“NAVEGACIÓN ORTODRÓMICA”

Ref.:
a.- Pub. SHOA N° 3030 "Manual de Navegación" Capítulo 05
b.- Apuntes del autor.

A.- **Conceptos generales.**

Una línea de rumbo o loxodrómica es aquella que mantiene constante una determinada dirección lo que constituye una principal ventaja ante un círculo máximo. Una nave siguiendo una línea de rumbo entre dos lugares mantiene inalterable su rumbo verdadero.

Una línea de rumbo corta a los meridianos que cruza en un mismo ángulo. Su trazo en una carta Mercator aparece como una línea recta. La navegación que habitualmente se navega en cercanías de costa en navegación loxodrómica.

Sin embargo, en el plano de la superficie real del geoide, **no** constituye la menor distancia entre los dos puntos, dada la curvatura de la Tierra. La distancia más corta entre dos punto es la línea ortodrómica

Cuando un buque navega siguiendo un círculo máximo (distancia más corta), se dice que está navegando por una ortodrómica y tiene la desventaja de formar ángulos desiguales con los meridianos, pero al navegar menos distancia que la loxodrómica puede representar economía de tiempo y de combustible. Un buque que navega por ortodrómica tendrá que enmendar constantemente el rumbo, para navegar el círculo máximo.

En Figura N° 1 se ha dibujado las dos derrotas sobre la carta Mercator:

- Loxodrómica: Track dibujado como una línea recta
- Ortodrómica: Track dibujado en línea curva.

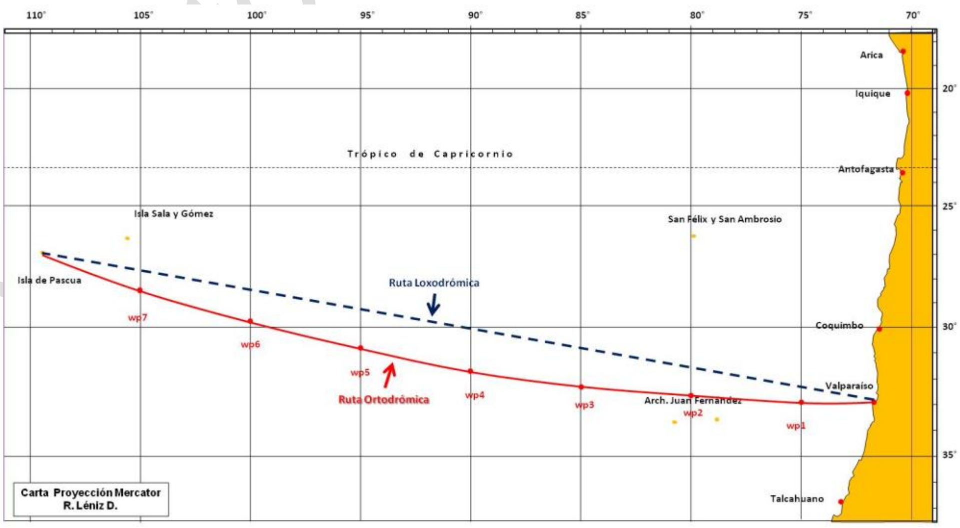


Fig. N° 1 (“**Comparación de ortodrómica con loxodrómica**”.)

El trazado de una ortodrómica en las cartas Mercator se hace determinando las coordenadas de varios puntos de la ortodrómica que al situarlas en la carta, la unión de ellas dará la ortodrómica, es decir el buque navegará loxodrómicas.

Características de una ortodrómica o círculo máximo son las siguientes:

1. Se forma en una esfera por la intersección de un plano que pasa por su centro. Si este círculo máximo pasa por dos puntos de esta, entonces constituye la menor distancia entre ello, dada la curvatura de la esfera
2. Dos puntos de una esfera pueden unirse solamente por un círculo máximo, excepto si son antípodas[1] en cuyo caso pueden pasar por ellos un infinito número de círculos máximos como, por ejemplo, el número de meridianos que podrían pasar por los polos.
3. Cada círculo máximo divide cualquier otro círculo máximo.
4. Exceptuando el ecuador, cada círculo máximo deja una mitad en el hemisferio norte y la otra en el hemisferio sur.
5. Dos puntos situados 180º aparte en un círculo máximo tendrán la misma latitud numérica, pero con distinto nombre o signo.
6. El punto del círculo máximo que alcanza la mayor latitud (más alejado del ecuador) se conoce como el vértice.
7. Para cada círculo máximo hay dos vértices, uno en cada hemisferio y 180º en opuestos en longitud.
8. En los vértices, el círculo máximo es tangente a un paralelo de latitud y su dirección E-W.
9. La longitud del punto donde el círculo máximo corta al ecuador, denominada por ello longitud de corte, es igual a la longitud del vértice más y menos 90º.
10. El ángulo con que un círculo máximo corta al ecuador es igual a la latitud del vértice.
11. En una carta Mercator, un círculo máximo aparece como una curva con su concavidad en dirección al ecuador.
12. Si dos puntos se encuentran en diferentes hemisferios, la línea ortodrómica cambiará su curvatura en una carta Mercator, al pasar de uno al otro.
13. El arco de círculo máximo entre dos puntos se conoce como “Distancia Ortodrómica”.
14. El meridiano del vértice corta a la distancia ortodrómica a 90º.
15. Si se pudiera navegar exactamente un círculo máximo, la proa de la nave estaría apuntando permanentemente hacia el punto de destino (suponiendo que el rumbo y la proa verdadera fueran la misma). Debido a que los círculos máximos, exceptuando los meridianos y el ecuador, son unas líneas curvas que van cambiando constantemente de dirección, el navegante estará imposibilitado de seguirlas exactamente. En número de puntos de ruta (*way points*) a lo largo de ella, entre los cuales trazará líneas de rumbo por las que llevará su navegación.

[1] Antípoda: es el lugar de la superficie terrestre diametralmente opuesto a otro lado de una posición en particular; es decir, el lugar de la superficie terrestre más alejado. La antípoda del Polo norte es el polo sur.

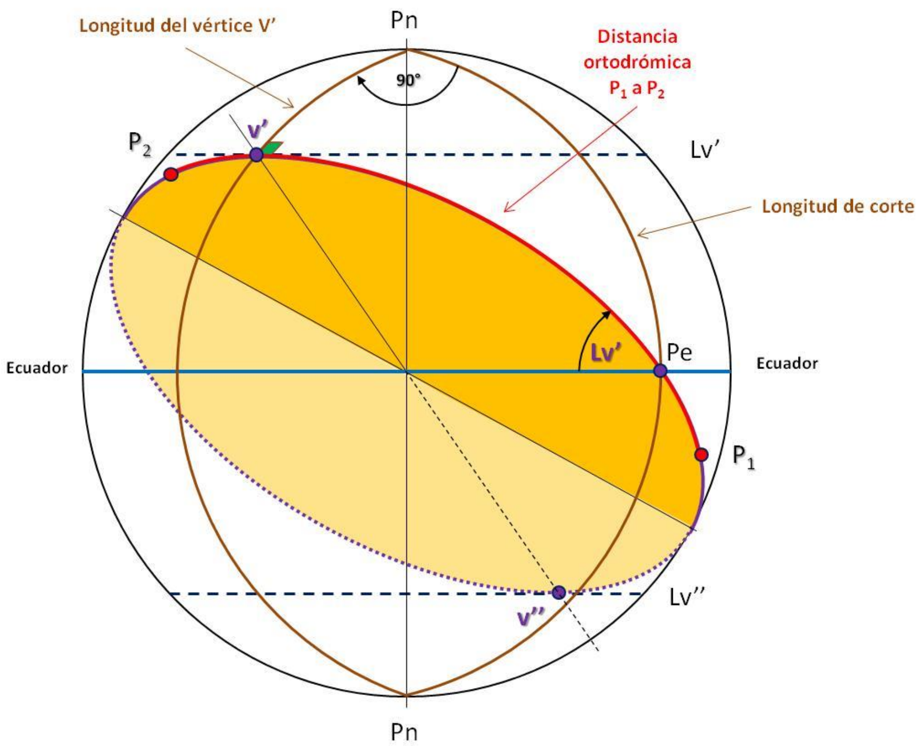


Fig N° 2 **("Algunas de las características de la ortodrómica")**

B.- **El triángulo ortodrómico.**

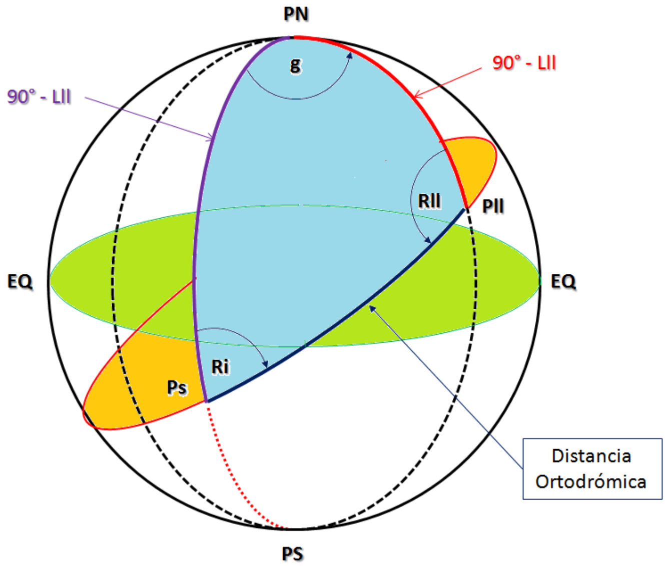


Fig N° 3 ("**El Triángulo ortodrómico")**

Se define como una parte de la superficie de la tierra encerrada por los meridianos de dos lugares y el círculo máximo ortodrómico que los une:

En el triángulo ortodrómico se distinguen:

- Tres vértices
  - Punto de Salida (Ps)
  - Punto de Llegada (Pll)
  - Polo Terrestre Norte (Normalmente se asumirá este polo para facilitar los cálculos matemáticos)

- Lados esféricos
  - Colatitud de salida (90° - Ls).
  - Colatitud de llegada (90° - Lll).
  - Distancia ortodrómica (DO).
- Ángulos Esféricos
  - Ángulo interior o rumbo de salida en Ps (Ri).
  - Ángulo interior o rumbo de llegada en Pll. (Rll)
  - Diferencia de longitud (g), en que g = Gll - Gs.

Se debe tener presente que para todos los cálculo los signos serán los siguientes:
- Para Latitud S (-) y N (+)
- Para Longitud W (-) y E (+)

C.- **Métodos para obtener la ortodrómica.**

El triángulo esférico se puede resolver, gráficamente, mediante la Carta Gnomónicas (Ver anexo "A"), en forma gráfica por rosa de maniobras, por la Tabla HO 214 y por **trigonometría esférica**, siendo esta última la que se explicará a continuación.

D.- **Resolución del triángulo ortodrómico**

Normalmente, en la resolución del triángulo ortodrómico se dará como datos las coordenadas del punto de salida y del punto de llegada. con estos dos puntos se obtendrá la diferencia de longitud (g = Gll - Gs) respetando los respectivos signos.

En la resolución del problema ortodrómico, es conveniente confeccionar planillas del cálculo (Excel), debidamente validadas, para efectuar los cálculos matemáticos, ya que así se minimiza el riesgo de equivocarse en el uso de la calculadora.

Para resolver el triángulo ortodrómico, se dividirá el cálculo en la siguientes etapas:

Etapa I: Cálculo de la distancia ortodrómica (DO), ángulo interior o rumbo inicial (Ri) y ángulo interior o rumbo de llegada (Rll)

Etapa II: Cálculo de las coordenadas vértice. (Lv y Gv)

Etapa III: Cálculo de los puntos de la ortodrómica:
Caso 1: Dada la distancia a navegar entre puntos.
Caso 2: Dada la diferencia de longitud.
Caso 3: Dada la latitud o longitud de un WP. (Navegación Mixta)

En Anexo "A", se resuelve el problema ortodrómico empleando una carta Gnomónica.

En Anexo "B", se detallan las diferentes reglas de trigonometría esférica para la resolución de un triángulo ortodrómico.

E.- **Etapa I: Cálculo de la distancia ortodrómica (DO), ángulo o rumbo inicial (Ri), ángulo o rumbo de llegada (Rll)**

1.- Distancia Ortodrómica:

Para medir la distancia ortodrómica se emplea la **Ley "cosenos de los lados".**

Cuando en un triángulo esférico cualquiera, hay entre valores conocidos e incógnitas, mayoría de lados, se aplica la relación *cosenos de los lados*, siempre que la incógnita sea el ángulo que interviene o el lado opuesto a ese ángulo. En este caso se conocen dos lados (colatitud de salida y de llegada)) y la incógnita es el otro lado (DO).

Regla: "El coseno del lado opuesto (**DO**) al ángulo que interviene es igual al producto (x) de los cosenos de los otros dos lados (90° - Ls y 90° - Lll) más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos lados (90° - Ls y 90° - Lll) por (x) el coseno del ángulo (g) que interviene".

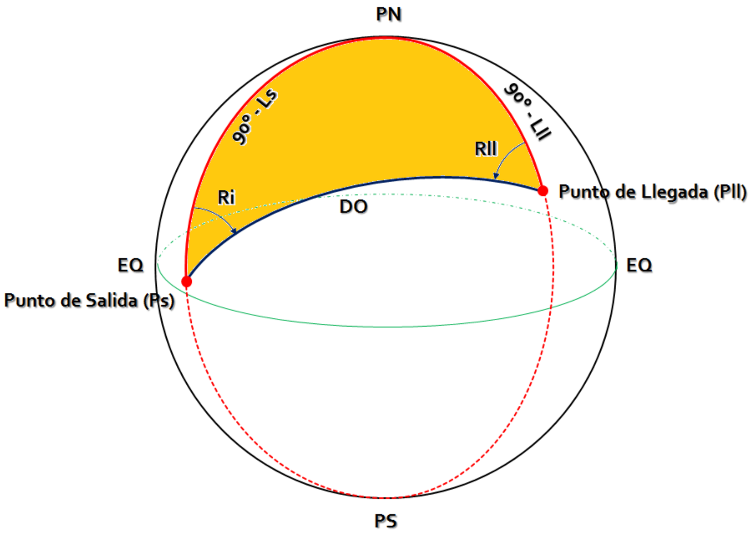


Fig. N° 4 **("Triángulo ortodrómico")**

cos (DO) = cos (90°-Ls) x cos (90°-Lll) + sen (90°-Ls) x sen (90°-Lll) x cos (g)

cos DO = sen Ls x sen Lll + cos Ls x cos Lll x cos g

Se debe tener presente que para que esta fórmula sea genérica se debe considerar el polo Norte como parte del triángulo esférico y considerar los signos de la latitud y longitud.

DO	: En grados. Para transformar en millas se multiplica por 60.
Ls y Lll	: S: negativo y N: positivo.
g	: No afecta el signo.

2.- Ángulo o rumbo inicial (Ri):

Esta dato es importante para el cálculo del vértice.

Para medir el ángulo o rumbo Inicial (Ri) y el rumbo de salida se emplea algunas de las siguientes fórmulas:

Tener presente que el Ri es el ángulo interior del triángulo ortodrómico y este tiene un valor cuadrantal N/S nnn° E/W según el polo considerado y la dirección del ángulo

a.- Por ley "cosenos de los lados".
Ver figura N° 4.

"El coseno del lado opuesto (90° - Lll) al ángulo que interviene es igual al producto (x) de los cosenos de los otros dos lados (90° - Ls y DO) más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos lados (90° - Ls y DO) por (x) el coseno del ángulo (**Ri**) que interviene".

cos (90°-Lll) = cos(90°-Ls) x cos(DO) + sen (90°-Ls) x sen (DO) x cos (Ri)
sen (Lll)= sen (Ls) x cos (DO) + cos (Ls) x sen (DO) x cos (Ri)
cos (Ri)= (sen (Lll) - sen (Ls) x cos (DO))/ (cos (Ls) x sen (DO))

Obtenido el valor de Ri se definirán los signos, N o S según el polo considerado en el triángulo esférico y E o W según el signo de la diferencia de longitud. Si el valor da negativo es por que corresponde al cuadrante S - W/E, por ende habrá que sumar 180° para obtener el ángulo Ri (N - W/E)

b.- Otras fórmulas

1. Por Ley de los senos**.**

sen (Ri) = sen (g) x cos (Lll) / sen (DO)

c.- Por relación de los 4 elementos consecutivos.
Ver figura N° 4

Regla:
"La cotangente del ángulo (Ri) por el seno del otro ángulo (g) que interviene, es igual a la cotangente del lado extremo (90° - Lll) por el seno del otro lado (90° -Ls) que interviene menos el producto del coseno de los elementos del medio (g, 90° - Ls)"

Tener presente que "g" es en valor absoluto.

ctn (Ri) x sen (g) = ctn (90°-Lll) x sen (90°-Ls) - cos (g) x cos (90°- Ls)
ctn (Ri) x sen (g) = tan (Lll) x cos (Ls) - cos (g) x sen (Ls)

$$\text{Tan (Ri)} = \frac{\text{sen (g)}}{\text{Tan (Lll) x Cos (Ls) - Cos (g) x Sen (Ls)}}$$

Si el resultado de negativo, se suma 180°.

3.- Ángulo o rumbo de llegada (Rll) y rumbo final (Rf):

a.- Por ley “cosenos de los lados”.

Cos (90°- Ls) = Cos(90°-Lll) x Cos(DO) + Sen (90°-Lll) x Sen (DO) x Cos (Rll)
Sen (Ls)= Sen (Lll) x Cos (DO) + Cos (Lll) x Sen (DO) x Cos (Rll)
Cos (Rll)= (Sen (Ls) - Sen (Lll) x Cos (DO))/ (Cos (Lll) x Sen (DO))

b.- Por relación de los cuatro elementos consecutivos:

Tener presente que "g" es en valor absoluto.

$$\text{Tan (Rll)} = \frac{\text{Sen (g)}}{\text{Tan (Ls) x Cos (Lll) - Cos (g) x Sen (Lll)}}$$

Si el resultado de negativo, se suma 180°.

4.- Cálculo de la longitud al cruzar el Ecuador.

El triángulo de la figura 5, está compuesto por:

- Lado entre el Pn y el Punto de salida = 90° - Ls
- Lado entre el Pn y el Ecuador = 90°
- Rumbo inicial = Ri
- Diferencia de longitud (ge) entre el meridiano del punto de salida y el meridiano del punto donde corta la ortodrómica con el ecuador.

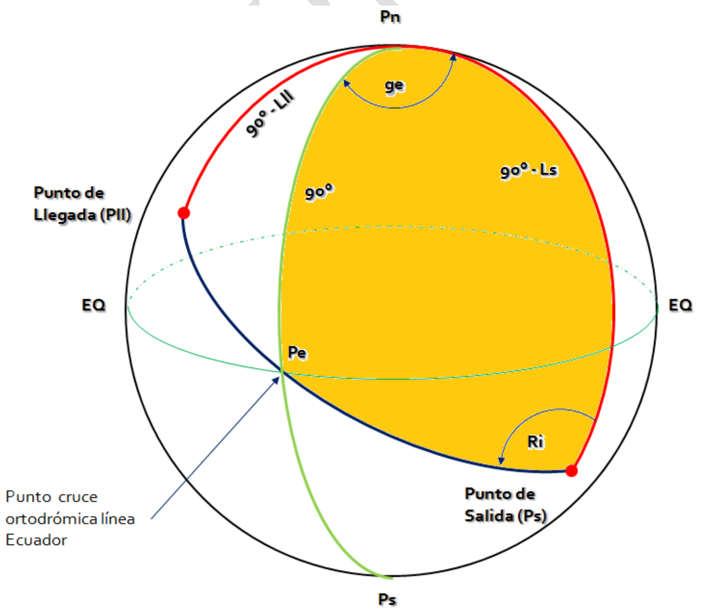


Fig. N° 5 (**"Ortodrómica corta en Pe el ecuador"**)

Para la resolución se emplea la regla de la **Relación de los cuatro elementos consecutivos.**

Regla: La cotangente del ángulo (Ri) extremo por el seno del otro ángulo (ge) que interviene, es igual a la cotangente del lado (90°) extremo por el seno del otro lado (90° - Lat S) que interviene menos el producto del coseno de los elementos del medio (ge y 90° - Lat S).

$\text{Cot (Ri)} \times \text{Sen (ge)} = \text{Cot} (90°) \times \text{Sen} (90°\text{-Lat S}) - \text{Cos (ge)} \times \text{Cos} (90°\text{-Lat S})$
Como la $\text{Cot} (90°) = 0$
$\text{Cot (Ri)} \times \text{Sen (ge)} = - \text{Cos (ge)} \times \text{Cos} (90° - \text{Lat S})$
$\text{Cot (Ri)} \times \text{Sen (ge)} = - \text{Cos (ge)} \times \text{Sen (Lat S)}$
Tan (ge) = - Sen (Ls) x Tan (Ri)

Ge = Gs + ge (Considerar los signos) (conveniente hacer un gráfico para evitar error en los signos)

Con estos puntos sabremos que la Latitud del vértice (Lv) será el ángulo interior del vértice Pe y la longitud será Gv1 = Ge + 90° y Gv2 = Ge - 90°.

Ejemplo:
Ls=30°S, Gs=80°W, Lll=40°N, Gll=170°W, Ri = N 55° W

Tan (ge) = - Sen (Ls) x Tan (Ri)
Tan (ge) = - Sen (-50°) x Tan (55°)
ge = 34°,53
Ge = Gs + ge= -70° 00' + (- 34° 32') (g se suma a la longitud de salida Gs ya que el Ri es NW).
Ge = 104° 32° W

Respuesta:
L= 0° y Ge = 104° 32' W

Ejemplo Etapa I:
Determinar la distancia Ortodrómica, rumbo inicial y rumbo final entre:

Ps :	Valparaíso	L: 33° 02’S y G: 71° 40’W
Pll:	Isla de Pascua	L: 27° 10’S y G: 109° 27’W

g = Gll – Gs = - 109° 26’- (- 71° 40’)
g = 37° 46’ W.

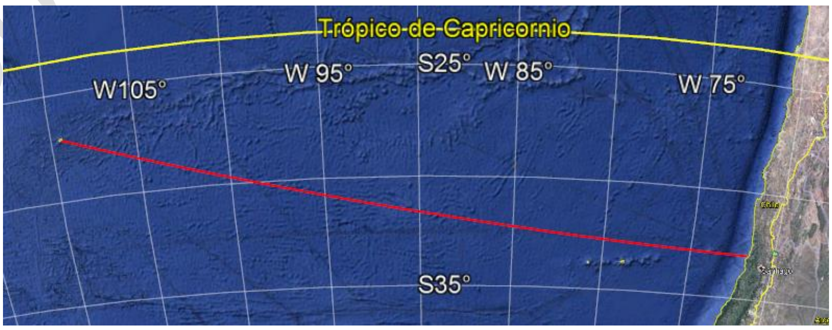


Fig. N° 6 **("Gráfico de la ruta ortodrómica")**

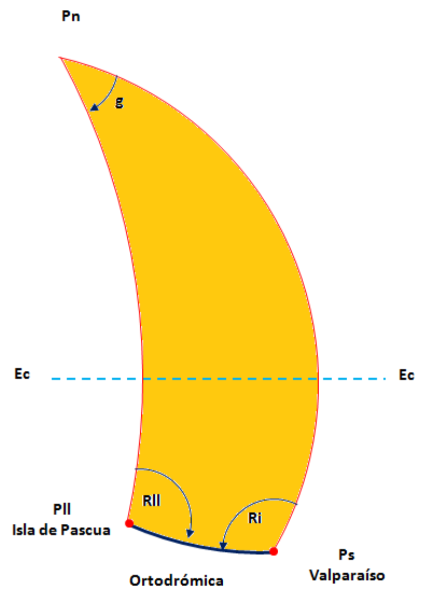


Fig. N°7 **("Cálculo de la distancia ortodrómica, rumbo inicial y rumbo final")**

1.- Cálculo de la distancia ortodrómica

Cos DO = Sen Ls x Sen Lll + Cos Ls x Cos Lll x Cos |g| (Fórmula 1)
Cos DO = Sen (-33°02') x Sen (-27°10') + Cos (-33°02') x Cos (-27°10') x Cos (37° 46')
Cos DO = 0,838378701
DO = 33°,03071956
DO = 1.981,84 Millas

2.- Cálculo del rumbo de salida Ri
Cos (Ri)= (Sen (Lll) - Sen (Ls) x Cos (DO))/ (Cos (Ls) x Sen (DO))
Cos (Ri)= (Sen (-27°10') - Sen (-33°02') x Cos (33°,03))/ (Cos (-33°02') x Sen (33°,03))

Ri = 88°,42
Ri = N 89°,42 W

Rumbo de salida desde Valparaíso (Rs) = 270º,1
Rumbo inicial desde Valparaíso (Ri) = N 89º,9 W

3.- Cálculo del rumbo de llegada (Rll) o rumbo final (Rf)

Cos (Rll)= (Sen (Ls) - Sen (Lll) x Cos (DO))/ (Cos (Lll) x Sen (DO))
Cos (Rll)= (Sen (-33°02') - Sen (-27°10') x Cos (33°,03))/ (Cos (-27°10') x Sen (33°,03))
Angulo interior (Rll) = N 109°.56 E

Rumbo final de llegada a Isla de Pascua (Rf) = 289°.56
Ángulo interior del triángulo ortodrómico (Rll) = N 109°.56 E

Ejercicios varios

Ejercicio N° 1:
Ls = 20° S Gs = 120° W; Lll = 30° N Gll = 70° W
Respuestas:
g = 50° E , DO = 4163,1 millas ; Ri = N 45°,1 E ; Rs = 045°,1

Ejercicio N° 2:

Ls = 20° S Gs = 70° W; Lll = 30° N Gll = 120° W
Respuestas:
g = 50° W , DO = 4163,1 millas ; Ri = N 45°,1 W ; Rs = 314°,9.

Ejercicio N° 3:
Ls = 33° S Gs = 70° W; Lll = 12° S Gll = 179° W
Respuestas:
g = 109° W , DO = 5.930.97 millas ; Ri = N 110°,6 W ; Rs = 249°,4.

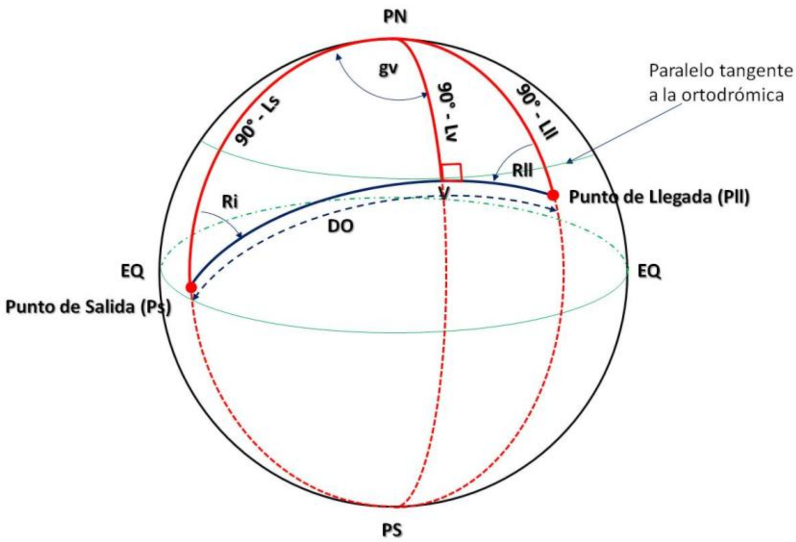
Ejercicio N° 4:
Ls = 50° S Gs = 71° W; Lll = 31°,2 N Gll = 121° E
Respuestas:
g = 167°,5 W , DO = 9.540,3 millas ; Ri = N 148°,9 W ; Rs = 211°,1.

F.- **Etapa II: Cálculo de las coordenadas vértice. (Lv y Gv)**

El vértice de la ortodrómica es el punto de ella que alcanza la latitud más alta y es conveniente determinarla a fin de darse cuenta de las regiones que atraviesa. Además el vértice es un punto auxiliar que sirve para simplificar el cálculo para obtener los diferentes puntos de la ortodrómica para plotearlos en la carta Mercátor.

Es muy importante hacerse un gráfico para visualizar exactamente cómo será la ortodrómica y la ubicación aproximada del vértice.

El meridiano que pasa por el vértice es perpendicular a la ortodrómica, ver figura N°8.



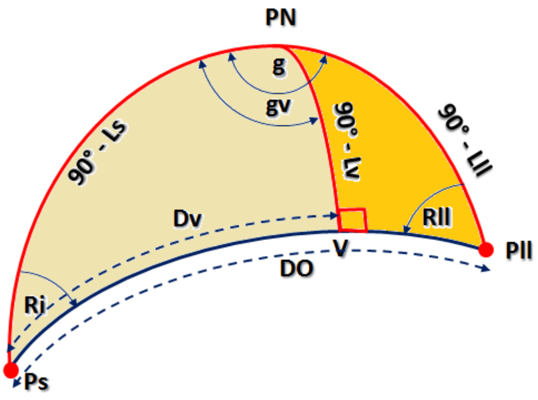


Fig N° 8 (“**Determinación del vértice ortodrómico (V)”**)

Existen dos vértices en un triángulo ortodrómico de igual latitud pero de signos contrarios y sus longitudes serán opuestas, es decir si uno de los vértices es L= 34° S y G = 125° W, el otro vértice tendrá que ser L=34° N y G= 55° E (-125° +180°).

El vértice puede estar en la Ortodrómica o fuera de ella. **Regla:** • Si los ángulos interiores del triángulo esférico (RI y Rf) son ambos menores de 90° o mayores de 90° el vértice está en la ortodrómica. • Si uno de los ángulos interiores del triángulo esférico es menor de 90° y el otro mayor de 90° el vértice se encuentra fuera de la ortodrómica

Para resolver en triángulo esférico rectángulo Ps – V – PN se empleará la analogías de Napier.

Regla 1: “El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes”.
Regla 2: "El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de los cosenos de las partes opuestas”

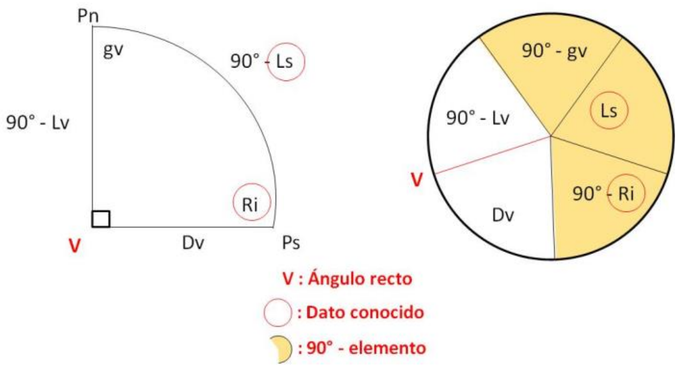


Fig. N° 9 **("Analogías de Napier")**

Tener presente que Ri corresponde al ángulo interior del triángulo esférico.

Cálculo de Latitud del vértice (Lv)

Regla 2: "El seno de cualquier parte media (90° - **Lv**) es igual (=) al producto de los cosenos de las partes opuestas (Ls y 90° - Ri)”

Sen (90° - **Lv**) = Cos (Ls) x Cos (90° - Ri).
Cos (**Lv**) = Cos (Ls) x Sen (Ri)

Cálculo de la Longitud del vértice (Gv)

Regla 1: “El seno de cualquier parte media (90° - Ls) es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes (90° - **gv** y 90° - Ri)”.

Sen (Ls) = Tan (90° - **gv**) x Tan (90° - Ri)
Sen (Ls) = Cotan (**gv**) x Cotan (Ri)
Cotan (**gv**) = Sen (Ls) x Tan (Ri)
Tan (**gv**) = 1 / (Sen (Ls) x Tan (Ri))

Gv = Gs + gv
Puede que gv de negativo, en ese caso correspondería al otro vértice de la ortodrómica, 180° en longitud y misma latitud pero con signo contrarios. Es conveniente hacer un gráfico para cada ejercicio en particular, para no cometer errores.

Cálculo de la distancia desde Ps al vértice.

Regla 1: “El seno de cualquier parte media (90° - Ri) es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes (Ls y **Dv**)”.

Sen (90° - Ri) = Tan (Ls) x Tan (**Dv**)
Cos (Ri) = Tan (Ls) x Tan (**Dv**)

Tan (**Dv**) = Cos (Ri) / Tan (Ls)

Tener presente que:

DE acuerdo a lo expresado anteriormente, si los ángulos interiores de Ri y Rll son al mismo tiempo mayores o menores de 90°, el **vértice cercano queda entre el punto de salida y el de llegada**, pero si uno de ellos es mayor de 90° y el otro menor de 90° los **vértices quedan fuera** del triángulo.

En el caso de una ortodrómica en el que el vértice queda fuera del triángulo, se procede en forma análoga, empleando cualquiera de los vértices de la ortodrómica.

Las coordenadas del vértice dan las coordenadas del punto que corta la ortodrómica con el ecuador. L = 0° y la longitud será Ge1 = Gv1 + 90° y Ge2 = Gv2 - 90°.

Solución de la ortodrómica

Se tomará como ejemplo la navegación de Valparaíso a Isla de Pascua.

Datos del problema:

Ps : Valparaíso L: 33° 02’S y G: 71° 40’W
Pll: Isla de Pascua L: 27° 10’S y G: 109° 27’W

Datos calculados en la etapa I
g = 37° 46’ W
DO = 1.981,84 millas
Ri = N 89°,94 W
Rll = N 109°,56 E

El vértice queda fuera de la ortodrómica[2], pero muy cercano al punto de salida.

Cálculo de la latitud del vértice (Lv)

Cos (Lv) = Cos (Ls) x Sen (Ri) (Fórmula 8)
Cos (Lv) = Cos (-33° 02’) x Sen (89°,94)
Lv = 33° 02'.3 S

Cálculo de la longitud del vértice (Gv)
Tan (gv) = 1 / (Sen (Ls) x Tan (Ri)) (Fórmula 9)
Tan (gv) = 1 / (Sen (-33° 02’) x Tan (89°,94))
gv = 00° 06',6
Gv = Gs + gv = - 71° 40’ + (00° 06',6)
Gv = 71° 33',4 W

G.- **Etapa III: Cálculo de los puntos de la ortodrómica:**
Caso 1: Dada la distancia navegada entre puntos.
Caso 2: Dada la diferencia de longitud.
Caso 3: Dada la latitud o longitud de un WP.

Tener presente que es muy recomendado hacer un gráfico estimado de la ortodrómica objeto visualizar el vértice y los posibles puntos de control o WP.

Caso 1: Dada la distancia navegada entre puntos.

Para este caso es necesario conocer la distancia angular entre los puntos a definir de la ortodrómica, que se llamará x°.

Esta distancia angular será normalmente 600 millas, que corresponde a un arco de 10° (600 millas / 60'), que es el valor en que la loxodrómica deja de ser precisa.

En la figura N° 10 se observa el vértice (V) y lo puntos Px, separados por cada x° de diferencia de distancia entre los meridianos.

[2] Si los ángulos interiores de Ri y Rll son al mismo tiempo mayores o menores de 90°, el **vértice cercano queda entre el punto de salida y el de llegada**, pero si uno de ellos es mayor de 90° y el otro menor de 90° los **vértices quedan fuera** del triángulo.

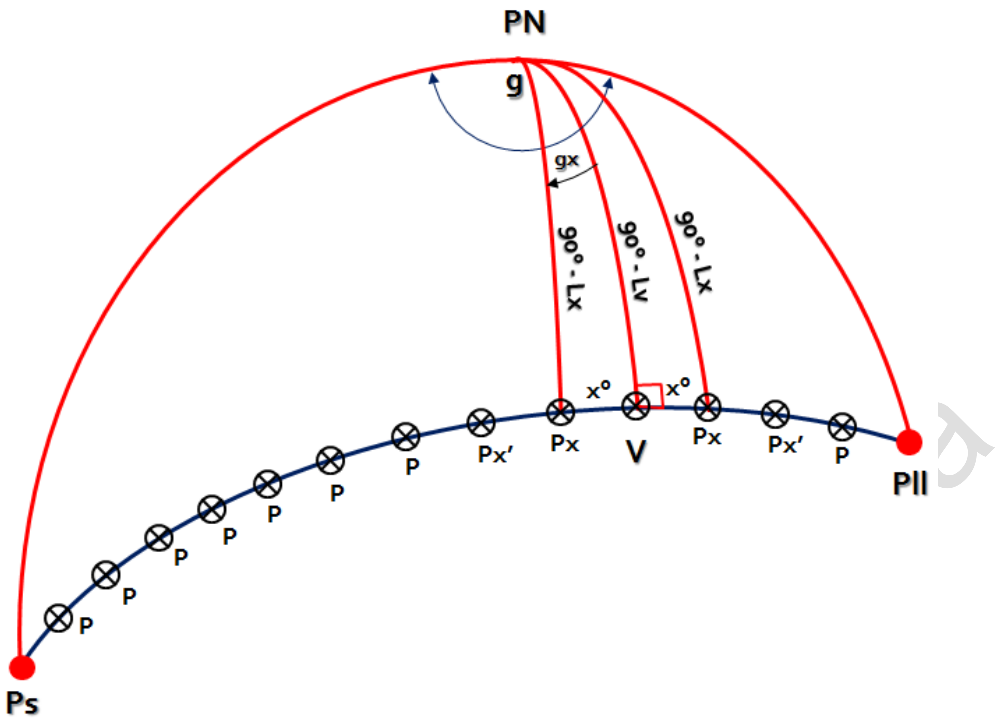


Fig. N° 10 **(“Puntos cada x° de distancia desde “V”)**

Para este cálculo se debe conocer:
- Coordenadas del vértice (Lv y Gv)
- Valor de la distancia angular (x°)

Cálculo de la latitud de un punto (Lx).
En triángulo rectángulo PN – V – Px:

Cos (90° - Lx) = Cos (90° - Lv) x Cos (x°). (Analogías de Napier)
Sen (Lx) = Cos (x°) x Sen (Lv)
Sen (Lx) = Cos (x°) x Sen (Lv)

Cálculo de la longitud de un punto (Gx).

Sen (x°) = Sen (90° - Lx) x Sen gx (Ley de los senos)
Sen (x°) = Cos (Lx) x Sen gx
Sen (gx) = Sen (x°) / Cos (Lx)

Sen (gx) = Sen (x°) / Cos (Lx)

Esta diferencia de longitud que corresponde al punto Px se debe sumar o restar a la longitud del vértice, según la ubicación del vértice y el punto Px.

En el caso del ejemplo:

Gx = Gv + gx para el punto que se encuentra al este del vértice.
Gx = Gv - gx para el punto que se encuentra al weste del vértice.

(Recordar G(W) y g(W) son negativas (-) y G(E) y g(E) son positivas (+).

Ejemplo:
Siguiendo con la navegación de Valparaíso a isla de Pascua

Ps :	Valparaíso	L: 33° 02’S y G: 71° 40’W
Pll:	Isla de Pascua	L: 27° 10’S y G: 109° 27’W

Datos calculados en la etapa I
g = 37° 46’ W
DO = 1.981,84 millas
Ri = N 89°,94 W
Rll = N 109°,56 E

Datos calculados en la etapa II
Lv = 33° 02'.3 S
Gv = 71° 33',4 W

Definición para el cálculo
Considerar una distancia entre puntos de 600 millas (x° = 10°).

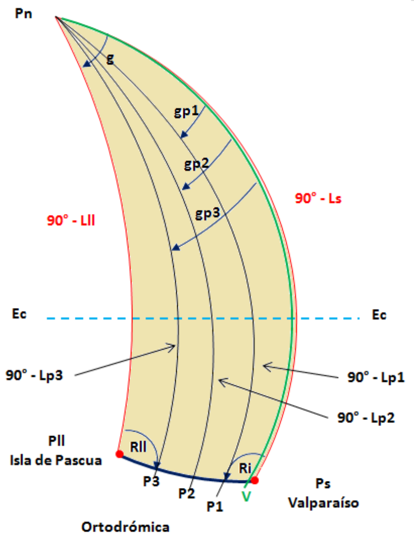


Fig. N° 11 **("Triángulo ortodrómico Valparaíso - Isla de Pascua")**

Punto N° 1 de la ortodrómica (p1)
x1° = 10°
Cálculo Latitud punto 1 (Lp1).
Cos (90° - Lp1) = Cos (90° - Lv) x Cos (x1°).
Sen (Lp1) = Sen (-33° 02'.3) x Cos (10°)

Lp1 = 32° 28',4 S

Cálculo longitud punto 1 (Gp1).
Sen (x1°) = Sen (90° - Lp1) x Sen (gx1)
Sen (x1°) = Cos (Lp1) x Sen (gx1)
Sen (gx1) = Sen (x1°) / Cos (Lv)
Sen (gx1) = Sen (10°) / Cos (- 32° 28',4)
gx1 = 11° 52',7 W
Gp1 = Gv + gx1 = - 71° 46',5 + (- 11° 52',7)
Gp1 = 83° 39',2 W

Punto N° 2 de la ortodrómica (p2)
x° = 20°

Cálculo Latitud punto 2 (Lp2).
Cos (90° - Lp2) = Cos (90° - Lv) x Cos (x°).
Sen (Lp2) = Sen (-33° 02'.3) x Cos (**20°**)
Lp2 = 30° 49',7 S

Cálculo longitud punto 2 (Gp2).
Sen (x°) = Sen (90° - Lp2) x Sen (gx2)
Sen (x°) = Cos (Lp2) x Sen (gx2)
Sen (gx2) = Sen (**20°**) / Cos (-**30° 49',7**)
gx2 = 23° 28',3 W
Gp2 = Gv + gx1 = - 71° 46',5 + (-23° 28',3)
Gp2 = 95° 14',8 W

Punto N° 3 de la ortodrómica (p3)
x° = 30°
Cálculo Latitud punto 3 (Lp3).
Cos (90° - Lp3) = Cos (90° - Lv) x Cos (x°).
Sen (Lp3) = Sen (-33° 02'.3) x Cos (**30°**)
Lp3 = 28° 10',5 S

Cálculo longitud punto 3 (Gp3).
Sen (x°) = Sen (90° - Lp3) x Sen (gx3)
Sen (x°) = Cos (Lp3) x Sen (gx3)
Sen (gx3) = Sen (**30°**) / Cos (-**28° 10',5**)
gx3 = 34° 33,3'W
Gp3 = Gv + gx3 = - 71° 46',5 + (-34° 33,3')
Gp3 = 106° 19,8' W

Resumen:

Punto (p)	Lv	x (p)	L (p)	Gv	g (p)	G (p)
1	33° 2,3'S	10	32° 28,4' S	71° 46,5'W	11° 52,7'W	83° 39,2'W
2	33° 2,3'S	20	30° 49,1' S	71° 46,5'W	23° 28,2'W	95° 14,7'W
3	33° 2,3'S	30	28° 10,5' S	71° 46,5'W	34° 33,3'W	106° 19,8'W

Caso 2: Dada la diferencia de longitud.

Para este caso es necesario conocer la diferencia de longitud entre la longitud del vértice y la longitud de cada uno de los puntos de la ortodrómica. Normalmente será valores enteros. Por ejemplo múltiplos de 10° (10°, 20°, 30°,...)

La distancia entre cada uno de los puntos dependerá de la diferencia de longitud que se defina.

En la figura N° 12 se observa el vértice (V) y lo puntos Px, en que la diferencia de longitud entre puntos (gx) es constante.

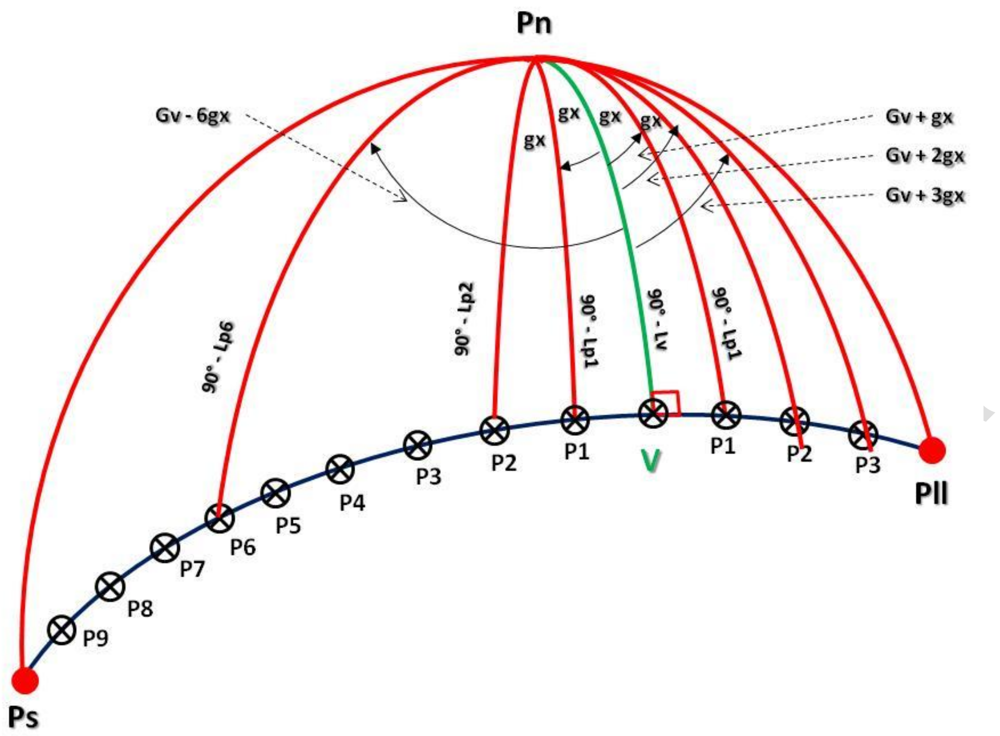


Fig. N° 12 **(“Puntos en que la diferencia de longitud entre puntos es constante").**

Para este cálculo se debe conocer:
- Coordenadas del vértice (Lv y Gv)
- Valor de la diferencia de longitud (gx)

Cálculo de la latitud de un punto (Lx).
En triángulo rectángulo PN – V – P1:

Sen (90° - gx) = Tan (90° - Lv) x Tan (Lp1). (Analogías de Napier)
Cos (gx) = Cot(Lv) x Tan (Lp1)
Tan (Lp1) = Cos (gx) x Tan (Lv)

Tan (Lp1) = Cos (gx) x Tan (Lv)

Cálculo de la distancia entre puntos (D1).

Sen (90° - Lv) = Tan (90° - gx) x Tan (D1). (Analogías de Napier)
Cos (Lv) = Cot (gx) x Tan (D1)
Tan (D1) = Cos (Lv) x Tan (gx)

Tan (D1) = Cos (Lv) x Tan (gx)

Ejemplo:
Siguiendo con la navegación de Valparaíso a isla de Pascua

Ps : Valparaíso L: 33° 02’S y G: 71° 40’W
Pll: Isla de Pascua L: 27° 10’S y G: 109° 27’W

Datos calculados en la etapa I
g = 37° 46’ W
DO = 1.981,84 millas
Ri = N 89°,94 W
Rll = N 109°,56 E

Datos calculados en la etapa II
Lv = 33° 02'.3 S
Gv = 71° 46',5 W

Definición para el cálculo
Considerar una diferencia de longitud (gx) de 10°.

Punto N° 1 de la ortodrómica (p1)
gx1 = 10°

Cálculo Latitud punto 1 (Lp1).
Tan (Lp1) = Cos (gx1) x Tan (Lv)
Tan (Lp1) = Cos (**10°**) x Tan (-33° 02'.3)
Lp1 = 32° 38',6 S

Cálculo de la distancia entre puntos (D1).
Tan (D1) = Cos (Lv) x Tan (gx1)
Tan (**D1**) = Cos (-33° 02'.3) x Tan (**10°**)
D1 = 8°, 40083
D1 = 504,5 millas

Punto N° 2 de la ortodrómica (p2)
gx2 = 20°

Cálculo Latitud punto 2 (Lp2).
Tan (Lp2) = Cos (gx2) x Tan (Lv)
Tan (Lp2) = Cos (**20°**) x Tan (-33° 02'.3)
Lp2 = 31° 25',8 S

Cálculo de la distancia entre puntos (D2).
Tan (D2) = Cos (Lv) x Tan (gx2)
Tan (D2) = Cos (-33° 02'.3) x Tan (**20°**)
D2 = 16°,9679
D2 = 1018.07 millas

Distancia entre P1 y P2 = D - D1 = 1018.07 - 504,5 millas
Distancia D(1-2) = 513.57 millas

Punto N° 3 de la ortodrómica (p3)

gx3 = 30°

Cálculo Latitud punto 3 (Lp3).

Tan (Lp3) = Cos (gx3) x Tan (Lv)
Tan (Lp3) = Cos (**30°**) x Tan (-33° 02'.3)
Lp3 = 29° 23',4 S

Cálculo de la distancia entre puntos (D3).

Tan (D3) = Cos (Lv) x Tan (gx3)
Tan (D3) = Cos (-33° 02'.3) x Tan (**30°**)
D3 = 25°,7842
D = 1549.61 millas

Distancia entre P2 y P3 = D - D1 -D3 = 1549.61 - 504,5 - 513.57 millas
Distancia D(2-3) = 531.53 millas

Punto de llegada de la ortodrómica (Pll)

Cálculo de la distancia entre puntos (D3).

g(v-ll) = Gll - Gv = (-109° 27') - (**-** 71° 46',5)
g(4) = 37° 40',5 W

Tan (D4) = Cos (Lv) x Tan (gx4)
Tan (D4) = Cos (-33° 02'.3) x Tan (**37° 40',5°**)
D4 = 32°,9163
D4 = 1974.98 millas

Distancia entre P2 y P3 = D4 - D1 - D(1-2) - D(2-3) = 1974.98 - 504,5 - 513.57- 531.53 millas
Distancia D(3-pll) = 427.373 millas

Resumen:

Punto (p)	Lv	g (x)	L (p)	Gv	D (v - p)	D (tramos)
1	33° 2,3'S	10	32° 38,3' S	81° 46,5'W	504,50	504,50
2	33° 2,3'S	20	31° 25,8' S	91° 46,5'W	1.018,07	513,57
3	33° 2,3'S	30	29° 23,4' S	101° 46,5'W	1.549,61	531,53
Pll	33° 2,3'S	37,675	27° 10,0' S	109° 27,0'W	1.974,98	425,37

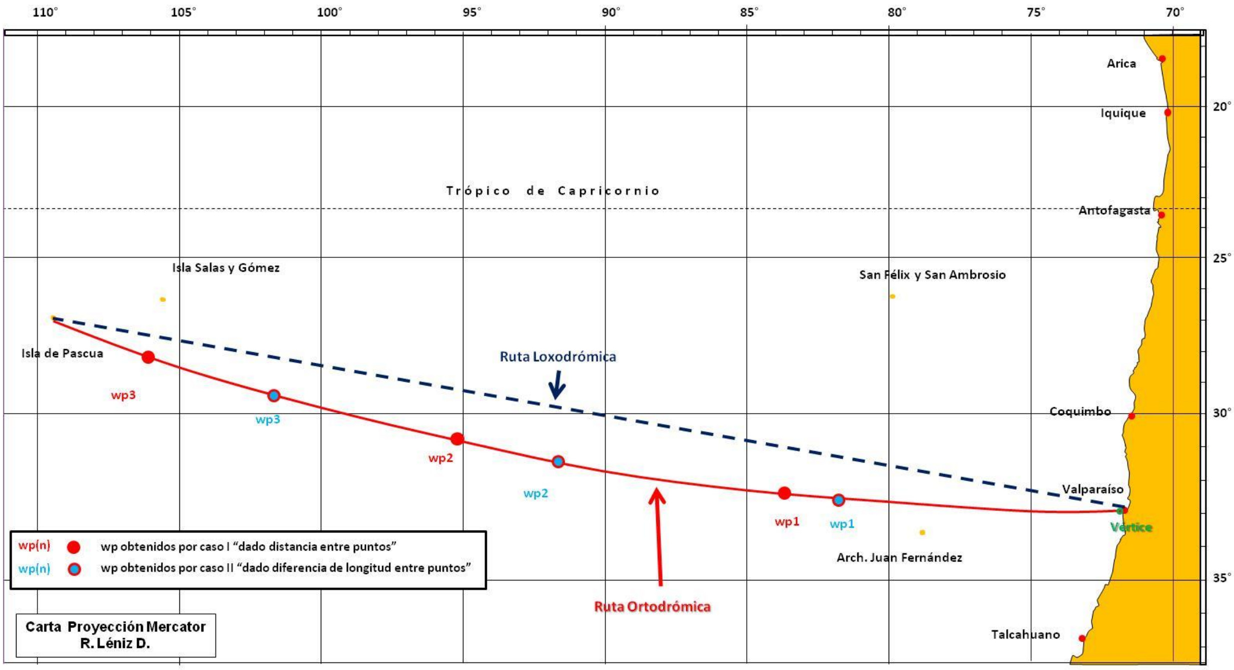


Fig. N° 13 **("Puntos ortodrómicos calculados, ploteados en carta Mercator")**

En Figura N° 13 se muestra la ruta loxodrómica y la ruta ortodrómica entre Valparaíso e Isla de Pascua. Se ha ploteado los puntos de control (WP) para los dos casos tratados anteriormente.

Caso 3: Cálculo conociendo la latitud o la longitud.

En ciertas circunstancia la ruta ortodrómica pasa por latitudes muy altas o por tierra, lo que hace necesario modificar la ruta.

En estos casos bastará con elegir dos de los puntos ya calculados, que al unirlos como loxodrómica, permite evitar navegar latitudes muy altas o pasar sobre costa.

Esos puntos de pueden definir por una latitud o por una longitud.

Por latitud:

Para determinar la longitud, se procede de igual manera que para determinar un punto de la ortodrómica es decir se emplea la siguiente fórmula

Cos (gx) = Tan (Lx) / Tan (Lv) (por Napier)

Siendo Lx la latitud del punto seleccionado y gx la diferencia de longitud entre el vértice y el punto seleccionado.

La longitud del punto será GX = Gv +gx

Por Longitud:

Se calcula la diferencia de longitud entre el vértice y la longitud dada. (gx)
luego se aplica la siguiente fórmula
Tan (Lpx) = Cos (gx) x Tan (Lv)

RESUMEN

En las cartas de proyección Mercator, las ortodrómicas se proyectan como una línea quebrada que es cercana al círculo máximo. Para trazarla en la carta, es necesario calcular las coordenadas de varios puntos de la ortodrómica.

Al final de estos apuntes, se adjuntan dos ejercicios completos de navegación ortodrómica.

Pasos:

1) Hacer un gráfico, que visualice la navegación. Considerar siempre el Polo norte como vértice del triángulo ortodrómico. Evita ambigüedades en los cálculos. Idealmente con una rosa de maniobras objeto obtener los puntos aproximados (Anexo C).

2) Calcular la distancia ortodrómica entre el Ps y Pll. Respetar los signos.
Cos (DO) = Sen (Ls) x Sen (Lll) + Cos (Ls) x Cos (Lll) x Cos (g) (Fórmula 1)

3) Calcular los ángulos interiores del triángulo esférico (Ri y Rll)
Cos (Ri)= (Sen (Lll) - Sen (Ls) x Cos (DO))/ (Cos (Ls) x Sen (DO)) (Fórmula 2)
Cos (Rll)= (Sen (Ls) - Sen (Lll) x Cos (DO))/ (Cos (Lll) x Sen (DO)) (Fórmula 6)
Si da negativo se suma 180°.
Considerar g en valor absoluto (signo +)

4) Calcular las coordenadas del vértice.
Cos (Lv) = Cos (Ls) x Sen (Ri))
Tan (gv) = 1 / (Sen (Ls) x Tan (Ri))
Gv = Gs + gv
Tener presente que el segundo vértice se encuentre en misma latitud pero con signo contrario y la longitud en el meridiano opuesto.

Si Ri y Rll son ambos mayores o menores de 90° vértice en ortodrómica
Si Ri es mayor o menor de 90° y Rll es menor o mayor de 90° vértice fuera de la ortodrómica

5) Calcular los puntos (WP) de la ortodrómica dada la distancia loxodrómica entre los puntos, normalmente 600 millas o menos. (Caso 1)
Sen (Lx) = Cos (x°) x Sen (Lv) siendo x° la distancia desde el vértice al WP.

Sen (gx) = Sen (x°) / Cos (Lx)
Gx = Gv + gx

6) Calcular los puntos (WP) de la ortodrómica dada la diferencia de longitud entre el vértice y el punto. (Angulo en el polo). ejemplo 5°, 10°, 15°, 20°, etc. Con lo anterior se obtiene la longitud del punto deseado, sumando o restando la diferencia de longitud a la longitud del vértice. Caso 2.
Tan (Lp) = Cos (gx) x Tan (Lv)

7) Calcular la distancia entre los puntos (WP).

Tan (Dx) = Cos (Lv) x Tan (gx)

8) Calcular un WP conociendo la latitud o la longitud.
   Por latitud:
   Cos (gx) = Tan (Lx) / Tan (Lv) (por Napier)

   Lx: latitud del punto seleccionado y gx la diferencia de longitud entre el vértice y el punto seleccionado. La longitud del punto: GX = Gv + gx

   Por Longitud:
   gx = Diferencia de longitud entre el vértice y la longitud dada.
   Tan (Lpx) = Cos (gx) x Tan (Lv)

Anexo "A"

Cálculo de la ortodrómica por carta Gnomónica

La solución gráfica de esta navegación, considera el uso de dos cartas. Una de proyección gnomónica y la segunda de proyección Mercátor.

En las cartas de proyección gnomónica, se debe recordar que líneas rectas trazadas en ellas, representan círculos máximos; además por el hecho de no ser uniforme no es posible medir directamente rumbos, direcciones y distancias como en una carta Mercátor.

El método usual de emplear una carta gnomónica es trazar el track o la ruta entre los puntos a navegar, luego marcar por ejemplo cada 5º de longitud puntos a lo largo de la ruta empleando la escala de latitudes y longitudes cercanas a estos.

En Figura N° 14 se ha trazado en una carta Gnomónica la ruta ortodrómica entre Miami y Lisboa. Nótese que la línea es recta.

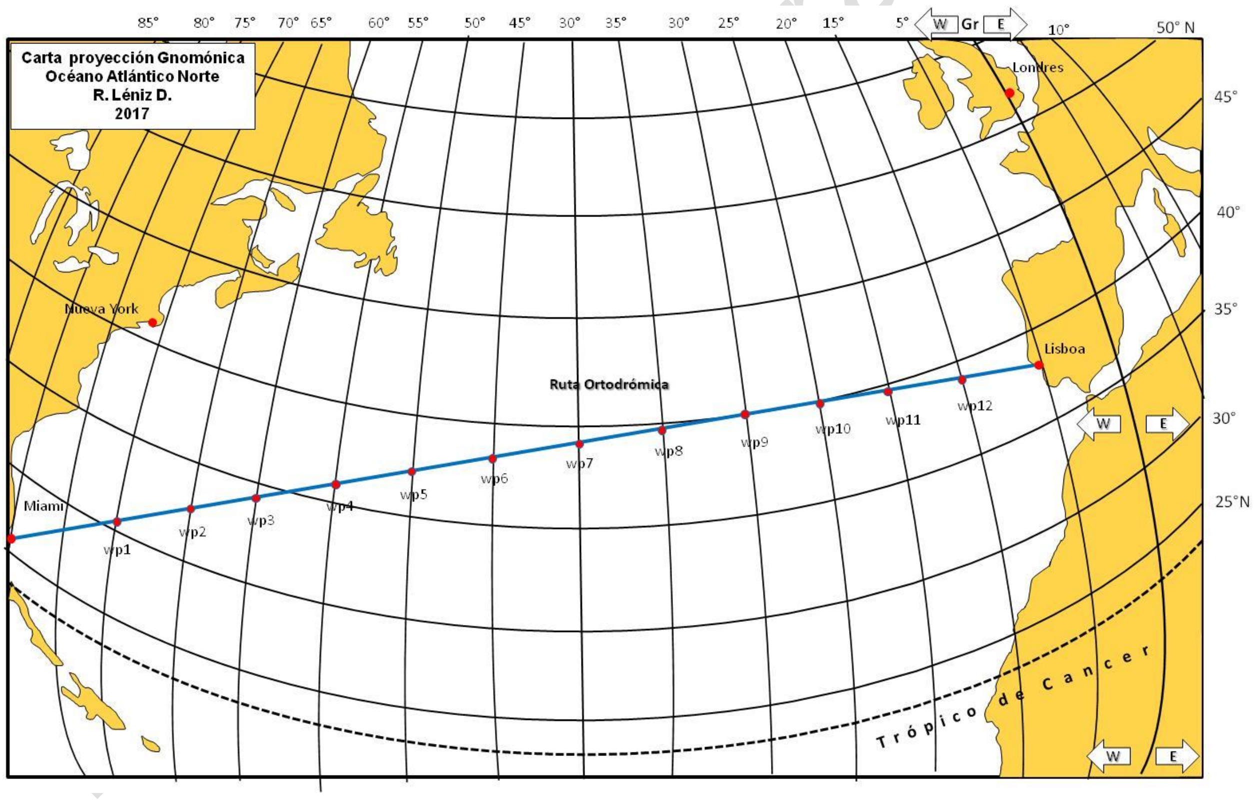


Fig. N° 14 **("Trazado de la ruta ortodrómica en carta Gnomónica")**

A continuación, transferir las coordenadas de cada punto a una carta Mercátor uniéndolos con líneas de rumbo. Ver figura N° 15.

El rumbo y distancia de cada tramo así formado podrán medirse y los puntos de ruta *way points* introducirse a un sistema de cartas electrónicas o Sistema de Posicionamiento Satelital.

wp	Lat (N)	Long (W)
wp1	30°,5	70°
wp2	32°,5	65°
wp3	34°,4	60°
wp4	36°,0	55°
wp5	37°,0	50°
wp6	38°,3	45°
wp7	39°,1	40°
wp8	39°,6	35°
wp9	40°,0	30°
wp10	40°,0	25°
wp11	39°,5	20°
wp12	39°,0	15°

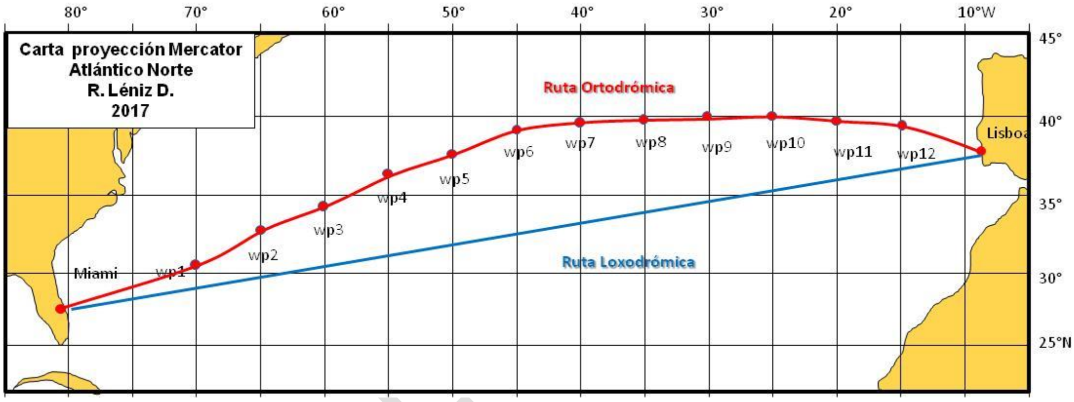


Fig. N° 15 **("Carta Mercator Atlántico Norte")**

Ejemplo Navegación Valparaíso a Isla de Pascua

En la carta gnomónica de la Figura N° 16, se ha trazado una línea recta entre Valparaíso e isla de Pascua, que corresponde a la ruta ortodrómica.

La intersección de los meridianos (cada 5°) dará los diferentes puntos de control (WP). Dichos puntos fueron traspasado a la carta Mercator de la misma área que se muestra en la figura N° 17.

Se puede observar que la línea recta corresponde a la loxodrómica y la curva a la ortodrómica con los respectivos WP. Esta última es más corta en distancia que la primera, pero debe ir variando en cada WP su rumbo.

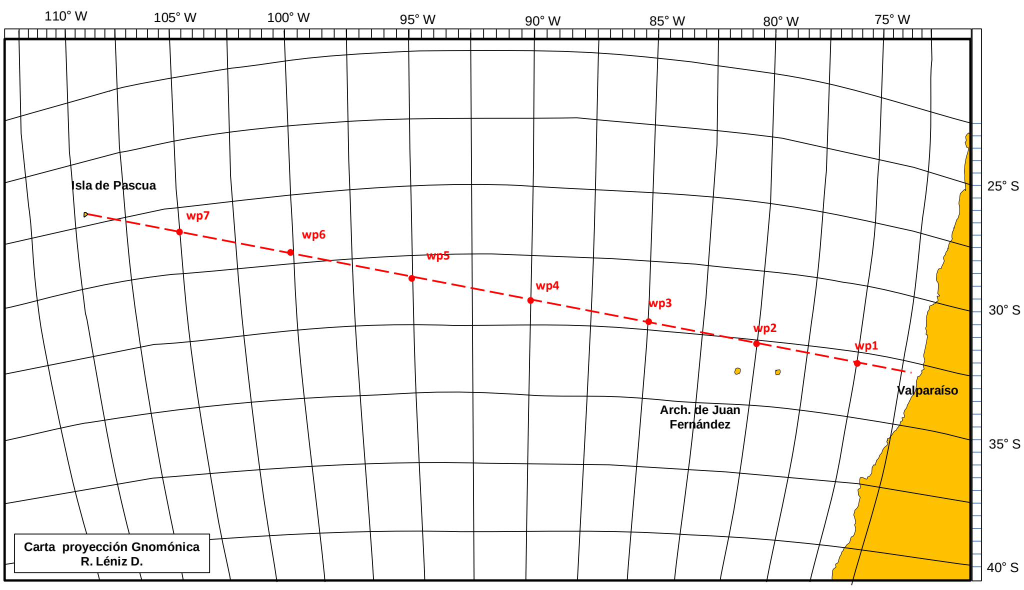


Fig. N° 16 **("Carta Gnomónica Valparaíso - Isla de Pascua")**

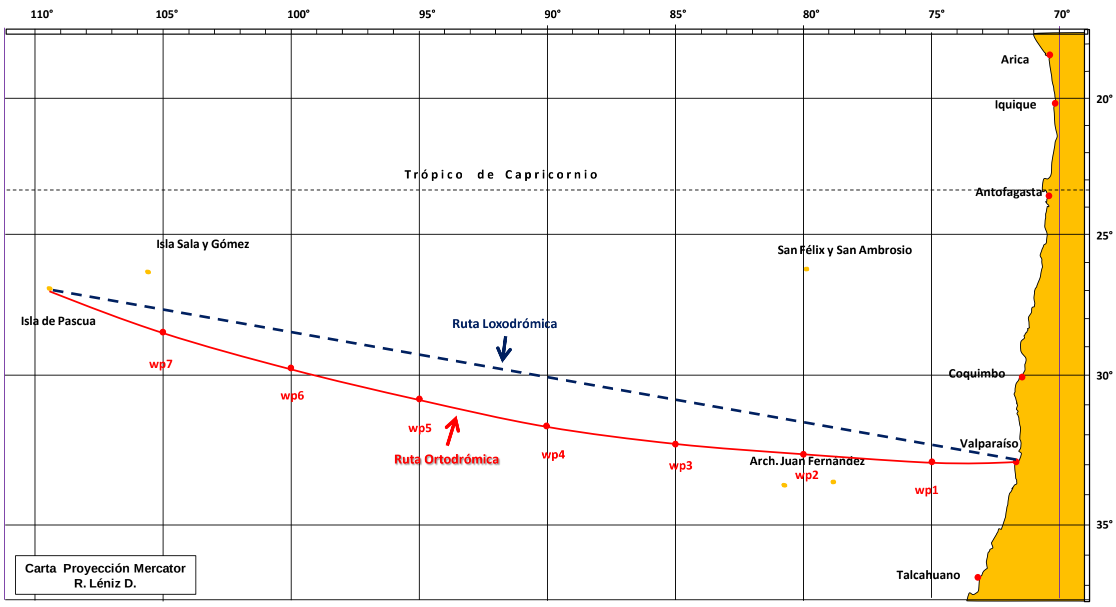


Fig. N° 17 **("Carta Mercator Valparaíso - Isla de Pascua")**

Anexo "B"

FÓRMULAS FUNDAMENTALES EN TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

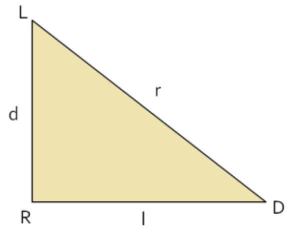
Ref.:
a) Tabla Rinehart, Mathematical tables, formulas y curvas
b) Apuntes del autor.

A.- Introducción:

La trigonometría esférica es fundamental para deducir y entender las diferentes fórmulas que intervienen en la resolución de los diversos problemas de navegación astronómica.

Es necesario recordar algunos conceptos de trigonometría plana:

1.- En un triángulo RLD:

	$sen\ D = \frac{d}{r}$	$csc\ D = \frac{r}{d}$
	$cos\ D = \frac{l}{r}$	$sec\ D = \frac{r}{d}$
	$tan\ D = \frac{d}{l}$	$ctn\ D = \frac{l}{d}$

2.- Algunas fórmulas de reducción:

sen (90 + R) = + cos R sen (90 - R) = + cos R	csc (90 + R) = + sec R csc (90 - R) = + sec R
cos (90 + R) = - sen R cos (90 - R) = + sen R	sec (90 + R) = - csc R sec (90 - R) = + csc R
tan (90 + R) = - ctn R tan (90 - R) = + ctn R	ctn (90 + R) = - tan R ctn (90 - R) = + tan R

B.- Conceptos preliminares

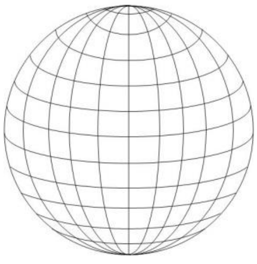


Fig. N° 18

1.- Esfera: Es un sólido limitado por una superficie curva, cuyos puntos equidistan de un punto interior llamada centro. Toda sección plana de una esfera es un circulo.

2.- Círculos máximo: es la superficie plana de una esfera que pasando por el centro de esta, se divide en dos partes iguales.

3.- Arco de Círculo Máximo: Es una parte o segmento de una circunferencia máxima

4.- Distancia entre dos puntos: Situados en la superficies de un esfera es la medida del arco del círculo máximo que los une, es la menor distancia entre ellos.

5.- Polos de un Esfera: Cualquier par de puntos de su superficie que están ubicadas diametralmente opuestos.

6.- **Polares:** Círculos máximos cuyo plano perpendicular al diámetro que un a los polos

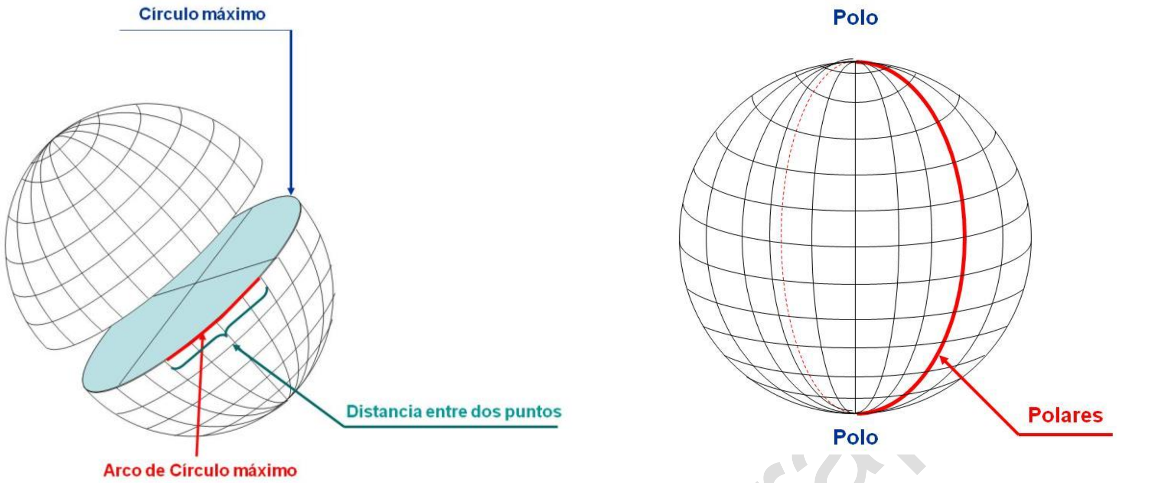


Fig. N° 19

7.- Angulo esférico:
Son los formados en la superficie de una esfera por dos arcos de círculo máximo que se cortan.

8.- Triangulo esférico:
Es aquella parte de la superficie de la esfera, encerrada por tres circunferencias máximas (R.L.D., r,l,d,)

9.- Unidad de medidas:
Es la medida angular llamado “grado de arco”.

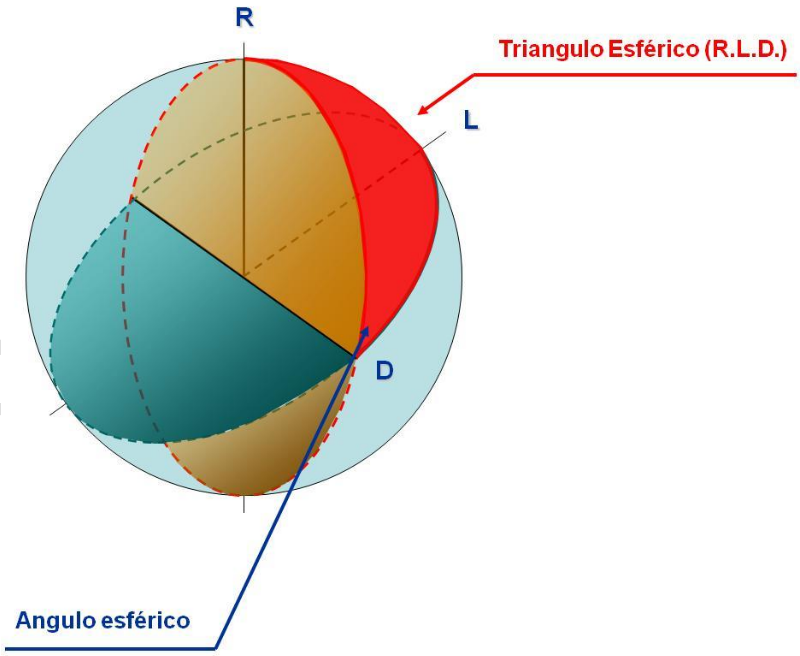


Fig. N° 20

10.- Triángulo esférico

a. Si tres puntos de la superficie esférica son unidos por arcos de círculo máximo menores a 180º, la figura obtenida se denomina triángulo esférico.

b. Los lados del polígono así formado se expresan por conveniencia como ángulos cuyo vértice es el centro de la esfera y no por su longitud.

c. En un triángulo esférico los ángulos cumplen que: 180° < R + L + D < 540°

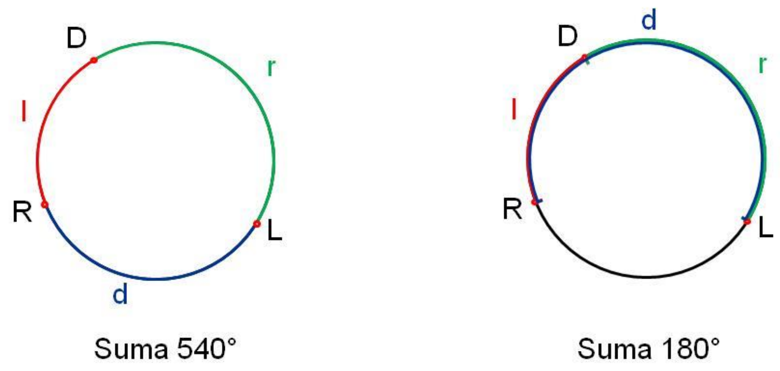


Fig. N° 21

C.- Reglas

Triángulo esférico rectangular.

1.- Analogías de Napier.

En un triángulo esférico rectangular.

Sin considerar el ángulo recto D, el triángulo esférico RLD, está formado por 5 partes constituyentes que, si se colocan una tras otra aparece la segunda figura, quedando en el siguiente orden: r, l, R, d, L, agregando (90° - ___) al lado d (contrario al ángulo recto D) y a los ángulos R y L.

Cualquiera de las partes de este círculo se puede llamar parte media, las dos parte vecinas se llamarían partes adyacentes mientras que dos restantes se llamarían partes opuestas, entonces podemos expresar las reglas de Napier,

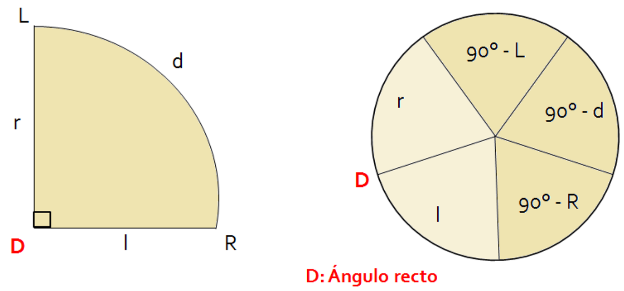


Fig. N° 23

Reglas:

“El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes”

sen l = tan r x tan (90 – R)

sen l = tan r x ctg R

“El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de los cosenos de las partes opuestas”

sen (90 – R) = cos r x cos (90 – L)
sen (90 – R) = cos r x sen L

Triángulo esférico cualquiera

2.- Ley de los senos.

En un triángulos esférico cualquiera

$$\frac{\text{sen r}}{\text{sen R}} = \frac{\text{sen l}}{\text{sen L}} = \frac{\text{sen d}}{\text{sen D}}$$

Ejemplo: si r = 30°; l = 110° y L = 55°

Calcular R

$$sen\, R = \frac{sen\, r\ x\ sen\, L}{sen\, l}$$

Resultado R = 25,8°

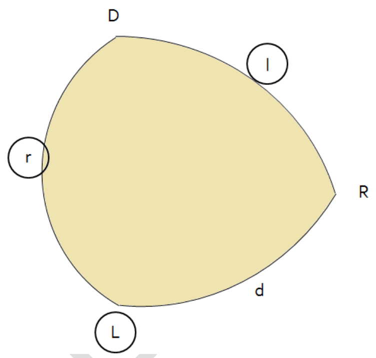


Fig. N° 24

3.- Ley "coseno de los lados".

Se emplea cuando en un triángulo esférico cualquiera, hay entre valores conocidos e incógnitas, mayoría de lados, se aplica la relación *cosenos de los lados*, siempre que la incógnita sea el ángulo que interviene o el lado opuesto a ese ángulo".

Regla:
"El coseno del lado opuesto al ángulo que interviene es igual al producto (x) de los cosenos de los otros dos lados más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos lados por (x) el coseno del ángulo que interviene".

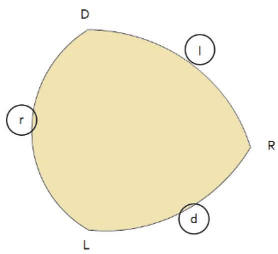


Fig. N° 25

Ejemplo:
Se conocen los tres lados r, l y d. se pide los tres ángulos R, L y D.

Cálculo de R
R = Ángulo que interviene o incógnita.
r = Lado opuesto al ángulo que interviene.
cos **r** = cos l x cos d + sen l x sen d x cos R
cos **R** = cos r x cse l x csc d – ctn l x ctn d

Si r = 48°; l = 105°; d = 80°.
Respuesta: R = 41°,351707
L= 120°, 8247
D = 61°,107218.

4.- Ley "coseno de los ángulos".

Cuando en un triángulo esférico cualquiera, hay entre valores conocidos e incógnitas, mayoría de ángulos, se aplica la relación coseno de los ángulos, siempre que la incógnita sea el lado que interviene o el ángulo opuesto a ese lado que interviene.

Regla:

"Coseno del ángulo opuesto al lado que interviene es igual a menos (-) el producto (x) de los cosenos de los otros dos ángulos más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos ángulos multiplicado (x) por el coseno del lado que interviene"

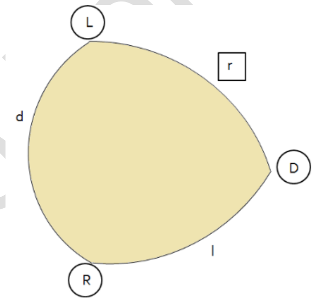


Fig. N° 26

cos R = - cos L x cos D + sen L x sen D x cos **r**
cos L = - cos R x cos D + sen R x sen D x cos **l**
cos D = - cos R x cos L + sen R x sen L x cos **d**

Ejemplo:
R =54°; L = 110°; D = 80°

Calcular r, l y d.

Respuestas:
r = 50°, 5683
l = 115°,421997
d = 92°, 06445

5.- Relación de los cuatro elementos consecutivos

Cuando en un triángulo esférico cualquiera de los valores conocidos y la incógnita están dispuestos consecutivamente, se aplica esta regla, siempre que la incógnita sea uno de los extremos de los cuatro elementos consecutivos.

Ver figura N° 27

Regla:
Caso 1: Incógnita **ángulo** ubicado en el extremo
"La cotangente del ángulo extremo (incógnita) por (x) el seno del otro ángulo que interviene, es igual a la cotangente del lado extremo por (x) el seno del otro lado que interviene menos (-) el producto del coseno de los elementos del medio"

Caso 2: Incógnita **lado** ubicado en el extremo

"La cotangente del lado extremo (incógnita) por (x) el seno del otro lado que interviene, es igual a la cotangente del ángulo extremo por el seno del otro ángulo que interviene más (+) el producto del coseno de los elementos del medio"

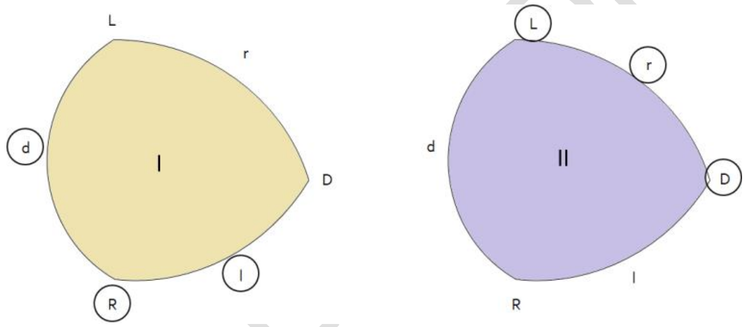


Fig. N° 27

Caso I

ctn **L** x sen R = ctn l x sen d – cos R x cos d

Despejando L:
ctn **L** = ctn l x sen d x csc R – ctn R x cos d

ctn **D** x sen R = ctn d x sen l – cos R x cos l

Despejando D:
ctn **D** = ctn d x sen l x csc R – ctn R x cos l

Caso II
ctn **l** x sen r = ctn L x sen D – cos D x cos r
ctn **d** x sen r = ctn D x sen L – cos L x cos r

Ejemplo:
R = 55° 17'; l = 110°; d = 64° 14' 51". Calcular r, L y D.
Respuesta: r = 71°,6; L= 124°,9865; D=51°,74588.

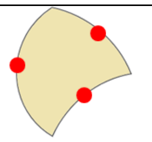
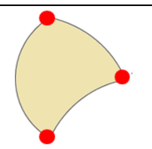
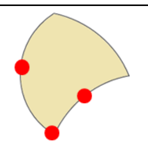
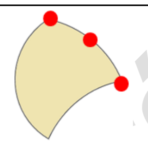
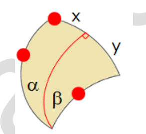
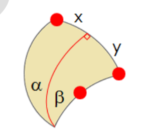
Ejemplo:
l = 71°24'; d =124°47'; R=137°35'

Calcular L
ctn **L** = ctn l x sen d x csc R – ctn R x cos d
L = 101°,66

Calcular D
ctn **D** = ctn d x sen l x csc R – ctn R x cos l
D = 122°,0822

Calcular r
cos r = cos l x cos d + sen l x sen d x cos R ("Ley coseno de los lados")
r = 139°,1681219

Resumen:

						
Gráfica-mente	si	no	si	si	si	no
Fórmulas	Coseno de los lados	Coseno de los ángulos	Los ángulos por los 4 elementos consecutivos. El lado por el coseno de los lados.	Los lados por los 4 elementos consecutivos. El ángulo por coseno de los angulo	El ángulo por la ley de los senos. Incógnita por Manduit o Napier.	El lado por ley del seno. Incógnitas por Manduit o Napier

1. **Coseno de los lados:** "El coseno del lado opuesto al ángulo que interviene es igual al producto (x) de los cosenos de los otros dos lados más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos lados por (x) el coseno del ángulo que interviene".

2. **Coseno de los ángulos:** "Coseno del ángulo opuesto al lado que interviene es igual a menos (-) el producto (x) de los cosenos de los otros dos ángulos más (+) el producto (x) de los senos de esos mismos ángulos multiplicado (x) por el coseno del lado que interviene".

3. **Relación de los 4 elementos consecutivos (Incógnita lado):** "La cotangente del lado extremo (incógnita) por el seno del otro lado que interviene, es igual a la cotangente del ángulo extremo por el seno del otro ángulo que interviene más el producto del coseno de los elementos del medio"

4. **Relación de los 4 elementos consecutivos (incógnita ángulo):** "La cotangente del ángulo extremo (incógnita) por el seno del otro ángulo que interviene, es igual a la cotangente del lado extremo por el seno del otro lado que interviene menos el producto del coseno de los elementos del medio"

5. **Ley de los senos:** $\frac{\text{sen } r}{\text{sen } R} = \frac{\text{sen } l}{\text{sen } L} = \frac{\text{sen } d}{\text{sen } D}$

6. **Regla de Napier (Triángulo esférico rectangular).**
   a. “El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de las tangentes de las partes adyacentes”
   b. “El seno de cualquier parte media es igual (=) al producto de los cosenos de las partes opuestas”

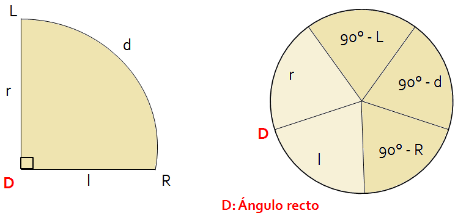


Fig. N° 28

Ejercicio N° 1

Trazar la ruta ortodrómica entre Iquique y Yokohama

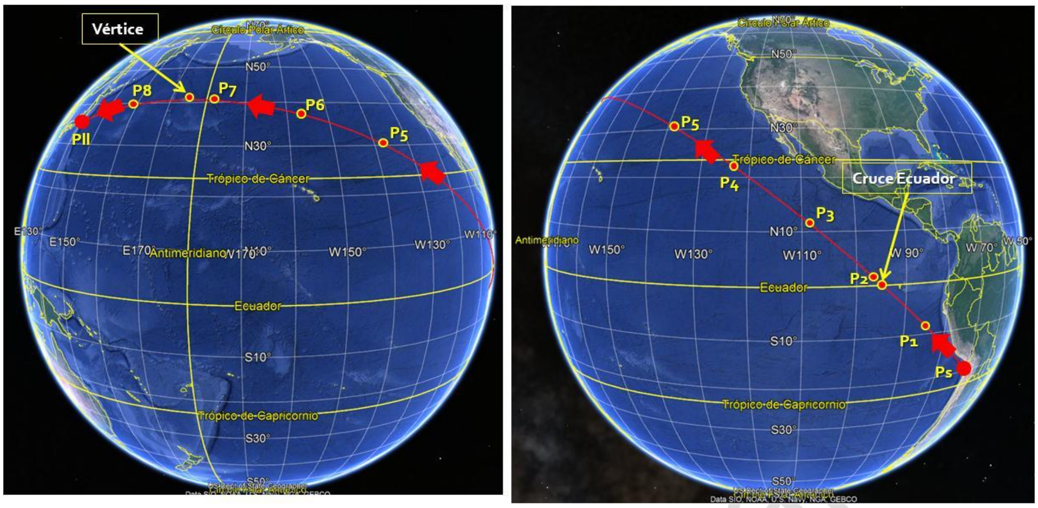


Fig. N° 29 **("Ruta ortodrómica entre Iquique y Yokohama")**

Ps: Iquique L: 20° 12’S y G: 70° 10’W
Pll: Yokohama L: 34° 50’N y G: 139° 45’E

Desarrollo:
g= 209° 55' W

1. Cálculo distancia ortodrómica (DO)

Cos (DO) = Sen (Ls) x Sen (Lll) + Cos (Ls) x Cos (Lll) x Cos (g) (Fórmula 1)
Cos (DO) = Sen (- 20° 12’S) x Sen (34° 50’N) + Cos (-20° 12’) x Cos (34° 50’N) x Cos (-209° 55')
DO = 149°,873236

2. Cálculo Ri

Cos (Ri)= (Sen (Lll) - Sen (Ls) x Cos (DO))/ (Cos (Ls) x Sen (DO)) (Fórmula 2)

Cos (Ri)= (Sen (34°50’)-Sen (-20°12’)xCos(149°,87))/(Cos (-20°12’)xSen (149°,87))
Ri = N 54°,649 W
Rs = 305°,4

3. Cálculo Rll

Cos (Rll)= (Sen (Ls) - Sen (Lll) x Cos (DO))/ (Cos (Lll) x Sen (DO)) (Fórmula 6)
Cos (Rll)= (Sen (-20°12’) - Sen (34°50’)xCos (149°,87))/(Cos (34°50') x Sen (149°,87))

Rll = N 68°,84 E
Rf = 248°,84

Ambos ángulos interiores son menores de 90°, es decir el vértice se encuentra en la ortodrómica.

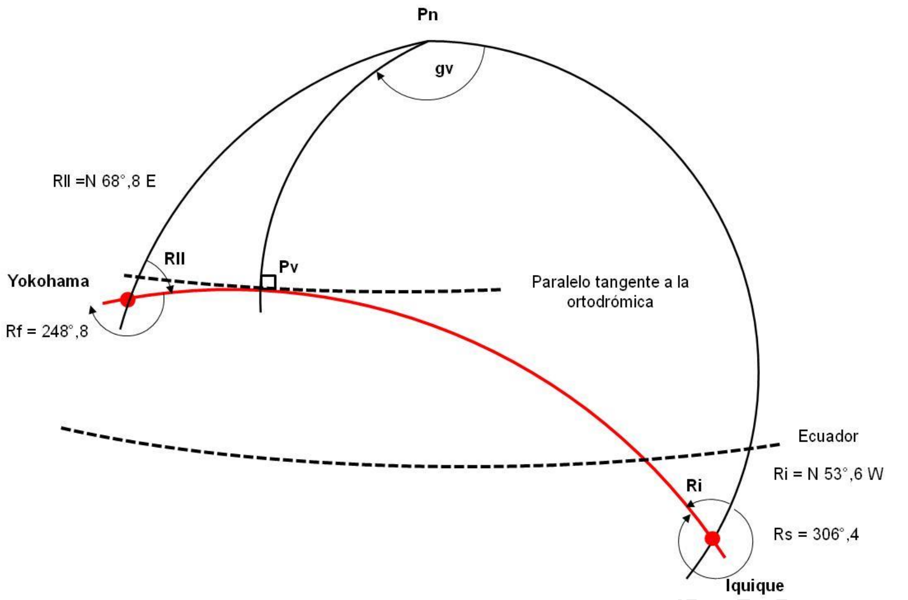


Fig N°18

Fig N° 30 ("**Cálculo de coordenadas del vértice ortodrómico"**)

4. Cálculo coordenadas del vértice

Cos (Lv) = Cos (Ls) x Sen (Ri) *(Fórmula 8)*
Cos Lv = Cos (-20° 12')x Sen (***54°,649***)
Lv =40° 03',1 N

Tan (gv) = 1 / (Sen (Ls) x Tan (Ri)) *Fórmula 9)*
Tan (gv) = 1 / (Sen (-20° 12') x Tan (***54°,649***))
gv = - 64°02',8 (este valor negativo corresponde al otro vértice del hemisferio sur de la ortodrómica, por ende habrá que sumar 180°)
gv = 180° - 64°02',8 = 115° 57',3 W
Gv = Gs + gv = - 70° 10' W + (*-115° 57',3)*
Gv = 186° 07',3 W
Gv = 360 – **Gv = 173° 52,7 E**

5. Determinación de varios puntos en la ortodrómica.

Tan (Lpn) = Cos (gn) x Tan (Lv) (Fórmula 13)

Se empleará el caso 2, asumiendo una diferencia de longitud de 20° entre los meridianos de los puntos.

Para evitar trabajar con minutos y segundos, se asumirá que
Gs = 70° 10' W
G1 = 90° W
G2 = 110° W
G3 = 130° W
G4 = 150° W
G5 = 170° W
Gv = 173° 55.1
G6 = 150° E
Gll = 139° 45' E

Fórmula a emplear:
Tan Ln = Cos g x Tan Lv (Fórmula 6)
Lv = 40° 05',6 N

n	Gv	Gn	G= Gv-Gn	Ln
1	173° 55,1 E	090° W	96° 04’,9 E	05° 05’,8 S
2	173° 55,1 E	110° W	76° 04’,9 E	11° 26’,9 N
3	173° 55,1 E	130° W	56° 04’,9 E	25° 09’,8 N
4	173° 55,1 E	150° W	36° 04’,9 E	34° 13’,8 N
5	173° 55,1 E	170° W	16° 04’,9 E	38° 58’,2 N
6	173° 55,1 E	150° E	23° 55,1 W	37° 34’,9 N

Nota: el signo de Ln es opuesto al de Lv cuando la diferencia de longitud es mayor de 90° (g = Gv - Gn > 90°)

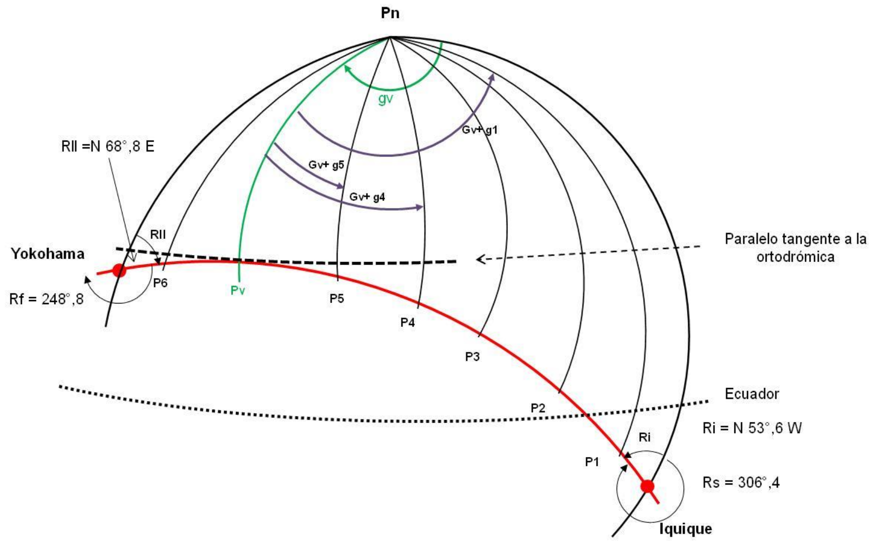


Fig N° 31 (“**Ejemplo de determinación de varios Puntos en la ortodrómica”**)

Ejercicio N° 2

Calcular la Ortodrómica entre Auckland (Nueva Zelandia) y San Francisco (USA)

Datos:
Ps = Ls: 36° 00’S y Gs = 175° 20’ E
Pll = Lll: 37° 42’N y Gll = 122° 34’ W

g = Gll – Gs = 62° 06’ E

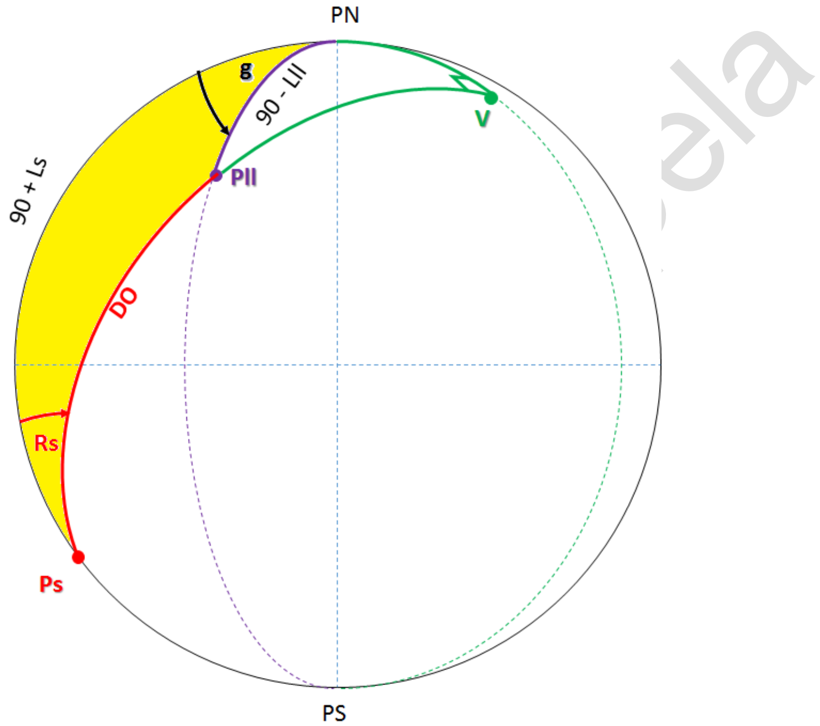


Fig N° 32 **(“Triángulo ortodrómico”)**

a) Cálculo Distancia Ortodrómica (DO)

Cos DO = Sen Ls x Sen Lll + Cos Ls x Cos Lll x Cos g (Fórmula 1)
Cos DO = Sen (-36°00’) x Sen (37°42’)
+ Cos (-36°00’) x Cos (37°42’) x Cos (62°06’) (Fórmula 1)

DO = 93°,435
DO = 5.606,1 Millas

b) Cálculo ángulo o Rumbo Inicial (Ri)
Se utilizó la fórmula del seno
Sen (Ri) = Sen (g) x Cos (Lll) / Sen (DO)(Fórmula 3)
Sen (Ri) = Sen (62°06’) *x Cos (*37°42’) */ Sen* (93°,435*)*
Ri = N 44°,46 E

c) Cálculo ángulo o Rumbo Llegada (Rll)
Se utilizo la fórmula del seno
Sen (Rll) = Sen (g) x Cos (Ls) / Sen (DO)(Fórmula 5)
Sen (Rll) = Sen (62°06’) *x Cos* (-36°00’) */ Sen* (93°,435*)*

Rll = N 45°,6 W

d) Cálculo vértice

Latitud del vértice (Lv)
Cos (Lv) = Cos (Ls) x Sen (Ri) (Fórmula 8)
Cos (Lv) = Cos (-36°00’) x Sen (44°,46)

Lv = 55° 29',0 N

Longitud vértice (Gv)
Tan (gv) = 1 / (Sen (Ls) x Tan (Ri)) (Fórmula 9)
Tan (gv) = 1 / (Sen (-36°00’) x Tan (44°,46))
gv = -60° 01',4
gv = 180° - 60° 01',4 = 119° 58',6
Gv = Gs + g = 175° 20’ E + 119° 58',6 E = 295° 18',6 E
Gv = 360° - 295° 18' E
Gv = 064° 41’,4 W

e) **Determinación de los puntos de la ortodrómica**.

Conociendo el vértice, que se encuentra fuera de la ortodrómica, es necesario definir el ángulo (g1, g2,…. g6) entre el vértice y el punto respectivo.

En el caso del ejemplo la separación entre meridianos será de 10°, es decir corresponde aplicar las formulas del caso 2.

Como la Longitud del punto de llegada es 122° 34’W, se asumirá por conveniencia que p1 se encontrará en 130°W, el p2 en 140° y así sucesivamente hasta el p6 en 180° E/W.
Procedimiento

Primer punto (P1):
Tan (Lp) = Cos (gx) x Tan (Lv) (Fórmula 13)
gx1 = 130° - Gv = -130° - (- 064° 41’,4) = 65° 18',6 W
Tan (Lp1) = Cos (-65° 18',6) x Tan (55° 29',0)
Lp1 = 31° 16'.4 N ; Gp1 = 130° W

Segundo punto (P2):
Tan (Lp) = Cos (gx) x Tan (Lv) (Fórmula 13)
gx2 = 140° - Gv = -140° - (- 064° 41’,4) = 75° 18',6 W
Tan (Lp2) = Cos (-75° 18',6) x Tan (55° 29',0)
Lp2 = 20° 14'.5 N ; Gp2 = 140° W

Análogamente con el resto de los puntos

Pto. N°	Gv	Gp	g	Tag Lv	cos gx	atan (cos (gx) x Tan (Lv))	Lpn
1	- 64,69	130° 0,0' W	- 65,31	1,45	0,61	31,27	31° 16,4' N
2	- 64,69	140° 0,0' W	- 75,31	1,45	0,37	20,2412	20° 14,5' N
3	- 64,69	150° 0,0' W	- 85,31	1,45	0,12	6,7803	6° 46,8' N
4	- 64,69	160° 0,0' W	- 95,31	1,45	- 0,13	- 7,6642	7° 39,9' S
5	- 64,69	170° 0,0' W	- 105,31	1,45	- 0,38	- 21,0040	21° 0,2' S
6	- 64,69	180° 0,0' W	- 115,31	1,45	- 0,62	- 31,8672	31° 52,0' S

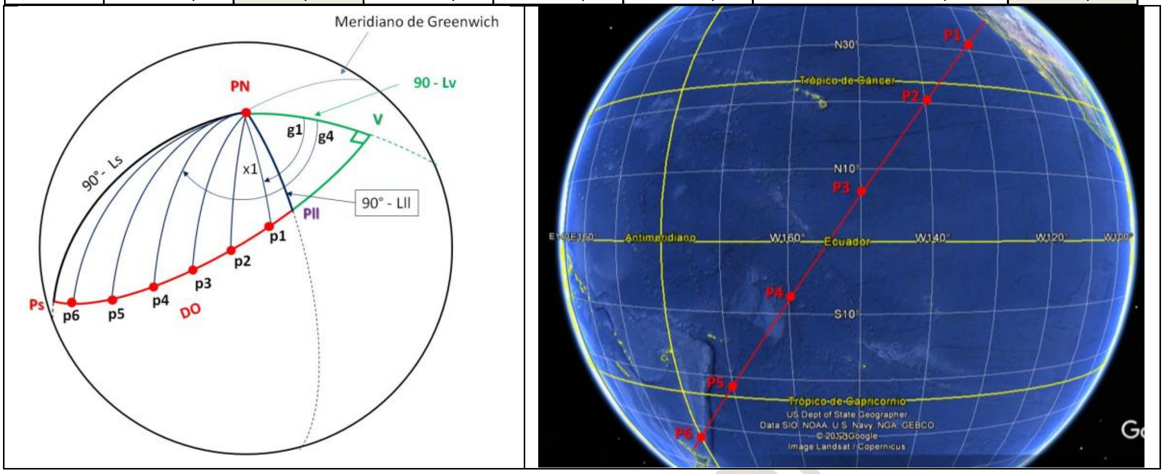


Fig. N° 33 **("Ruta ortodrómica")**

Ejercicio N° 3

Calcular la ortodrómica desde Iquique a Puerto Luganville isla Vanuatu

Coordenadas:
Ps= Ls: 20° 11'S Gs: 70° 09' W
Pll = Lll: 15° 30' S Gll: 167° 11'E

g= Lll - Ls = +167° 11' - (-70° 09') = 237° 20' E
g = 237° 20' - 360° = 122° 40' W
g = 122°,667 W

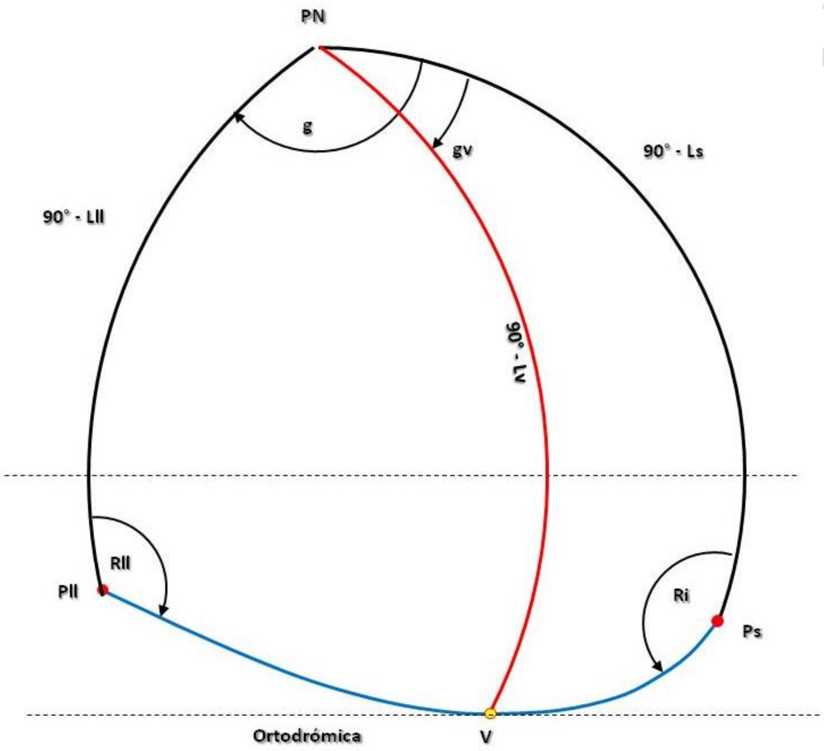


Fig. N° 34 **("Triángulo Ortodrómico")**

a) **Cálculo Distancia Ortodrómica (DO)**

Cos DO = Sen Ls x Sen Lll + Cos Ls x Cos Lll x Cos g (Fórmula 1)
Cos DO = Sen (-20°11') x Sen (-15°30')
+ Cos (-20°11') x Cos (-15°30') x Cos (**-122°,667**) (Fórmula 1)

DO = 113°,327
DO = 6.799,6 Millas

b) **Cálculo ángulo o Rumbo Inicial (Ri)**

Alternativa N° 1
Rs = 2 x Arctan [Cos (Ls) x Cos (Lll) x Sen (g) / ((Sen (DO°– Ls) + Sen (Lll))] (Fórmula 4)

Rs = 2 x Arctan [Cos (-20°11') x Cos (-15°30') x Sen (-122°,667) / ((Sen (113°,327– (-20°11') + Sen (-15°30'))]
Rs = - 117°,94 = 360° - 117°,94
Rs = 242°,06
Ri = N 117°,94 W

Alternativa N° 2
Cos (Ri) = (Sen (Lll) - Sen (Ls) x Cos (DO))/ (Cos (Ls) x Sen (DO)) (Fórmula 2)
Cos (Ri) = (Sen (-15°30') - Sen (-20°11') x Cos (113°,327))/ (Cos (-20°11') x Sen (113°,327))
Cos (Ri) = -0,46858474
Ri = N 117°,84W

c) Cálculo ángulo o Rumbo Llegada (Rll)
Cos (Rll)= (Sen (Ls) - Sen (Lll) x Cos (DO))/ (Cos (Lll) x Sen (DO)) (Fórmula 5)
Cos (Rll)= (Sen (-20°11') - Sen (-15°30') x Cos (113°,327)/ (Cos (-15°30') x Sen (113°,327))

Rll = N 120°.631 E

d) Cálculo vértice

Latitud del vértice (Lv)
Cos (Lv) = Cos (Ls) x Sen (Ri) (Fórmula 8)
Cos (Lv) = Cos (-20°11') x Sen (117°,84)
Lv = 33° 59',2 S

Longitud vértice (Gv)
Tan (gv) = 1 / (Sen (Ls) x Tan (Ri)) (Fórmula 9)
Tan (gv) = 1 / (Sen (-20°11') x Tan (117°,84))
gv = -56° 57',5 = 56° 57',5 W
Gv = Gs + g = 070° 09' W + 56° 57',5 W = 127° 06',5 W
Gv = 127° 06',5 W

e) Determinación de los puntos de la ortodrómica.

Para este cálculo se va a considerar que la distancia a navegar entre cada punto será de 600 millas, es decir x = 10°

Procedimiento

Primer punto (P1 y Pa):
Sen (Lp1) = Cos (x1) x Sen (Lv) (Fórmula 11)
Sen (Lp1) = Cos (10°) x Sen (- **33° 59',2***)*
Lp1 = 33° 24,1 S

Sen (gx1) = Sen (x1) / Cos (Lp1) (Fórmula 12)
*Sen (gx1) = Sen (10°) / Cos (-***33° 24',1***)*
gx1 = 12° 00',3

Gx1 = Gv + gx1
Gx1 = - **127° 06',5 + 12° 00',3**

Gx1 = 115° 06',2 W

Gxa = - **127° 06',5 - 12° 00',3**
Gxa = 136° 06',8 W

Segundo punto (P2 y Pb):

Sen (Lp2) = Cos (x2) x Sen (Lv) (Fórmula 11)
Sen (Lp2) = Cos (20°) x Sen (- **33° 59',2***)*
Lp2 = 31° 41,2 S

Sen (gx2) = Sen (x2) / Cos (Lp2) (Fórmula 12)
*Sen (gx2) = Sen (20°) / Cos (-***31° 41',2***)*
gx2 = 23° 41',9 W

Gx2 = Gv + gx2
Gx2 = - **127° 06',5 + 23° 41',9**
Gx2 = 103° 24',5 W

Gxb = - **127° 06',5 - 23° 41',9**
Gxb = 150° 48',4 W

Tercer punto (P3 y Pc):

Sen (Lp3) = Cos (x3) x Sen (Lv) (Fórmula 11)
Sen (Lp3) = Cos (30°) x Sen (- **33° 59',2***)*
Lp3 = 28° 57',2 S

Sen (gx3) = Sen (x3) / Cos (Lp3) (Fórmula 12)
*Sen (gx3) = Sen (30°) / Cos (-****28° 57',2****)*
gx3 = 34° 50',9 W

Gx3 = Gv + gx3
Gx3 = - 127° 06',5 + 34° 50',9
Gx3 = 92° 15',5 W

Gxc = - 127° 06',5 - 34° 50',9
Gxc = 161° 57',4 W

Cuarto Punto (P4 y Pd):

Sen (Lp4) = Cos (x4) x Sen (Lv) (Fórmula 11)
Sen (Lp4) = Cos (40°) x Sen (- **33° 59',2***)*
Lp4 = 25° 21',6 S

Sen (gx4) = Sen (x4) / Cos (Lp4) (Fórmula 12)
Sen (gx4) = Sen (40°) / Cos (-25° ***21',3****)*
gx4 = 45° 20',5 W

Gx4 = Gv + gx4
Gx4 = - 127° 06',5 + *45° 20',5*
Gx4 = 81° 46',0 W

Gxd = - 127° 06',5 - *45° 20',5*
Gxd = 172° 26',9 W

Quinto Punto (P5 y Pe):

Sen (Lp5) = Cos (x5) x Sen (Lv) (Fórmula 11)
Sen (Lp5) = Cos (50°) x Sen (- **33° 59',2***)*
Lp5 = 21° 03',5 S

Sen (gx5) = Sen (x5) / Cos (Lp5) (Fórmula 12)
*Sen (gx5) = Sen (50°) / Cos (-****21° 03',5****)*
gx5 = 55° 10',3 W

Gx5 = Gv + gx5
Gx5 = - 127° 06',5 + *55° 10',3*
Gx5 = 81° 46',0 W

Gxe = - 127° 06',5 - 55° *10',3*
Gxe = 182° 16',8
Gxe = 177° 43',2 E

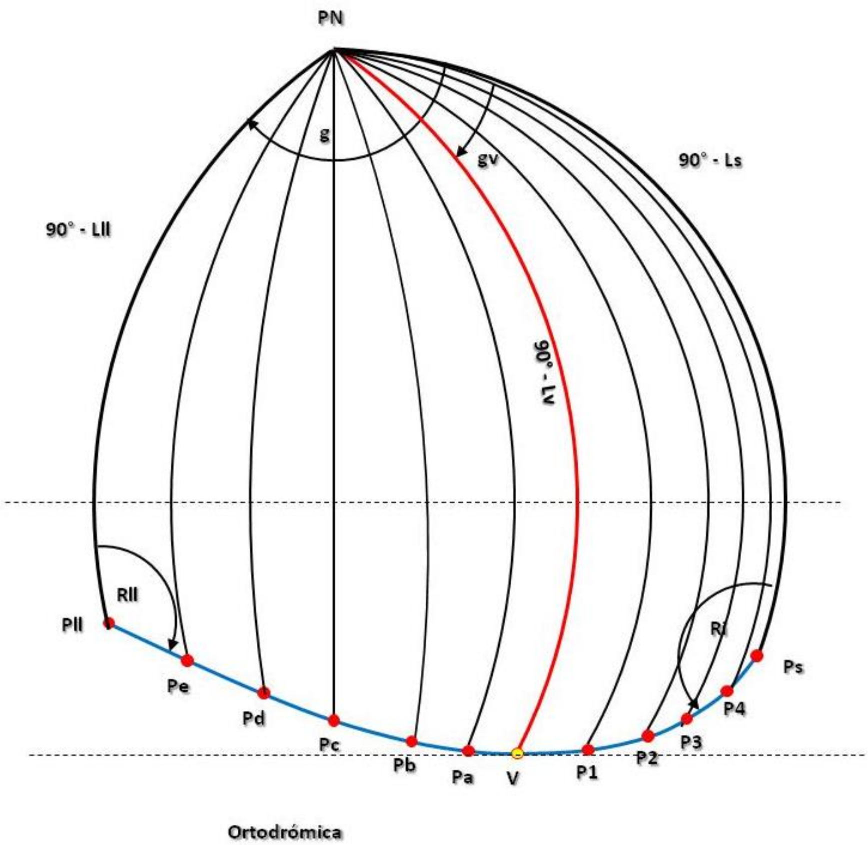


Fig. N° 34 **("Ruta con los WP")**