proposición 3.41. *En las condiciones de la definición anterior, se tiene*

(1) *V es un subespacio de $\widetilde{V}$.*

(2) *Para cada $A \in \mathbb{A}$, se tiene que $\widetilde{V} = \langle (1, A)\rangle \oplus V$.*

(3) *$\{1\} \times \mathbb{A} = (1, A) + V$ es un hiperplano afín de $\widetilde{V}$ que no pasa por 0.*

(4) *La aplicación $\alpha\colon \mathbb{A} \to \{1\} \times \mathbb{A}$, dada por $\alpha(P) = (1, P)$, es una afinidad cuya aplicación lineal asociada es 1_V.*

(5) *Si $\mathcal{R} = \{P_1, \ldots, P_n; Q\}$ es una referencia afín de $\mathbb{A}$ con base asociada B, entonces $\alpha(\mathcal{R}) = \{(1, P_1), \ldots, (1, P_n); (1; Q)\}$ es una referencia afín de $\{1\} \times \mathbb{A}$ con base asociada B.*

Demostración. (1) es trivial.

(2) Claramente, $\langle (1, A)\rangle \oplus V \subset \widetilde{V}$. Por otra parte, sea $(\lambda, P) \in K^* \times \mathbb{A}$. Puesto que $P = A + \overrightarrow{AP}$, se tiene que $(\lambda, P) = (\lambda, A) + \lambda\,\overrightarrow{AP}$.

(3) Se sigue de las igualdades $(1, P) = (1, A) + \overrightarrow{AP}$ y $(1, A) + v = (1, A + v)$.

(4) Para cualesquiera $P, Q \in \mathbb{A}$, se tiene

$$\overrightarrow{\alpha(P)\,\alpha(Q)} = \overrightarrow{(1, P)\,(1, Q)} = (1, Q) - (1, P) = (1, Q) + (-1, P) = \overrightarrow{PQ}.$$

(5) Se sigue del apartado anterior y de A.27 (4). □

Definición 3.42. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre el espacio vectorial V. Se llama *completado proyectivo* de $\mathbb{A}$ al espacio $\mathbb{P}(\widetilde{V})$. La aplicación $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{P}(\widetilde{V})$, dada por $\widetilde{\varphi}(P) = [(1, P)]$, se llama *encaje* del espacio afín $\mathbb{A}$ en su completado proyectivo. El hiperplano $\mathbb{P}(V)$ se llama hiperplano de puntos del infinito del encaje $\widetilde{\varphi}$.

La aplicación $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{P}(\widetilde{V})$ es composición de la afinidad $\alpha\colon \mathbb{A} \to \{1\} \times \mathbb{A} = (1, A) + V$ y el encaje $\varphi\colon (1, A) + V \to \mathbb{P}(\widetilde{V})$ dado por $\varphi((1, A) + v) = [(1, A) + v]$, para todo $v \in V$.

Vamos a ver como el teorema fundamental de la geometría afín, que ya hemos probado (teorema 2.49), también se puede obtener a partir del teorema fundamental de la geometría proyectiva.

Teorema 3.43. (Teorema fundamental de la geometría afín) *Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}'$ son espacios afines de igual dimensión $n \geq 2$ sobre los espacios vectoriales V y V', respectivamente y $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es una colineación afín, entonces τ es un isomorfismo semilineal afín.*

Demostración. Sea $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ una colineación afín, $A \in \mathbb{A}$ y $A' \in \mathbb{A}'$. Vamos a denotar $(1, A)$ por c y $(1, A')$ por c'. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"'] & c + V \arrow[d, "\widetilde{\tau}"] \\
\mathbb{A}' \arrow[r, "\alpha'"] & c' + V'
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\tau} = \alpha' \circ \tau \circ \alpha^{-1}$. Por las proposiciones 2.37 y 2.35, la aplicación $\widetilde{\tau}$ es una colineación afín. Pongamos $c = (1, A)$, $\mathbb{H} = \mathbb{P}(V)$ y $\mathbb{H}' = \mathbb{P}(V')$.

