

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID



**ESCUELA TÉCNICA
SUPERIOR DE INGENIERÍA Y
SISTEMAS DE
TELECOMUNICACIÓN**



PROYECTO FIN DE CARRERA

ANÁLISIS DE REFLECTORES EN MATLAB

AUTOR:

Katherine Alexandra Chuquimarca Yáñez

TUTOR:

Leandro de Haro Ariet

Noviembre 2014



E.T.S.I.S. TELECOMUNICACIÓN

PROYECTO FIN DE CARRERA PLAN 2000

TEMA:	PUESTA A PUNTO DE UNA HERRAMIENTA EDUCACIONAL Y ANÁLISIS DE REFLECTORES Y BOCINAS EN ENTORNO MATLAB (SABOR)	
TÍTULO:	ANÁLISIS DE REFLECTORES EN MATLAB	
AUTOR:	Katherine Alexandra Chuquimarca Yáñez	
TUTOR:	Leandro de Haro Ariet	Vº Bº.
DEPARTAMENTO:	TSC	
Miembros del Tribunal Calificador:		
PRESIDENTE:	Lourdes López Santidrián	
VOCAL:	Leandro de Haro Ariet	
VOCAL SECRETARIO:	Florentino Jimenéz	
DIRECTOR:		
Fecha de lectura:		
Calificación:	El Secretario,	

RESUMEN DEL PROYECTO:

El Proyecto Fin de Carrera describe la metodología, las técnicas de análisis necesarias y el desarrollo de una herramienta software de análisis de reflectores.

Para desarrollar esta aplicación se ha utilizado la Programación Orientada a Objetos bajo entorno Matlab, la cual nos permite diseñar aplicaciones y trabajar a un nivel alto de programación, lo que hace que el código pueda ser reutilizado y mejorado.

La finalidad de esta aplicación es que los alumnos tengan una mejor percepción de cómo funcionan los reflectores estudiados en clase de teoría y también sustituir al antiguo SABOR (Software de Análisis de Bocinas y Reflectores) para que pueda ser utilizado en ordenadores de 64 bits.

Resumen

Sabor, *Software de Análisis de Bocinas y Reflectores*, es una herramienta didáctica la cual es utilizada en los laboratorios de la escuela para realizar prácticas de la asignatura Antenas y Compatibilidad Electromagnética, esta herramienta da a los alumnos una visión gráfica de lo que se enseña en clase de teoría de lo que son los campos en las aperturas de los reflectores.

El proyector pretende sustituir al primer Sabor , ya que se queda obsoleto debido al sistema operativo, ya que funciona solo para Windows XP y con ordenadores de 32 bits, y también realizar mejoras y corregir errores de la versión anterior.

El proyecto se ha desarrollado en Matlab que es un software matemático con grandes ventajas en cuanto a cálculo , desarrollo gráfico, y a la creación de nuevos algoritmos en su propio lenguaje y además está disponible para las plataformas Unix, Windows, Mac OSX y GNU/Linux.

El objetivo del proyecto ha sido implementar, al igual que las versiones anteriores, cinco tipos de reflectores, como son: *Parabólico*, *Offset*, *Cassegrain* y *los dos Dobles Offset*, *Cassegrain* y *Gregorian* , y han sido analizados con un alimentador ideal , $\cos\theta$, y por último los resultados obtenidos se han comparado con las versiones anteriores de Sabor, como son Sabor 3.0 y el primer Sabor.

El proyecto consta de partes muy bien diferenciadas como son :

- La interpretación correctas de las formulas que se han utilizado para la realización de este proyecto ,dichas formulas han sido las dadas por el proyecto fin de carrera titulado Sabor3.0 de Francisco Egea Castejón .
- GUIDE, *the graphical user interface development environment* ,con el que se creó: GUI, *graphical user interface*, que es la parte de Matlab dedicada a crear interfaces de usuario , herramienta utilizada para crear nuestras distintas ventanas dedicadas para la obtención de datos para analizar los distintos reflectores y para mostrar por pantalla los distintos resultados.
- Programación Orientada a Objetos de Matlab y sus distintas propiedades como son la herencia lo cual es muy útil para ocupar menos memoria ya que con un único método podemos realizar distintos cálculos con los distintos reflectores , *objetos* ,solo cambiando las propiedades de cada objeto
- Y por último ha sido la realización de validación de los resultados con la ayuda de las versiones anteriores de Sabor , que están detallados en el capítulo 5 y la unión con bocinas del proyecto fin de carrera *Análisis de Bocinas en Matlab* de Javier Montero.

Por otra parte tenemos las mejoras realizadas a las antiguas versiones como son: realización de registros que el usuario puede guardar y cargar con las distintas variables, también se ha realizado un fichero .txt en el que consta la amplitud del campo con su respectiva theta para que el usuario pueda visualizarlo en cualquier plataforma gráfica de datos como por ejemplo excel.

Abstract

Sabor , *Software de Análisis de Bocinas y Reflectores*, is a teaching tool ,which is used to do laboratory practice in the subject of Antennas y Compatibilidad Electromagnética, this tool gives students a graphic view of the knowledge that are given in theory class in regard to aperture field of reflectors.

This project intend to replace the first Sabor , because it is outdated ,due to the operating system, because Sabor works only with Widows XP and computer with 32 bits, and to make improves and correct errors that were detected in the last version of Sabor too.

This project has been carried out in Matlab , which is a mathematical software with high-level language for numerical computation, visualization and application development, and furthermore it is available to different platforms such as Unix, Windows ,Mac OSX and GNU/Linux

This project has focused on implementing, the same as last versions, five kind of reflectors, such as : *Parabolic, Offset , Cassegrain and two offset dual reflector Cassegrain y Gregorian* ,and these were analysed with a *cos-q* ideal feed, and finally the results were checked with the versions of Sabor, as well as Sabor 3.0 and the first Sabor.

This project consist of four parts:

- The correct interpretation of the formulas , which were used to do this project, from the final project Sabor3.0 by Francisco Egea Castejón.
- GUIDE, *the graphical user interface development environment* , tool that was used to create : GUI, *graphical user interface*, part of Matlab dedicated to create user interface .
- Object Oriented Programming of Matlab and different properties like inheritance ,that is very useful for saving memory space because with only one method we can analyse different kind of reflectors, *object* ,only change the properties of the object.
- At finally, the results were contrasted with the results from the previous versions and the link reflectors with horns from the final project *Análisis de Bocinas en Matlab* by Javier Montero.

On the other hand, we have the improvements such as: registers and .txt file .The registers are used by user to save and load different variables and .txt file is useful because it allows to the user plotting in different platforms for example excel .

