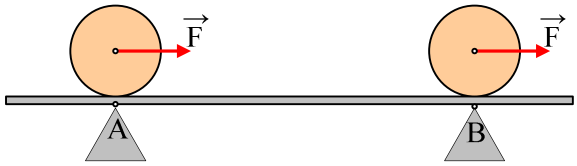
Στροφορμή και ρυθμός μεταβολής της.

Μια λεπτή δοκός μάζας m_1=10kg, ηρεμεί στηριζόμενη σε δύο τρίποδα Α και Β, τα οποία απέχουν εξίσου από τα άκρα της. Πάνω στη δοκό, στη θέση του τρίποδου Α ηρεμεί ένας κύλινδρος μάζας Μ=10kg και ακτίνας 0,4m. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας σταθερής δύναμης F=120Ν, όπως στο σχήμα, οπότε αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά από 1s φτάνει στο άλλο τρίποδο Β. Στη διάρκεια της κίνησης η δοκός δεν κινείται.



i) Να υπολογιστεί η απόσταση (ΑΒ)

ii) Για τη στιγμή που ο κύλινδρος περνά από το Β να βρεθούν:

α) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο επαφής του κυλίνδρου με τη δοκό στην αρχική του θέση και είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος.

iii) Μεταξύ της δοκού και του Α τρίποδου δεν αναπτύσσεται τριβή.

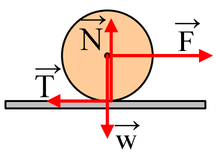
α) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και Β τρίποδου, ώστε η δικός να παραμένει ακίνητη στη διάρκεια του πειράματος;

β) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος της δοκού, ώστε κατά την κίνηση του κυλίνδρου κατά μήκος της, να μην ανατραπεί;

Δίνεται για τον κύλινδρο Ι= ½ MR^2 ως προς τον άξονα περιστροφής του και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση η οποία μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική. Στην κατακόρυφη διεύθυνση ο κύλινδρος ισορροπεί οπότε $\Sigma F_y=0$ ή N=Mg=100N.



Εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Νεύτωνα για τον κύλινδρο:

Για τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x= M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F\text{-}T=M\cdot\alpha_{cm} \quad (1)$$

Για την στροφική κίνηση (θεωρούμε θετική τη φορά περιστροφής):

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T\cdot R= ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½\, M\cdot\alpha_{cm} \quad (2)$$

Αφού για την κύλιση ισχύει $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = \frac{3}{2}Ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F}{3M} = \frac{2 \cdot 120N}{3 \cdot 10kg} = 8m/s^2$$

Και $T = ½\ M \cdot \alpha_{cm} = 40N$

Επομένως η μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία:

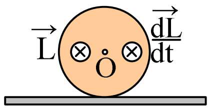
$$x = ½\ \alpha_{cm} \cdot t^2 = ½\ 8 \cdot 1^2 m = 4m \ \text{ και}$$

$$\upsilon_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t = 8 \cdot 1\ m/s = 8m/s$$

Συνεπώς η απόσταση (ΑΒ)=4m.

ii) Αφού κυλίεται ο κύλινδρος ισχύει $\upsilon_{cm} = \omega \cdot R \rightarrow \omega = 20 rad/s$, οπότε

α) Ως προς τον άξονα περιστροφής του έχουμε:



$$L = I \cdot \omega = ½\ MR^2 \cdot \omega = ½\ 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 20\ kg \cdot m^2/s = 16\ kg \cdot m^2/s$$

$$\text{Και } \frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = T \cdot R$$

Και με αντικατάσταση $\frac{dL}{dt} = 40 \cdot 0{,}4\ kg \cdot m^2/s^2 = 16\ kg \cdot m^2/s^2$

Τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής του κυλίνδρου που διέρχεται από το κέντρο της βάσης του O και φορά όπως στο διπλανό σχήμα.

β) Ως προς τον άξονα κάθετο στο επίπεδο του σχήματος που περνά από το Α έχουμε:

$$L_A = I \cdot \omega + M\upsilon_{cm} \cdot R$$

αφού ως προς τον άξονα αυτό, έχει στροφορμή και λόγω της ιδιοπεριστροφής του Ιω, αλλά και στροφορμή σαν υλικό σημείο κινούμενο με ταχύτητα υ_{cm}. Με αντικατάσταση παίρνουμε:

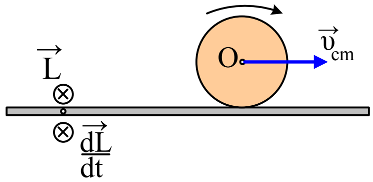
$$L_A = ½\ MR^2 \cdot \omega + M\upsilon_{cm} \cdot R = (½\ 10 \cdot 0{,}4^2 \cdot 20 + 10 \cdot 8 \cdot 0{,}4)\ kg \cdot m^2/s = 48\ kg \cdot m^2/s$$

Ενώ

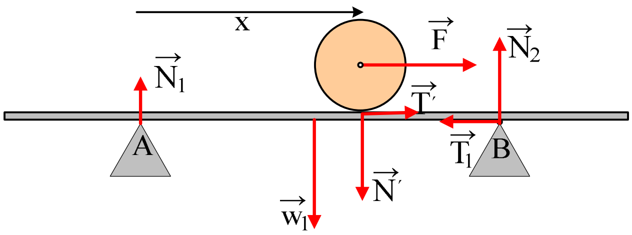
$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = T \cdot 0 + W \cdot (AB) - N \cdot (AB) + F \cdot R = F \cdot R$$

$$\frac{dL}{dt} = F \cdot R = 48 kg \cdot m^2/s^2$$

Τα αντίστοιχα διανύσματα έχουν επίσης τη διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα μέσα.



iii) Έστω ότι κάποια στιγμή ο κύλινδρος απέχει κατά x από την αρχική του θέση. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, όπου Τ΄ η αντίδραση της τριβής (T'=40N), N' η αντίδραση της N=100N, T_1 η τριβή από το δεύτερο τρίποδο και N_1, N_2 οι κάθετες αντιδράσεις από τα τρίποδα.



α) Αφού η δοκός ισορροπεί ΣF=0, οπότε:

$$\Sigma F_x=0 \text{ ή } T_1=T' = 40N \quad \text{και}$$

$$\Sigma F_y=0 \text{ ή } N_1+N_2=w_1+ N' \text{ ή } N_1+N_2=200N \ (1)$$

$$\text{Αλλά και } \Sigma\tau_A =0 \text{ ή } N_2\cdot(AB) - w_1\cdot(AB)/2 - N'\cdot(x) =0 \text{ ή}$$

$$N_2\cdot 4=100\cdot 2+100\cdot x) \text{ ή } N_2=50 + 25x \quad (N)\ (2)$$

Για να μην ολισθήσει η δοκός θα πρέπει $T_1 \leq T_{op}$ ή $\mu_s \cdot N_2 \geq 40$ N ή

$$\mu_s \geq \frac{40}{50+25x}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι όσο πιο δεξιά βρεθεί ο κύλινδρος τόσο μικρότερος είναι ο απαραίτητος συντελεστής στατικής οριακής τριβής. Αυτό σημαίνει ότι αν «κινδυνεύει» να ολισθήσει η δοκός, αυτή είναι η αρχική του θέση. Συνεπώς για να εξασφαλισθεί ότι δεν θα ολισθήσει η δοκός θα πρέπει $\mu_s \geq \frac{40}{50}$ άρα ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής είναι μ_{smin}=0,8.

β) Εξάλλου από τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε:

$$N_1=200-50-25x \text{ ή } N_1=150-25x$$

Συνεπώς για να έχουμε ανατροπή, θα πρέπει να μηδενιστεί η δύναμη N_1 από το πρώτο τρίποδο, άρα:

$$150-25x=0 \text{ ή } x=6m$$

Συνεπώς η μέγιστη απόσταση δεξιά του τρίποδου B είναι d=x-4=2m και το ελάχιστον μήκος της δοκού είναι:

$$d+ (AB)+d= 8m$$

dmargaris@sch.gr