Consideremos la aplicación $\sigma_\tau\colon \mathbb{P}(\widetilde{V}) \to \mathbb{P}(\widetilde{V}')$ definida de la forma siguiente:

- Si $[x] \in \mathbb{P}(\widetilde{V}) - \mathbb{H}$ y $[x] = [x_1]$, $x_1 \in c + V$, $\sigma_\tau[x] = [\widetilde{\tau}(x_1)]$
- Si $[x] \in \mathbb{H}$ y $\widetilde{\tau}(c + \langle\, x \,\rangle) = \widetilde{\tau}(c) + \langle\, x' \,\rangle$, entonces $\sigma_\tau[x] = [x']$. Veamos que en este caso σ_τ no depende de c. En efecto, $\widetilde{\tau}(a + < x >) = \widetilde{\tau}(a) + < x' >$, puesto que $\widetilde{\tau}$ lleva rectas paralelas a rectas paralelas.

Vamos a probar que σ_τ es una colineación proyectiva. De la definición de σ_τ se sigue que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
c + V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\widetilde{\tau}"'] & \mathbb{P}(\widetilde{V}) \arrow[d, "\sigma_\tau"] \\
c' + V' \arrow[r, "\varphi'"] & \mathbb{P}(\widetilde{V}')
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. La aplicación σ_τ es inyectiva. En efecto, sean $[x_1]$, $[x_2] \in \mathbb{P}(\widetilde{V})$ tales que $\sigma_\tau[x_1] = \sigma_\tau[x_2]$.

Si $\sigma_\tau[x_1] = \sigma_\tau[x_2] \in \mathbb{P}(\widetilde{V}') - \mathbb{H}'$, entonces $[x_1], [x_2] \in \mathbb{P}(\widetilde{V}) - \mathbb{H}$. Pongamos $[x_1] = [y_1]$, $[x_2] = [y_2]$ con y_1, $y_2 \in c + V$. Se tiene

$$\varphi'(\widetilde{\tau}(y_1)) = [\widetilde{\tau}(y_1)] = \sigma_\tau[x_1] = \sigma_\tau[x_2] = [\widetilde{\tau}(y_2)] = \varphi'(\widetilde{\tau}(y_2)),$$

y dado que φ' y $\widetilde{\tau}$ son aplicacions inyectivas, $y_1 = y_2$.

Si $\sigma_\tau[x_1] = \sigma_\tau[x_2] \in \mathbb{H}'$, entonces $[x_1], [x_2] \in \mathbb{H}$. Se tiene que si $\widetilde{\tau}(c+\langle\, x_1\,\rangle) = \widetilde{\tau}(c)+\langle\, x_1'\,\rangle$ y $\widetilde{\tau}(c+\langle\, x_2\,\rangle) = \widetilde{\tau}(c)+\langle\, x_2'\,\rangle$, entonces $\sigma_\tau[x_1] = [x_1']$ y $\sigma_\tau[x_2] = [x_2']$. Dado que $[x_1'] = [x_2']$, entonces $\langle\, x_1'\,\rangle = \langle\, x_2'\,\rangle$ y por tanto $\widetilde{\tau}(c+\langle\, x_1\,\rangle) = \widetilde{\tau}(c+\langle\, x_2\,\rangle)$. Dado que $\widetilde{\tau}$ aplicación biyectiva $c+\langle\, x_1\,\rangle = c+\langle\, x_2\,\rangle$. Así, $[x_1] = [x_2]$.

Veamos que σ_τ es aplicación suprayectiva. Sea $[x'] \in \mathbb{P}(\widetilde{V}') - \mathbb{H}'$ y $[x'] = [y']$ con $y' \in c' + V'$ y sea $x \in c+V$ tal que $\widetilde{\tau}(x) = y'$. Se tiene que $\sigma_\tau[x] = [\widetilde{\tau}(x)] = [y'] = [x']$. Si $[x'] \in \mathbb{H}'$, se tiene que $\widetilde{\tau}^{-1}(\widetilde{\tau}(c)+\langle\, x'\,\rangle) = c+\langle\, x\,\rangle$ con $x \in V$, luego $\sigma_\tau[x] = [x']$.

