Lineare Algebra

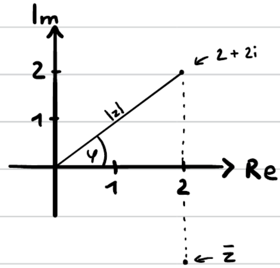
by Danny

Einführung

Komplexe Zahlen

$$z = \underbrace{x}_{\text{Re}(z)} + i\underbrace{y}_{\text{Im}(z)} = r\cdot(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)) = r\cdot e^{i\varphi}$$

Realteil Imaginärteil



$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$$

$$\bar{z} = x - iy = r\cdot e^{i(2\pi-\varphi)}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{I Quadrant} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{II Quadrant} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{III Quadrant} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{IV Quadrant} \end{cases}$$

Bei Polynomen mit komplexen Nullstellen, treten die NS. als komplex, konjugiertes Paar auf.

Operationen

Addition: $z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + (y_1+y_2)i$

Substraktion erfolgt analog

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i) = r_1\cdot r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Division: $z_1 / z_2 = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1/r_2 \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

Potenzieren: $z_1{}^n = r^n \cdot e^{i\theta n}$

Wurzel: Es gibt immer n verschiedene n-te Wurzeln.

$$z^n = a \iff r^n \cdot e^{i\theta n} = |a|\, e^{i\alpha}$$

$$\iff \begin{cases} r = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta = \end{cases}$$

1. Lineare Gle. ungssysteme

Gauss-Elimina.

Ein Lineares Gleichungssystem (LGS) n m Gleichungen und n Unbekannten, wobei $m, n \in \mathbb{N}$. : n System).

rechte Seite

$$\text{LGS} \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \quad 1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad . \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \right.$$

Koeffizient Variabel

Eine Lösung eines LGS ist ein n-Tupel. Die Menge Lösungen ist die allgemeine Lösung.

inkonsistent	keine Lösung
eindeutig	eine Lösung
mehrdeutig	∞ Lösungen

Homogene LGS haben eine rechte Seite bestehend aus lauter Nullen ($b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$). Ist dies nicht der Fall ist das LGS inhomogen.

besitzen eine triviale Lösung ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$)

LGS können auch geometrisch betrachtet werden. (siehe Notizen 1.11)

Gauss-Elimination

Besteht aus zwei Teilen:

Ⓘ Vorwärtselimination

- LGS wird durch elementare Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform gebracht.

Ⓘ Rückwärtseinsetzen

- Ausgehend von der letzten Gleichung werden die Variablen aufgelöst und eingesetzt.

Algorithmus dafür in den Notizen.

Eliminationsschema:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & \quad x_2 & \quad & \quad x_n \end{matrix} \\ \left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right) \end{array}$$

Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \cdots & * & c_1 \\ 0 & * & * & \cdots & * & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & c_m \end{array} \right)$$

Pivot

Der Rang r eines LGS entspricht der Anzahl Pivots in der Zeilenstufenform.

Ein LSG ist genau dann lösbar, wenn $c_{m-r}, \dots, c_m = 0$. Sonst existiert keine Lösung, dies nennt man auch Verträglichkeist-bedingung.

$m = n = r$ ist der reguläre Fall.

Lösungsmenge

Falls $r < m$:

- keine Lösung: Verträglichkeitsbedingungen
- eine Lösung: $r = n$
- mehrere Lösungen: $r < n$

$n-r$ parametrige Schar an Lösungen

Falls $r = m$:

- eine Lösung: $\boxed{r = n}$ ← bester Fall (regulär)
- mehrere Lösungen: $r < n$

Spezialfälle

homogenes LSG $b_1 \dots b_m = 0$:

$x_1 \dots x_n = 0$

- $r = n$ triviale Lösung
- $r < n$ mehrere Lösungen

2. Matrizen & Vektoren

Def. Eine $m \times n$ Matrix ist ein rechteckiges Schema von m-Zeilen und n-Spalten. $m \cdot n$ Elemente in $\mathbb{K}$, genannt Komponenten.

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ anderer Körper

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \; m \; (i)$$

$n \; (j)$

Merke

$\boxed{\text{Zeile zuerst, Spalte später}}$

Das Element in Zeile i und Spalte j, bezeichnen wir als a_{ij} oder auch als $(A)_{ij}$.

Elemente a_{kk}, $k = 1, 2, \dots, \min(m,n)$ sind Diagonalelemente und bilden die Hauptdiagonale.

Spezialfälle von m,n

$m = n$ Quadratische Matrix mit Ordnung m

$m = 1$ Zeilenvektor / n-Tupel

$n = 1$ Spaltenvektor / m-Vektor

Element wird als Komponente bezeichnet und brauchen nur einen Index.

$\mathbb{R}^n :=$ Menge aller reellen n-Vektoren — egal ob Zeile od. Spalte

$\mathbb{R}^{m\times n} :=$ Menge aller reellen $m \times n$ Matrizen $\quad \mathbb{R}^{1\times 1} \simeq \mathbb{R}$ (Skalar α)

$0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $m \times n$ - Nullmatrix (od. Nullvektor)

$D := \begin{pmatrix} d_{11} & & & \\ & d_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix}$ Diagonalmatrix (immer quadratisch)

$= \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$

$I = I_n := \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1)$ $m \times n$ Einheitsmatrix

$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ & & \times & \cdots & \cdots & \times \\ & & & \times & \cdots & \times \\ & & & & \times & \times \\ & & & & & \times \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix

umgekehrt: untere Dreiecksmatrix

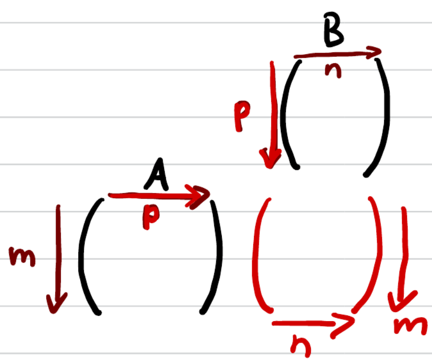
Rechnen mit Matrizen & Vektoren !

$\left.\begin{array}{l} A+B,\ A-B \\ \alpha \cdot A,\ \frac{A}{\alpha} \end{array}\right\}$ erfolgt Komponentenweise

Multiplikation $A \cdot B$

Sei A eine $m \times p$ Matrix muss B eine $p \times n$ Matrix sein.

$$\boxed{(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}}$$



Regeln & Eigenschaften

Satz 2.1 Rechenregeln

$\forall$ bedeutet „für alle"

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$\forall A, B, C$ Matrizen über $\mathbb{K}$

von passender Grösse

$$(\alpha\beta) A = \alpha(\beta A)$$

$$(\alpha A) B = \alpha (A B)$$

$$(\alpha+\beta) A = (\alpha A) + (\beta A)$$

$$\alpha (A+B) = (\alpha A) + (\alpha B)$$

$$A + B = B + A \leftarrow$$ Matrixaddition ist kommutativ

$$(A+B) + C = A + (B+C) \leftarrow$$ Matrixaddition ist assoziativ

$$(AB) C = A (BC) \leftarrow$$ Matrixmultiplikation ist assoziativ

$$\left.\begin{aligned}(A+B) C &= (AC) + (BC) \\ A(B+C) &= (AB) + (AC)\end{aligned}\right\}$$ Distributivgesetze

! Matrixenmultiplikation ist nicht kommutativ.

Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$. Wir sagen zwei Matrizen kommutieren wenn $AB = BA$ (dies setzt quadratische Matrizen voraus).

Es gilt $I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$.

Bei den Matrixen gibt es Nullteiler, so dass

$$\boxed{A \neq 0,\ B \neq 0 \quad \text{und} \quad AB = 0}$$

Weiter gilt:

$A \neq 0$, $AB = AC$ so dass $B \neq C$

$A^2 = 0 \not\Rightarrow A = 0$

Spezialfall Matrix · Vektor ⇒ LGS (Ch.1)

Sei A $m \times n$ Matrix

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ n-Vektor

Das Produkt Av ist ein m-Vektor

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$$

LGS wird nun zu

$$\boxed{Ax = b}$$

rechten Seite

Koeff.matrix

Vektor der Unbekannten (Lösungsvektor)

kann bildlich als Rotation gesehen werden.

Wichtige Eigenschaft: Linearität

$$A(\overset{\text{Skalar}}{\alpha} \overset{\text{Vektoren}}{u + v}) = \alpha A u + A v$$

Hat ein LGS ℓ rechte Seiten b und ℓ Lösungen x, so kann man es darstellen als:

$$AX = B$$

Spaltensichtweise

$$\overset{A}{\left(\underset{\text{Spaltenvektor}}{s_1} \,\middle|\, s_2 \,\middle|\, s_3 \,\middle|\, \cdots \right)} \begin{pmatrix} v \end{pmatrix} = \overset{\text{Skalar}}{v_1} \cdot \overset{\text{Vektor}}{\vec{s}_1} + v_2 \cdot \vec{s}_2 + \ldots + v_n \cdot \vec{s}_n$$

LK: Linearkombination der Spalten von a

Das LGS $Ax = b$ ist lösbar, wenn b eine LK der Spalten von A ist.

Beweis: $Ax = x_1 s_1 + \ldots + x_n s_n$

Wenn A eine $m \times n$ Matrix ist und B eine $n \times p$ Matrix so gilt:

$$AB = (Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_p)$$

od. $$AB = \left(Ab_1 \,\middle|\, Ab_2 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, Ab_p \right)$$

ist e_j der j-te Kolonnenvektor der Einheitsmatrix, so gilt:

$$Ae_j = a_j \quad \text{und} \quad (AB)e_j = A(Be_j) = Ab_j$$

Zeilensichtweise

$$A = \begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_m} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{b_2} \\ \vdots \\ \underline{b_n} \end{pmatrix}$$

Betrachten wir die Zeilenvektoren einer $m \times n$ Matrix A und $n \times p$ Matrix B und is $\underline{y} = (y_1, \dots y_n)$ ein Zeilenvektor.

$$\underline{y} B = y_1 \cdot \underline{b_1} + y_2 \underline{b_2} + \dots + y_n \cdot \underline{b_n} \qquad \text{und} \qquad e_i^T B = \underline{b_i}$$

wie üblich i-Zeilenvektor von I_n

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{a_1} B \\ \hline \underline{a_2} \cdot B \\ \hline \underline{a_3} \cdot B \\ \hline \vdots \\ \hline \underline{a_m} \cdot B \end{pmatrix}$$

Ist A eine $m \times n$ Matrix, so heisst die $n \times m$ Matrix A^T mit $(A^T)_{ij} :\equiv (A)_{ji}$, die zu A transponierte Matrix.

Ist A eine komplexe Matrix, so ist $\bar{A}$ die komplex-konjugierte Matrix und $A^H (= \overline{A^T} = \bar{A}^T)$ die konjugiert-transponierte / Hermitesch-transponierte Matrix.

Eine Matrix ist symetrisch wenn $A^T = A$.
Eine Matrix ist Hermitesch wenn $A^H = A$. ← diagonal Elemente sind reell
Eine Matrix ist schiefsymetrisch wenn $A^T = -A$. ← diagonal Elemente sind 0.

immer quadratisch

$\|x\|$ ist die Länge eines Vektors. Dies kann in $\mathbb{R}^2$ einfach mit Pytagoras berechnet werden. Daraus leitet sich dann der Cosinussatz ab:

$$\|y-x\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\|\cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|y-x\|^2}{2\,\|x\|\,\|y\|}$$

Wenn wir das Skalarprodukt definieren,
auch Inneres Produkt genannt

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_m y_m$$

erhalten wir $\cos\varphi = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$. Allgemein $\cos\varphi \; \dfrac{\operatorname{Re}\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Genau ist das Skalarprodukt definiert als:

$$\boxed{\langle x, y\rangle = x^H y = \sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k \, y_k}$$

Es gelten die Eigenschaften:
- Satz 2.9 (2-17)
- Korollar 2.10 (2-18)

Das Skalarprodukt kann nun auch zur bestimmung der Länge oder 2-Norm oder Euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{E}^n$ gebraucht werden.

$$\|x\| :\equiv \left|\sqrt{\langle x, x\rangle}\right|$$

Schwarzsche Ungleichung

Es gilt $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ wobei das Gleich nur gilt, wenn y ein Vielfaches von x ist.

Wenn zwei Winkel senkrecht zueinander stehen ($x \perp y$) so ist $\langle x,y\rangle = 0$.

Es gibt auch andere Normen p-Norm wobei gilt:

$$\|x\|_p :\equiv \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{wobei } 1 \leq p \leq \infty$$

Das äussere Produkt

Das innere Produkt von m-Vektor x und n-Vektor y ist nur definiert wenn $m=n$. Das äussere Produkt $x \cdot y^H$ ist jedoch immer definiert, es bildet eine $m \times n$ Matrix. Diese Matrix hat genau dann Rang 1, wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$

Orthagonale Projektion

Die orthagonale Projektion $P_y x$ von x auf y ist gegeben durch:

$$\underbrace{P_y}_{\text{Projektions-matrix}} x :\equiv \frac{1}{\|y\|} \cdot y y^H x = \overbrace{u\, u^H}^{\text{äusseres Produk der Einheitsvektoren von } y} x$$

$u^H x$: inneres Produkt (Skalar)

$u = \frac{y}{\|y\|}$ Einheitsvektor von y

P_y ist immer Hermitesch, idempotent.

Matrizen als lineare Abbildung

Ist eine Matrix $A \in E^{m \times n}$, so kann man die mit A bezeichnete Abbildung

$$A: E^n \mapsto E^m, \quad x \mapsto Ax$$

wird abgebildet auf

betrachten. Dabei gilt $A(\gamma x + \tilde{x}) = \gamma Ax + A\tilde{x}$. Dies ist charakteristisch für eine lineare Abbildung.

Während der Definitionsbereich der Abbildung A immer der ganze Raum E^n ist, ist das Bild eine Teilmenge von E^m. Es ist aber immer $0 \in$ im A, denn $A0 = 0$.

Image

$$\text{im } A = \{ Ax \in \mathbb{R}^m \mid x \in \mathbb{R}^n \}$$
$$\text{kern } A = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$$

Die Projektionsmatrix $n \times n$ P_y bildet sich in sich selbst ab.

$$\text{im } P_y = \{ \alpha y \mid \alpha \in \mathbb{E} \}$$

Inverse

Eine quadratische Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, so dass

$$A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$$

Dies ist nur der Fall wenn die Matrix A regulär ist, d.h. Rang $A = n$.

Ist A regulär so hat $Ax=b$ eine Eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$.

Wir können die Inverse wie folgt berechnen:

$$n\Big[\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \boxed{A} & \boxed{I_n} \end{array}\right)}_{2n}$$

Elementare Zeilenoperationen $\Longrightarrow$ $\left(\begin{array}{c|c} \underline{\boxed{I_n}} & \boxed{A^{-1}} \end{array}\right)$

Pivots stehen alleine

Speziall Fall 2×2 Matrix:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\overbrace{ad-bc}^{\text{Determinante}} \neq 0$

Dann gilt $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Orthogonal & Unitär

Eine Matrix ist orthagonal wenn $A^H A = I_n$, d.h. $A^H = A^{-1}$
Eine Matrix ist unitär wenn $A^T A = I_n$, d.h. $A^T = A^{-1}$

Diese Matrizen sind wichtig, da ihre Abbildungen Längen- und winkeltreu sind. Sie werden oft für Rotationen und Spiegelungen gebraucht.

Bsp. Givens-Rotation

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Drehachse bleibt fest

Führt zu einer Rotation um ϕ in Gegenuhrzeigersinn in der Ebene die durch die 1-ste und 3-te Koordinatenachse aufgespannt wird.

Householder-Spiegelung

$$Q_v = I - 2P_u \quad \text{wo } P_v := uu^T$$

Kolonnenvektor

Führt zu einer Spiegelung an einer Hyperebene.

Permutationsmatrix

Eine 1 pro Zeile & Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

vertauschen

PA permutation von Zeilen von A

AP permutation von Spalten von A

Strukturierte Matrizen

untere/obere Bidiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Tridiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bandmatrix

variable Bandbreiten

obere Bandbreite = 2

untere Band. = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hessenberg Matrizen

hat untere Bandbreite = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Blockmatrix

Wir können eine Matrix A in Blöcke aufteilen

$$A = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\quad l \quad} \\ k \uparrow & \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline A_{31} & A_{32} \end{array}\right) \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \xrightarrow{\quad j \quad} \\ l \uparrow & \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right) \end{array}$$

Das Produkt C von AB kann nun Block weise berechnet werden, sofern die l-te Blockkolonne von A so breit wie die l-te Blockzeile von B hoch ist.

$$C_{kj} = \sum_{i=0}^{l} A_{ki} B_{ij}$$

Dies ist nützlich, da solche Berechnungen parallel ablaufen können.

3. LR-Zerlegung

Die LR-Zerlegung ist ein Verfahren zur Lösung eines LSG. Sie ist besonders effektiv wenn mehrere rechte Seiten b, die gleiche Koeffizientenmatrix A haben.

Die LR-Zerlegung basiert darauf, dass die elementaren Zeilenoperationen einer Matrix-multiplikation entsprechen.

Das Vertauschen von Zeilen entspricht der Multiplikation mit einer Permutationsmatrix P.

Das Addieren/Subtrahieren kann mit einer unteren Dreiecksmatrix L dargestellt werden. Das Resultat von LA ist R

$$L = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\ell_{43} & 1 & 0 & 0 \\ * & * & -\ell_{53} & * & 1 & 0 \\ * & * & \underbrace{-\ell_{63}}_{\text{Faktoren } \ell_{kj}\ (j<k)} & * & * & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Substrahieren eines vielfachen ℓ_{kj} der Zeile j, von der Zeile k.

Bei diesen Operationen wird die rechte Seite b nicht mitbehandelt. Es gilt

$$\boxed{PA = LR}$$

Sei $PA = LR$ die LR-Zerlegung von A, so muss

$$\boxed{Lc = Pb \quad \text{und} \quad Rx = c}$$

Vorwärtselimination Rückwärtselimination

Wenn nun mehrere Systeme mit der gleichen Koeffizientenmatrix gelöst werden und variirender rechten Seite b, so ist die LR-Zerlegung effizienter.

Es sollten möglichst grosse Pivots gewählt werden.
(Rundungsungenauigkeit)

LR-Zerlegung ablauf:

1. LR-Zerlegung für A
2. Löse $Lc = Pb$ nach c
3. Löse $Rx = c$ nach x

4. Vektorräume

Vektorräume sind Mengen, deren Elemente sich addieren und mit einem Skalar multiplizieren lassen.

Körper $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$

Def. Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ist eine <u>nichtleere</u> Menge auf der eine Addition

$$+: x, y \in V \longmapsto x + y \in V$$

und eine Skalarmultiplikation

$$\cdot: \alpha \in \mathbb{K}, x \in V \longmapsto \alpha x \in V$$

definiert sind. Folgende Axiome gelten:

$(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe

V1.	$x+y=y+x$	$\forall x,y \in V$
V2.	$(x+y)+z = x+(y+z)$	$\forall x,y,z \in V$
V3.	es gibt $0 \in V$ so dass $x+0=x$	$\forall x \in V$
V4.	zu jedem x gibt es $-x$ so dass $x+(-x)=0$	
V5.	$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$	$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x,y \in V$
V6.	$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$	$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V$
V7.	$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$	$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V$
V8.	$1x = x$	$\forall x \in V$

Beispiele für Vektorräume:

$\mathbb{K}^n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Bsp: $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathbb{K}^{m \times n}, \mathbb{K}^{\infty}, \mathbb{K}^{\infty \times \infty}$

$P_d(\mathbb{K}) = \{$Polynome von Grad $\leq d$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}\}$

$P(\mathbb{K}) = \{$Polynome von beliebigem Grad mit Koeffizienten in $\mathbb{K}\}$

Unterräume

Ein Unterraum U ist eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$. U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

diese drei Bedingungen gelten für jeden Unterraum
! für Beweis von $U \subseteq V$

Jeder Unterraum U ist auch ein Vektorraum.

Bsp. Sei $V = \mathbb{R}^3$ so gibt es folgende Unterräume:

- V selber
- Ebene durch Ursprung
- Gerade durch Ursprung
- 0

Recap: Matrizen als lineare Abbildungen

Sei A eine Matrix $m \times n$ über $\mathbb{K}$. So ist A eine Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$.

Das Bild von A ist der Wertebereich der Abbildung $A: \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^m$

$$\text{im } A = \{ Ax \in \mathbb{K}^m \mid x \in \mathbb{K}^n \}$$

Der Kern von A ist die Menge aller $x \in \mathbb{K}^n$ die auf 0 abgebildet werden.

$$\ker A = \{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0 \}$$

$\ker A$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^n$
$\text{im } A$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^m$

Erzeugendesysteme

Ein Vektor der Form $\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$ mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{K}$ ist eine Linearkombination (LK) der Vektoren $v_1, \ldots, v_m$.

Die Menge $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \underbrace{\{\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m : \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{K}\}}_{\text{Menge aller LK von } v_1, \ldots, v_m}$

heisst der von $v_1, \ldots, v_m$ aufgespannte Unterraum oder die Lineare Hülle von $v_1, \ldots, v_m$.

Sei $S \subseteq V$, so ist der von S aufgespannte Unterraum die Menge

$$\operatorname{span} S = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \gamma_k s_k \ : \ m \in \mathbb{N}, \gamma_\cdot \in \mathbb{K}, s \in S \right\}$$

immer endliche Summen.

Die Menge span S ist ein Erzeugendensystem.

Falls $w \in \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ so gilt

$$\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m, w\} = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_m\}$$

da w eine LK von $v_1, \dots, v_m$ ist.

Lineare Unabhängigkeit

l.u.

Eine Menge Vektoren $v_1, \dots, v_m$ ist linear unabhängig falls für alle Skalare $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \dots + \gamma_m v_m = 0 \implies \gamma_1, \dots, \gamma_m = 0 \qquad \text{triviale LK}$$

D.h. kein Vektor ist eine LK der anderen Vektoren.

l.a.

Umgekehrt wären die Vektoren linear abhängig.

Eine Teilmenge $S \subseteq V$ ist l.u., fall alle endlichen Teilmengen von S l.u. sind.

Falls $v_1, \dots v_m \in V$ l.u. sind und $v_{m+1} \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ dann ist auch $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ l.u.

Basis und Dimension

Ein Erzeugendensystem ist nicht optimal, wenn ein Vektor davon eine LK der anderen Vektoren ist. Das optimale Erzeugendensystem ist so klein wie möglich und wird Basis genannt.

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so gibt es für jeden $v \in V$ eindeutige Koeffizienten $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k$$

Diese Koeffizienten ξ_k heissen Koordinaten von v bezüglich der Basis. Der Vektor $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ heisst Koordinatenvektor.

Bsp. $V = \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- v hat Koordinatenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standartbasis $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d.h. $1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 = v$

Die Spalten einer $n \times n$ Matrix bilden die Basis von $\mathbb{K}^n$, wenn die Matrix regulär ist. (Rang = n)

Gibt es in einem Vektorraum $\neq \{0\}$ ein endliches Erzeugendensystem, so besitzt es eine Basis, die Teilmenge des Erzeugendensystem ist.

Jede Basis besteht aus der selben Anzahl von Vektoren. Diese Anzahl der Basisvektoren nennt man die Dimension von V und wird mit $\dim V$ bezeichnet.
Der Nullvektorraum $\{0\}$ hat Dimension Null.

! Der Körper $\mathbb{K}$ ist entscheidend !

- $V = \mathbb{C}$ hat Dim 1 als VR über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (Basis: $z = x + iy$)

  hat Dim 2 als VR über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Basis: $1, i$)

Ist $v_1, \dots, v_m$ ein Erzeugendensystem von V und sind $w_1, \dots, w_n \in V$ linear unabhängig, so ist $n \leq m$.

Jede Menge l.u. Vektoren aus V, lassen sich zu einer Basis ergänzen.

Ein Vektorraum V ist endlich-dimensional, falls V ein endliches Erzeugendensystem /Basis hat. Ansonsten ist V unendlich-dimensional.

Komplementäre Unterräume

Zwei Unterräume $U, U' \subseteq V$ heissen komplementär, wenn es zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $u \in U$, $u' \in U'$ gibt, so dass $u + u' = v$. Wir schreiben $V = U \oplus U'$ und nennen V die direkte Summe von U und U'. Allgemein: $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$.

Bsp. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad U_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Sei V ein Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis davon, so gilt:

$$V = \underbrace{\operatorname{span}\{v_1\}}_{U_1} \oplus \underbrace{\operatorname{span}\{v_2\}}_{U_2} \oplus \dots \oplus \underbrace{\operatorname{span}\{v_n\}}_{U_n}$$

Basiswechsel

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$ mit der Basis $b_1, \dots, b_n$. So können wir alle $v \in V$ bezüglich der Basis darstellen. Es gibt aber Fälle wo es besser wäre die Vektoren bezüglich einer anderen Basis darzustellen. In diesen Fällen brauchen wir einen Basiswechsel.

Sei $b_1', \dots, b_n'$ die neue Basis, so lässt sich jeder Basisvektor bezüglich der alten Basis darstellen.

$$b_k' = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ik} \, b_i \quad \text{für } k = 1, \dots, n$$

Wir definieren dann $T(\tau_{ik}) \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ und

Zeile ↗ ↖ Spalte

nennen T die Transformationsmatrix des Basiswechsels oder Basiswechselmatrix. T ist immer regulär!

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

Eine Spalte k sind die Koordinaten von b_k' bezüglich der alten Basis.

$$T = \underbrace{\left(b_1 \middle| b_2 \middle| \cdots \middle| b_n \right)^{-1}}_{\text{bestimmen durch Gauss-Alg.}} \cdot \left(b_1' \middle| b_2' \middle| \cdots \middle| b_n' \right)$$

$\hookrightarrow BT = B'$

Koordinatentransform des Basiswechsels

Sei ξ der Koordinatenvektor bezüglich der alten Basis und ξ' bezüglich der neuen Basis. So gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= T \xi' \\ \xi' &= T^{-1} \xi \end{aligned}}$$

5. Lineare Abbildungen

Seien X und Y zwei VR über $\mathbb{K}$. So heisst eine Abbildung $F: X \to Y$ $(x \to F(x))$ linear, wenn

$$\begin{cases} F(x+\tilde{x}) = F(x) + F(\tilde{x}) \\ F(\gamma x) = \gamma F(x) \end{cases} \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in X \text{ und } \gamma \in \mathbb{K}.$$

Spezialfälle

- $X = Y = \mathbb{R}$ so ist $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion.
- $Y = \mathbb{K}$ so ist eine lineare Abbildung nach $\mathbb{K}$ ein lineares Funktional.
- X, Y Funktionenräume so ist F ein linearer Operator.
- $X = Y$ so ist F eine lineare Selbstabbildung.

Repetition Funktionen

Eine Funktion f (od. Abbildung) ordnet jedem $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zu.

Zielbereich ↙ Funktionswert

$$f: X \mapsto Y \qquad x \mapsto f(x)$$

Definitionsbereich ↗ Argument

$F(X)$ heisst Bild / Wertebereich

injektiv: $\forall x, x' \in X \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

surjektiv: $f(X) = Y$

bijektiv, sowohl surjektiv als auch injektiv
↳ hat Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x$

Matrixdarstellung einer linearen Abbildung

Eine bijektive, lineare Abbildung $F: X \mapsto Y$ heisst ein **Isomorphismus** und wird bezeichnet als $F: X \xrightarrow{\sim} Y$. Ist $X = Y$, so heisst sie **Automorphismus.**

Jeder Isomorphismus hat eine Inverse, die auch ein Isomorphismus ist.

⇒ Die Wahl einer Basis $b_1, \dots, b_n$ für X gibt einen **Koordinaten-Isomorphismus** (oder die Koordinatenabbildung)

$$k_X : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$$

$$x \longmapsto k_X(x) := \xi \qquad x = \xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n$$

Koordinatenvektor

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "k_X"', "\wr"] \arrow[dr, bend right] \arrow[dr, bend left] & Y \ni y := F(x) \\
\xi := k_X(x) \in \mathbb{K}^n \arrow[r, "A", "\text{lineare Abbildung}"'] & \mathbb{K}^m \ni \eta := k_Y(y) \arrow[u, "\wr", "k_Y"']
\end{tikzcd}$$

In Worten: Wir erhalten den Koordinatenvektor η von $y = F(x)$ indem die Abbildungsmatrix A auf ξ von x angewendet wird.

$$y = F(x) \longleftrightarrow \eta = A\xi$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ die Abbildungsmatrix ist.

ℓ-te Spalte ist der Koord.-Vektor von $F(b_\ell)$ bezüglich bezüglich Basis $c_1, \dots, c_m$

d.h. $F(b_\ell) = a_{1\ell}$

Wir können solche lineare Abbildungen verknüpfen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "G \circ F"'] & Y \arrow[r, "G"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutativ

Δ Reihenfolge wichtig

Sind $F: X \mapsto Y$ und $G: Y \mapsto Z$ lineare Abbildungen, so ist auch $G \circ F$ linear. Seien A, B die Abbildungsmatrizen zu F, G, so hat $G \circ F$ die Abbildungsmatrix BA.

Ist $F: X \xrightarrow{\sim} Y$ ein Isomorphismus mit Abbildungsmatrix A, so ist A regulär und A^{-1} die Abbildungsmatrix von $F^{-1}: Y \xrightarrow{\sim} X$.

$\Rightarrow$ ist A regulär, so ist F ein Isomorphismus

$\boxed{\text{Sei } F: X \longrightarrow Y \text{ eine lineare Abbildung}}$

Ist U ein Unterraum von X, so ist $F(U) := \{F(x) : x \in U\}$ ein Unterraum von Y.

Bild von U durch F

⚠ $F^{-1}(W)$ bedeutet nicht, dass F bijektiv ist

Ist W ein Unterraum von Y, so ist $F^{-1}(W) := \{x \in X : F(x) \in W\}$ ein Unterraum von X.

Urbild von W durch F

Die Abbildungsmatrix bei Koordinatentransformation

Seien X, Y VR/$\mathbb{K}$ mit $\dim X = n$, $\dim Y = m$

$F: X \longrightarrow Y$ eine lineare Abbildung
$x \longrightarrow y$

$b_1, \dots, b_n$ eine alle Basis von X und
$b_1', \dots, b_n'$ die neue Basis.

$c_1, \dots, c_m$ eine alle Basis von Y und
$c_1', \dots, c_n'$ die neue Basis.

$A(a_{k,\ell})$ die Abbildungsmatrix von F bezüglich der alten Basis.

$A'(a'_{k,\ell})$ die Abbildungsmatrix von F bezüglich der neuen Basis.

d.h. $F(b_\ell) = \sum_{k=1}^{m} a_{kl}\, c_k$ und $F(b'_\ell) = \sum_{k=1}^{m} a'_{kl}\, c'_k$, $\ell = 1, \dots, n$.

$k_X : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$	Koordinatendarstellung	Basis	$b_1, \dots, b_n$
$k'_X : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$	"	"	$b'_1, \dots, b'_n$
$k_Y : Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^m$	"	"	$c_1, \dots, c_m$
$k'_Y : Y \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^m$	"	"	$c'_1, \dots, c'_m$

$T = (\tau_{i\ell})$ Basiswechselmatrix für X
$S = (\sigma_{jk})$ Basiswechselmatrix für Y

d.h. $b'_\ell = \sum_{i=1}^{n} \tau_{i\ell}\, b_i \qquad l = 1, \dots, n$

$c'_k = \sum_{j=1}^{m} \sigma_{jk}\, c_j \qquad k = 1, \dots, m$

Also $A, A' \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

$T \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$

$S \in \mathrm{Mat}_{m \times m}(\mathbb{K})$

Wir haben das kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "A"] & & & \mathbb{K}^m \\
& X \arrow[ul, "k_x"'] \arrow[dl, "k'_x"] \arrow[r, "F"] & Y \arrow[ur, "k_y"] \arrow[dr, "k'_y"'] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, "T"] \arrow[rrr, "A'"'] \arrow[uurrr, bend left, "AT"] \arrow[uurrr, bend right, "SA'"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, "S"']
\end{tikzcd}
$$

alte Basis

neue Basis

Das Diagram kann auch für Vektoren erstellt werden.

Seien ξ Koord. Vektor von x zur alten Basis

ξ' Koord. Vektor von x zur neuen Basis

η Koord. Vektor von y zur alten Basis

η' Koord. Vektor von y zur neuen Basis

Wir wissen bereits

$$\eta = A\xi \iff F(x) = y \iff \eta' = A'\xi'$$

so wie $\xi = T\xi'$ und $\eta = S\eta'$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= SA'T^{-1} \\ A' &= S^{-1}AT \end{aligned}}$$

Spezialfall: $X \to Y$, $F: X \to X$ eine lineare Selbstabbildung
$T = S$

z.Bsp.: Spiegelung
Rotation

In diesem Fall nennen wir B die Abbildungsmatrix bezüglich der neuen Basis (statt A')

Dann haben wir $A = TBT^{-1}$

Die $n \times n$ Matrizen A & B heissen **ähnlich**, falls es eine reguläre Matrix T gibt mit $A = TBT^{-1}$

(wichtig für „perfekte" Abbildungsmatrix)

Wie weit können wir die Abbildungsmatrix durch geeignete Basen vereinfachen?

- $X = Y$: Ch. 9.
- $X \neq Y$: einfach, denn wir können zwei Basen wählen. (künstlich)

Sei $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung, $\dim X = n$, $\dim Y = m$, $\text{Rang } F = r$. Dann besitzt F für geeignete Basen von X, Y die Abbildungsmatrix:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Kern, Bild und Rang für lineare Abbildungen

Sei $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung

Der Kern von F ist $\ker F = \{x \in X : F(x) = 0\}$ ist ein Unterraum von X.

F ist injektiv $\Leftrightarrow \ker F = \{0\}$

Das Bild von F ist $\text{im } F \{F(x) : x \in X\}$ ist ein Unterraum von Y.

F ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{im } F = Y$

⚠ F^{-1} ist Urbild nicht Inverse

Zusammenhang mit LGS

Sei $A \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ eine lineare Abbildung $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

So ist $\ker A$ = Lösungsmenge von $Ax = 0$

$\text{im } A$ = Menge aller $b \in \mathbb{K}^m$ so dass $Ax = b$ lösbar ist.

Zusammenhang mit l.u. und Erz. Sys.

Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{K})$

So gilt $\ker A = \{0\} \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ sind l.u.

$\dim \{0\} = 0$

$\operatorname{im} A = \mathbb{K}^m \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n$ sind erzeugen $\mathbb{K}^m$

Seien X, Y endlich-dimensionale VR über $\mathbb{K}$ und sei $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung.

Dimensionsformel / Rangsatz: $\dim X = \dim(\ker F) + \dim(\operatorname{im} F)$

Der Rang von der linearen Abbildung F ist: $\dim(\operatorname{im} F)$

Dimensionssatz $\Rightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X - \dim(\ker F)$

Es gilt:

i) $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X$

ii) $F: X \to Y$ surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim Y$

iii) $F: X \to Y$ bijektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim Y = \dim X$

iv) $F: X \to X$ bijektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X$

↳ Automorphismus $\Leftrightarrow \ker F = \{0\}$

Zwei VR sind isomorph falls es einen Isomorphismus $F: X \xrightarrow{\sim} Y$ gibt. Wir schreiben $X \simeq Y$.
Endlich-dimensionale VR sind nur isomorph wenn sie den selben Rang haben.

↳ Isomorphismus & Dimension sind die einzigen Invarianten von endlich-dimensionalen VR.

Weiter gilt für $F: X \to Y$ und $G: Y \to Z$:

i) $\text{Rang}(G \circ F) \leq \min(\text{Rang } F, \text{Rang } G)$

ii) G injektiv $\Rightarrow \text{Rang}(G \circ F) = \text{Rang } F$

iii) F surjektiv $\Rightarrow \text{Rang}(G \circ F) = \text{Rang } G$

Matrizen als lineare Abbildungen

Sei $A = (a_1 | \dots | a_n) \in \text{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$, so kann A auch als lineare Abbildung aufgefasst werden.

$$A: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

Bild von A auch Spaltenraum	Kern von A auch Nullraum
$\text{im } A = \{Ax : x \in \mathbb{K}^n\} = \text{span}\{a_1 \dots a_n\} =: \mathcal{R}(A)$	$\ker A = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\} =: \mathcal{N}(A)$

$Ax = b$ lösbar $\Leftrightarrow$ $b \in \text{im } A$

Eine allfällige Lösung ist eindeutig $\Leftrightarrow$ $\ker A = \{0\}$

⚠ im A entscheidet Lösbarkeit
ker A entscheidet Eindeutigkeit

Bestimmung einer Basis von ker A

1) A zur Zeilenstufenform
2) Frei Variablen finden als Parameter
3) Schreibe die allg. Lösung von $Ax=0$ als LK von Vektoren mit den Parametern als skalare Koeff. Diese Vektoren bilden dann die Basis von ker A.

$\Rightarrow$ Pro freie Variable findet man ein Basiselement

$\Rightarrow$ $\dim(\ker A) = \#$ freie Variablen

Definition vom Rang

⚠

Ch. 1 Rang $A = \#$ Pivots

Rang $A = \dim(\text{im } A)$

Diese Def. stimmen überein! Weil:

$\dim(\ker A) = n - \#$ Pivots

$\dim(\text{im } A) = n - \dim(\ker A)$

Der Rang einer $m \times n$ Matrix A ist gleich:

i) der Anzahl Pivots

ii) der Dimension des Spaltenraums $\mathcal{R}(A) = \operatorname{im} A$

iii) der Dimension des Zeilenraums von A

Der Zeilenraum von A ist der Spaltenraum von A^T:

$$\mathcal{R}(A^T) = \operatorname{im} A^T = \operatorname{span}\{\text{Zeilen von } A\}$$

$$\Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A^T = \underbrace{\text{Rang } A^H = \text{Rang } \bar{A}}_{\text{wenn } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$$

Bestimmung einer Basis von im A

1) A zur Zeilenstufenform
2) Pivotspalten merken ← nicht gegausst
3) Die Spalten von A die Pivotspalten sind, bilden eine Basis von $\operatorname{im} A$.

⚠ Kern von A wird durch Gauss-Alg. beibehalten, sowie der Zeilenraum aber der Spaltenraum ändert sich.

Zauberzahlen m, n, r

Sei $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$ mit Rang $A = r$.

$$\boxed{\begin{aligned} \dim(\operatorname{im} A) &= \dim(\operatorname{im} A^T) = r \\ \dim(\ker A) &= n - r \\ \dim(\ker A^T) &= m - r \end{aligned}}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, wenn $\underline{r = \min\{m, n\}}$

↳ max. Rang

$r = n \iff \ker A = \{0\}$

$\iff$ die Spalten von A sind l.u.