Índice de contenidos

Capítulo 1 . Introducción

Introducción.....	1
1.Reflectores.....	1
1.1Historia.....	1
1.2Métodos de análisis de las antenas reflectoras	2
1.3Tipos de reflectores parabólicos.....	2
2. Introducción al proyecto.....	3

Capítulo 2. Teoría de Reflectores

1.Reflectores parabólicos.....	5
1.1 Offset.....	5
1.2 Relación entre coordenadas cartesianas del S. reflector (x',y',z') y el S. bocina (x,y,z).....	7
1.3 Relación entre coordenadas esféricas del Sistema reflector (ρ', θ', ϕ') y el Sistema bocina (ρ, θ, ϕ).....	8
1.4 Distancia origen(foco)-punto superficie del reflector: $\rho(\theta')$	9
1.5 Altura de un punto de la superficie del reflector: $h(\theta')=x'(\theta')$	9
1.6 Cálculo de los diferentes parámetros del reflector Offset utilizando los ángulos Ψ_s y Ψ_0	10
1.7 Vector unitario normal a la superficie de incidencia del reflector.....	10
1.8 Campo incidente en el reflector creado por la bocina.....	13
1.9 Campo reflejado en el reflector.....	14
1.10 Campo en la apertura del reflector.....	15
1.11 Parámetros Px_{off} y Py_{off} asociados a la apertura del reflector offset.....	18
1.12 Resolución numérica por el método de Gauss-Legendre de las integrales que definen los parámetros Px_{off} y Py_{off}	19

1.13. Componentes copolar y contrapolar del campo radiado por el reflector (según polariz. en y): E_{CP_off} y E_{XP_off}	20
1.14. Diagramas normalizados de las componentes copolar y contrapolar del campo radiado por el reflector (según polariz. en y): $f_{E_CP_off}$ y $f_{E_XP_off}$	21
1.15. Campo radiado por la bocina referido a su centro de fase.....	23
2. REFLECTOR PARABÓLICO CENTRADO.....	24
2.1. Caso particular del reflector Offset.....	24
2.2. Ganancia del reflector . Eficiencia global del reflector.....	26
2.3. Alimentador ideal tipo cos-q.....	27
2.4. Eficiencia global $\epsilon_g(\theta)$ del reflector con alimentador ideal tipo cos-q.....	28
3. REFLECTORES DOBLES CENTRADOS.....	29
3.1. Introducción.	29
3.2. Antena Cassegrain centrada.....	29
3.3. Antena gregoriana centrada.....	38
4. REFLECTORES DOBLES OFFSET.....	44
4.1. Introducción.....	44
4.2. Descripción geométrica de las antenas Cassegrain y gregorianas offset.....	45
4.3 Ecuaciones básicas de los reflectores.....	48
4. 4 . Relación entre los ángulos polares de los diferentes Sistemas de coordenadas.....	51
4. 5 . Cálculo de la relación $\rho_s/(\rho_f\rho)$ en función de las coordenadas angulares esféricas del sistema del alimentador (θ_f, ϕ_f) , de α , β y e	53
4.6. Campo en la apertura del reflector en función del campo radiado por el alimentador.....	58
4.7 Paraboloide offset equivalente de una antena de doble reflector	

Offset.....	59
4.8. Diámetro de la apertura del reflector offset equivalente D_{eq} . Altura del centro de la apertura del reflector offset equivalente $h_{o_{eq}}$	63
4.9. Paraboloide equivalente centrado. Condición de Rusch.....	68
4.10. Análisis de reflectores dobles offset. Cálculo del reflector offset equivalente	69
4.11. Diseño de reflectores dobles offset.....	79
5. BLOQUEO DEL ALIMENTADOR O SUBREFLECTOR.....	91
6. PARÁMETROS DEL REFLECTOR.....	93
6.1. Ganancia.....	93
6.2. Eficiencia global del reflector	94
6.3. Eficiencia de la apertura.....	94
6.4. Eficiencia de bloqueo.....	96
6.5. Eficiencia de Spillover.....	96
6.6. Coeficiente de reflexión Γ del alimentador.....	97
6.7. Ancho de Haz a -XdB	98
7. POLARIZACIÓN CIRCULAR Y BEAM SQUINT.....	99
8. DESPLAZAMIENTO DEL ALIMENTADOR.....	102
9. DESAPUNTAMIENTO DEL ALIMENTADOR.....	105
Capítulo 3. Método de integración numérica de Gauss-Legendre	
1. INTRODUCCIÓN	107
2. INTEGRALES SIMPLES.....	107
2.1. Cuadratura de Gauss-Legendre de dos puntos.....	107
2.2. Cuadratura de Gauss-Legendre con más puntos.....	108
2.3. Traslación de la cuadratura de Gauss-Legendre	109
3. INTEGRALES DOBLES.....	110

4.OBTENCIÓN DE PUNTOS Y PESOS PARA APERTURA CIRCULAR.....	113
Capitulo4.EntornoMatlab: <i>Guide y Programación Orientada a Objetos</i>	
1.INTRODUCCIÓN	115
2. GUIDE.....	115
2.1 Inicio.....	115
2.2Características de los diferentes botones que aparecen en GUI.....	117
2.3 Flujo de operaciones de GUI.....	117
2.4. Funcionamiento de una aplicación GUI	118
3.PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS.....	119
3.1 Definición de clase y Objeto.....	119
3.2Características de la programación a objeto:.....	119
3.3Herencia.....	119
3.4Clases agregadas.....	120
Capitulo5. Simulador SABOR	
1.ESTRUCTURA DEL PROYECTO.....	125
1.2Diagrama de flujo general de la interfaz gráfica.....	125
2.DIAGRAMA DE CLASES UML DE LA APLICACIÓN.....	127
2.1.Clase Reflectoresideales.....	127
2.2Clase Parabólica.....	129
2.3.Clase Offset.....	130
2.4Clase Cassegrain.....	131
2.5.Clase DobleCassegrain	131
2.6Clase DobleGregorian.....	132
3.REALIZACIÓN EJECUTABLE CON MATLAB.....	133
4.SABOR.....	133
4.1Manual de usuario.....	133
4.2. Diferencias de cálculos con las anteriores versiones de SABOR	139
4.2.1Reflector Parabólico.....	139
4.2.2Reflector Offset.....	139

4.2.3Reflector Cassegrain.....	140
4.2.4Reflector Doble-Offset- Cassegraino.....	142
4.2.5Reflector Doble-Offset-Gregorian.....	144

Capitulo6. Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones y trabajos futuros.....	147
Bibliografía.....	149

Capitulo 1. Introducción

Introducción

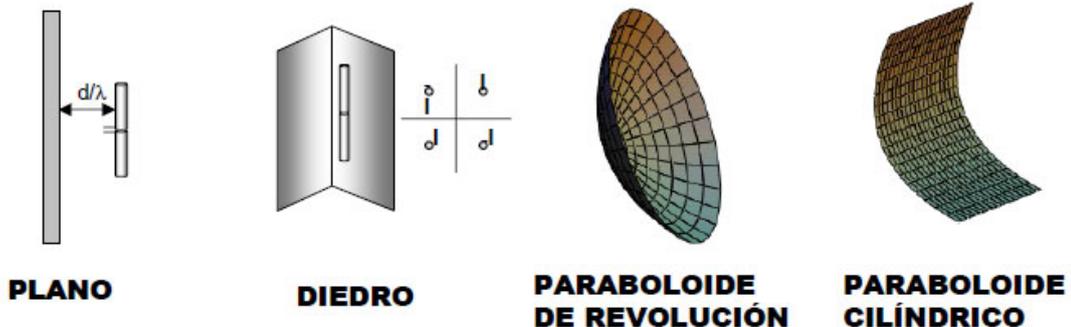
En el proyecto se va a encargar de desarrollar la parte de *reflectores de Sabor, Software de Análisis de BOcinas y Reflectores*, es una herramienta didáctica la cual es utilizada en los laboratorios de la escuela para realizar prácticas de la asignatura Antenas y Compatibilidad Electromagnética, esta herramienta da a los alumnos una visión gráfica de lo que se enseña en clase de teoría de lo que son los campos en las aperturas de los reflectores. Como el proyecto se va a centrar en el desarrollo de reflectores a continuación se hará una pequeña introducción acerca de la historia de reflectores y se explicara las líneas que se realizará en el proyecto.

1. REFLECTORES

1.1 Historia

Aunque las antenas reflectoras fueron descubiertas en el siglo XVII cuando Isaac Newton inventó su primer telescopio reflector óptico, no tuvieron interés hasta la SEGUNDA GUERRA MUNDIAL cuando se desarrollaron los sistemas de telecomunicación y aplicaciones radares. Las antenas reflectoras son usadas para aplicaciones de altas directividades en comunicaciones por satélite, comunicaciones por tierra, comunicaciones de espacio profundo e imágenes radar. La principal ventaja de las antenas reflectoras con otras antenas son sus alta directividad, su gran ancho de banda y con relación a su bajo coste. Aunque las antenas reflectoras tienen numerosas configuraciones geométricas, las superficies más conocida son: plano, diédrico y reflector curvo (especialmente los parabólicos). Estos últimos son con los que se ha desarrollado el proyecto ya que son los más utilizados para aplicaciones de altas ganancias, debido a que los frente de ondas esféricos emitidas desde su foco pasan a ser frente de ondas planas en campo lejano, al reflejarse en dicha superficie esto hace que mejore la ganancia se consigue un ancho de haz estrecho y bajos lóbulos secundarios.

TIPOS DE REFLECTORES



1.2 Métodos de análisis de las antenas reflectoras

Para analizar este tipo de Antenas es necesario conocer el trayecto de los rayos y como llega a la superficie reflectora. Podemos analizarlas con diferentes técnicas : Óptica Geométrica(GO), Óptica Física (PO) , Teoría Geométrica de la Difracción (GTD), Teoría Física de la Difracción (PTD) entre otros muchos métodos de análisis convencionales de ondas, como es el Método de los Momentos (MOM).

Los métodos más utilizados para analizar las características de radiación son el *método de las corrientes inducidas* y el *método de la apertura*, ambos métodos serán comentados más adelante.

1.3 Tipos de reflectores parabólicos

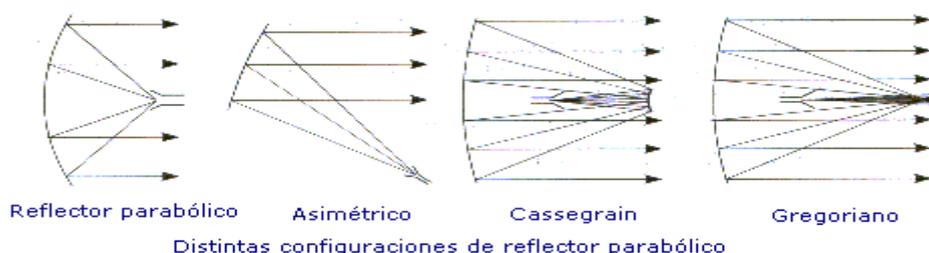
Este tipo de configuraciones permiten obtener directividades elevadas ya que utiliza un reflector parabólico como superficie reflectante , y como se dijo anteriormente utilizan las propiedades de la parábola ya que permiten que un frente de ondas esféricos emitido desde su foco o alimentador pase a ser un frente de ondas planas en campo lejano.

Las distintas configuraciones de reflector parabólico que nos podemos encontrar son:

- **Parabólico:** se caracteriza por tener el alimentador en el foco.
- **Offset :** o de foco desplazado la cual permite un control mayor de la directividad, lóbulos secundarios(se puede obtener niveles de - 40 deciBelios) y polarización cruzada. Otra ventaja es el desacople entre el alimentador y el reflector lo que permite que el coeficiente de reflexión en la apertura del alimentador será independiente del reflector. La desventaja de este tipo de geometría es la polarización cruzada que es superior que el centrado debido a la falta de simetría de la estructura.
- **Antenas con múltiples reflectores**

Se utilizan para comunicaciones espaciales ya que necesitan grandes directividades, una elevada potencia en el transmisor y un receptor de bajo ruido, por lo que se utiliza un segundo reflector o subreflector.

- a) **Cassegrain:** se caracteriza por utilizar un subreflector hiperbólico
- b) **Gregorian:** se caracteriza por utilizar un subreflector elíptico.



2. INTRODUCCIÓN AL PROYECTO

Una vez teniendo conocimiento de los reflectores vamos a detallar en qué consiste el proyecto.

El objetivo del proyecto es desarrollar una aplicación sencilla para analizar y desarrollar los reflectores mediante análisis geométrico y electromagnético en entorno *matlab* mediante la programación orientada a objetos de un software que nos permita entender mejor cómo funcionan los campos en una antena reflectora parabólica.