Vamos a probar que σ_τ lleva variedades lineales proyectivas a variedades lineales proyectivas. Sea $\mathbb{L}$ una variedad lineal proyectiva de $\mathbb{P}(\widetilde{V})$.

- Si $\mathbb{L} \not\subset \mathbb{H}$, por la proposición 3.35)(5), existe una variedad lineal afín $L = a+U$ de $c+V$ tal que $\overline{\varphi(L)} = \mathbb{L}$. Se tiene que $\widetilde{\tau}(L) = \widetilde{\tau}(a)+U'$. Veamos que $\sigma_\tau(\mathbb{L}) = \mathbb{P}(\langle\widetilde{\tau}(a)\rangle + U')$. Dado que $\mathbb{L} = \mathbb{P}(\langle a\rangle + U)$, para todo $\lambda \in K - \{0\}$ y todo $u \in U$,

$$\sigma_\tau[\lambda\, a + u] = \sigma_\tau[a+\lambda^{-1}u] = [\widetilde{\tau}(a+\lambda^{-1}u)] \in \mathbb{P}(\langle\widetilde{\tau}(a)\rangle + U').$$

  y $\sigma_\tau[u] = [u'] \in \mathbb{P}(U') \subset \mathbb{P}(\langle\widetilde{\tau}(a)\rangle + U')$, siendo $\widetilde{\tau}(a+\langle u\rangle) = \widetilde{\tau}(a)+\langle u'\rangle$. Así, $\sigma_\tau(\mathbb{L}) \subset \mathbb{P}(\langle\widetilde{\tau}(a)\rangle + U')$. De forma análoga se prueba que $\mathbb{P}(\langle\widetilde{\tau}(a)\rangle + U') \subset \sigma_\tau(\mathbb{L})$.

- Si $\mathbb{L} \subset \mathbb{H}$, $\mathbb{L} = \mathbb{P}(U)$, $U \subset H$ y $\widetilde{\tau}(c+U) = \widetilde{\tau}(c)+U'$, se tiene que $\sigma_\tau(\mathbb{L}) = \mathbb{P}(U')$. En efecto, si $u \in U$ y $\widetilde{\tau}(a+\langle u\rangle) = \widetilde{\tau}(a)+\langle u'\rangle$, entonces $\sigma_\tau[u] = [u'] \in \mathbb{P}(U')$. Así, $\sigma_\tau(\mathbb{L}) \subset \mathbb{P}(U')$. Por otra parte, si $[u'] \in \mathbb{P}(U')$, dado que $a+U = \widetilde{\tau}^{-1}(\widetilde{\tau}(a)+U')$, existe $u \in U$ tal que $\widetilde{\tau}(a+\langle u\rangle) = \widetilde{\tau}(a)+\langle u'\rangle$. Luego, $[u'] = \sigma_\tau[u] \in \sigma_\tau(\mathbb{L})$.

Se tiene

$$\operatorname{pdim}\sigma_\tau(\mathbb{L}) = \dim \mathrm{L} = \dim \widetilde{\tau}(\mathrm{L}) = \operatorname{pdim}\sigma_\tau(\mathbb{L}).$$

Por la proposición 3.19, σ_τ es una colineación proyectiva. Además, $\sigma_\tau(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$.

