Théorie de Lyapunov pour les Σ autonomes

Partie 3 : Pratique de la stabilité

Vincent MAHOUT

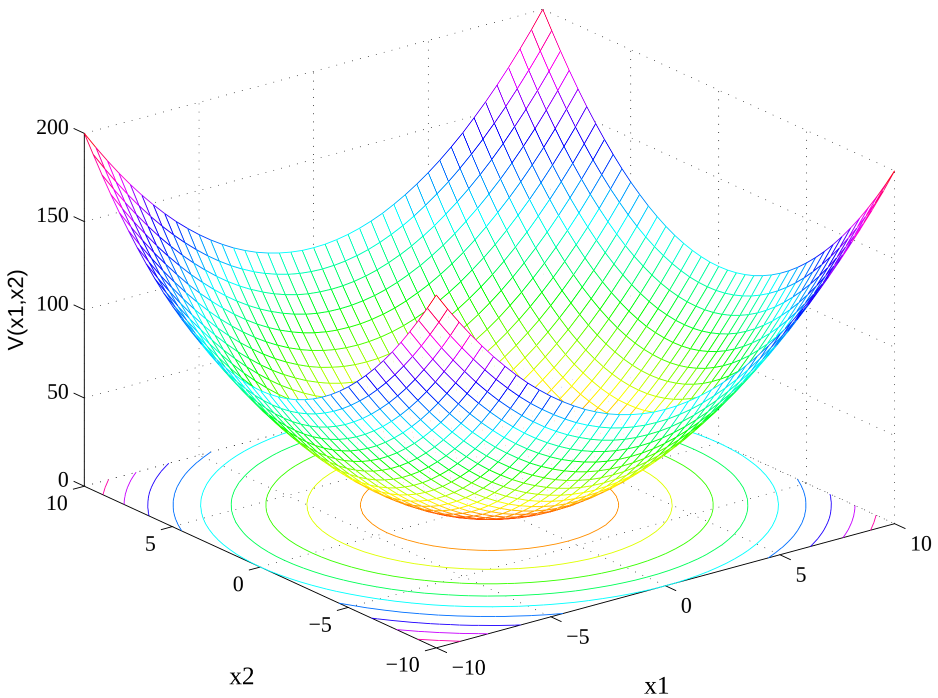
Comment construire des F.L. ?

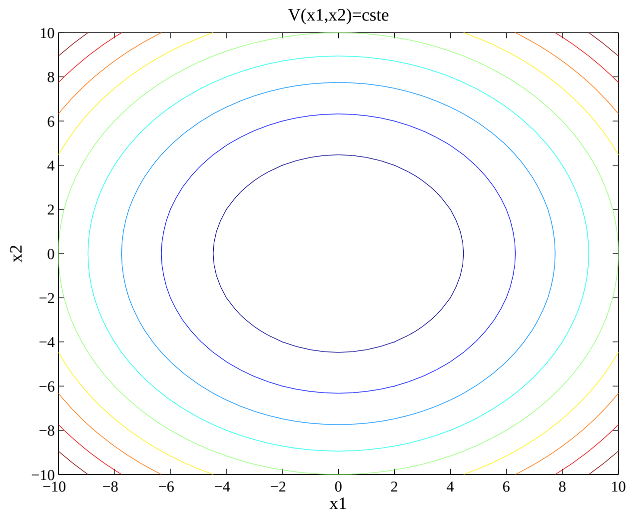
- ...si je le savais !!!
- Difficulté (limite) de l'approche.
- Il n'existe pas de mais seulement des approches qui peuvent (ou non) aboutir ou mener à des pistes.
- On va considérer ici 3 *techniques*
  - L'utilisation de fonctions "classiques"
  - L'approche de Krasovskii
  - L'approche du gradient

