

# DEFORMAZIONE PLASTICA

## Prova di trazione

La prova di trazione è una prova distruttiva che ha come scopo trarre più informazioni possibili sulle proprietà meccaniche del materiale. Questa prova consiste nel tendere un provino lungo la sua dimensione longitudinale con una forza sempre più crescente e rilevare la forza applicata al provino e l'allungamento del provino stesso. Questa prova viene eseguita sulla macchina detta macchina universale in quanto è in grado di eseguire altri test oltre quello a trazione, come ad esempio quello a pressione. Tale macchina si compone di una parte fissa, di due grandi viti che servono a far muovere la parte mobile. La macchina può lavorare in due diversi modi:

1. In controllo di forza = con la macchina si controlla la forza esercitata
2. In controllo di spostamento = si controlla con che velocità si abbassa la traversa e si misura la forza applicata tramite una strumentazione detta cella di carico.

L'output di questa prova è una curva; esistono due diversi tipi di curve:

- Sforzi/deformazioni ingegneristiche
- Sforzi/deformazioni reali

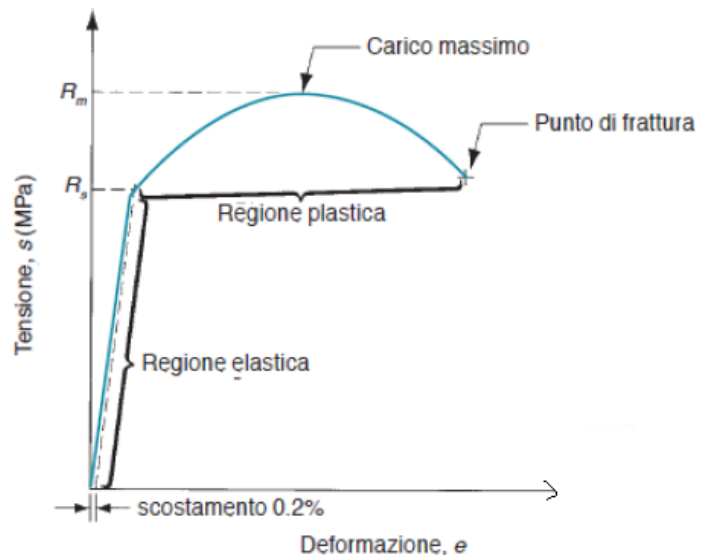
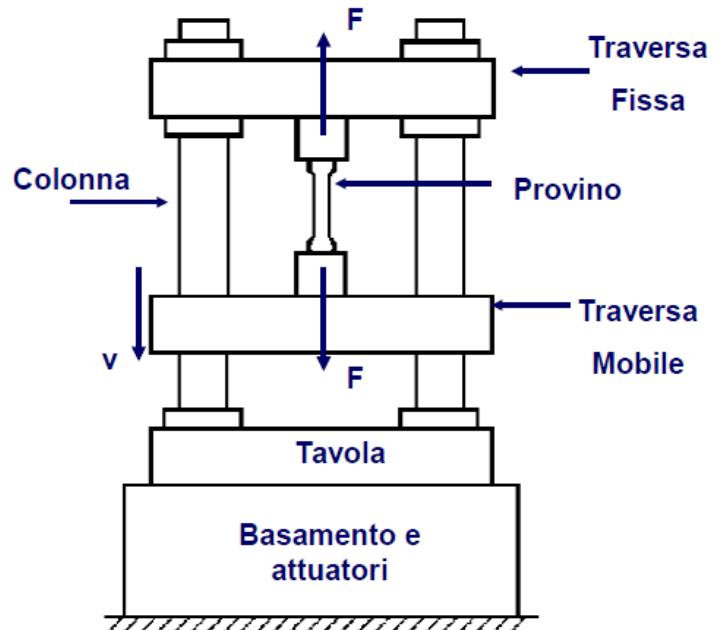
## Sforzi e deformazioni ingegneristiche

Indicando con  $R$  gli sforzi ingegneristici ed  $e$  le deformazioni ingegneristiche, abbiamo che:

$$R = \frac{F}{A_0} \quad e = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Ricordiamo che  $A_0$  e  $l_0$  sono valori costanti perché rappresentano la sezione iniziale e la lunghezza iniziale del provino. La curva può essere suddivisa in due porzioni principali:

1. Regione elastica o tratto di proporzionalità = questo tratto è una retta la cui pendenza è fornita dal modulo di Young  $E$ , caratteristico del singolo materiale. La deformazione del materiale in questa zona è elastica dunque il materiale è in grado di ritornare nella sua forma e con la sua dimensione iniziale. Tale zona ci interessa solo durante lo studio delle lamiere. In questa fase del grafico il provino ha una variazione rigida della sua geometria: si allunga e nel contempo diminuisce la sezione ma non modifica la sua geometria nel complesso.
2. Regione plastica o di deformazioni permanenti = nel momento in cui il provino inizia a snervare si entra nel secondo tratto della curva cioè il campo plastico. Con la strizione il provino mostra la concentrazione di sforzi in una sezione, in questa sezione non avviene, dunque, più la deformazione rigida come invece accade per il primo tratto. Dunque dal punto di massimo sforzo il provino inizia a modificare la sua geometria e non varia in modo rigido. Dalla strizione la deformazione continua fino al punto di frattura nella zona di strizione.

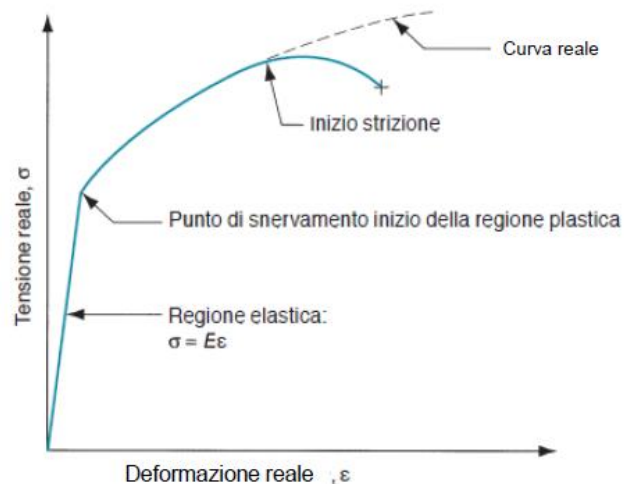


## Sforzi e deformazioni reali

Indicando con  $\sigma$  gli sforzi reali ed  $\varepsilon$  le deformazioni reali, abbiamo che:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}$$

La curva che rappresenta la variazione delle deformazioni reali in funzione degli sforzi reali è diversa rispetto a quella ingegneristica. È importante notare che in questo caso l'area presente al denominatore dell'espressione che permette di calcolare gli sforzi reali non è un valore costante, ma diminuisce con l'aumentare degli sforzi. Per questo motivo idealmente il unto di rottura del pezzo dovrà andare all'infinito.



## Legame tra sforzi e deformazioni ingegneristici / reali

Mostriamo ora come sono matematicamente legati gli sforzi ingegneristici a quelli reali e le deformazioni ingegneristiche a quelle reali:

$$A_0 l_0 = A l \rightarrow \frac{A_0}{A} = \frac{l}{l_0}$$

$$e = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1 \rightarrow \frac{l}{l_0} = e + 1$$

$$\sigma = \frac{F A_0}{A A_0} = \frac{F A_0}{A_0 A} = R \frac{A_0}{A} = R \frac{l}{l_0} = R(e + 1)$$

$$\varepsilon = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(e + 1)$$

## Confronto tra sforzi e deformazioni ingegneristici / reali

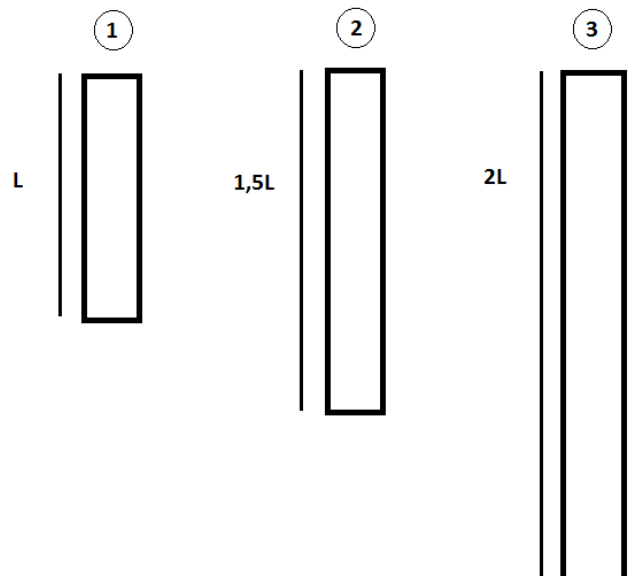
Cerchiamo ora di capire tramite un esempio come mai convenga utilizzare gli sforzi e le deformazioni reali piuttosto che quelle ingegneristiche. Analizziamo per prima cosa le deformazioni ingegneristiche:

$$e_{1 \rightarrow 2} + e_{2 \rightarrow 3} = e_{1 \rightarrow 3}$$

$$e_{1 \rightarrow 2} = \frac{1,5 - 1}{1} = 0,5$$

$$e_{2 \rightarrow 3} = \frac{2 - 1,5}{1,5} = 0,333$$

$$e_{1 \rightarrow 3} = 0,5 + 0,333 = 0,833 \neq \frac{2 - 1}{1} = 1$$



Da questa prima analisi deduciamo che le deformazioni ingegneristiche non sono additive infatti la relazione  $e_{1 \rightarrow 2} + e_{2 \rightarrow 3} = e_{1 \rightarrow 3}$  non è valida. Analizziamo ora le deformazioni reali:

$$\varepsilon_{1 \rightarrow 2} + \varepsilon_{2 \rightarrow 3} = \varepsilon_{1 \rightarrow 3}$$

$$\varepsilon_{1 \rightarrow 2} = \ln \frac{1,5}{1} = 0,4054$$

$$\varepsilon_{2 \rightarrow 3} = \ln \frac{2}{1,5} = 0,2877$$

$$\varepsilon_{1 \rightarrow 3} = 0,4054 + 0,2877 = 0,6931 = \ln \frac{2}{1} = 0,6931$$

Dunque le deformazioni reali, al contrario di quelle ingegneristiche godono della proprietà additiva.

### Sforzi e deformazioni reali: equazione generale

Generalmente si preferisce utilizzare una relazione che leghi gli sforzi reali alle deformazioni reali che sia un grado di tener conto sia della deformazione elastica che di quella plastica:

$$\sigma = K\varepsilon^n$$

Dove:  $K$  fattore di resistenza  
 $n$  coefficiente di incrudimento = questo valore è uguale alla deformazione  $\varepsilon$  corrispondente al punto di strizione. La condizione di strizione permette di ottenere il punto di massimo sulla curva sforzi-deformazioni ingegneristiche. Questa grandezza non è presente nel grafico sforzi-deformazioni reali perché non è presente il punto di strizione del materiale. Il punto di strizione è quello che ha forza massima nulla; partendo da questo presupposto possiamo ricavare la relazione tra lo sforzo infinitesimo e quello delle deformazioni:

Curva ingegneristica:	$R = \frac{F}{A_0}$	$F = RA_0$	$dF = 0$
Curva reale:	$\sigma = \frac{F}{A}$	$F = \sigma A$	$dF = A * d\sigma + \sigma * dA$

$$A * d\sigma + \sigma * dA = 0$$

$$A * d\sigma = -\sigma * dA$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A}$$

Conservazione del volume:  $V = Al = cost \quad dV = 0 \quad dV = l * dA + A * dl$

$$l * dA + A * dl = 0$$

$$l * dA = -A * dl$$

$$\frac{dl}{l} = -\frac{dA}{A}$$

Quindi:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{dA}{A} = \frac{dl}{l} = d\varepsilon$$

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = d\varepsilon$$

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \sigma$$

$$\sigma = K\varepsilon^n$$

$$\frac{d(K\varepsilon^n)}{d\varepsilon} = K\varepsilon^n$$

$$nK\varepsilon^{n-1} = K\varepsilon^n$$

$$n \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon} = \varepsilon^n$$

$$n \frac{1}{\varepsilon} = 1$$

$$n = \varepsilon$$

Se dunque il materiale presenta incrudimento la deformazione sarà crescente nel tratto plastico. Un materiale in assenza di incrudimento avrà un andamento orizzontale costante nel tratto plastico perché non si ha necessità di uno sforzo maggiore per deformarlo. Questa equazione fornisce una relazione biunivoca: a ogni deformazione corrisponde uno sforzo e ad ogni sforzo corrisponde una deformazione. È importante sottolineare che il grafico sforzi-deformazioni reali e l'equazione sopra scritta descrivono già un modello del comportamento del materiale, e non il suo comportamento reale. I coefficienti K ed n sono tipicamente tabulati.