Dado que σ_τ es una colineación proyectiva, el teorema fundamental de la geometría proyectiva afirma que σ_τ es un isomorfismo semilineal proyectivo, es decir, existe un isomorfismo semilineal $(f,\mu)\colon \widetilde{V} \to \widetilde{V}'$ tal que $\sigma_\tau = \mathbb{P}(f,\mu)$. Vamos a probar que

$$\beta = {\varphi'}^{-1} \circ \sigma_\tau \circ \varphi \colon c+V \to c'+V'$$

es un isomorfismo semilineal afín. Dado que $\widetilde{V}' = \langle\, c'\,\rangle \oplus V'$ y $f(V) = V'$, es $f(c) = \lambda\, c' + v'$, $\lambda \neq 0$, para algún $v' \in V'$. Así,

$$\beta(c+v) = {\varphi'}^{-1}[f(c)+f(v)] = {\varphi'}^{-1}[c'+\lambda^{-1}v'+\lambda^{-1}f(v)] = c'+\lambda^{-1}v'+\lambda^{-1}f(v), \quad v \in V.$$

Si $c+v_1, c+v_2 \in c+V$, se tiene

$$\overrightarrow{\beta(c+v_1),\beta(c+v_2)} = \lambda^{-1}f(v_2-v_1) = \lambda^{-1}f(\overrightarrow{c+v_1,c+v_2}).$$

Dado que $f(V) = V'$ la aplicación $f|_V\colon V \to V'$ dada por $f|_V(v) = f(v)$, es un isomorfismo semilineal respecto a μ. Por tanto, la aplicación β es un isomorfismo semilineal afín con isomorfismo semilineal asociado $(\lambda^{-1}f|_V,\mu)$. Veamos que $\beta = \widetilde{\tau}$:

$$\beta(c+v) = ({\varphi'}^{-1}\circ\sigma_\tau\circ\varphi)(c+v) = {\varphi'}^{-1}(\sigma_\tau[\varphi)(c+v)]) = {\varphi'}^{-1}[\widetilde{\tau}(c+v)] = \widetilde{\tau}(c+v), \quad v \in V.$$

Dado que $\alpha\colon \mathbb{A} \to c+V$ y $\alpha'\colon \mathbb{A}' \to c'+V'$ son afinidades y que $\widetilde{\tau}$ es un isomorfismo semilineal afín con isomorfismo semilineal asociado $(\lambda^{-1}f|_V,\mu)$, la colineación afín $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ es un isomorfismo semilineal afín con isomorfismo semilineal asociado $(\lambda^{-1}f|_V,\mu)$. $\square$

Observación 3.44. Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín sobre V y $\mathbb{A}'$ un espacio afín sobre V'. Se tiene una aplicación biyectiva Φ entre el conjunto de colineaciones afines de $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ y el conjunto de colineaciones proyectivas $\sigma\colon \mathbb{P}(\widetilde{V}) \to \mathbb{P}(\widetilde{V}')$ tales que $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$. La aplicación Φ asocia a cada colineación afín τ la colineación proyectiva σ_τ construida en el teorema 3.43; su inversa Φ^{-1} es la aplicación que asocia a cada colineación proyectiva $\sigma\colon \mathbb{P}(\widetilde{V}) \to \mathbb{P}(\widetilde{V}')$ tal que $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$ la colineación afín $\alpha'^{-1} \circ \varphi'^{-1} \circ \sigma \circ \varphi \circ \alpha\colon \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$. Esta aplicación biyectiva Φ, induce una biyección entre el conjunto de isomorfismos semilineales afines $\tau\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ y el conjunto de isomorfismos semilineales proyectivos $\beta\colon \mathbb{P}(\widetilde{V}) \to \mathbb{P}(\widetilde{V}')$ tales que $\beta(\mathbb{H}) = \mathbb{H}'$.

En particular, se tiene un isomorfismo de grupos entre el grupo $\mathbb{P}\mathrm{G}_{\mathbb{H}}(\widetilde{V})$ formado por las colineaciones proyectivas $\sigma\colon \mathbb{P}(\widetilde{V}) \to \mathbb{P}(\widetilde{V})$ tales que $\sigma(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ y el grupo $\mathrm{S}(\mathbb{A})$ de colineaciones afines de $\mathbb{A}$; este isomorfismo induce un isomorfismo entre el grupo $\mathbb{P}\mathrm{GSm}_{\mathbb{H}}(V)$ de isomorfismos semilineales proyectivos $\beta\colon \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ tales que $\beta(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ y el grupo $\mathrm{GS}(\mathbb{A})$ de isomorfismos semilineales afines de $\mathbb{A}$.