Quadratique $V = x^T P x$

- La plus classique avec P définie positive, ici $P = I_2$

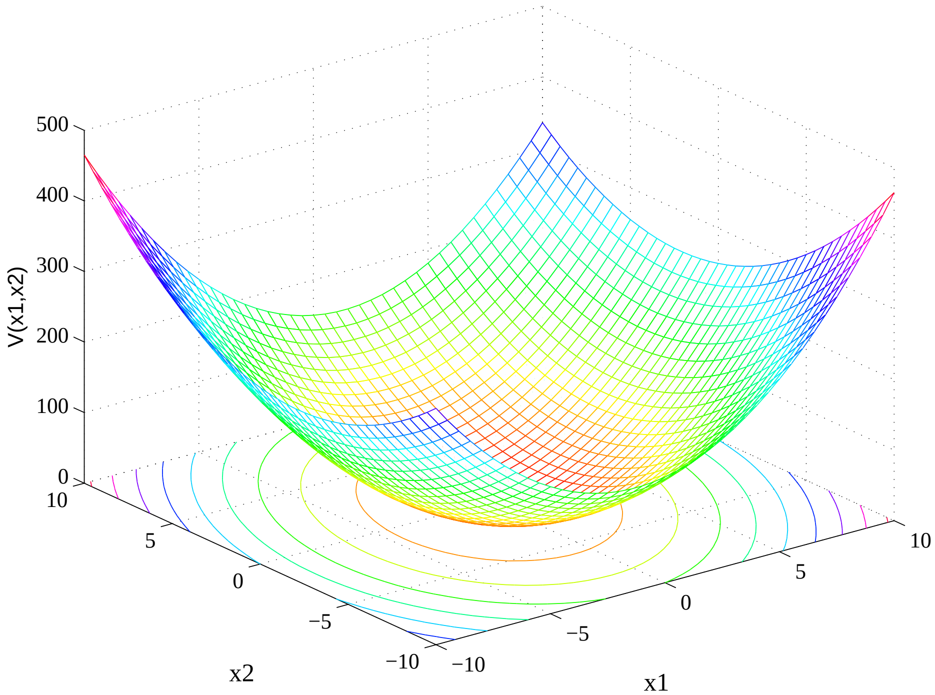
$$V(x) =$$

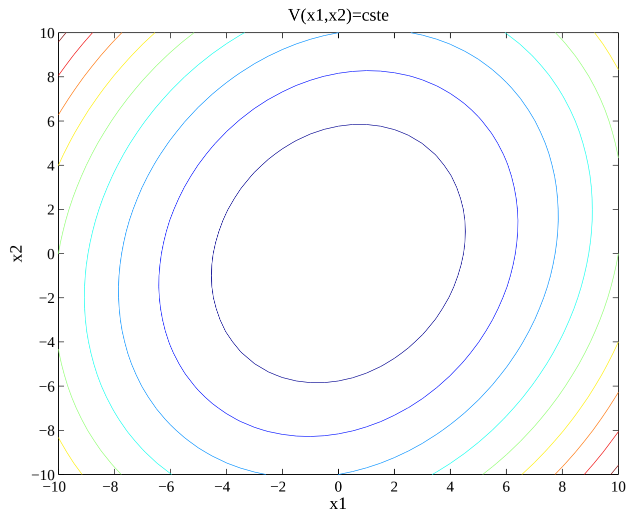




- Avec P différent, on modifie l'orientation et la pente du *bol*.

$$V(x) =$$

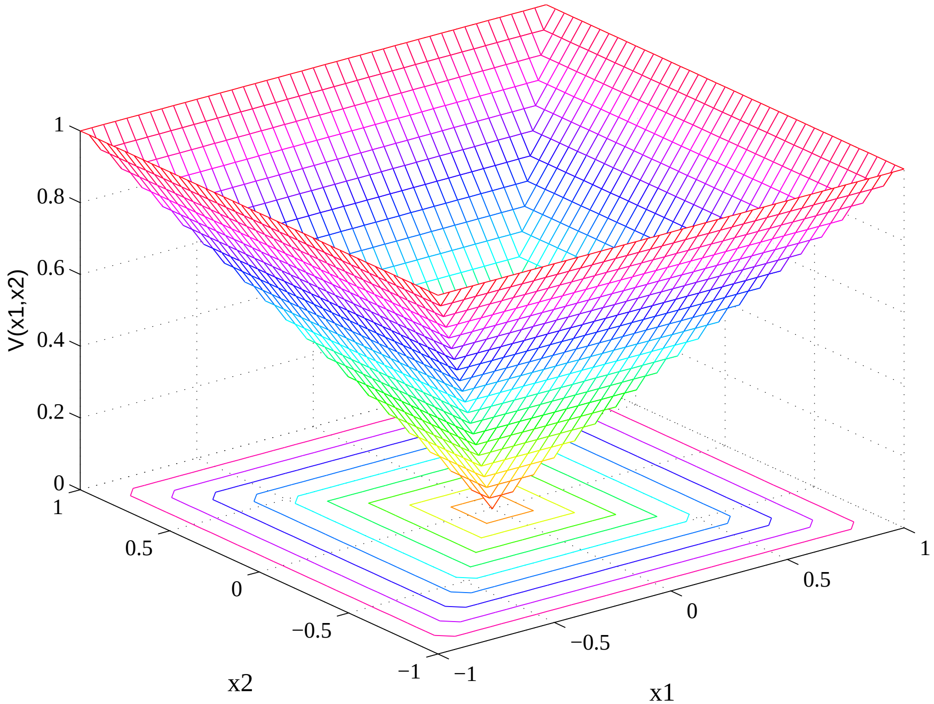


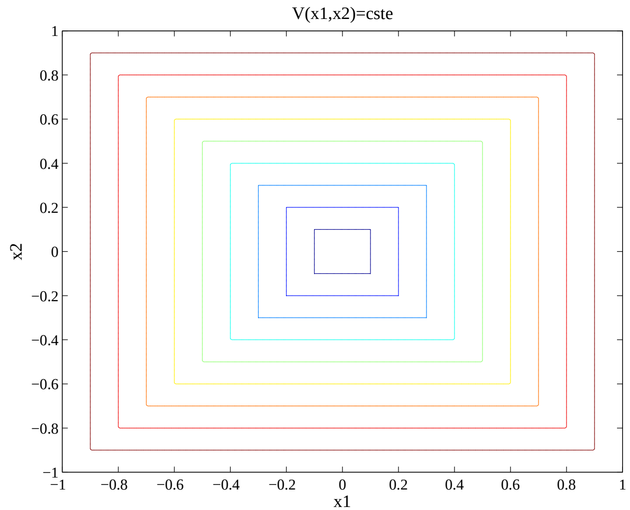


La norme du max

- Moins habituelle, elle utilise le valeur absolue

$$V(x) =$$

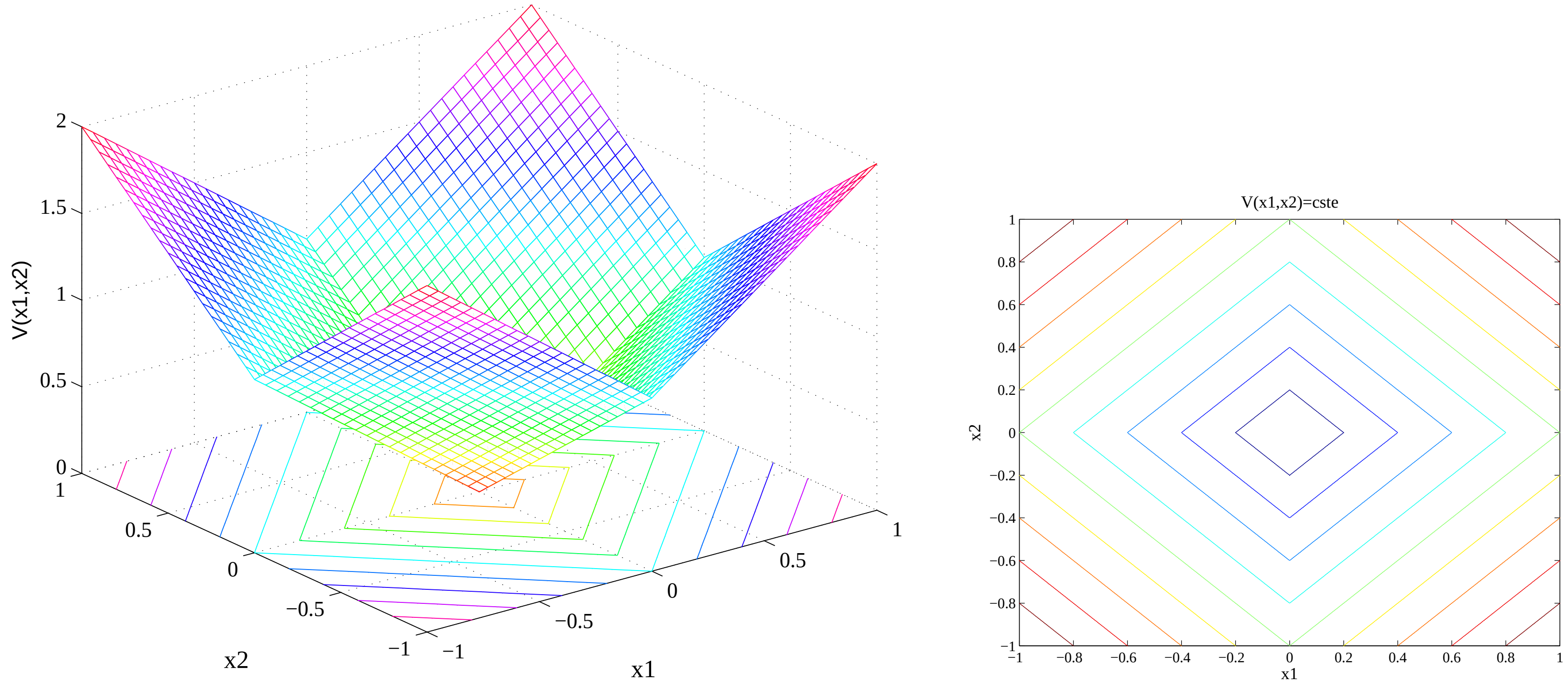




La norme duale

- Assez similaire (de part ses propriétés) au cas précédent

$$V(x) =$$



Exercice

- Stabilité de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \end{cases}$$

avec la fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x) = x^T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x$$

Exercice sur l'instabilité

- On peut montrer que le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_2^3 \end{cases}$$

est instable avec le théorème suivant :

Théorème 3.1 *S'il est possible de trouver une fonction* $V(x)$ *dont la dérivée est de* *dans un voisinage* Ω *de l'origine et que* $V(x)$ *soit* *ou* *, alors l'équilibre est instable.*

- et la fonction V(x) :

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Cas des système linéaires

- Système linéaire : $\dot{x} = Ax$ avec x et $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$
- Supposons qu'il existe une matrice P telle que $V(x) = x^T P x$ soit définie positive
- P est une matrice définie positive $\Rightarrow$ toutes ses valeurs propres sont .
- Pour vérifier la stabilité asymptotique de l'origine par Lyapunov on doit vérifier

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T \left(A^T P + PA\right) x \end{aligned}$$

- Il faut donc qu'il existe une matrice Q tq
- S'il est possible de trouver P pour une matrice Q alors l'origine est asymptotiquement stable.

Retour d'état et Inégalités Matricielles Linéaires

- Système linéaire commandé : $\dot{x} = Ax + Bu$
- Le système est stabilisable par retour d'état $u = Kx$ si il existe une matrice $P < 0$ telle que

$$\begin{aligned}
V(x) &= x^T P x > 0 \\
\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
&= (Ax + BKx)^T P x + x^T P (Ax + BKx) \\
&= x^T (A + BK)^T P x + x^T P (A + BK) x \\
&= x^T \Big((A + BK)^T P + P (A + BK) \Big) x \\
\dot{V}(x) &= x^T \left(A^T P + K^T B^T P + PA + PBK \right) x < 0
\end{aligned}$$

- La résolution numérique de ce problème (BMI) est très difficile (termes croisés entre les variables à déterminer P et K).

Retour d'état et Inégalités Matricielles Linéaires (2)

- Multiplions à droite et à gauche par P^{-1}

$$x^T\left(A^TP + K^TB^TP + PA + PBK\right)x < 0$$
$$x^T\left(P^{-1}A^T + P^{-1}K^TB^T + AP^{-1} + BKP^{-1}\right)x < 0$$

- Posons maintenant et , on obtient alors

$$\dot{V}(x) < 0 \Leftrightarrow x^T\left(SA^T + R^TB^T + AS + BR\right)x < 0$$

- La détermination de R et de S est (plus) *facilement* numériquement faisable.
- Le gain stabilise le système.
- La théorie de Lyapunov apporte (aussi) des réponses pour la commande des systèmes linéaires.

Méthode de Krasovskii

- Méthode assez empirique de prime abord qui consiste à considérer la FL candidate $V(x) = f^T(x)f(x)$
- **Théorème 3.2** *Soit le système autonome $\dot{x} = f(x)$ dont le PE étudié est l'origine et soit la matrice Jacobienne $A(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$. Si la matrice $\Lambda(x) =$ est dans un voisinage Ω de l'origine, alors l'origine est .*
  Une FL pour ce système est donnée par : $V(x) = f^T(x)f(x)$. Si de plus $\Omega = \mathcal{R}^n$ et $\lim_{\|x\| \to \infty} = \infty$ alors l'origine est un .
- Exemple avec le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & -6x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 & = & 2x_1 - 6x_2 - 2x_2^3 \end{array} \right.$$

Méthode de Krasovskii (extension)

- Une *généralisation* de ce résultat existe avec $V(x) = f^T(x)Pf(x)$
- **Théorème 3.3** *Soit le système autonome* $\dot{x} = f(x)$ *dont le PE étudié est l'origine et soit la matrice Jacobienne* $A(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]$. *S'il existe deux matrices* $P = P^T > 0$ *et* $Q = Q^T > 0$ *telles que la matrice* $\Lambda(x) =$ *dans un voisinage* Ω *de l'origine, alors l'origine est*

  .

  Une FL pour ce système est donnée par : $V(x) = f^T(x)Pf(x)$
  Si de plus $\Omega = \mathcal{R}^n$ *et* $\lim_{\|x\|\to\infty} = \infty$ *alors l'origine est*

  .
- Ces pondérations permettent d'apporter qq degrés de liberté dans la technique mais cette méthode ne concerne que des systèmes *formatés*

Méthode du gradient

- Point de départ - ce qui est difficile à trouver $\Rightarrow$
- On va partir de cela (gradient d'une fonction) pour tenter de construire la fonction $V(x)$.
- On suppose le gradient d'une fonction $V(x)$ inconnue
  $\nabla V =$
- On impose la condition de négativité :

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x)\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \qquad\qquad < 0$$

- On présuppose (tout de même) une forme *simple* à $\nabla V(x)$ de type polynomiale :

$$\nabla V_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x_i} =$$

Méthode du gradient (2)

- Les a_{ij} sont des coefficients qui peuvent dépendre des x_i :

$$a_{ij} =$$

- De toute évidence, il est préférable de prendre $a_{ij}^{v}(x) = 0$
- Afin de pouvoir retrouver la fonction V(x) à partir de son gradient il faut (théorème de Schwarz) vérifier les conditions croisées :

$$\frac{\partial \nabla V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla V_j}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i}$$

- La fonction de Lyapunov candidate se calcule comme :

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, ..., 0)dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2, ..., 0)dx_2 + \cdots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, ..., x_n)dx_n$$

Méthode du gradient : procédure

- La procédure de la méthode est:
  1. Établissement de ∇V pour le dimension du problème
  2. Écriture de la fonction (introduction des équations du système)
  3. Simplification de W pour la rendre
  4. Utilisation des relations croisées
  5. Détermination des a_{ij} pour s'assurer que W est

  6. Calcul de la fonction candidate $V(x)$
  7. Vérifier que $V(x)$ est

Méthode du gradient : Exemple

- Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3 - 3x_2 \end{cases}$$

- *Établissement de ∇V pour le dimension du problème :*

$$\nabla V = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

- *Écriture de la fonction $W = \nabla V \dot{x}$*

$$\begin{aligned} W &= a_{11}x_1x_2 + a_{12}x_2^2 - a_{21}x_1^4 - 3a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_1^3x_2 - 3a_{22}x_2^2 \\ W &= -a_{21}x_1^4 + (a_{12} - 3a_{22})x_2^2 + (a_{11} - 3a_{21} - a_{22}x_1^2)x_1x_2 \end{aligned}$$

Méthode du gradient : Exemple (2)

- *Simplification de W pour la rendre (semi) définie négative* : une solution (par forcément optimale mais simple) pour rendre $W = -a_{21}x_1^4 + (a_{12} - 3a_{22})x_2^2 + (a_{11} - 3a_{21} - a_{22}x_1^2)x_1x_2 < 0$ est de choisir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \quad > 0 \\ \qquad\quad < 0 \\ \qquad\qquad\quad = 0 \end{array} \right.$$

- *Utilisation des relations croisées* : dans ce cas $(n = 2) \Rightarrow$ $\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}x_2 + a_{12} = \frac{\partial a_{21}}{\partial x_1}x_1 + a_{21} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_1}x_2$
- *Détermination des a_{ij} pour s'assurer que W est (semi) définie négative* : un jeu de valeur qui vérifie ces conditions est :

$$a_{12} = a_{21} = \qquad a_{22} = \qquad a_{11} =$$

Méthode du gradient : Exemple (3)

- On a : $\nabla V = \begin{pmatrix} (3+2x_1^2)\,x_1 \ \ + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_1^3 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
- *Calcul de la fonction candidate* $V(x)$:

$$V(x) = \int_0^{x_1} \nabla V_1(x_1, 0, ..., 0)dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla V_2(x_1, x_2, ..., 0)dx_2 \\ + \cdots + \int_0^{x_n} \nabla V_n(x_1, x_2, ..., x_n)dx_n$$

$$V(x) =$$

$$V(x) =$$

- *Vérifier que* $V(x)$ *est définie positive* : on peut réécrire $V(x)$:

$$V(x) =$$

ce qui est positif

Méthode du gradient : Exemple (conclusion)

- On a une fonction candidate telle que :

$$V(x) =$$

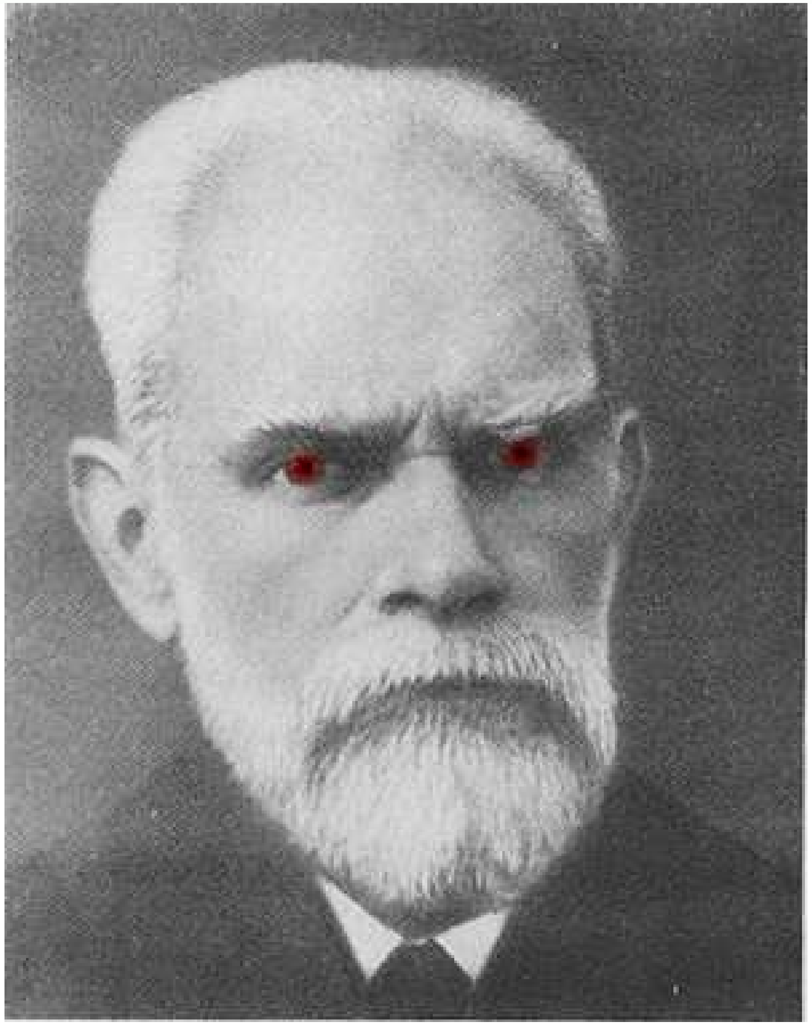
$$\dot{V}(x) = \qquad\qquad < 0,$$

- Donc l'origine est un PE asymptotiquement stable.

Conclusion générale

- Le stabilité est le souci majeur de l'automaticien.
- Lyapunov : réflexion sur la stabilité.
- Première méthode : idée de la stabilité d'un point d'équilibre dans un *voisinage* de celui-ci.
- Seconde méthode : preuve de stabilité dans un domaine donné.
- Seconde méthode : s'applique aux systèmes linéaires (commande optimale - commande robuste - système incertain - ...).
- Difficulté de l'approche : trouver la bonne fonction.
- Limite de l'approche : on n'a vu ici que les systèmes autonomes, pas de possibilité (notamment) de traiter un suivi de trajectoire.

Lyapunov...



...que du bonheur !!