TE41 - FINAL P2021 - LUNDI 21 JUIN 2021

Exercice 1 : Déformations planes- contraintes planes - 5 points

PREMIERE PARTIE : DEFORMATIONS PLANES

Cet état de déformation se rencontre dans le cas de structures allongées dans une direction donnée (par exemple dans la direction $\underline{e}_3$) et identiques à elles-mêmes dans cette direction (tant au niveau géométrique que du chargement).

Cet déformation découle d'un mouvement plan, défini par un champ de déplacement $\underline{\xi}$ qui ne dépend donc par de la variable x_3 et dont la composante ξ_3 est nulle. C'est-à-dire que $\underline{\xi}$ est de la forme :

$$\xi_3 = 0 \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} = 0 \tag{1}$$

On suppose le matériau homogène, élastique et isotrope.

1. Donner l'expression du tenseur de déformations linéarisées $\underline{\underline{\varepsilon}}$.
2. Que constate-t-on sur les composantes ε_{13} , ε_{23} et ε_{33}.
3. Pourquoi parle-t-on dans ce cas de déformations planes ?
4. En utilisant la loi de Hooke, donner l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$.
5. Que vaut la composante σ_{33} ? Pour information, on appelle cela l'effet Poisson.
6. Parmi les trois figures ci dessous, laquelle correspond à un état de déformations planes ?

DEUXIEME PARTIE : CONTRAINTES PLANES

Les contraintes planes apparaissent par exemple dans le cas de structure mince chargée uniquement dans son plan.

Une telle structure est appelée une coque et ne doit pas être confondue avec une plaque, de géométrie comparable mais chargée perpendiculairement à son plan.

L'état de contraintes planes est défini par le tenseur suivant :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1,x_2) & \sigma_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ \sigma_{12}(x_1,x_2) & \sigma_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1. Ecrire la loi de Hooke inverse qui donne $\underline{\underline{\varepsilon}}$ en fonction de $\underline{\underline{\sigma}}$ et en déduire l'expression du tenseur des déformations :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\,\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\,tr(\underline{\underline{\sigma}})\,\underline{\underline{1}} \tag{3}$$

2. Est-on dans un état de déformations planes ? Pourquoi ?
3. Parmi les trois figures ci dessous, laquelle correspond à un état de contraintes planes ?

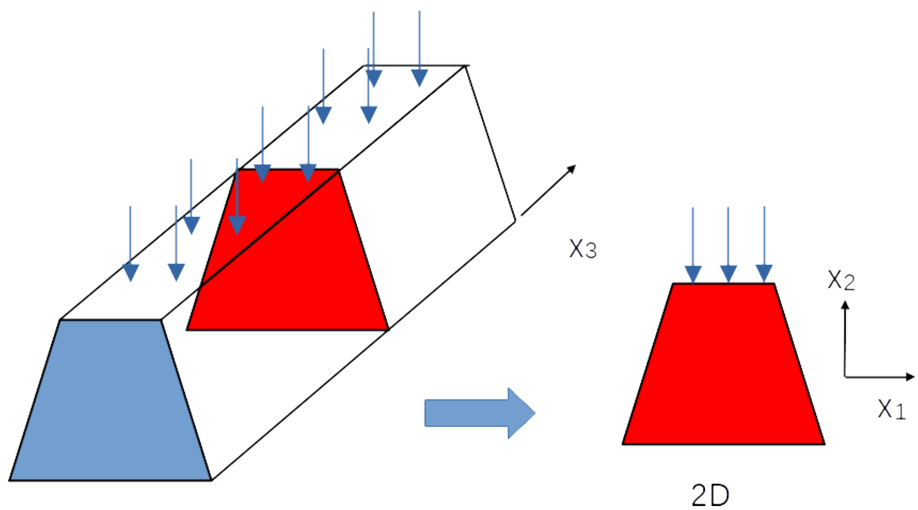

FIGURE 1 –

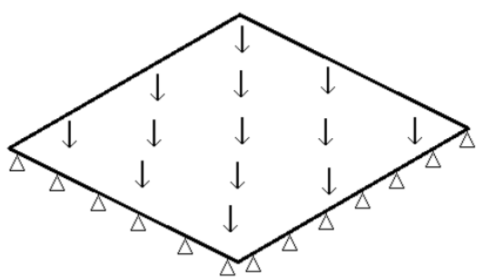

FIGURE 2 -

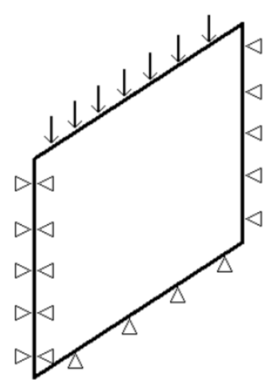

FIGURE 3 -

Exercice 2 : Pression dans une sphère - 9 points

On considère une sphère creuse à paroi épaisse (Figure 2 ci dessous), de centre O dont la surface $\partial\Omega$ est constituée de S_a de rayon a et S_b de rayon b. Elle subit une pression normale uniforme égale à p_i sur sa paroi interne S_a et une pression normale uniforme sur sa paroi extérieure S_b, égale à p_e (Figure 3). On choisit naturellement les coordonnées sphériques (r, θ, φ) centrées en O pour étudier ce problème.

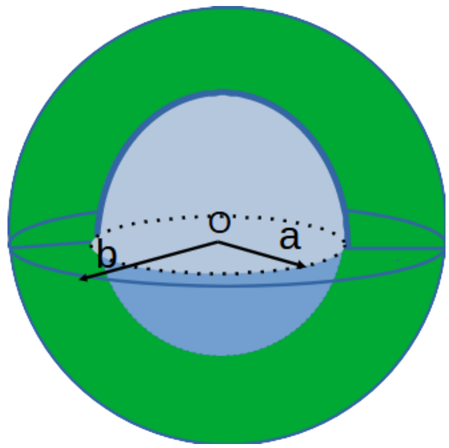

FIGURE 2 – sphère creuse de rayon interne a et rayon externe b

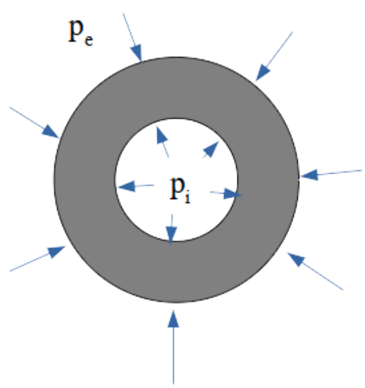

FIGURE 3 – coupe de la sphère : pression p_i sur S_a et pression p_e sur S_b

Hypothèses :

— hypothèses des petites perturbations.
— état isotherme.
— pas de forces volumiques.
— matériau homogène, élastique et isotrope.
— le vecteur contrainte sur S_a s'écrit : $p_i\,\underline{e}_r$.
— le vecteur contrainte sur S_b s'écrit : $-\,p_e\,\underline{e}_r$.
— le vecteur déplacement $\underline{\xi}$ en 0 est nul.

Indications : Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes. Vous pouvez prendre le résultat pour faire la question suivante.

Questions :

1. Justifier pourquoi le vecteur déplacement $\underline{\xi}$ s'écrit sous la forme :
$$\underline{\xi}\,(r,\theta,\varphi) \;=\; r\,f(r)\,\underline{e}_r \tag{4}$$
où f est une fonction de r.
2. On rappelle que les équations de Navier (résolution par la méthode des déplacements) sont données par :
$$(\lambda\,+\,\mu)\,\underline{grad}(\,div\,\underline{\xi}\,)\,+\,\mu\underline{\Delta}\underline{\xi}\,+\,\rho\underline{F}\,-\,k\,\underline{grad}\,\tau\;=\;\underline{0}$$
Montrer que les équations de Navier, **en coordonnées sphériques**, conduisent à résoudre l'équation différentielle suivante :
$$4\,f'(r)\,+\,r\,f''(r)\;=\;0 \tag{5}$$
3. Vérifier que la solution de l'équation différentielle (5) ci-dessus s'écrit sous la forme :
$$\underline{\xi}\,(r,\theta,z)\;=\;\underline{\xi}\,(r)\;=\;(Ar\,+\,\frac{B}{r^2})\,\underline{e}_r \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes réelles}$$
4. Calculer le tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$.
5. Calculer le tenseur des contraintes :
$$\underline{\underline{\sigma}}\;=\;\lambda\,(tr\underline{\underline{\varepsilon}})\,\underline{\underline{1}}\,+\,2\mu\,\underline{\underline{\varepsilon}}$$
où (λ,μ) représente les coefficients de Lamé.
6. Utiliser les conditions aux limites sur les contraintes pour déterminer les constantes A et B.
7. Donner l'expression de $\underline{\xi}$.

Indications : Opérateurs en coordonnées sphériques

1. Un vecteur $\underline{v}$ au point M est décomposé dans la base locale orthonormée ($\underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta$, $\underline{e}_\varphi$). Ses composantes sont v_r, v_θ, v_φ.
2. Divergence d'un vecteur :

$$div\,\underline{v} \;=\; \frac{\partial v_r}{\partial r} \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \;+\; \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \;+\; cotg\theta\,\frac{v_\theta}{r} \;+\; 2\,\frac{v_r}{r}$$

3. Gradient d'une fonction scalaire $f(\underline{M}) \;=\; f(r,\theta,\varphi)$:

$$\underline{grad}\,f \;=\; \frac{\partial f}{\partial r}\,\underline{e}_r \;+\; \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\underline{e}_\theta \;+\; \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\underline{e}_\varphi$$

4. Laplacien d'un vecteur :

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}\,\underline{v} \;\;&=\; \left(\Delta v_r \;-\; \frac{2}{r^2}(v_r \;+\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\,\sin\theta)}{\partial\theta} \;+\; \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi})\right)\,\underline{e}_r\\ &+\; \left(\Delta v_\theta \;+\; \frac{2}{r^2}(\frac{\partial v_r}{\partial\theta} \;-\; \frac{v_\theta}{2\sin^2\theta} \;-\; \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi})\right)\,\underline{e}_\theta\\ &+\; \left(\Delta v_\varphi \;+\; \frac{2}{r^2\,\sin\theta}(\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} \;+\; cotg\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} \;-\; \frac{v_\varphi}{2\sin\theta})\right)\,\underline{e}_\varphi\end{aligned}$$

5. Laplacien d'une fonction scalaire :

$$\Delta\,f \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \;+\; \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} \;+\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \;+\; \frac{1}{r^2}\,cotg\theta\,\frac{\partial f}{\partial\theta} \;+\; \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

6. Gradient d'un vecteur :

$$\underline{\underline{grad}}\,\underline{v} \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_r}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_r}{\partial\theta} \;-\; v_\theta) & \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi} \;-\; v_\varphi) \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\theta} \;+\; v_r) & \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} \;-\; cotg\theta\,v_\varphi) \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\theta} & \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} \;+\; cotg\theta\,v_\theta \;+\; v_r) \end{pmatrix}$$