$\iff$ die Zeilen von A sind erzeugend

$\iff A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist injektiv

$r = m \iff \ker A^T = \{0\}$

$\iff$ die Zeilen von A sind l.u.

$\iff$ die Spalten von A sind erzeugend

$\iff A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv

für $F: X \to Y$ $G: Y \to Z$

Sind F, G lineare Abbildungen so gilt:

i) $\text{Rang } FG \leq \min(\text{Rang } F, \text{Rang } G)$

ii) G injektiv $\Rightarrow \text{Rang } GF = \text{Rang } F$

iii) F surjektiv $\Rightarrow \text{Rang } GF = \text{Rang } G$

Affine Räume

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$, $U \subseteq V$ und $v_0 \in V$, so ist die Menge

$$v_0 + U = \{v_0 + u : u \in U\}$$

Bsp.

ein affiner Teilraum. Dies ist normalerweise kein Unterraum!

Seien X, Y VR über $\mathbb{K}$ und $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung, so ist
$y_0 \in Y$ $\quad H: X \to Y : x \longrightarrow y_0 + F(x)$ eine affine Abbildung.

Wenn $0 \neq y_0 \in Y$ und $x_0 \in X$ eine partikuläre Lösung von
$F(x) = y_0$ ist, dann ist die Lösungsmenge der affinen Teilmenge $x_0 + \ker F$.

6. Vektorräume mit Skalarprodukt

Idee: Wir wollen zwei Vektoren vergleichen, dafür kennen wir bereits die 2-Norm. Länge & Winkel sind dafür entscheidend und wir wollen dies nun auf abstrakte VR anwenden.

Dafür brauchen wir geordnete Körper ($\alpha \leq \beta$, etc.). Daher schauen wir nur den Körper $\mathbb{E}$ an (Körper über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Eine Norm im VR V über $\mathbb{E}$ ist eine Funktion

$$\|\cdot\| : V \longmapsto \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|$$

mit den Eigenschaften:

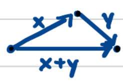
müssen gezeigt werden

N1) positiv definit: $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

N2) homogen: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{E}$

N3) Dreiecksungleichung: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in V$



Ein VR mit einer Norm, nennt man einen normierten VR.

Bsp. euklid. Norm / 2-Norm:

$V = \mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

$= \sqrt{x^T \cdot x}$

$V = \mathbb{C}^n$: $\|u\|_2 = \sqrt{u^H \cdot u}$

2-Norm

Bsp. Maximum Norm:

$$V = \mathbb{P}_n^{[0,1]} = \begin{cases} p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \end{cases}$$

$$\|p\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |p(x)|$$

N2) $|\alpha\, p(x)| = |\alpha| \cdot |p(x)| \Rightarrow \max |\alpha\, p(x)| = \alpha \cdot \max |p(x)|$

N3) $\|p+q\|_\infty \le \|p\|_\infty + \|q\|_\infty$ ← zu zeigen

$$\|p+q\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |p(x) + q(\tilde{x})| \le \max_{0 \le x \le 1} \left(|p(x)| + |q(x)| \right)$$

$$\le \max_{0 \le x \le 1} |p(x)| + \max_{0 \le \tilde{x} \le 1} |q(\tilde{x})|$$

verschiedene x $\Rightarrow$ höheres max

$$= \|p\|_\infty + \|q\|_\infty$$

Bsp. p-Norm:

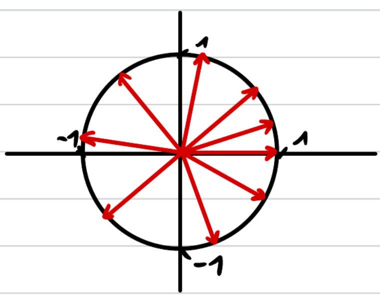
↳ 2-Norm ist eine p-Norm

$V = \mathbb{E}^n \quad p \in \mathbb{R},\ p \ge 1$

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Eine Einheitskugel ist die Menge aller $v \in V$, so dass $\|v\| = 1$ ergibt. (Kann interessante Figuren ergeben)

Bsp. $V = \mathbb{R}^2 \quad \|x\|_2$



Ein Skalarprodukt im VR V über $\mathbb{E}$ ist eine Funktion:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{E} \quad \leftarrow \text{kann komplex sein}$$

mit den Eigenschaften:

S1) Linear im zweiten Faktor: $\forall x,y,z \in V, \ \alpha \in \mathbb{E}$

$\langle x, y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$

$\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \cdot \langle x, y \rangle$

S2) Symetrie wenn $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, hermitesch wenn $\mathbb{E} = \mathbb{C}$

$\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle \qquad \langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$

S3) Positiv definit: $\langle x,x \rangle \geq 0$

$\langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

Wenn $\dim V < \infty$, nennt man V auch:	• $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ euklid. VR / orthagonaler VR • $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ unitärer VR

Wir können die Addition und Skalarmultiplikation kombinieren.

2. Faktor: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle \overset{S1}{=} \langle x, \alpha y \rangle + \langle x, \beta z \rangle \overset{S1}{=} \alpha \langle x,y \rangle + \beta \langle x,z \rangle$

1. Faktor: $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle \overset{S2}{=} \overline{\langle z, \alpha x + \beta y \rangle} \overset{S1}{=} \overline{\alpha}\, \overline{\langle z,x \rangle} + \overline{\beta}\, \overline{\langle z,y \rangle} \overset{S2}{=} \overline{\alpha} \langle x,z \rangle + \overline{\beta} \langle y,z \rangle$

Ist $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, gilt $\overline{\alpha} = \alpha$ & $\overline{\beta} = \beta$ d.h. das Skalarprodukt ist auch im ersten Faktor linear.

Bsp. Euklidisches Skalarprodukt: $V = \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j$$

Die 2-Norm von $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|x\|_2 = \sqrt{\underbrace{\langle x, x \rangle}_{\hookrightarrow \text{ eukl. SP}}}$

Euklid. SP $V = \mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = x^H y = \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} \cdot y_j$$

Die 2-Norm von $x \in \mathbb{C}^n$ gilt: $\|x\|_2 = \sqrt{\underbrace{\langle x, x \rangle}_{\hookrightarrow \text{ eukl. SP}}}$

Sei V ein VR über $\mathbb{E}$ mit SP. Die induzierte Norm ist definiert wie folgt: $\|.\| : \underline{V \longrightarrow \mathbb{R}}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Daher $x^H y$, damit $\langle x, y \rangle$ reel wird!

Sei V ein VR über $\mathbb{E}$ mit SP und $\|.\|$ die vom SP induzierte Vektornorm in V.

So ist die Länge eines $v \in V$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Und der Winkel $\varphi = \sphericalangle(x, y)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ist

für $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ $\quad \sphericalangle(x, y) = \arccos \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

für $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ $\quad \sphericalangle(x, y) = \arccos \dfrac{Re(\langle x, y \rangle)}{\|x\| \cdot \|y\|}$

$$\Longrightarrow \langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \varphi$$

Zwei Vektoren x, y sind orthagonal wenn $\langle x,y\rangle = 0$.
Notation $x \perp y$

Zwei Mengen $M, N \subseteq V$ sind orthagonal falls
$\forall x \in M \quad \forall y \in N \quad \langle x,y\rangle = 0$. Notation $M \perp N$.

Dies wird z.Bsp für JPEG verwendet.

Ein Skalarprodukt kann gewichtet sein.

Sei $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix und $w_{jj} > 0, \forall j = 1 \dots n$
so ist $\langle x,y\rangle_W = x^H W y$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei V ein VR über $\mathbb{E}$ mit Skalarprodukt.

$\forall x,y \in V, \quad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle$

Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x und y l.a. sind.

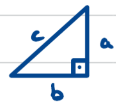
Der Beweis dazu ist auf S.17 in den Notizen, dazu auch der Beweis für die Dreiecksungleichung.

Pytagoras

$\|x\| = \sqrt{\langle x,y\rangle}$

Sei V ein VR über $\mathbb{E}$ mit SP $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und induzierter Norm $\|\cdot\|$.

$x,y \in V \quad x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$



$a^2+b^2=c^2$

Beweis: $\|x \pm y\|^2 = \langle x\pm y, x\pm y\rangle = \langle x,x\rangle \pm \overset{x\perp y}{\cancel{\langle x,y\rangle}} \pm \overset{y\perp x}{\cancel{\langle y,x\rangle}} + \langle y,y\rangle$

$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \square$

Bmk. Wenn wir $\|\cdot\|$ schreiben meinen wir die vom S.P induzierte Norm.

Orthonormalbasen

Eine Orthonormalbasis besteht aus orthogonalen Basisvektoren der Länge 1. Diese Basen bringen viele Vorteile, so wird es z.Bsp. sehr einfach einen Basiswechsel durch zu führen.

Wenn $\dim V = n$, dann bilden n paarweise orthogonale, von 0 verschiedene Vektoren eine Basis von V.

Def. Eine Basis ist orthogonal falls $\langle b_l, b_k\rangle = 0 \quad \forall k,l,\ k \neq l$

Eine Basis ist zusätzlich wenn alle Basisvektoren die Länge 1 haben. $\langle b_k, b_k\rangle = 1$

In diesem Fall: $\langle b_l, b_k\rangle = \underbrace{\delta_{l,k}}_{\text{Kronecker Delta}} \begin{cases} 1 & \text{falls } l=k \\ 0 & \text{falls } l \neq k \end{cases}$

Wir können eine orthogonale Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ normieren: $\tilde{b}_j = b_j \cdot \frac{1}{\|b_j\|}$

Hat V die Dimension n und ist $\{b_1 \dots, b_n\}$ eine orthonormale Basis so gilt für $\forall x \in V$:

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, x \rangle b_i}$$

D.h. die Koordinaten von x bezüglich der orthonormal Basis sind:

$$\boxed{\xi_k = \langle b_k, x \rangle_V, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T}$$

Parsevalsche Formel

Sei $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis in V.R. V mit S.P., und $x, y \in V$.

$$\xi_k := \langle b_k, x \rangle_V, \quad \eta_k := \langle b_k, y \rangle_V, \qquad k = 1, \dots, n$$

Dann: $\langle x, y \rangle_V = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi}_k \eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{E}^n}$

Folge: $\forall x, y \in V$, $\|x\|_V = \|\xi\|_{\mathbb{E}^n}$, $\underbrace{\measuredangle(x, y)}_{\text{in } V} = \underbrace{\measuredangle(\xi, \eta)}_{\text{in } \mathbb{E}^n}$, $\underbrace{x \perp y}_{\text{in } V} = \underbrace{\xi \perp \eta}_{\text{in } \mathbb{E}^n}$

Wenn die Basis in V orthonormal ist:

$$\boxed{\text{SP in } V = \text{Euklidisches SP in } \mathbb{E}^n}$$

Gram - Schmidt - Orthogonalisierungsverfahren

Seien $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq V$ l.u. Vektoren, berechne m neue Vektoren $\{b_1, \dots, b_m\} \subseteq V$.

$$b_1 := \frac{1}{\|a_1\|_V} \cdot a_1$$ (wir richten alle Vektoren an a_1 aus)

für $k = 2, \dots, m$: $$\tilde{b}_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle_V \, b_j$$

$$b_k := \frac{1}{\|\tilde{b}_k\|_V} \cdot \tilde{b}_k$$

Die Vektoren $b_1, \dots, b_m$ bilden nun eine orthonormalisierte Basis. Nach k-Schritten gilt: $\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_k\} = \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\}$.

In jedem VR mit SP V, $\dim V < \infty$, gibt es mindestens eine Orthonormalbasis.

Orthogonale Komplemente

Erinnerung: $U_1, U_2 \subset V$ heissen komplementär wenn $V = U_1 \oplus U_2$.

Sei V ein VR und $U \subset V$ ein U.R. So können wir einen orthonormale Basis für U finden $\{b_1, \dots, b_l\}$. Wir können diese Basis von U auf V erweitern $\{\underbrace{b_1, \dots, b_l}_{\text{orthonormal}}, \underbrace{a_{l+1}, \dots, a_n}_{\text{l.u.}}\}$. Führen wir ab a_{l+1} Gram-Schmidt aus, erhalten wir $\{\underbrace{b_1, \dots, b_l}_{U}, \underbrace{b_{l+1}, \dots, b_n}_{U'}\}$.

$U \oplus U' = V$ wobei $U \perp U'$

Wir nennen $U' := U^{\perp}$ das orthogonale Komplement vom Unterraum U.

$$U^{\perp} = \{ y \in V \mid y \perp U \}, \qquad U \perp U^{\perp}, \qquad V = U^{\perp} \oplus U$$

Ein wichtiges Beispiel für orthogonale Komplemente ist:

$V = \mathbb{E}^n$, sei $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{E}^n$

$$\begin{bmatrix} - a_1 - \\ - a_2 - \\ - a_3 - \\ \vdots \\ - a_n - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ x \\ | \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$a_1^H x = \langle a_1, x \rangle$

$Ax = 0 \iff x \perp$ alle Spalten von A^H

im Sinn des eukl. SP.

$$\boxed{x \in \mathcal{N}(A) \iff Ax = 0 \iff x \perp \mathcal{R}(A^H) \iff x \in \mathcal{R}(A^H)^{\perp}}$$

Fundamentale Untrräume

Für eine komplexe $m \times n$ Matrix mit Rang r gilt:

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^H)^{\perp} \subset \mathbb{E}^n \qquad \mathcal{N}(A^H) = \mathcal{R}(A)^{\perp} \subset \mathbb{E}^m$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^H) = \mathbb{E}^n \qquad \mathcal{N}(A^H) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^m$$

Die zwei Paare komplementärer Unterräume nennen wir die fundamentalen Unterräume der Matrix A.

Basiswechsel und Koordinatentransformation von Orthonormalbasen

Wenn T eine Basiswechselmatrix von B' nach B ist, so ist $T^{-1} = T^H$ falls B, B' orthonormale Basen sind. Weiter gilt $(T^H T)_{kl} = \delta_{kl} \Rightarrow T^H T = I_{n\times n} \Rightarrow T$ ist unitär.

⚠ Die Transformationsmatrix eines Basiswechsels zwischen Orthonormalbasen ist unitär bzw. orthogonal.

Bei einer solchen Basistransformation bleibt das SP. gleich und dem entsprechend auch die Norm und der Winkel.

Seien B, B' Orthonormalbasen von V und $x, y \in V$, $\xi = [x]_B$, $\eta = [y]_B$, $\xi' = [x]_{B'}$, $\eta' = [y]_{B'}$. Dann gilt:

$$\xi^H \eta = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{E}^n} = \langle \xi', \eta' \rangle_{\mathbb{E}^n} = \xi'^H \eta'$$

$$\|\xi'\| = \|\xi\| \quad \text{und} \quad \sphericalangle(\xi', \eta') = \sphericalangle(\xi, \eta)$$

Darstellung einer linearen Abbildung in Orthonormalbasen

$F: X \longrightarrow Y$ eine Abb. X, Y sind VR mit SP über $\mathbb{E}$.

X hat Orthonormalbasen B, B'
Y hat Orthonormalbasen D, D'

$$\underset{A}{\underset{\parallel}{[F]_{B,D}}} \quad \xleftrightarrow{?} \quad \underset{B}{\underset{\parallel}{[F]_{B',D'}}}$$

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & y \in Y \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "T^H"'] & \eta \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^H"'] \\
\xi' \in \mathbb{E}^n \arrow[r, "B"] \arrow[u, shift right, "T"'] & \eta' \in \mathbb{E}^m \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A = SBT^H \\ B = S^H A T \end{array}}$$

Bei einer Selbstabbildung $X = Y$ und $B = D$, $B' = D'$, ist $S = T$ und $A = TBT^H$, $B = T^H B T$.

Wenn F eine Selbstabbildung ist, dann gilt:

- A Hermitesch / reel symetrisch $\Leftrightarrow$
  B Hermitesch / reel symetrisch

- $A^H A = I \Leftrightarrow B^H B = I$

Bmk: Sei B eine Orthonormalbasis von VR. X, so ist $k_X : X \to \mathbb{E}^n$ die Koord. Abb. ein unitärer / ortho. Isomorphismus! Das ist genau die Parsevalsche Formel: $\langle x_1, x_2 \rangle_X = \langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{E}^n} = \langle k_X(x_1), k_X(x_2) \rangle_{\mathbb{E}^n}$

Orthogonale und unitäre Abbildungen

Unitäre /orth. Matrizen sind jene Darstellungsmatrizen von lin. Abbildungen, welche das SP erhalten, bzgl. Orthonormalbasen.

Seien X, Y VR mit SP. Eine lin. Abb. $F: X \to Y$ heisst unitär bzw. orthogonal falls:

$$\forall v, w \in X: \quad \langle v, w \rangle_X = \langle F(v), F(w) \rangle_Y$$

This is a rigid transformation. (Rotation or reflexion)

Es gilt:

1. F ist längentreu / isometrisch
2. F ist winkeltreu
3. $\ker F = \{0\}$, d.h. F ist injektiv

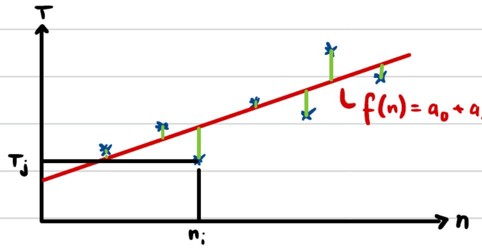
Wenn zusätzlich $n = \dim X = \dim Y < \infty$ so gilt:

4. F ist ein Isomorphismus
5. $\{b_1, \dots, b_n\}$ Orthonormalbasis von $X \Leftrightarrow$ $\{F(b_1), \dots, F(b_n)\}$ Orthonormalbasis von Y
6. F^{-1} ist unitär / orthogonal
7. Die Abbildungsmatrix A von F bzgl. Orthonormalbasen von X / Y ist unitär / orthogonal, d.h. $AA^H = I$.

Aus (7) folgt, dass A orthonormale Spalten hat.

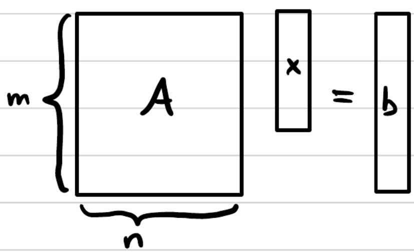
7. Methode der kleinsten Quadrate & QR-Zerlegung von Matrizen

Wenn wir viele Datenpunkte haben, wollen wir eine möglichst genaue Lineare Regression finden. So dass die Punkte * minimalen Abstand zur Gerade haben. In diesem Beispiel mussten wir a_0 und a_1 bestimmen.



Die Methode der kleinsten Quadrate

Sei $Ax = b$ ein LGS mit mehr Gleichungen als Variablen.

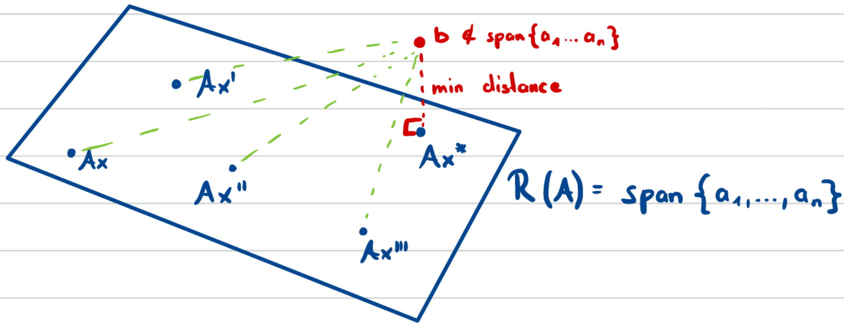


$\Rightarrow$ In der Regel nicht lösbar

So suchen wir $x \in \mathbb{E}^n$ so dass $\|Ax - b\|_2^2$ minimal ist.

D.h. wir suchen $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{E}^n} \|Ax - b\|_2^2$.

Im Normalfall befindet sich b nicht in $R(A)$.



Wir sehen dass die Distanz minimal ist, wenn der Vektor $Ax-b$ senkrecht zur Hyperebene steht.
↳ $R(A) = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$

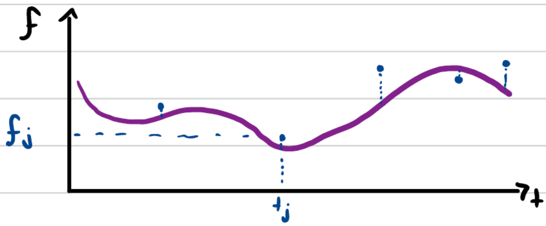
Die Normalgleichung: $x^* = \underset{x \in E^n}{\text{argmin}} \|Ax-b\|_2^2 \iff \underline{A^H A x^* = A^H b}$

Wenn Rang $A = n$ gilt $x^* = \underbrace{(A^H A)^{-1} A^H}_{\text{Moore-Penrose-Pseudoinverse } A^+ \,:\, A^+ A = I} b$

Wen Rang $A < n$, kann man die Pseudoinverse mit Singulärwertzerlegung finden (Ch. 11).

$A^+ A A^+ = A^+$ und $A A^+ A = A$ werden erfüllt wenn $Ax = b$ keine Lösung hat aber $\min \|Ax-b\|_2^2$ schon.

Beispiel:



Wir möchten $f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ annähernd finden.

$$f(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + \ldots + a_n t_1^n = f_1$$
$$\vdots$$
$$f(t_N) = a_0 + a_1 t_N + \ldots + a_n t_N^n = f_N$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_N & \ldots & t_N^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } U} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$Ua = f \Rightarrow U^T U a = U^T f$ lösen um a zu erhalten.

8. Determinante

Eine Zahl: $\det: \mathbb{E}^{n \times n} \to \mathbb{E}$

$A \to \det(A)$, $|A|$

Permutationen

Funktion p ist eine Permutation falls p bijektiv ist. Es gibt $n!$ Permutationen von $(1,2,\dots,n)$. Alle Permutationen bilden eine Gruppe bezüglich $\circ$, bezeichnet mit S_n (symetrische Gruppe)

Eine Permutation p kann als Produkt von Transpositionen t_k benachbarter Elemente betrachtet werden

$$p: t_v \circ t_{v-1} \circ \dots \circ t_2 \circ t_1$$

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, aber die Anzahl der Transpositionen v ist entweder immer gerade oder immer ungerade.

Def. Das Signum sign einer Permutation p ist:

$$\operatorname{sign}(p) := \begin{cases} +1, & v \text{ ist gerade} \\ -1 & v \text{ ist ungerade} \end{cases}$$

Determinante

quadratisch

Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, bezeichnet $\det A$, $|A|$, ist

$$\boxed{\det A := \sum_{p \in S_n} \operatorname{sign}(p) \cdot a_{1,p(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,p(n)}}$$

$\det A = 0 \iff A$ singulär $\iff$ nicht invertierbar

$\det A \neq 0 \iff A$ regulär $\iff$ invertierbar

Bsp:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ?$$

$2! = 2$ Permutationen

$p_1 = (1,2) \quad v = 0, +$

$p_2 = (2,1) \quad v = 1, -$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Für jedes $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \cdot \det A_{[k,j]}$$ Entwickeln nack k-ter Zeile

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} a_{j,l} \cdot \det A_{[j,l]}$$ Entwickeln nach j-ter Spalte

wobei $A_{[k,j]}$ die Matrix definiert durch das Streichen der k-ten Zeile und j-Spalte von A ist.

Def: $K_{j,l} := (-1)^{l+j} \cdot \det A_{[j,l]}$ heisst Kofaktor von $a_{j,l}$

Bei Dreiecksmatrizen entspricht die Determinante dem Produkt aller Elemente der Diagonalen. (entwickeln nach 1. Spalte)

Wichtige Eigenschaften (Zeilen können durch Spalten ersetzt werden)

i. det ist linear in jeder Zeile von A

$$\begin{vmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ \vdots \\ \alpha u_i + \beta w_i \\ \vdots \\ — a_n — \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ — a_n — \end{vmatrix} + \beta \cdot \begin{vmatrix} — a_1 — \\ — a_2 — \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ — a_n — \end{vmatrix}$$

ii. werden zwei Zeilen vertauscht, so wechselt det(A) das Vorzeichen

iii. $\det(I) = 1$ (Dreiecksmatrix $\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$)

iv. hat A eine Null-Zeile, so ist $\det(A) = 0$

v. $\det(\gamma A) = \gamma^n \cdot \det(A)$ (i. n-Mal)

vi. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det(A) = 0$

vii. addiert man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile, so ändert sich det(A) nicht!

viii. ist A eine Diagonalmatrix, so ist det(A) das Produkt der Diag. elemente

ix. viii. für Dreiecksmatrizen

Daraus folgt, dass wenn wir den Gauss-Alg. auf $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ anwenden:

$$\boxed{\det A = (-1)^v \prod_{k=1}^{n} r_{k,k}}$$

→ günstige Art det A zu berechnen ($O(n^3)$)

wobei: v = Anzahl Zeilenvertauschungen

$r_{k,k}$ = Diagonalelemente der Zeilenstufenform

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ regulär} \iff \text{Rang } A = n$$

Satz 8.7: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Korollar 8.8: A ist regulär $\Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Satz 8.9: $\det(A^T) = \det(A)$ und $\det(A^H) = \overline{\det(A)}$

Determinante von Blockmatrizen

$$\det \begin{array}{c} \\ m\{ \\ \\ \end{array} \!\!\begin{array}{c} \overbrace{}^{m} \quad \\ \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \\ \quad\;\; \underbrace{}_{n} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \\ \\ \}n \end{array} = \det(A) \cdot \det(B)$$

9. Eigenwerte & Eigenvektoren

Wir betrachten Selbstabbildungen $F: V \to V$, $\dim V < \infty$, dabei interessieren wir uns nur für $v \in V$, die von F skaliert werden, d.h. $F(v) = \lambda v$

Eigenwert Eigenvektor

Alle EV die zu einem λ gehören bilden zusammen mit dem Nullvektor einen U.R. von V. $E_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$

Die Menge aller EW von F sind das Spektrum von F.

Eine lineare Abb. $F: V \to V$ und ihre Matrixdarstellung A bzgl. einer Basis von V haben die gleichen EW und die EV sind über die Koordinatenabbildung verbunden. $A\xi = \lambda \xi$

Sei λ ein EW von F so ist $E_\lambda := \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$ ein Unterraum von V.

Die geometrische Vielfachheit eines EW ist gleich $\dim E_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$. $\dim E_\lambda \geq 1$

Wenn wir einen EW λ kennen können wir den EV wie folgt berechnen: $(A - \lambda I)x = 0$

Das Polynom $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ heisst das charakterisierende Polynom der Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, und die Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$ die char. Gleichung.

λ ist ein EW von A $\Leftrightarrow$ λ ist eine Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$

Ein Polynom von Grad n über $\mathbb{C}$ hat n Nullstellen, d.h. es gibt n (nicht umbeding verschiedene) EW.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \overset{\text{Permutationsformel}}{=} \underbrace{(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)}_{\text{Polynom von Grad } n} + \underbrace{\dots}_{\text{alle anderen Permutationen}}$$

$$= (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})}_{\text{Spur von } A} \cdot \lambda^{n-1} + \dots$$

$$= a_n \cdot \lambda^n + \underbrace{a_{n-1}}_{\text{Spur}} \cdot \lambda^n + \dots + \underbrace{a_0}_{\det A}$$

Die algebraische Vielfachheit eines EW λ^* ist die Vielfachheit von λ^* als Nullstelle in $\chi_A(\lambda)$.

$$\boxed{\text{geom. Viel} \leq \text{alg. Viel}}$$

Geometrische Interpretation: **Eigenvektoren** sind **Richtungen**, die von der Abb. **nicht verändert** werden. Entlang der EV wird legendlich um den **Eigenwert skaliert.**

andere Basis

Ähnliche Matrizen A und $\boxed{C = T^{-1} A T}$ haben dasselbe char. Polynom, die selbe det, die selbe Spur und die gleichen EW.

Die EV zu verschiedenen EW sind l.u. D.h eine lin. Abb. kann maximal $n = \dim V$ verschiedene EW haben.

Spektral- / Eigenwertzerlegung

n. l.u. Eigenvektoren — regulär

Wenn wir eine Basis aus Eigenvektoren für $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ haben, so ist A ähnlich zu einer diagonalen Matrix Λ.

$$\boxed{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$A = V \Lambda V^{-1} \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar durch V.

Dies kann als Basistransformation gesehen werden und hilft uns Aufgaben wie $Ax = b$ und A^{100} schnell zu berechnen.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift left, "V^{-1}"] & \mathbb{E}^n \arrow[d, shift left, "V^{-1}"] \\ \mathbb{E}^n \arrow[u, shift left, "V"] \arrow[r, shift left, "\Lambda"] & \mathbb{E}^n \arrow[u, shift left, "V"] \arrow[l, shift left, "\Lambda^{-1}"] \end{tikzcd}$$

einfach zu berechnen

Wenn $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ n verschiedene EW hat ist sie immer diagonalisierbar, denn dann sind die EV l.u. und bilden eine Eigenbasis. Aber auch Matrizen mit EW die nicht alle verschieden sind, **können** diagonalisierbar sein.

$\boxed{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ ist diagonalisierbar} \iff \text{geom. Viel jedes EWs} = \text{seine alg. Viel}}$

Eigenwertzerlegung für reel-symetrische / hermitescher Matrizen

Es gilt der Spektralsatz:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitesch: $A^H = A$	Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reel-symetrisch: $A^T = A$
i) alle EW sind reel	i) alle EW $\in \mathbb{R}$
ii) die EV zu verschiedenen EW sind paarweise orthogonal bzgl. des Standardskalarproduktes in $\mathbb{C}$.	ii) die EV zu verschiedenen EW sind paarweise orthogonal bzgl. des Standardskalarproduktes in $\mathbb{R}$.
iii) Es gibt eine orthonomale Basis des $\mathbb{C}^n$ aus EV $u_1 \dots u_n$ von A	iii) Es gibt eine orthonomale Basis des $\mathbb{R}^n$ aus EV $u_1 \dots u_n$ von A.
iv) Für die unitäre Matrix $U = (u_1 \dots u_n)$ gilt $U^H A U = \Lambda$	iv) Für die orthogonale Matrix $U = (u_1 \dots u_n)$ gilt $U^T A U = \Lambda$

Alle Hermiteschen / reel-sym. Matrizen sind Skalierungen von orthonormalen Achsen und gehören zu den normalen Matrizen (normal $\iff$ diagonalisierbar durch unitär Matrix).

Sei $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ eine Hermitesche Matrix, so heisst sie:

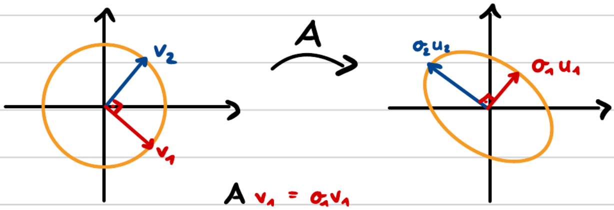
- positiv definit wenn $\forall x \in \mathbb{E}^n, x \neq 0$ gilt $x^H A x > 0$ => alle EW > 0
- semipositiv definit wenn $\forall x \in \mathbb{E}^n, x \neq 0$ gilt $x^H A x \geq 0$ => alle EW ≥ 0

Wenn A positive definit ist, definiert sie das Skalarprodukt $(u,v) \longmapsto u^H A v$.

Eine Hermitesche / reel.-sym. Matrix A transformiert die Einheitskugel in $\mathbb{E}^n$ zu einem Elipsoid mit Hauptachsen $\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n$.

Das passiert auch generell mit allen lin. Abbildungen A! Die Einheitskugel wird zu einem Elipsoiden. Dabei können Dimensionen kollabieren, nähmlich dim Ker A.
Die Hauptachsen des Elipsoiden sind generell rotiert.

v_1 v_2 sind Urbilder von $\sigma_1 u_1$ $\sigma_2 u_2$



$\|u_1\| = 1$ $\|u_2\| = 1$

$u_1 \perp u_2$

Es gilt nicht umbedingt $v_1 = u_1$ $v_2 = u_2$

$A v_1 = \sigma_1 v_1$

$A v_2 = \sigma_2 v_2$

Es gibt immer solche Orthonormalbasen $\{v_1 \dots v_n\}$ $\{u_1 \dots u_n\}$ und $\sigma_1 \dots \sigma_n \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, so dass

$$\boxed{A V = U \Sigma}$$

U, V sind orthogonal / unitär
Σ ist reel & diagonal & ≥ 0

Singulärwertzerlegung

Dies nennen wir eine Singulärwertzerlegung **SVD**. Eine SVD existiert für jede Matrix, egal ob quadratisch oder regulär.

Wie kommen wir darauf?

Wir wissen, dass $A^H A$ immer Hermitesch und positive definit ist. Deshalb gibt es für $A^H A$ eine Spektralzerlegung $A^H A V = V \Lambda$. Nun sortieren wir die Spektralzerlegung, so dass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$, wobei r = Rang A.

$$\underset{n \times n}{A^H A} \cdot \Big(\underbrace{v_1 \cdots v_r}_{\substack{V_r \\ n \times r}} \; \underbrace{v_{r+1} \cdots v_n}_{\substack{V^\perp \\ n \times (n-r)}} \Big) = \Big(\underbrace{v_1 \cdots v_r}_{\substack{V_r \\ n \times r}} \; \underbrace{v_{r+1} \cdots v_n}_{\substack{V^\perp \\ n \times (n-r)}} \Big) \underset{n \times n}{\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{matrix}}^{\Sigma_r} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} \sigma_{r+1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2 \end{matrix} \end{pmatrix}}$$

wir definieren:

$$\sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$$

Singulärwert

Damit können wir folgende Gleichung aufstellen:

$$A^H A V_r = V_r \Sigma_r^2 \qquad \text{mult. mit } V_r^H \text{ von links}$$

$$V_r^H A^H A V_r = \Sigma_r^2 \qquad \text{mult. mit } \Sigma_r^{-1} \text{ von rechts und links}$$

$$\underbrace{(\Sigma_r^{-1} V_r A^H)}_{:= U_r^{-1}} \underbrace{(A V_r \Sigma_r^{-1})}_{:= U_r} = I$$

Daraus folgt: $A V_r \Sigma_r^{-1} = U_r \quad \Rightarrow \boxed{A V_r = U_r \Sigma_r}$ reduzierte SVD

Ergänzen wir U_r zu einer unitären Matrix U (Gram-Schmidt) erhalten wir $\Rightarrow \boxed{A = U \Sigma V^H}$ volle SVD

Die Matrix U diagonalisiert $AA^H = U\Sigma^2 U^H$

Die Matrix V diagonalisiert $AA^H = V\Sigma^2 V^H$

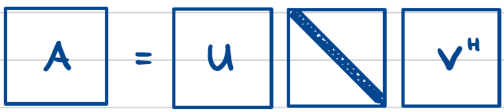
wrong

Bmk: $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow U, V$ reel
σ_j immer reel ≥ 0

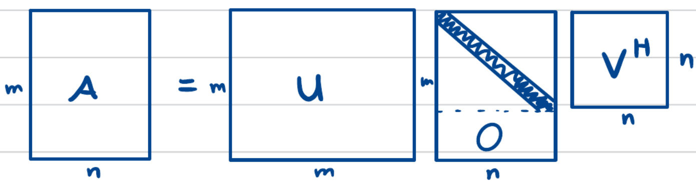
Falls A invertierbar ist: $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^H$

SVD bildlich:

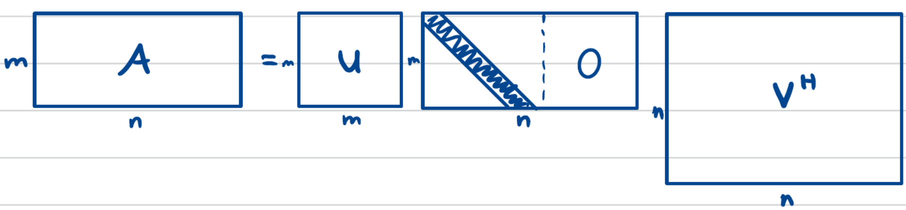
$m=n$



$m>n$



$m<n$



SVD einer Selbstabbildung

$A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, $A : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ $\qquad A = U \Sigma V^H = V \underbrace{(V^H U)}_{R} \Sigma V^H$

$$A = V \underbrace{R}_{} \Sigma V^H$$

kann gewisse Dimensionen kollabieren.

orthog./unitäre Abbildung R (rotation und/oder spiegelung)

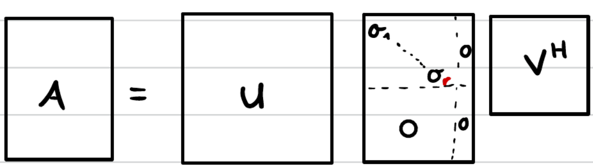
Skalierung der orthogonalen Hauptachsen

Basistransformation zu einer orthonormalen Basis.

Methode der kleinsten Quadrate mit SVD

Bis anhin konnten wir die Methode der kleinsten Quadrate nur anwenden, wenn der Rang $A = n$ war. Mit SVD geht es nun auch wenn Rang $A < n$.

Erinnerung: $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $Ax = b \rightsquigarrow \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|Ax - b\|_2^2$



$r = $ Rang A

Wir können nun umformen:

da U unitär ist
$\Rightarrow$ U ist längentreu

$$\|Ax-b\|_2^2 = \|U\Sigma V^H x - b\|_2^2 = \|U(\Sigma V^H x - U^H b)\|_2^2 = \underline{\|\Sigma V^H x - U^H b\|_2^2}$$

$y := V^H x$, $c := U^H b$

$$\Rightarrow \quad = \underset{y}{\operatorname{argmin}} \|\Sigma y - c\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1 y_1 \\ \sigma_2 y_2 \\ \vdots \\ \sigma_r y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_r \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Das Minimum wird erreicht für $y_1 = \frac{c_1}{\sigma_1}, \dots, y_r = \frac{c_r}{\sigma_r}$. Die Werte von $y_{r+1} \dots y_n$ spielen keine Rolle, weshalb wir sie auf 0 setzen.

$$\Rightarrow y^* = \begin{pmatrix} c_1/\sigma_1 \\ \vdots \\ c_r/\sigma_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1/\sigma_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)}_{\Sigma^+ \text{ Pseudoinverse}} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \Sigma^+ U^H b$$

„minimal norm solution"
Lösung mit kleinster 2-Norm

$\Rightarrow$ $\boxed{x^* = V\Sigma^+ U^H b}$ ist eine Lösung von $Ax = b$

$\underline{A^+ = V\Sigma^+ U^H}$ ist die Pseudoinverse von A, so dass $x^* = A^+ b$.

The End

Good luck and have fun during repetition ♡ :)