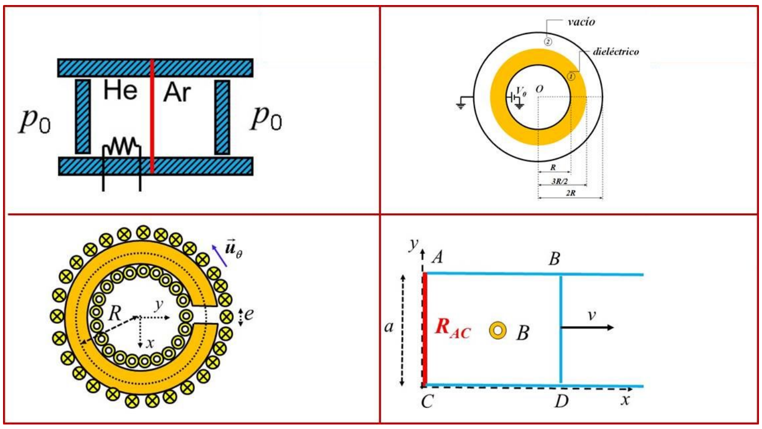
Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA
AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

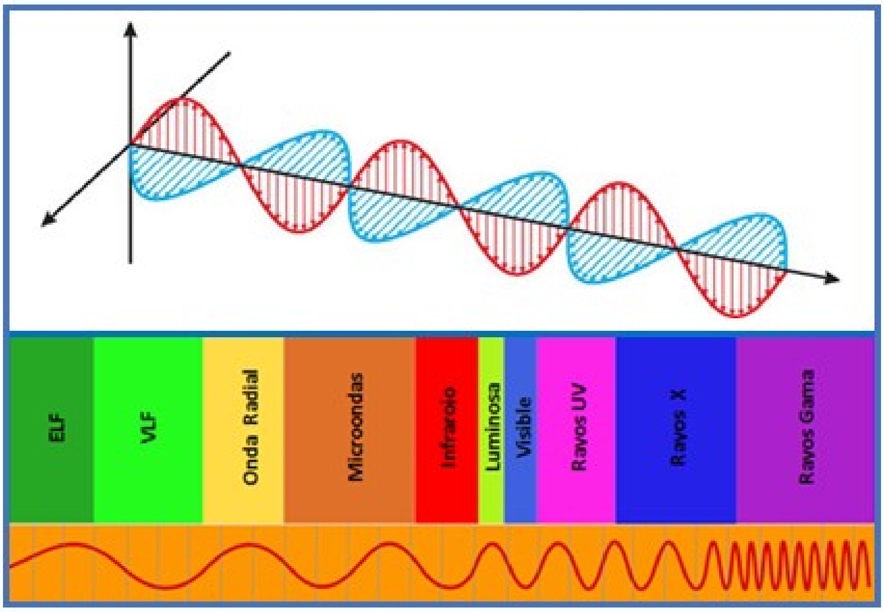
FÍSICA II

TEORÍA
Termodinámica y Electromagnetismo



Departamento de Física aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO



TEMA 10.- ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

José Carlos JIMÉNEZ SÁEZ

ÍNDICE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

10 Ondas Electromagnéticas

James Clerk Maxwell (1831-1879) dio forma a la teoría electromagnética clásica estableciendo las ecuaciones que hemos visto en el capítulo 9, conocidas como ecuaciones de Maxwell. El logro principal de Maxwell fue demostrar que el campo electromagnético puede propagarse en el vacío donde se mueve a la velocidad de la luz.

Las ondas electromagnéticas son campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo generados en las fuentes del campo electromagnético que se propagan a través del espacio transportando energía de un lugar a otro. Este tipo de ondas dan lugar a la llamada radiación electromagnética. En el siglo XIX los científicos pensaban que en el espacio vacío existía una sustancia llamada éter que servía como medio material para la propagación de las ondas electromagnéticas. Maxwell demostró con sus ecuaciones que no era necesaria dicha sustancia para la propagación de la radiación. En este capítulo profundizaremos en la Electrodinámica que, como parte del Electromagnetismo, se ocupa del estudio, entre otros, de la radiación electromagnética.