### Modelli semplificati

Il modello qui effettuato risulta però essere ancora complesso; per questo motivo spesso si effettua un'ulteriore semplificazione. Approssimando ulteriormente il comportamento dei materiali si possono ottenere 4 diversi modelli:

1. Comportamento elastico perfetto = il legame sforzo-deformazioni è descritto solo nel tratto elastico ed è descritto da una retta. È definito da un unico parametro cioè il coefficiente della retta lineare
2. Comportamento rigido plastico perfetto = modello tale per cui la deformazione è descritta solo nel tratto plastico, in questo caso non è presente incrudimento. Anche questo modello è descritto da un unico parametro
3. Comportamento elasto-plastico perfetto = modello che fornisce informazioni del materiale sia in campo plastico che elastico. Con il termine "perfetto" si indica l'assenza di incrudimento. Occorrono due parametri per descrivere tale modello
4. Comportamento elasto-plastico con incrudimento = si ha un tratto elastico lineare e un tratto plastico lineare. Occorrono 3 parametri.

Questi sono i 4 modelli più semplici che possono essere usati per descrivere il comportamento del materiale.

### Effetto della temperatura

Analizziamo ora l'effetto della temperatura sul grafico sforzi-deformazioni reali. Aumentando la temperatura il comportamento dei materiali diventa più simile al modello ideale. Dunque se si aumenta la temperatura:

- Diminuisce lo sforzo necessario a deformare il materiale
- Aumenta la sua duttilità e si riduce il rischio di rottura
- Aumenta la tenacità
- Diminuisce il carico di snervamento e poi facile deformare il materiale
- Diminuisce il modulo di elasticità

L'area sottesa alla curva è definita come l'energia specifica (cioè per unità di volume) di deformazione.  $Y_{\text{medio}}$  dà la stessa energia specifica di deformazione della curva reale [l'area del rettangolo è uguale all'area sottesa alla curva]. Ricaviamo ora  $Y_{\text{medio}}$ :

$$\bar{y}\varepsilon_1 = \text{area verde}$$

$$\int_0^{\varepsilon_1} K \varepsilon^n d\varepsilon = \text{area blu}$$

$$\text{area verde} = \text{area blu}$$

$$\bar{y} \varepsilon_1 = \int_0^{\varepsilon_1} K \varepsilon^n d\varepsilon$$

$$\bar{y} \varepsilon_1 = \frac{K \varepsilon_1^{n-1}}{n+1}$$

$$\bar{y} = \frac{K \varepsilon_1^{n-1}}{\varepsilon_1 (n+1)} = \frac{K \frac{\varepsilon_1^n}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 (n+1)} = \frac{K \varepsilon_1^n}{n+1}$$

Aumentando la temperatura diminuisce la durezza del materiale. Effetto della velocità di deformazione (si può giungere alla stessa deformazione con velocità differenti) sulla resistenza alla deformazione. A temperatura elevata lo sforzo per deformare il materiale è più basso ma se la deformazione è veloce occorre uno sforzo maggiore. A temperatura maggiore lo sforzo è estremamente sensibile alla velocità di deformazione. A temperatura ambiente occorre uno sforzo maggiore per deformare ma contemporaneamente la velocità è molto più elevata. La deformazione dunque dipende dallo sforzo e dalla velocità:

$$\sigma = K(T, \dot{\varepsilon}) \varepsilon^{n(T, \dot{\varepsilon})}$$

### Caso triassiale

Se il carico è applicato in più direzioni. In ogni punto rispetto ad una terna di assi cartesiani comunque orientati è possibile definire lo stato di tensione e deformazione del materiale in una matrice costituita da 9 elementi. Con una opportuna scelta di assi, spassi principali, è possibile ridurre la complessità di questi tensioni e ridurre le matrici a matrici diagonali:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)] \end{cases}$$

Per la conservazione del volume:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$$

$$\frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] + \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_2 + \sigma_1)] = 0$$

$$\left( \frac{1}{E} - \frac{2\nu}{E} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0$$

$$\frac{1}{E} - \frac{2\nu}{E} = 0$$

$$\nu = 0,5$$

Nel caso monoassiale: