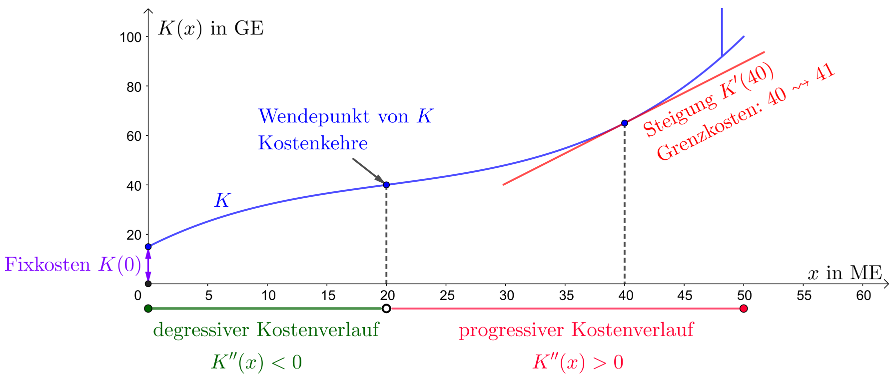
Kostenfunktion

Für die **Kostenfunktion K** gilt:

$$K(x) = 0{,}0015 \cdot x^3 - 0{,}09 \cdot x^2 + 2{,}45 \cdot x + 15$$

$x \dots$ produzierte Menge in Mengeneinheiten (ME) — Zum Beispiel: 1 ME = 1 Stück oder 1 ME = 10 Paletten
$K(x) \dots$ Produktionskosten in Geldeinheiten (GE) — Zum Beispiel: 1 GE = 1 € oder 1 GE = 42 Millionen $

Der Graph der Kostenfunktion K ist im Intervall $[0; 50]$ dargestellt:



- Der Funktionswert $\boldsymbol{K(0)}$ gibt die **Fixkosten** an. — Zum Beispiel: Miete, Gehälter
- Die 1. Ableitungsfunktion $\boldsymbol{K'}$ nennt man in diesem Zusammenhang auch **Grenzkostenfunktion**.
  Der Funktionswert $K'(40)$ gibt an, um wieviele GE die Produktionskosten ungefähr steigen, wenn statt 40 ME eine zusätzliche ME produziert wird.
- Die 2. Ableitungsfunktion $\boldsymbol{K''}$ beschreibt den sogenannten Kostenverlauf:
  - Bei einem **degressiven Kostenverlauf** gilt: $\boldsymbol{K''(x) < 0}$
  - Bei einem **progressiven Kostenverlauf** gilt: $\boldsymbol{K''(x) > 0}$
  - Im Wendepunkt von K wechselt die Kostenfunktion ihr Krümmungsverhalten.
    In dieser sogenannten **Kostenkehre** gilt also: $\boldsymbol{K''(x) = 0}$
    In der dargestellten Kostenkehre sind die Grenzkosten K' minimal.
- Für die **Stückkostenfunktion (Durchschnittskostenfunktion)** $\boldsymbol{\bar{K}}$ gilt: $\boldsymbol{\bar{K}(x) = \dfrac{K(x)}{x}}$

---

1) Ermittle die Fixkosten, und interpretiere das Ergebnis.

2) Ermittle die Grenzkosten bei einer Produktion von 40 ME, und interpretiere das Ergebnis.

3) Ermittle die Grenzkosten in der Kostenkehre.

4) Wieviele ME müssen produziert werden, damit die Durchschnittskosten minimal sind?

1) $K(0) = 15$ GE
Wenn 0 ME produziert werden, betragen die Kosten 15 GE.

2) $K'(40) = 2{,}45$ GE/ME
Wenn 41 ME statt 40 ME produziert werden, steigen die Kosten *ungefähr* um 2,45 GE.

3) $K''(x) = 0 \implies x = 20 \implies K'(20) = 0{,}65$ GE/ME

4) Die Funktion $\bar{K}(x) = \dfrac{K(x)}{x}$ hat an der Stelle $x = 34{,}25\dots$ ME den kleinsten Funktionswert.

Erlösfunktion (Umsatzfunktion)

Die **Erlösfunktion $\boldsymbol{E}$** gibt die Einnahmen in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter ME an.

- Wenn der Preis p pro ME konstant ist, dann gilt für die Erlösfunktion E:

  $$\boldsymbol{E(x) = p \cdot x} \qquad (x \text{ in ME, } p \text{ in GE/ME, } E(x) \text{ in GE})$$

  In diesem Fall ist die Erlösfunktion E also eine lineare Funktion mit $E(0) = 0$, das heißt:
  Die Einnahmen sind direkt proportional zu den verkauften ME.

- In der Praxis hängen der Preis und die Anzahl verkaufter ME voneinander ab.
  Je größer der Preis ist, desto weniger ME werden verkauft.

  Die **Preisfunktion der Nachfrage $\boldsymbol{p_N}$** gibt den Preis in Abhängigkeit von der zu verkaufenden Mengeneinheiten x an. In diesem Fall gilt für die Erlösfunktion E:

  $$\boldsymbol{E(x) = p_N(x) \cdot x} \qquad (x \text{ in ME, } p_N(x) \text{ in GE/ME, } E(x) \text{ in GE})$$

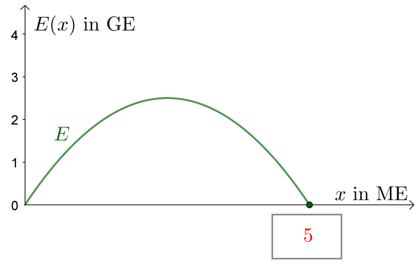
  Je größer die zu verkaufenden Mengeneinheiten x sein sollen, desto kleiner muss der Preis $p_N(x)$ sein.
  In diesem Fall muss die Erlösfunktion also *nicht* unbedingt streng monoton steigend sein.

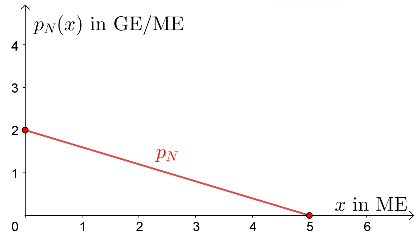
Preisfunktion der Nachfrage

Für die Erlösfunktion E gilt: $E(x) = -0{,}4 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

1) Ermittle die Nullstelle von E.
Trage sie rechts in das Kästchen ein.

2) Ermittle eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
Zeichne rechts den Funktionsgraphen von p_N ein.





1) $E(x) = 0 \iff x = 0\,\text{ME}$ oder $x = 5\,\text{ME}$

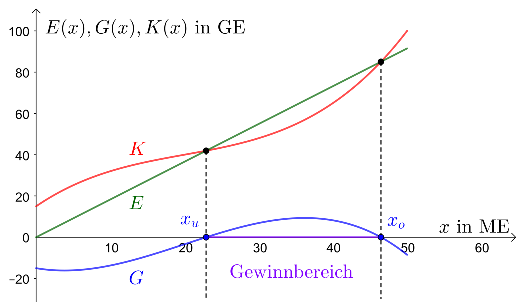
2) $p_N(x) = \dfrac{E(x)}{x} = -0{,}4 \cdot x + 2$

Gewinnfunktion

Die **Gewinnfunktion $\boldsymbol{G}$** gibt den Gewinn in Abhängigkeit von der produzierten und verkauften Mengeneinheiten an.

Dabei gilt: $\boldsymbol{G(x) = E(x) - K(x)}$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME
$G(x)$ ... Gewinn in GE
$E(x)$ ... Erlös in GE
$K(x)$ ... Produktionskosten in GE



- Bei der rechts oben dargestellten Gewinnfunktion G gibt es genau eine Stelle x_u, an der G das Vorzeichen von $-$ auf $+$ wechselt.

  Diese Stelle $\boldsymbol{x_u}$ heißt auch **untere Gewinngrenze / Gewinnschwelle / Break-even-Point**.

- Bei der rechts oben dargestellten Gewinnfunktion G gibt es genau eine Stelle x_o, an der G das Vorzeichen von $+$ auf $-$ wechselt.

  Diese Stelle $\boldsymbol{x_o}$ heißt auch **obere Gewinngrenze**.

- Das Intervall $[\boldsymbol{x_u; x_o}]$ nennt man auch **Gewinnbereich (Gewinnzone)**.

Maximaler Erlös / Maximaler Gewinn

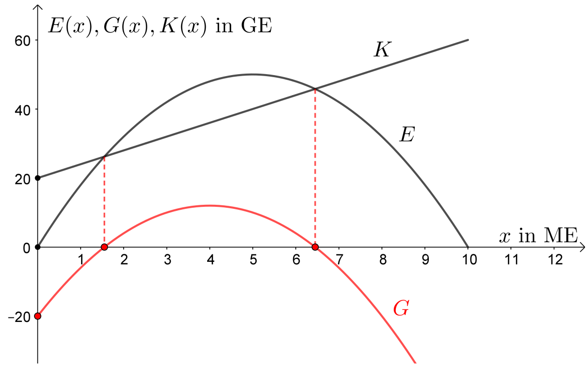
Für die quadratische Erlösfunktion E gilt:

$$E(x) = -2 \cdot x^2 + 20 \cdot x$$

Für die lineare Kostenfunktion K gilt:

$$K(x) = 4 \cdot x + 20$$

$x \ldots$ produzierte und verkaufte Menge in ME
$E(x) \ldots$ Erlös in GE
$K(x) \ldots$ Produktionskosten in GE



Die Graphen der beiden Funktionen sind rechts oben dargestellt.

1) Wieviele ME müssen produziert und verkauft werden, damit der Erlös maximal ist?

2) Zeichne 3 Punkte ein, durch die der Graph der zugehörigen Gewinnfunktion G verlaufen muss, und skizziere den Funktionsgraphen im dargestellten Bereich.

3) Wieviele ME müssen produziert und verkauft werden, damit der Gewinn maximal ist?

1) $E'(x) = 0 \iff x = 5\,\text{ME}$

2) G ist eine quadratische F. mit $G(0) = E(0) - K(0) = -20$ und $G(x) = 0 \iff K(x) = E(x)$.

3) $G(x) = E(x) - K(x) = -2 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 20$
$G'(x) = 0 \iff x = 4\,\text{ME}$

Stammfunktion

Für eine Grenzkostenfunktion K' gilt: $K'(x) = 0{,}006 \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 6$ (x in ME, $K'(x)$ in GE/ME)
Die Fixkosten betragen 87 GE.
Ermittle die Produktionskosten für 42 ME.

Wir ermitteln jene Stammfunktion K von K', die $K(0) = 87$ erfüllt:

$$K(x) = 0{,}002 \cdot x^3 - 0{,}1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + c$$

$$K(0) = 87 \iff c = 87$$

$$K(42) = 310{,}7\ldots\,\text{GE}$$

Umgekehrte Kurvenuntersuchung

Die Kostenfunktion K ist eine Polynomfunktion mit Grad 3 und hat folgende Eigenschaften:

- Die Kostenkehre ist (15 ME | 110 GE). — I : $K(15) = 110$, II : $K''(15) = 0$
- Die Grenzkosten in der Kostenkehre betragen 6 GE/ME. — III : $K'(15) = 6$
- Wenn 30 ME produziert werden, betragen die Durchschnittskosten 7 GE/ME. — IV : $\dfrac{K(30)}{30} = 7$

Ermittle eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$K(x) = \frac{2}{675} \cdot x^3 - \frac{2}{15} \cdot x^2 + 8 \cdot x + 10 \qquad (x \text{ in ME}, K(x) \text{ in GE})$$