10.1. Ecuación de ondas electromagnéticas

En este apartado obtendremos la ecuación de ondas del campo electromagnético a partir de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales homogéneos e isótropos. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial en este tipo de medios son:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{10.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{10.2}$$

Vamos a manipular algebraicamente estas ecuaciones para encontrar sus soluciones. Soluciones que pueden darse incluso en el vacío, y que a excepción de que nos encontremos en las condiciones de la Electrostática o Magnetostática, dependerán del tiempo recibiendo, entonces, el nombre de *ondas electromagnéticas*.

Tomando el rotacional en la segunda ecuación [10.1] tenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} \tag{10.3}$$

y utilizando las propiedades del doble rotacional junto con la segunda ec. [10.2] resulta:

$$-\nabla^2\vec{E}+\nabla(\nabla\cdot\vec{E})=-\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \tag{10.4}$$

Utilizando la ley de Ohm (ec. [8.17]) $\vec{J}=\sigma_c\vec{E}$ y la primera ecuación [10.2], se tiene finalmente que el campo eléctrico verifica que:

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}+\mu\sigma_c\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{10.5}$$

Deduciremos a continuación la ecuación que verifica el campo magnético. Tomando el rotacional en la segunda ecuación [10.2] tenemos:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{B})=\mu\nabla\times\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\nabla\times\vec{E}}{\partial t} \tag{10.6}$$

y utilizando las propiedades del doble rotacional junto con la ley de Ohm en forma diferencial, $\vec{J}=\sigma_c\vec{E}$, nos queda:

$$-\nabla^2\vec{B}+\nabla(\nabla\cdot\vec{B})=\mu\sigma_c\nabla\times\vec{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\nabla\times\vec{E}}{\partial t} \tag{10.7}$$

Utilizando la segunda ec. [10.1] y la primera [10.2] llegamos finalmente a que:

$$\nabla^2\vec{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\mu\sigma_c\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{10.8}$$

Si no hay corrientes libres, ni densidades de carga libres (como en los dieléctricos) se tiene la ecuación de ondas homogénea para el campo electromagnético en medios materiales homogéneos e isótropos:

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{10.9}$$

$$\nabla^2\vec{B}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \tag{10.10}$$

10.2. Ondas en el vacío

Analizemos las soluciones de la ecuación anterior para ondas propagándose en el vacío. En este caso la ecuación de ondas se escribe como:

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \tag{10.11}$$

$$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0 \tag{10.12}$$

Cada una de estas seis ecuaciones, tres para las componentes del campo eléctrico $\vec{E}$ y otras tres para las componentes del campo magnético $\vec{B}$, tienen la forma:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{10.13}$$

Esta ecuación [10.13] se llama *ecuación de ondas* porque sus soluciones son funciones que se trasladan en el espacio a la velocidad de la luz c. Esto hizo pensar a Maxwell que la luz no era sino un campo electromagnético. Son muchas las soluciones de la ecuación de ondas, de hecho al ser una ecuación lineal, cualquier combinación lineal de soluciones es también solución de dicha ecuación.

Sea ψ cualquier componente del campo eléctrico o magnético. Buscaremos a continuación soluciones de la ecuación de ondas, en concreto las llamadas *ondas planas*. Introducimos en [10.13] una función arbitraria $\psi = \psi(\vec{\mathrm{k}}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$, dos veces derivable. Se puede comprobar que para que satisfaga la ecuación de ondas ha de verificarse:

$$c^2\mathrm{k}_0^2 = \omega^2 \tag{10.14}$$

La ec. [10.14] recibe el nombre de *relación de dispersión* para las ondas planas en el vacío. Así mismo el argumento $(\vec{\mathrm{k}}_0 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ se denomina *fase* siendo $\vec{\mathrm{k}}_0$ el vector de ondas en el vacío, ω la frecuencia angular y ϕ la constante de fase. También se define la longitud de ondas en el vacío como: $\lambda_0 = 2\pi/\mathrm{k}_0$ y la frecuencia como: $\nu = 2\pi/\omega$.

Para simplificar el tratamiento matemático vamos a considerar que el vector de ondas es $\vec{\mathrm{k}}_0 = \mathrm{k}_0\vec{i}$ y vamos a ver con que velocidad se mueve la función ψ en la dirección del eje x. La función que satisface la ecuación de ondas es entonces: $\psi = \psi(\mathrm{k}_0 x - \omega t + \phi)$. Los puntos en los que la función anterior toma el mismo valor son los planos $x = cte$, estos son los planos de igual fase.

Para una onda plana de este tipo, la fuente de ondas es cualquier posición de un plano YZ. Las ondas que nacen en un punto de ese plano se propagan en la dirección del eje x, esta línea de propagación recibe el nombre de rayo. La superficie que une los puntos de igual fase son planos paralelos al plano YZ fuente de ondas, estos planos reciben el nombre de frentes de onda. A diferencia de una onda plana, una onda esférica nace en una fuente puntual y envía rayos radialmente en todas direcciones siendo los frentes de onda esferas con centro en la fuente de ondas.

Un valor determinado de la función ψ se desplaza a lo largo del eje x con una determinada velocidad llamada *velocidad de fase* que se obtiene haciendo constante el argumento de la función, es decir, la fase, y derivando en el tiempo:

$$\mathrm{k}_0\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\mathrm{k}_0} = \lambda_0\nu = c \tag{10.15}$$

A partir de la expresión anterior observamos como un determinado valor de la función ψ solución se desplaza en la dirección del vector de ondas a la velocidad de la luz (c=299792458m/s$\approx 3{\cdot}10^8$ m/s).

En este caso, además, las ecuaciones $\nabla\cdot\vec{E}=0$ y $\nabla\cdot\vec{B}=0$ imponen restricciones adicionales. En concreto, estas ecuaciones se convierten en $\partial E_x/\partial x=0$ y $\partial B_x/\partial x=0$, cuya solución es: $E_x=0$ y $B_x=0$. Por tanto, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares a $\vec{\mathrm{k}}_0=\mathrm{k}_0\vec{\imath}$, es decir, a la dirección de propagación de la onda. Esta propiedad, que se puede demostrar independiente de la dirección $\vec{\mathrm{k}}_0$, significa que las ondas electromagnéticas planas son *ondas transversales* a la dirección de propagación, es decir, los campos eléctricos y magnéticos están contenidos en el plano perpendicular a $\vec{\mathrm{k}}_0$. A diferencia, las ondas del sonido en un gas o líquido son *ondas longitudinales*, por tanto, la dirección de oscilación va en la dirección de propagación de la onda.

Las ecuaciones de Maxwell imponen todavía más condiciones entre los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$. Supongamos por simplicidad que el campo $\vec{E}$ de una onda plana tiene la forma

$$\vec{E}=\psi(\mathrm{k}_0x-\omega t+\phi)\vec{\jmath}=\psi(\xi)\vec{\jmath} \tag{10.16}$$

Si tuviese una componente en el eje $\vec{k}$ los cálculos serían análogos y las conclusiones idénticas.

El campo $\vec{B}$ debe satisfacer la ecuación

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{10.17}$$

Como se verifica que

$$\nabla\times\vec{E}=\frac{\partial}{\partial x}\psi(\mathrm{k}_0x-\omega t+\phi)\vec{k} \tag{10.18}$$

se tiene que

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mathrm{k}_0\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\vec{k}=\mathrm{k}_0\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\xi}\vec{k}=-\mathrm{k}_0\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{1}{\omega}\vec{k} \tag{10.19}$$

Considerando que no hay campo magnético cuando no hay campo eléctrico, resulta que:

$$\vec{B}=\frac{\mathrm{k}_0}{\omega}\psi\vec{k}=\frac{\psi}{c}\vec{k}=\frac{1}{c}\vec{\imath}\times\vec{E} \tag{10.20}$$

Por tanto, para una onda plana general independientemente de la dirección de propagación se verifica que:

$$c\vec{B}=\frac{\vec{\mathrm{k}}_0}{\mathrm{k}_0}\times\vec{E} \tag{10.21}$$

donde $\vec{\mathrm{k}}_0$, $\vec{E}$ y $\vec{B}$ forman un triedro a derechas.

Existe un caso particular de ondas planas en la cual la función ψ es proporcional a una función sinusoidal (seno o coseno). Este tipo de ondas reciben el nombre de onda electromagnética plana *monocromática*:

$$\psi=\psi_0\sin(\vec{k}_0\cdot\vec{r}-\omega t+\phi) \tag{10.22}$$

La Fig. 10.1 muestra los campos eléctrico y magnético de una onda plana monocromática linealmente polarizada, es decir, en el caso de que ambos campos se mantengan siempre en la misma dirección. En ella se observan las características indicadas previamente de perpendicularidad entre los campos eléctrico y magnético.

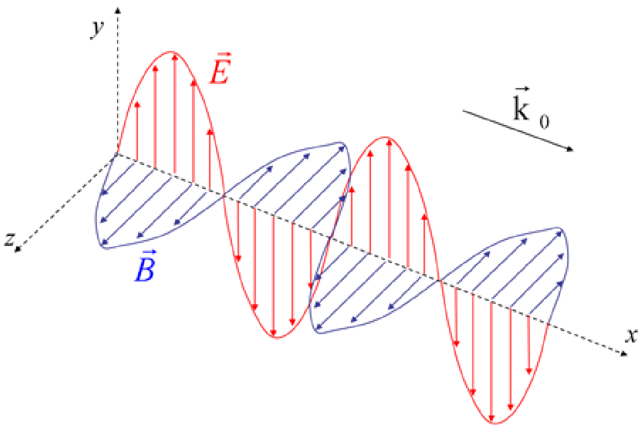


Figura 10.1: Onda electromagnética plana monocromática con $\tilde{\mathrm{k}}_0 = \mathrm{k}_0 \vec{\imath}$.

En la Fig. 10.2 se muestra el espectro de frecuencias de las ondas electromagnéticas monocromáticas. Este espectro se caracteriza por unos rangos o bandas con nombres muy característicos derivados principalmente de sus aplicaciones y con límites muchas veces no muy definidos.

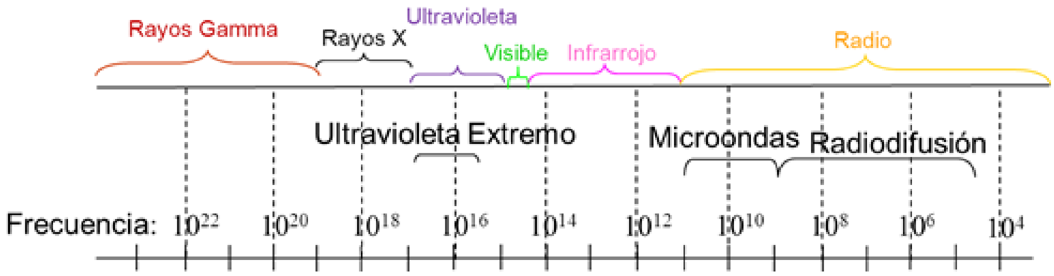


Figura 10.2: Clasificación de las ondas electromagnéticas según la frecuencia ν.

Como ya hemos visto la frecuencia tiene asociada una longitud de onda en el vacío dada por la expresión:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} \tag{10.23}$$

con lo cual el espectro suele también aparecer en función de la longitud de onda del vacío. La frecuencia tiene asociada también una energía del fotón. El concepto de fotón explica muchos fenómenos en los que es necesario utilizar el modelo corpuscular de la radiación, es decir, aquel que considera ésta como un flujo de partículas (recordemos la dualidad onda-corpúsculo de la radiación). Esta energía viene dada por la expresión

$$E = h\nu \tag{10.24}$$

siendo h la constante de Planck. Por tanto, también puede aparecer el espectro electromagnético en función de esta energía. Analizaremos a continuación más en detalle los rangos del espectro electromagnético:

- Radiodifusión: Con frecuencia en el rango de 3 kHz hasta 0.3 GHz. Se utilizan en las comunicaciones. Clasificadas de menor a mayor frecuencia las bandas reciben el nombre de (y se utilizan para): VLF (radio), LF (radio, navegación), MF (radio onda media), HF (radio onda corta) y VHF (TV, radio). Los conductores pueden comportarse como antenas, ya que, pueden emitir radiación de este tipo a partir de corriente oscilante, y a la inversa crear corriente oscilante a partir de radiación.

- Microondas: Con frecuencias en el rango de $3{\cdot}10^8$Hz hasta $3{\cdot}10^{11}$Hz. Se emplean en los hornos de cocinas y en también en telecomunicaciones, ya que, este rango incluye la UHF (TV, radar, telefonía móvil), SHF (radar) y EHF (radar). Las ondas de radar pueden atravesar la ionosfera y permiten la comunicación con los satélites.

- Infrarrojos: Con frecuencias en el rango de $3{\cdot}10^{11}$Hz hasta $3.8{\cdot}10^{14}$Hz. Los cuerpos calientes emiten este tipo de radiación.

- Luz visible: Con frecuencias en el rango de $3.8{\cdot}10^{14}$Hz (luz roja) hasta $7.9{\cdot}10^{14}$Hz (luz azul). Es producida por el decaimiento a niveles energéticos inferiores desocupados de electrones inestables en capas de mayor energía, con la particularidad de que los fotones emitidos deben caer en este rango de frecuencias. El ser humano puede detectarla con la retina. El nombre de onda monocromática se debe a que si su frecuencia se encuentra en este rango del espectro la onda se ve con un determinado color.

- Ultravioleta: Con frecuencias en el rango de $7.9{\cdot}10^{14}$Hz hasta $3{\cdot}10^{16}$Hz. Esta radiación es parte integrante de los rayos solares. La atmósfera terrestre previene, gracias al ozono de la estratosfera, que la mayoría de la radiación de este tipo procedente del sol llegue a la superficie terrestre. Esta radiación causa quemaduras en la piel de los seres humanos.

- Rayos X: Con frecuencias en el rango de $3{\cdot}10^{16}$Hz hasta $3{\cdot}10^{19}$Hz. Tienen su origen en la desaceleración de electrones. Se utilizan en medicina, especialmente, en radiografías.

- Rayos gamma: Con frecuencias superiores a $3{\cdot}10^{19}$Hz. Correspondería a la radiación más energética. Tienen su origen en las transiciones nucleares y en la desintegración de isotopos radiactivos.

Una onda $\psi = \psi(\mathrm{k}_0 x+\omega t+\phi)$ también satisface la ecuación de ondas si se verifica la relación de dispersión [10.14]. La diferencia es que esta onda se propaga con velocidad $-c\vec{i}$.

Una onda estacionaria,

$$\psi = \psi_0 sin(\mathrm{k}_0 x - \omega t) + \psi_0 sin(\mathrm{k}_0 x + \omega t) = 2\psi_0 \sin(\mathrm{k}_0 x)\cos(\omega t) \qquad (10.25)$$

superposición de dos ondas iguales en fase propagándose en sentidos opuestos, es también solución de la ecuación de ondas. Esta onda no es una onda plana y tiene varias peculiaridades: en ciertos instantes se anula en todos los puntos del espacio, en ciertos puntos se hace cero para todo instante, y no se propaga con ninguna velocidad (no hay propagación de fase).

10.3. Polarización

La polarización es una propiedad de las ondas electromagnéticas que permite a los campos eléctrico y magnético oscilar en más de una dirección en el espacio. Por convenio, se analiza la polarización del campo eléctrico. Consideramos una onda plana monocromática genérica que se propaga en la dirección $\vec{\mathrm{k}}_0 = \mathrm{k}_0\vec{i}$:

$$\vec{E} = E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = E_{y0}\sin(k_0x - \omega t)\vec{j} + E_{z0}\sin(k_0x - \omega t + \Delta)\vec{k} \tag{10.26}$$

donde Δ es el desfase.

El caso más sencillo se da cuando el desfase es $\Delta = 0$ o $\Delta = \pi$. Se dice entonces que la polarización es lineal.

$$\vec{E} = (E_{y0}\vec{j} \pm E_{z0}\vec{k})\sin(k_0x - \omega t) \tag{10.27}$$

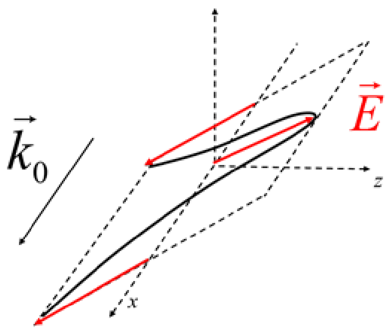


Figura 10.3: Onda electromagnética plana linealmente polarizada que se propaga en el eje $\vec{i}$. La figura representa únicamente el campo eléctrico. La proyección del campo en cualquier punto sobre el plano OYZ es un segmento de recta.

Como se puede ver el campo eléctrico se encuentra siempre en la misma dirección. Sin embargo, esta situación no es la más general. Vamos a eliminar de la ecuación [10.26] el tiempo, para obtener la proyección del campo eléctrico en el plano perpendicular a la dirección de propagación. La ecuación [10.26] es equivalente a estas dos:

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \sin(\mathrm{k}_0x - \omega t), \quad \frac{E_z}{E_{z0}} = \sin(\mathrm{k}_0x - \omega t + \Delta) \tag{10.28}$$

Aplicamos propiedades de la suma de senos:

$$\frac{E_z}{E_{z0}} = \sin(k_0x - \omega t + \Delta) = \sin(k_0x - \omega t)\cos\Delta + \cos(k_0x - \omega t)\sin\Delta \tag{10.29}$$

Usando la ec. [10.28] queda:

$$\frac{E_z}{E_{z0}} = \frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta + \cos(k_0x - \omega t)\sin\Delta \tag{10.30}$$

Elevamos al cuadrado y operamos usando la fórmula anterior:

$$\frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = \frac{E_y^2}{E_{y0}^2}\cos^2\Delta + \cos^2(k_0 x - \omega\, t)\sin^2\Delta + 2\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta\cos(k_0 x - \omega\, t)\sin\Delta \tag{10.31}$$

$$\frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = \frac{E_y^2}{E_{y0}^2}\cos^2\Delta + \cos^2(k_0 x - \omega\, t)\sin^2\Delta + 2\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta(\frac{E_z}{E_{z0}} - \frac{E_y}{E_{y0}}\cos\Delta) \tag{10.32}$$

$$\frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = -\frac{E_y^2}{E_{y0}^2}\cos^2\Delta + (1 - \sin^2(k_0 x - \omega\, t))\sin^2\Delta + 2\cos\Delta\frac{E_y}{E_{y0}}\frac{E_z}{E_{z0}} \tag{10.33}$$

$$\frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = -\frac{E_y^2}{E_{y0}^2}\cos^2\Delta + (1 - \frac{E_y^2}{E_{y0}^2}))\sin^2\Delta + 2\cos\Delta\frac{E_y}{E_{y0}}\frac{E_z}{E_{z0}} \tag{10.34}$$

Para obtener finalmente:

$$\frac{E_y^2}{E_{y0}^2} + \frac{E_z^2}{E_{z0}^2} - 2\cos\Delta\frac{E_z}{E_{z0}}\frac{E_y}{E_{y0}} = \sin^2\Delta \tag{10.35}$$

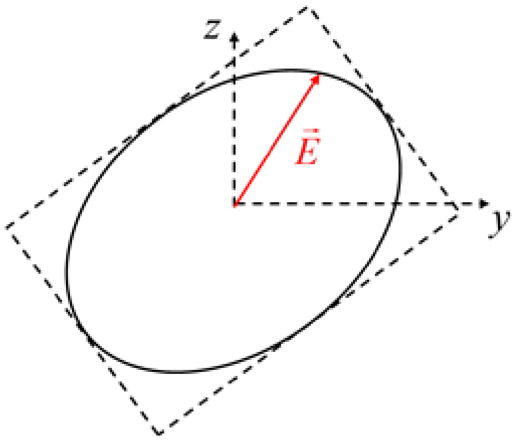


Figura 10.4: Onda electromagnética plana con polarización elíptica propagándose en el eje $\vec{i}$.

Esta ecuación, que no depende del tiempo, corresponde a la proyección del campo eléctrico en el plano OYZ. En el caso más general es la ecuación de una elipse (polarización elíptica). Una representación de esta ecuación aparece en la Fig. 10.4. No obstante existen algunos casos particulares más simples como veremos a continuación:

- Polarización lineal: $\Delta = 0$ o $\Delta = \pi$. La ecuación [10.35] queda:

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \pm\frac{E_z}{E_{z0}} \tag{10.36}$$

Por tanto, la proyección del campo eléctrico describe un segmento de recta (Fig. 10.3).

- Polarización circular: $\Delta = \dfrac{\pi}{2}$ o $\Delta = \dfrac{3\pi}{2}$ y $|E_{y0}| = |E_{z0}| = E_0$. La ecuación [10.35] queda:

$$\frac{E_y^2}{E_0^2} + \frac{E_z^2}{E_0^2} = 1 \tag{10.37}$$

Por tanto, la proyección del campo eléctrico describe una circunferencia (Fig. 10.5).

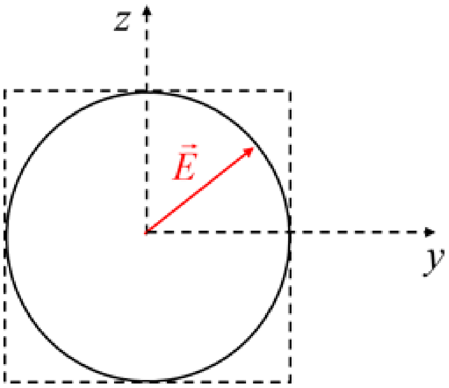


Figura 10.5: Onda electromagnética plana correspondiente a la polarización circular propagándose en el eje $\vec{i}$.

- Polarización elíptica centrada en ejes: $\Delta = 0$ o $\Delta = \pi$. La ecuación [10.35] queda:

$$\frac{E_y^2}{E_{y0}^2} + \frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = 1 \tag{10.38}$$

Por tanto, la proyección del campo eléctrico describe una elipse centrada en ejes (Fig. 10.6).

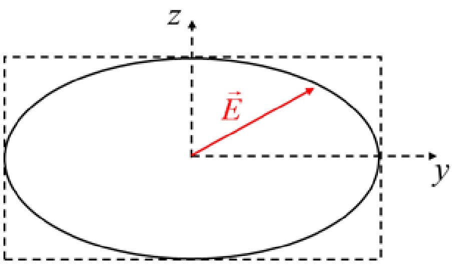


Figura 10.6: Onda electromagnética plana correspondiente a la polarización elíptica centrada en ejes propagándose en el eje $\vec{i}$.

En resumen, la proyección sobre el plano perpendicular a la dirección de propagación del campo eléctrico forma una figura que recibe el nombre de curva de Lissajous. Estas curvas resultan por tanto de la superposición de dos movimientos armónicos simples en direcciones perpendiculares. El campo eléctrico puede recorrer la figura de forma levógira (antihoraria) o dextrógira (horaria) en función del desfase. Se propone como ejercicio para el lector el análisis de cuando se dan ambas situaciones.

Cuando la luz procede de diversas fuentes se produce una mezcla de ondas polarizadas resultando lo que se llama una radiación incoherente. Por tanto, la polarización que acabamos de ver es característica de la radiación coherente.

10.4. Energía de las ondas: vector de Poynting

Las ondas electromagnéticas propagan la energía electromagnética a través del vacío o de los medios materiales. Esto es lo que vamos a demostrar en este apartado para un medio homogéneo e isótropo. El físico inglés John Henry Poynting, discípulo de Maxwell, desarrolló y publicó en 1884 la ley de conservación de la energía para el campo electromagnético.

De acuerdo con el apartado 8.5 la potencia por unidad de volumen disipada por efecto Joule en un medio es $\vec{E} \cdot \vec{J}$. Recordamos también del apartado 6.4 que el campo magnético no realiza trabajo. Utilizando la cuarta ecuación de Maxwell [10.2] en la expresión de la potencia:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \varepsilon \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon \mu} \nabla \times \vec{B} \right) \tag{10.39}$$

Usando la segunda ecuación de Maxwell [10.1] podemos sumar a la ecuación anterior el término: $\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = 0$. Con lo cual:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu} \left[-\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) + \vec{B} \cdot (\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) \right] \tag{10.40}$$

Finalmente simplificando la expresión anterior queda:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{B^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu} \left[\vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right] \tag{10.41}$$

Utilizando la ecuación [2.102]:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{B^2}{2} \right) + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \tag{10.42}$$

Integrando la ecuación anterior en un volumen v limitado por una superficie s y usando en teorema de la divergencia nos queda al final:

$$-\int_{\mathrm{v}} \vec{E} \cdot \vec{J} d\mathrm{v} = \int_{\mathrm{v}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{B^2}{2} \right) d\mathrm{v} + \oint_{s} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} \tag{10.43}$$

El término a la izquierda de la igualdad corresponde a la potencia disipada por efecto Joule en el volumen v. El término de la integral de volumen de la derecha de la igualdad corresponde a la variación temporal de la energía almacenada en el campo electromagnético en el volumen v, y finalmente el flujo del vector $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ representa la potencia instantánea que abandona o se introduce en dicho volumen por las paredes en forma de ondas.

En forma diferencial, con las definiciones introducidas, tenemos que la ecuación [10.42] se escribe como:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \tag{10.44}$$

Esta ecuación no deja de ser una ecuación de continuidad para la energía del campo electromagnético y el vector $\vec{S}$ recibe el nombre de vector de Poynting.

También se suele utilizar el promedio temporal del vector de Poynting en un tiempo muy superior al periodo de la onda, magnitud que se llama irradiancia. Representa la potencia por unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación que transporta la radiación electromagnética.