A. Aplicaciones semilineales

Definición A.1. Sean V y V' espacios vectoriales sobre K y K' respectivamente y sea $\mu\colon K \to K'$ un isomorfismo de cuerpos. Se dice que la aplicación $f\colon V \to V'$ es una aplicación semilineal respecto a μ si verifica:

$$f(a\,v_1 + b\,v_2) = \mu(a)\,f(v_1) + \mu(b)\,f(v_2)\,,\ \forall\, v_1, v_2 \in V,\ \forall\, a, b \in K$$

Denotaremos por (f, μ) la aplicación f semilineal respecto a μ. Si además f es una aplicación biyectiva diremos que (f, μ) es un isomorfismo semilineal.

Obsérvese que si $K = K'$ y $\mu = 1_K$, entonces la definición anterior es la definición de aplicación lineal.

Ejemplo A.2. La aplicación $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ dada por $f(x_0, x_1, x_2) = (\bar{x_0} + \mathrm{i}\bar{x_1}, \bar{x_1} + (1 - \mathrm{i})\bar{x_2}, \bar{x_2})$, donde $\bar{x_i}$ es el complejo conjugado de x_i, para $i = 0, 1, 2$, es una aplicación semilineal respecto a $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, siendo μ la aplicación conjugación.

A.3. Nota.

(1) El único automorfismo de cuerpos de $\mathbb{Q}$ es la identidad. En efecto, si $\mu : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es un automorfismo de cuerpos, entonces $\mu(1) = 1$. Por ser μ automorfismo del grupo aditivo de $\mathbb{Q}$, entonces $\mu(m) = m$, para cada $m \in \mathbb{Z}$. Dado que $1 = \mu(n/n) = \mu(n)\mu(1/n) = n\mu(1/n)$ se tiene que $\mu(1/n) = 1/n$. Así, $\mu(m/n) = m/n$.

(2) El único automorfismo de cuerpos de $\mathbb{R}$ es la identidad. En efecto, si $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un automorfismo de cuerpos, entonces $\mu_{|\mathbb{Q}} = 1_{\mathbb{Q}}$. Además μ conserva el orden puesto que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $x - y = z^2$, con $z \neq 0$ y por tanto $\mu(x) - \mu(y) = \mu(z)^2 > 0$. Sea $x \in \mathbb{R}$ y $x \notin \mathbb{Q}$. Veamos que $\mu(x) = x$. Si $\mu(x) \neq x$, entonces $x < \mu(x)$ o $\mu(x) < x$. Supongamos que $x < \mu(x)$. Por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$, existe $m/n \in \mathbb{Q}$ tal que $x < m/n < \mu(x)$. Así, $\mu(x) < m/n < \mu(x)$.

(3) Existen infinitos automorfismos de cuerpos de $\mathbb{C}$ [3, Exercise (4), pg. 219].

Las aplicaciones semilineales tienen muchas de las propiedades de las aplicaciones lineales.

Lema A.4. *Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, $v'_1, \ldots, v'_n \in V'$ y $\mu\colon K \to K'$ un isomorfismo de cuerpos. Existe una única aplicación semilineal respecto a μ, $f\colon V \to V'$, tal que $f(v_i) = v'_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Demostración. La aplicación $f\colon V \to V'$, dada por

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, v'_i,$$

verifica las condiciones pedidas. □

Observación A.5. Obsérvese que como consecuencia del lema anterior si $\mu\colon K \to K'$ es un isomorfismo de cuerpos, entonces las aplicaciones $f\colon K^n \to {K'}^m$ semilineales respecto a μ son las aplicaciones de la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}\mu(x_1) + \ldots + a_{1n}\mu(x_n), \ldots, a_{m1}\mu(x_1) + \ldots + a_{mn}\mu(x_n))$$

con $a_{ij} \in K'$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Proposición A.6. *Se tiene*

(1) *Sean* $\mu\colon K \to K'$ *y* $\mu'\colon K' \to K''$ *isomorfismos de cuerpos y sean* V, V' *y* V'' *espacios vectoriales sobre los cuerpos* K, K' *y* K'', *respectivamente. Si* $(f,\mu)\colon V \to V'$ *y* $(f',\mu')\colon V' \to V''$ *son aplicaciones semilineales, entonces la aplicación* $f' \circ f\colon V \to V''$ *es semilineal respecto a* $\mu' \circ \mu$.

(2) *Si* $f\colon V \to V'$ *es un isomorfismo semilineal respecto a* $\mu\colon K \to K'$, *entonces* $f^{-1}\colon V' \to V$ *es un isomorfismo semilineal respecto a* $\mu^{-1} : K' \to K$.

(3) *Sea* $f\colon V \to V'$ *es una aplicación semilineal respecto a* $\mu : K \to K'$. *Se tiene*

(a) *Si* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V, f *es inyectiva si, y solo si,* $f(B) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ *es* K'*-linealmente independiente.*

(b) *Si* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V, f *es suprayectiva si, y solo si,* $f(B) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ *genera* V'.

(c) *Si* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V, f *biyectiva si, y solo si,* $f(B) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ *es base de* V'.

(d) *Si* U *es un subespacio de* V, $f(U)$ *es un subespacio de* V'. *Además, si* V *tiene dimensión finita y* f *es un isomorfismo semilineal, entonces* $\dim_K U = \dim_{K'} f(U)$.

(e) *Si* U' *es un subespacio de* V', $f^{-1}(U')$ *es un subespacio de* V.

(f) *Si* V *tiene dimensión finita, entonces* $\dim_K V = \dim_K \operatorname{Nuc} f + \dim_{K'} f(V)$.

Demostración. (1) Se tiene

$$(f' \circ f)(a\, v_1 + b\, v_2) = f'(\mu(a)\, f(v_1) + \mu(b)\, f(v_2)) = \mu'\mu(a)\, f'(f(v_1)) + \mu'\mu(b)\, f'(f(v_2)).$$

(2) Sean $x', y' \in K'$ con $x' = \mu(x)$ e $y' = \mu(y)$, y sean $v_1', v_2' \in V'$ con $v_1' = f(v_1)$ y $v_2' = f(v_2)$. Se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(x'v_1' + y'v_2') =& f^{-1}(\mu(x)f(v_1) + \mu(y)f(v_2)) = f^{-1}(f(xv_1 + yv_2)) \\ =& xv_1 + yv_2 = \mu^{-1}(x')f^{-1}(v_1') + \mu^{-1}(y')f^{-1}(v_2'). \end{aligned}$$

(3) (a) Supongamos que f es una aplicación semilineal inyectiva. Pongamos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i'\, f(v_i) = 0,$$

con $x_i' \in K'$, $i = 1, \ldots, n$. Por ser μ isomorfismo, existen $x_i \in K$ tales que $\mu(x_i) = x_i'$, para $i = 1, \ldots, n$ y entonces

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i).$$

Por ser f inyectiva, $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 0$ y por ser B base $x_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Así, $x_i' = \mu(x_i) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

Recíprocamente, pongamos

$$f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i) = 0.$$

Se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, f(v_i) = 0$, y por ser $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ vectores linealmente independientes $\mu(x_i) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Por tanto $x_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Así, $\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i = 0$.

(b) Supongamos que f es suprayectiva. Dado $v' \in V'$, existe $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Por ser B base de V, existen $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$, tales que $v = \sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i$. Por tanto,

$$v' = f(v) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, f(v_i).$$

Recíprocamente, sea $v' \in V'$. Dado que $f(B)$ genera V', existen $x_i' \in K'$, $i = 1, \ldots, n$, tales que $v' = \sum_{i=1}^{n} x_i'\, f(v_i)$. Sean $x_i \in K$, tales que $\mu(x_i) = x_i'$ para $i = 1, \ldots, n$. Se tiene que

$$v' = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i).$$

(c) Es consecuencia directa de (a) y (b).

(d) Sean $x', y' \in K'$ y $f(u_1), f(u_2) \in V'$. Se tiene

$$x'\, f(u_1) + y'\, f(u_2) = \mu(x)\, f(u_1) + \mu(y)\, f(u_2) = f(x\, u_1 + y\, u_2) \in f(U),$$

donde $x' = \mu(x)$ e $y' = \mu(y)$.

Si (f, μ) es un isomorfismo semilineal y B es una base de U entonces $f(B)$ es una base de $f(U)$, por (c). Por tanto, $\dim_k U = \dim_{k'} f(U)$.

(e) Sean $x, y \in K$ y $v_1, v_2 \in f^{-1}(U')$. Se tiene

$$f(x\, v_1 + y\, v_2) = \mu(x)\, f(v_1) + \mu(y)\, f(v_2) \in U'.$$

(f) Consideremos la base $B' = \{v_1, \ldots, v_r\}$ de $\operatorname{Nuc} f$. Completamos B' a una base, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Se tiene que $f(B)$ genera $f(V)$ y por tanto $\{f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)\}$ genera $f(V)$. Veamos que los vectores $f(v_{r+1}), \ldots, f(v_n)$, son linealmente independientes. En efecto, si

$$\sum_{r+1}^{n} \mu(x_i)\, f(v_i) = 0,$$

entonces,

$$\sum_{r+1}^{n} x_i\, v_i \in \operatorname{Nuc} f,$$

y por tanto existen $x_i \in K$, $i = 1, \ldots, r$, tales que

$$\sum_{r+1}^{n} x_i\, v_i = \sum_{1}^{r} x_i\, v_i.$$

Por ser B base de V, se tiene que $x_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Así, $\mu(x_i) = 0$, para $i = r + 1, \ldots, n$. $\square$

Corolario A.7. *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y sea* $\mathrm{GSm}(V)$ *el conjunto de isomorfismos semilineales de V en V. Se tiene que* $\mathrm{GSm}(V)$ *es un grupo con la operación composición.*

Demostración. Se sigue de la proposición A.6. □

A.8. Matriz asociada a una aplicación semilineal Si $f\colon V \to V'$ es una aplicación semilineal respecto a $\mu\colon K \to K'$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ son bases de V y V', respectivamente, poniendo

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v'_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

la matriz

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K')$$

se llama *matriz asociada* a (f, μ) respecto a las bases B y B'.

Proposición A.9. *Sea $f\colon V \to V'$ una aplicación semilineal respecto a $\mu\colon K \to K'$. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ bases de V y V', respectivamente. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a (f, μ) respecto a las bases B y B'. Si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y $f(v) = x'_1 v'_1 + \cdots + x'_m v'_m$, entonces se tiene:*

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(x_1) \\ \vdots \\ \mu(x_n) \end{pmatrix}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} x'_j\, v'_j &= f(\sum_{i=1}^{n} x_i\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i)\, (\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, v'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, \mu(x_i))\, v'_j. \end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] Artin, E. *Álgebra geométrica*. Limusa, México, 1992.

[2] Berger, M. *Geometry I*. Springer, Berlin, 1987.

[3] Cohn, P. M. *Algebra. Vol* 2. John Wiley & Sons, London, 1977.

[4] Gruenberg, K. W. and Weir, A. J. *Linear Geometry*. Springer, New York, 1977.

[5] Rodríguez-Sanjurjo, J. M. and Ruiz J. M. *Geometría Proyectiva*. Addison-Wesley, Madrid, 1998.

[6] Santaló. L. A. *Geometría Proyectiva*. Eudeba, Buenos Aires, 1966.

[7] Snapper, E., Troyer, R. J. *Metric affine geometry*. Academic Press, Inc, London, 1971.