Las ondas electromagnéticas además de energía también transportan momento lineal. El valor de este momento se puede obtener, por analogía con la mecánica relativista, a partir de la relación de la energía con el momento lineal. El momento por unidad de volumen viene dado por la expresión:

$$\frac{d\vec{p}}{d\mathrm{v}} = \frac{\vec{S}}{c^2} \tag{10.45}$$

Consideremos el caso de una onda electromagnética plana en el vacío propagándose en el eje $\vec{i}$. La energía por unidad de volumen usando la ecuación [10.20] queda:

$$u = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{E^2}{2} = \varepsilon_0 E^2 \tag{10.46}$$

y el vector de Poynting usando la misma ecuación [10.20] resulta:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \left(\frac{1}{c}\vec{i} \times \vec{E}\right) = c\varepsilon_0 E^2 \vec{i} = cu\frac{\tilde{\mathrm{k}}_0}{\mathrm{k}_0} \tag{10.47}$$

Sustituyendo en la ecuación [10.44] tenemos que:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow u = u(x - ct) \tag{10.48}$$

Es decir, la energía de la onda viaja en la dirección de propagación a la velocidad de la luz c.

10.5. Ecuación de ondas en medios dieléctricos

En este apartado vamos a obtener la ecuación de ondas general en un dieléctrico. Dicho material será lineal, no homogéneo eléctricamente e isótropo. En general, la propagación en medios materiales se caracteriza porque la amplitud de las ondas disminuye en la dirección de propagación debido a la absorción de energía por el medio. Las ecuaciones de Maxwell en este tipo de medios se particularizan de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{10.49}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{10.50}$$

donde hemos eliminado las cargas y corrientes libres.

Tomando el rotacional en la segunda ecuación [10.49] tenemos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial \nabla \times \vec{B}}{\partial t} \tag{10.51}$$

y utilizando las propiedades del doble rotacional junto con la segunda ec. [10.50] nos queda:

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{10.52}$$

En definitiva, llegamos a la ecuación:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) \tag{10.53}$$

La divergencia del campo eléctrico resulta ser:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{D}}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \underbrace{\nabla \cdot \vec{D}}_{\rho=0} + \vec{D} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\vec{D} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \nabla\varepsilon \tag{10.54}$$

Sustituyendo en [10.53] queda:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\nabla(\vec{E} \cdot \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon}) \tag{10.55}$$

Definimos el índice de refracción n a partir de la expresión: $\varepsilon_r \mu_r = n^2$ donde ϵ_r es la permitividad relativa del medio y μ_r es la permeabilidad relativa del medio. El índice de refracción puede depender de la frecuencia angular ω de la onda y de la posición en el medio $n(\vec{r}, \omega)$, pero no del tiempo. La dependencia de n con la frecuencia permite separar la luz en colores mediante la refracción en un medio (en el caso de las gotas de agua produce el arco iris). Dado que consideramos medios dieléctricos lineales no magnéticos, el vector polarización y el desplazamiento eléctrico se calculan a partir del índice de refracción como:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (n^2 - 1)\vec{E}; \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E} \tag{10.56}$$

Y la ecuación [10.55] se escribe entonces como:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -2\nabla(\vec{E} \cdot \frac{\nabla n}{n}) \tag{10.57}$$

En un medio homogéneo, es decir, con $n = cte$, el último término se anula. Se obtiene de nuevo la ecuación de ondas homogénea, aunque cambia la velocidad de propagación de la onda (velocidad de fase) que ahora es $v = c/n$. La relación de dispersión es ahora: $\omega^2 = c^2 \mathrm{k}^2 / n^2 = v^2 \mathrm{k}^2$. Y las ondas planas monocromáticas que se propagan en este tipo de medios son:

$$\psi = \psi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \tag{10.58}$$

Resumiendo, los medios dieléctricos, en general, son transparentes a las ondas electromagnéticas, aunque no totalmente, ya que, en ellos estas ondas pueden atenuarse, es decir, puede haber pérdidas por mecanismos de polarización de los átomos o moléculas. En el caso de los dieléctricos con conductividad o los metales se producen también pérdidas por efecto Joule. No obstante, el comportamiento de la radiación en un medio depende de la frecuencia. Así, en el caso de la radiación no ionizante (de baja energía, y que por tanto, no es capaz de arrancar electrones ligados), los metales la absorben transformándola en calor, como en los hornos microondas, o corriente (impidiendo las comunicaciones) como en jaulas de Faraday. En el caso de la radiación ionizante (rayos X y gamma), la mayoría de los metales resultan transparentes a la radiación, siendo necesario entonces metales pesados como el plomo para absorber la radiación.