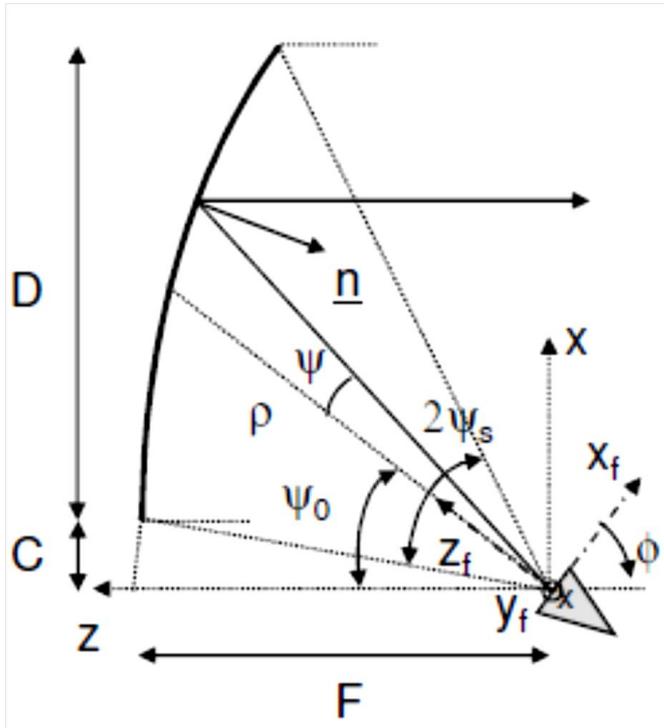
Para desarrollar el proyecto se divide en las siguientes partes:

- Base teórica de los reflectores: en esta sección se verá como analizar cada uno de los reflectores parabólicos con los distintos métodos que fueron comentados en la introducción de este proyecto. También veremos que utilizando el método de integración de Gauss-Legendre aplicada a aperturas circulares, optimizaremos el tiempo de ejecución de la aplicación.
- Diseño: para nuestra aplicación crearemos un GUI con *Guide* que es una interfaz gráfica de usuario de Matlab y también se desarrollará la programación orientada a objetos (OOP), aplicada al análisis de los reflectores parabólicos.
- Resultados: en este apartado se comprobará los resultados obtenidos con la aplicación SABOR.
- Conclusiones: a partir de los resultados obtenidos se darán a conocer las futuras mejoras que se pueden implementar al proyecto.

Capítulo 2. Teoría de Reflectores

1. Reflectore parabólico

1.1 Offset



Datos significantes de la figura:

D: diámetro de la apertura del reflector principal.

F: distancia focal.

C: clearance o altura offset.

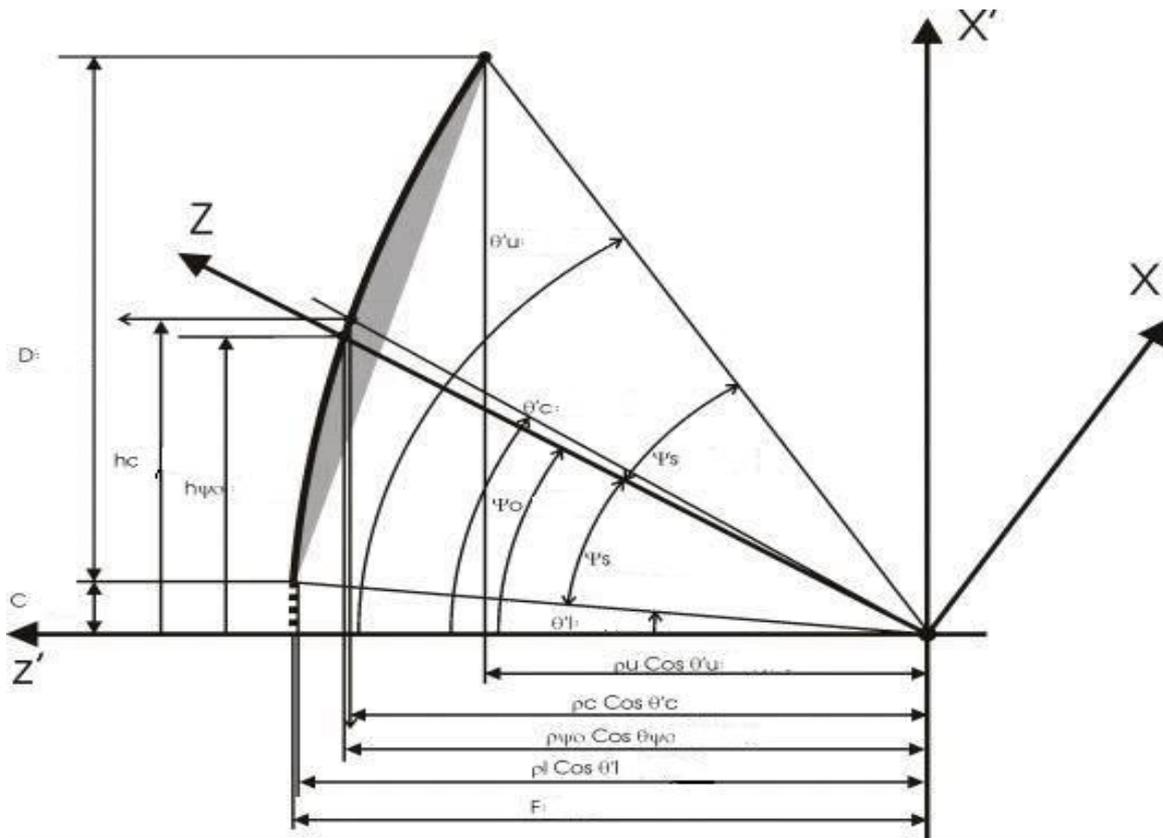
ρ : módulo del radio vector de un punto genérico P del reflector (distancia P-FOCO)

Ψ_0 : ángulo offset

Ψ_s : semiángulo subtendido.

Ψ : ángulo que varía desde el eje de z visto desde la bocina (z_f) hasta Ψ_s .

Para no complicar más la figura no constan los siguientes :



θ'_l : ángulo cenital que coincide con el punto de menor altura de la parábola. Este ángulo es la resta de Ψ_0 y Ψ_s

θ'_u : ángulo cenital que coincide con el punto de mayor altura de la parábola. Este ángulo es la suma de Ψ_0 y Ψ_s

θ'_c : ángulo cenit que está a la altura del punto h_0 que es la suma de $D/2$ y C

θ' : ángulo cenit que tiene como límites θ'_l y θ'_u .

Para analizar geoméricamente el reflector parabólico se utilizarán 3 sistemas cartesianos de coordenadas :

1) **S. cartesiano de la bocina**, definido con origen en el centro de fase de la bocina (coincidente con el foco del reflector), se utilizará (x,y,z) para referirse a los campos creados por la bocina, se establece en la forma habitual. La bocina se orienta de manera que su eje z apunte al centro de la apertura del reflector y el eje y perpendicular al eje focal del paraboloide.

2) **S. cartesiano del reflector**, denominado con las coordenadas (x',y',z') , su origen de coordenadas coincide con el foco del reflector y centro de fase de la bocina,

con eje z' coincidente con el eje focal del reflector apuntando hacia el vértice del paraboloide y con eje y' coincidente con él y del sistema de la bocina.

3) **S. cartesiano de la apertura**, denominado con las coordenadas (x_{ap}, y_{ap}, z_{ap}) , su origen de coordenadas coincide con el del centro de la apertura del reflector (superficie circular resultante de la proyección de la superficie del reflector sobre el plano $X'Y'$), con eje x_{ap} coincidente con eje x' , eje y_{ap} paralelo a los ejes $y=y'$ y eje z_{ap} paralelo al eje z' pero con dirección contraria

También se definirán las coordenadas esféricas de los sistemas de bocina y reflector, a las cuales denominaremos de la forma habitual cambiando r por ρ de tal manera que las coordenadas esféricas para el reflector quede: (ρ', θ', ϕ') y (ρ, θ, ϕ) para el sistema de la bocina. Al coincidir el origen de coordenadas la coordenada esférica radial del punto coincide, es decir: $\rho=\rho'$, por lo que se escribirá siempre ρ . También sobre el sistema de coordenadas de la apertura se definirán coordenadas esféricas para referir las magnitudes referentes a la radiación del reflector, se utilizará la nomenclatura habitual de las coordenadas esféricas, pero los ángulos en mayúsculas, es decir: (r, Θ, Φ)

1.2 Relación entre coordenadas cartesianas del S. reflector (x',y',z') y el S. bocina (x,y,z)

Nos interesará expresar las coordenadas de los puntos de la superficie referidas al sistema de la bocina (x,y,z) . Para ello debemos hacer un cambio a las coordenadas del sistema reflector (x',y',z') al sistema de la bocina (x,y,z) , transformandolas, mediante la matriz de proyecciones que se obtiene de la transformación de sus correspondientes vectores unitarios. Expresados en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \\ \hat{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & \text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de los puntos siguen la misma transformación que sus correspondientes vectores unitarios, la cual viene determinada por la matriz de proyecciones anterior, en consecuencia, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & \text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

La transformación inversa se obtendría transponiendo la matriz de proyecciones. Por tanto:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & -\text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1.2.2)$$

1.3. Relación entre coordenadas esféricas del Sistema reflector (ρ' , θ' , ϕ') y el Sistema bocina (ρ , θ , ϕ)

Para obtener la transformación de las coordenadas del sistema reflector (ρ' , θ' , ϕ') a las del sistema bocina (ρ , θ , ϕ) basta transformar en (1.2.1) las coordenadas cartesianas de ambos sistema a esféricas.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \rho \begin{bmatrix} \text{sen}\theta' \cos\phi' \\ \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \\ \cos\theta' \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & \text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \cos\Psi_0 \cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Desdoblando la ecuación matricial en 3 ecuaciones normales, la 3ª nos da directamente la transformación del ángulo θ' y la resultante de dividir la 2ª entre la 1ª nos da la transformación del ángulo ϕ' . En concreto, se tiene:

$$\begin{aligned} \cos\theta' &= -\text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \cos\Psi_0 \cos\theta \\ \text{tg}\phi' &= \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\phi}{\cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Procediendo análogamente sobre (1.2.2), se obtienen las relaciones inversas:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} \text{sen} \theta \cos \phi \\ \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_0 & 0 & -\text{sen} \Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \Psi_0 & 0 & \cos \Psi_0 \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} \text{sen} \theta' \cos \phi' \\ \text{sen} \theta' \text{sen} \phi' \\ \cos \theta' \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos \Psi_0 \text{sen} \theta' \cos \phi' - \text{sen} \Psi_0 \cos \theta' \\ \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ \text{sen} \Psi_0 \text{sen} \theta' \cos \phi' + \cos \Psi_0 \cos \theta' \end{bmatrix} \quad (1.3.3)$$

De donde:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \Psi_0 \cos \theta' + \text{sen} \Psi_0 \text{sen} \theta' \cos \phi' \\ \text{tg} \phi &= \frac{\text{sen} \theta' \text{sen} \phi'}{\cos \Psi_0 \text{sen} \theta' \cos \phi' - \text{sen} \Psi_0 \cos \theta'} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

1.4 Distancia origen(foco)-punto superficie del reflector: $\rho (\theta')$

Sabiendo que la parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan del foco y de la directriz. Por lo tanto los rayos que parten desde el foco e inciden en él recorren el mismo camino para llegar al plano de apertura del reflector, por dicha propiedad obtenemos:

$$\rho + \rho \cos \theta' = 2F \quad (1.4.1)$$

De donde:

$$\rho(\theta') = \frac{2F}{1 + \cos \theta'} = \frac{F}{\cos^2 \frac{\theta'}{2}} \quad (1.4.2)$$

La expresión anterior nos permite expresar θ' en función de una constante (F) y de ρ que es igual en los 2 sistemas de referencia, el de la bocina y el del reflector. En concreto despejando en las ecuaciones anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta'}{2} &= \sqrt{\frac{F}{\rho}} \\ \cos \theta' &= \frac{2F}{\rho} - 1 \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

1.5. Altura de un punto de la superficie del reflector: $h(\theta') = x'(\theta')$

De la misma manera obtenemos la altura de la parábola según el ángulo cenital θ' , y aplicando la fórmula del ángulo doble para el seno, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 h(\theta') = x'(\theta') = \rho(\theta') \operatorname{sen} \theta' &= \frac{F}{\cos^2 \frac{\theta'}{2}} 2 \operatorname{sen} \frac{\theta'}{2} \cos \frac{\theta'}{2} = \\
 &= 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}
 \end{aligned}
 \tag{1.5.1}$$

1.6. Cálculo de los diferentes parámetros del reflector Offset utilizando los ángulos Ψ_s y Ψ_0 .

Aplicando (1.5.1) y relaciones trigonométricas obtenemos:

$$\begin{aligned}
 C + D = h(\theta_u') = h(\Psi_0 + \Psi_s) &= 2F \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\Psi_0 + \Psi_s}{2} \right) \\
 C = h(\theta_l') = h(\Psi_0 - \Psi_s) &= 2F \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\Psi_0 - \Psi_s}{2} \right) \\
 D = h(\Psi_0 + \Psi_s) - h(\Psi_0 - \Psi_s) &= 2F \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\Psi_0 + \Psi_s}{2} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\Psi_0 - \Psi_s}{2} \right) \right] = \frac{4F \operatorname{sen} \Psi_s}{\cos \Psi_s + \cos \Psi_0} \\
 h_0 = x_0' = C + D / 2 = F \cdot \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\Psi_0 + \Psi_s}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\Psi_0 - \Psi_s}{2} \right) \right] &= \frac{2F \operatorname{sen} \Psi_0}{\cos \Psi_s + \cos \Psi_0}
 \end{aligned}
 \tag{1.6.1}$$

También podemos deducir Ψ_s y Ψ_0 en función de C y D:

$$\begin{aligned}
 \Psi_0 &= \operatorname{arctg} \frac{D + C}{2F} + \operatorname{arctg} \frac{C}{2F} \\
 \Psi_s &= \operatorname{arctg} \frac{D + C}{2F} - \operatorname{arctg} \frac{C}{2F}
 \end{aligned}
 \tag{1.6.2}$$

1.7. Vector unitario normal a la superficie de incidencia del reflector

El vector unitario normal a la superficie en el punto de incidencia del campo en el reflector, en componentes esféricas en el sistema de coordenadas del reflector es:

$$\hat{n} = -\cos \frac{\theta'}{2} \hat{\rho}' + \operatorname{sen} \frac{\theta'}{2} \hat{\theta}'
 \tag{1.7.1-a}$$

En componentes cartesianas, en el sistema de coordenadas del reflector, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{z'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{sen}\theta' \cos\phi' & \cos\theta' \cos\phi' & \phi'_x \\ \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' & \cos\theta' \text{sen}\phi' & \phi'_y \\ \cos\theta' & -\text{sen}\theta' & \phi'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_\rho \\ n_{\theta'} \\ n_{\phi'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta' \cos\phi' & \cos\theta' \cos\phi' & \phi'_x \\ \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' & \cos\theta' \text{sen}\phi' & \phi'_y \\ \cos\theta' & -\text{sen}\theta' & \phi'_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\frac{\theta'}{2} \\ \text{sen}\frac{\theta'}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\text{sen}\theta' \cos\phi' \cos\frac{\theta'}{2} + \cos\theta' \cos\phi' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \\ -\text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \cos\frac{\theta'}{2} + \cos\theta' \text{sen}\phi' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \\ -\cos\theta' \cos\frac{\theta'}{2} - \text{sen}\theta' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi' \left(-\text{sen}\theta' \cos\frac{\theta'}{2} + \cos\theta' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \right) \\ \text{sen}\phi' \left(-\text{sen}\theta' \cos\frac{\theta'}{2} + \cos\theta' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \right) \\ -\cos\theta' \cos\frac{\theta'}{2} - \text{sen}\theta' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.7.1-b)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas trigonométricas que transforman productos de senos y cosenos en sumas, se tiene:

$$\begin{bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi' \left[-\frac{1}{2} \left(\text{sen}\frac{3\theta'}{2} + \text{sen}\frac{\theta'}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{sen}\frac{3\theta'}{2} + \text{sen}\left(\frac{-\theta'}{2}\right) \right) \right] \\ \text{sen}\phi' \left[-\frac{1}{2} \left(\text{sen}\frac{3\theta'}{2} + \text{sen}\frac{\theta'}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\text{sen}\frac{3\theta'}{2} + \text{sen}\left(\frac{-\theta'}{2}\right) \right) \right] \\ -\frac{1}{2} \left(\cos\frac{3\theta'}{2} + \cos\frac{\theta'}{2} - \cos\frac{3\theta'}{2} + \cos\frac{\theta'}{2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \\ -\text{sen}\phi' \text{sen}\frac{\theta'}{2} \\ -\cos\frac{\theta'}{2} \end{bmatrix} \quad (1.7.1-c)$$

En la expresión anterior (1.7.1-c), podemos poner las *coordenadas esféricas* de un punto genérico de la superficie del reflector en *coordenadas cartesianas* del sistema del *reflector* (x', y', z'), utilizando las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \theta' &= \text{arc cos} \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \\ \phi' &= \text{arc tg} \frac{y'}{x'} \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

En la expresión anterior (1.7.1-c), podemos poner las *coordenadas esféricas* de un punto genérico de la superficie del reflector del sistema de coordenadas del reflector (θ', ϕ') en *coordenadas esféricas del sistema de la bocina* (ρ, θ, ϕ), se pueden utilizar las expresiones (1.3.2).

No obstante, para obtener expresiones más compactas, se puede recurrir a (1.3.1) en combinación con (1.4.3) de modo que el vector unitario normal quede en función de las coordenadas esféricas del sistema de bocinas, para ello recurrimos a relaciones geométricas del ángulo doble de modo que obtenemos :

$$(\text{sen}\theta') \cos\phi' = \left(2\text{sen}\frac{\theta'}{2} \cos\frac{\theta'}{2} \right) \cos\phi = \cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta$$

$$(\text{sen}\theta') \text{sen}\phi' = \left(2\text{sen}\frac{\theta'}{2} \cos\frac{\theta'}{2} \right) \text{sen}\phi = \text{sen}\theta \text{sen}\phi$$

Y ahora entre 2° y 3° miembro despejamos las expresiones de las componentes cartesianas del vector unitario normal, dadas en (1.7.1-c):

$$\cos\phi \text{sen}\frac{\theta'}{2} = \frac{1}{2} \frac{\cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta}{\cos\frac{\theta'}{2}}$$

$$\text{sen}\phi' \text{sen}\frac{\theta'}{2} = \frac{1}{2} \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\phi}{\cos\frac{\theta'}{2}}$$

Según lo anterior, sin considerar todavía la transformación de $\cos(\theta'/2)$, (1.7.1.c) quedaría:

$$\begin{bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{1}{\cos\frac{\theta'}{2}} (\cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta) \\ -\frac{1}{2} \frac{1}{\cos\frac{\theta'}{2}} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ -\cos\frac{\theta'}{2} \end{bmatrix} \quad (1.7.3)$$

Por último, según (1.4.3), podemos expresar $\cos(\theta'/2)$ en función de una constante (F) y de ρ que es igual en los 2 sistemas de referencia, el de la bocina y el del reflector, con lo cual (1.7.3) quedaría totalmente expresado en coordenadas esféricas del sistema de la bocina. Por tanto, aplicando (1.4.3) a (1.7.3), las componentes cartesianas del vector \hat{n} expresadas en las coordenadas referidas al sistema de la bocina resultan:

$$\begin{bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \\ n_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{F}} (\cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta) \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{F}} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ -\sqrt{\frac{F}{\rho}} \end{bmatrix} \quad (1.7.4)$$

1.8. Campo incidente en el reflector creado por la bocina

El campo en forma vectorial: \vec{E}_i . Utilizamos el subíndice i para indicar que se trata del campo *incidente* en el reflector. Obtendremos a continuación sus componentes.

a) Componentes esféricas en el sistema de coordenadas de la bocina (ρ, θ, ϕ) en función del campo normalizado creado por la bocina. De teoría de bocinas, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_{i\theta}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{i\phi}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ e_{\theta}(\theta, \phi) \\ e_{\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (1.8.1)$$

b) Componentes cartesianas en el sistema de coordenadas de la bocina (x, y, z) en función del campo normalizado creado por la bocina. Se obtienen mediante un cambio de las coordenadas esféricas anteriores a cartesianas.

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \text{sen}\theta \cos\phi \hat{r} + \cos\theta \cos\phi \hat{\theta} - \text{sen}\phi \hat{\phi} \\ \hat{y} &= \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{r} + \cos\theta \text{sen}\phi \hat{\theta} + \cos\phi \hat{\phi} \\ \hat{z} &= \cos\theta \hat{r} - \text{sen}\theta \hat{\theta} \end{aligned}$$

De forma que teniendo en cuenta la transformación de coordenadas anteriores y aplicando a 1.8.1 obtenemos los campos incidentes en el sistema cartesiano de coordenadas del sistema de la bocina :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{ix}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{iy}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{iz}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi & \cos\theta \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{i\theta}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{i\phi}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi & \cos\theta \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ e_{\theta}(\theta, \phi) \\ e_{\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

c) Componentes cartesianas en función del campo normalizado creado por la bocina en el sistema de coordenadas del reflector. Se obtiene teniendo en cuenta (1.2.1) y (1.8.2)

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} E_{ix'}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{iy'}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{iz'}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & \text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{iy}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{iz}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & \text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}\theta \cos\phi & \cos\theta \cos\phi & -\text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{i\theta}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{i\phi}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta & \cos\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta & -\cos\Psi_0 \text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \cos\Psi_0 \cos\theta & -\text{sen}\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \cos\Psi_0 \text{sen}\theta & \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{i\theta}(\rho, \theta, \phi) \\ E_{i\phi}(\rho, \theta, \phi) \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta & \cos\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta & -\cos\Psi_0 \text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \cos\Psi_0 \cos\theta & -\text{sen}\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \cos\Psi_0 \text{sen}\theta & \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\phi \end{bmatrix} \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ e_{\theta}(\theta, \phi) \\ e_{\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.8.3}$$

1.9. Campo reflejado en el reflector

Sabiendo:

$$\vec{E}_r = 2(\vec{E}_i \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{E}_i \tag{1.9.1-a}$$

Desarrollando en coordenadas cartesianas referidas al *sistema del reflector*, se tiene:

$$\begin{bmatrix} E_{rx'} \\ E_{ry'} \end{bmatrix} = 2 \left(E_{ix'} n_{x'} + E_{iy'} n_{y'} + E_{iz'} n_{z'} \right) \begin{bmatrix} n_{x'} \\ n_{y'} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_{ix'} \\ E_{iy'} \end{bmatrix} \tag{1.9.1-b}$$

Operando da como resultado:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} E_{rx'} \\ E_{ry'} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2(E_{ix'} n_{x'} + E_{iy'} n_{y'} + E_{iz'} n_{z'}) n_{x'} - E_{ix'} \\ 2(E_{ix'} n_{x'} + E_{iy'} n_{y'} + E_{iz'} n_{z'}) n_{y'} - E_{iy'} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} E_{ix'} (2n_{x'}^2 - 1) + 2E_{iy'} n_{x'} n_{y'} + 2E_{iz'} n_{x'} n_{z'} \\ 2E_{ix'} n_{x'} n_{y'} + E_{iy'} (2n_{y'}^2 - 1) + 2E_{iz'} n_{y'} n_{z'} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} (2n_{x'}^2 - 1) & 2n_{x'} n_{y'} & 2n_{x'} n_{z'} \\ 2n_{x'} n_{y'} & (2n_{y'}^2 - 1) & 2n_{y'} n_{z'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix'} \\ E_{iy'} \\ E_{iz'} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.9.1-c}$$

Sustituyendo el campo incidente de la matriz obtenida anteriormente con (1.8.3) nos queda:

$$\begin{bmatrix} E_{rx'} \\ E_{ry'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2n_{x'}^2 - 1) & 2n_{x'}n_{y'} & 2n_{x'}n_{z'} \\ 2n_{x'}n_{y'} & (2n_{y'}^2 - 1) & 2n_{y'}n_{z'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \text{sen}\Psi_0 \cos\theta & \cos\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta & -\cos\Psi_0 \text{sen}\phi \\ \text{sen}\theta \text{sen}\phi & \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \cos\phi + \cos\Psi_0 \cos\theta & -\text{sen}\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \cos\Psi_0 \text{sen}\theta & \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \end{bmatrix} \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix}$$

Desarrollando (1.9.1-d) ,obtenemos: (1.9.1-d)

$$\begin{bmatrix} E_{rx'} \\ E_{ry'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2n_{x'}^2 - 1) & 2n_{x'}n_{y'} & 2n_{x'}n_{z'} \\ 2n_{x'}n_{y'} & (2n_{y'}^2 - 1) & 2n_{y'}n_{z'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta & -\cos\Psi_0 \text{sen}\phi \\ \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \cos\Psi_0 \text{sen}\theta & \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \end{bmatrix} \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix}$$

(1.9.1-e)

1.10. Campo en la apertura del reflector

Método de la apertura

Aplicando el teorema de equivalencia, la boca del reflector puede ser considerada como una apertura, cuyo campo se calcula a partir de la reflexión óptica del campo eléctrico radiado por el alimentador. Sabiendo que después de la reflexión el campo viaja como una onda plana, la distribución en la boca puede trasladarse sin error de fase apreciable hasta el plano focal y ponerse como:

$$\vec{E}_{a_off} = \vec{E}_r e^{-jkz'} = \vec{E}_r e^{-jk(\rho \cos\theta')}$$

A) MODELO REAL

$$\vec{E}_{a_off} = \vec{E}_r e^{-jkz'} = \vec{E}_r e^{-jk(\rho \cos\theta')} \tag{1.10.1-a}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} E_{ax'_off} \\ E_{ay'_off} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{rx'} \\ E_{ry'} \end{bmatrix} e^{-jk(\rho \cos\theta')} \tag{1.10.1-b}$$

Desarrollando la matriz anterior y aplicando (1.9.1-e) y teniendo en cuenta(1.4.1),nos queda:

$$\begin{bmatrix} E_{ax'_{off}} \\ E_{ay'_{off}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2n_{x'}^2 - 1) & 2n_{x'}n_{y'} & 2n_{x'}n_{z'} \\ 2n_{x'}n_{y'} & (2n_{y'}^2 - 1) & 2n_{y'}n_{z'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta & -\cos\Psi_0 \text{sen}\phi \\ \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \cos\Psi_0 \text{sen}\theta & \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \end{bmatrix} \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (1.10.1-c)$$

Sustituyendo el valor de ρ dado por (1.4.2), la expresión anterior queda:

$$\begin{bmatrix} E_{ax'_{off}} \\ E_{ay'_{off}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2n_{x'}^2 - 1) & 2n_{x'}n_{y'} & 2n_{x'}n_{z'} \\ 2n_{x'}n_{y'} & (2n_{y'}^2 - 1) & 2n_{y'}n_{z'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta & -\cos\Psi_0 \text{sen}\phi \\ \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi \\ -\text{sen}\Psi_0 \cos\theta \cos\phi - \cos\Psi_0 \text{sen}\theta & \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta \end{bmatrix} (1 + \cos\theta') \frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix}$$

$$= (N) \cdot (T) \cdot (1 + \cos\theta') \frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix}$$

(1.10.1-d)

Se puede expresar todas las coordenadas en forma esférica referidas al sistema de la bocina, sustituyendo el vector \hat{n} dadas por (1.7.1-c) y sustituyendo las variables θ' , ϕ' , y aparecerían en la expresión anterior en función de θ y ϕ utilizando (1.3.2).

No obstante, para obtener una solución analítica más compacta es preferible sustituir las componentes cartesianas del vector \hat{n} dadas por (1.7.3). El término $\cos(\theta'/2)$ que aparecerá al cuadrado y multiplicado por dos se cancelará con el equivalente $(1 + \cos\theta')$ que ha aparecido en (1.10.1-d) al sustituir el valor de ρ en la expresión anterior. Con ello se consigue una expresión analítica, que simplificada aparece en el libro "the handbook of antenna design" de los autores: Rudge, Milne, Olver, Knight.

Denominando

$$S_1 = (\cos\Psi_0 + \cos\theta) \text{sen}\phi$$

$$C_1 = \text{sen}\Psi_0 \text{sen}\theta - (1 + \cos\Psi_0 \cos\theta) \cos\phi$$

Es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} E_{ax'_{off}} \\ E_{ay'_{off}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 \\ -S_1 & C_1 \end{bmatrix} \frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} \begin{bmatrix} e_{\theta}(\theta, \phi) \\ e_{\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} = (H) \cdot \frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} \begin{bmatrix} e_{\theta}(\theta, \phi) \\ e_{\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \quad (1.10.1-e)$$

Con (1.10.1-e) obtenemos el campo en la apertura del reflector en función de las coordenadas esféricas de los puntos de la superficie del reflector, proyección de los puntos de la apertura del reflector, en el sistema de la bocina (ρ, θ, ϕ). Como veremos más adelante, resulta conveniente expresarlo en función de las coordenadas cartesianas de los puntos de la apertura del sistema cartesiano de la apertura (x_{ap}, y_{ap}) o del sistema del reflector (x', y', z'). Para ello, partiremos de las coordenadas anteriores de los puntos de la apertura y por transformación de coordenadas llegaremos a expresarlas en función de las coordenadas polares de los puntos correspondientes de la superficie del reflector en el sistema de la bocina..

Un punto genérico Pap, en el sistema cartesiano de la apertura tendrá coordenadas cartesianas de la forma

$$\text{Pap}(x_{ap}, y_{ap})$$

En el sistema cartesiano del reflector, sólo variará la coordenada x' que está relacionada con x_{ap} , mediante: $x_{ap} = x' - h_0$, y_{ap} no cambia, es decir, $y_{ap} = y'$ y $z' = 0$, al estar situados los puntos de la apertura en el plano $z' = 0$. Según esto, para obtener las coordenadas cartesianas del punto anterior en el sistema cartesiano del reflector $\text{Pap}(x', y', z')$, se aplicaría:

$$x' = x_{ap} + h_0 \quad (1.10.2)$$

$$y' = y_{ap}$$

$$z' = 0$$

Su correspondiente **punto proyección sobre la superficie del reflector**, que denominaremos Prefl, tendrá iguales coordenadas x', y' y una z' determinada por la ecuación del paraboloide en el sistema del reflector, despejando z' de esta ecuación resulta:

$$z' = F - \frac{x'^2 + y'^2}{4F} \quad (1.10.3)$$

Con la coordenada z' anterior, las coordenadas de Prefl se escribirán como:

$$\text{Prefl}(x', y', z')$$

Las coordenadas anteriores de (x',y',z') (Sistema del reflector) se transforman en (x,y,z) (Sistema de la bocina), como vimos en el apartado 1.2, según (1.2.2), desarrollando la expresión anterior se llega a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Psi_0 & 0 & -\text{sen}\Psi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\Psi_0 & 0 & \cos\Psi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (1.10.4)$$

Las coordenadas polares correspondientes en el sistema de la bocina, se obtendrán utilizando las transformaciones habituales entre un Sistema cartesiano y su asociado polar:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \text{arc cos} \frac{z}{\rho} \\ \phi &= \text{arc tg} \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

Aplicando escalonadamente de (1.10.5) a (1.10.2) en (1.10.1-d) obtendríamos expresiones para las componentes cartesianas del campo en la apertura del reflector en función de las coordenadas cartesianas de los puntos de la apertura, en el sistema cartesiano de la apertura:

$$\begin{aligned} E_{ax_off}(x_{ap},y_{ap}) \\ E_{ay_off}(x_{ap},y_{ap}) \end{aligned} \quad (1.10.6)$$

1.11. Parámetros Px_off y Py_off asociados a la apertura del reflector offset

Consideremos un nuevo sistema de coordenadas (x_{ap},y_{ap}) , situado en el plano $z'=0$, centrado sobre la superficie del reflector, y denominando (r,Θ,Φ) a las coordenadas polares asociadas a este sistema, los parámetros Px_off y Py_off en este sistema de coordenadas, se obtendrán mediante las transformadas bidimensionales de Fourier del campo en la apertura, es decir, con las siguientes expresiones:

$$(1.11.1)$$

$$P_{x_off}(\Theta, \Phi) = \iint_{Sap} E_{ax_off}(x_{ap}, y_{ap}) e^{jk[U(\Theta, \Phi)x_{ap} + V(\Theta, \Phi)y_{ap}]} dx_{ap} dy_{ap}$$

$$P_{y_off}(\Theta, \Phi) = \iint_{Sap} E_{ay_off}(x_{ap}, y_{ap}) e^{jk[U(\Theta, \Phi)x_{ap} + V(\Theta, \Phi)y_{ap}]} dx_{ap} dy_{ap}$$

La superficie de la apertura Sap del reflector offset es un círculo. Por tanto, las variables que la definen, en el sistema de coordenadas (xap,yap), varían del siguiente modo:

$$\begin{aligned} -D/2 < x_{ap} < D/2 \\ -\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_{ap}^2} < y_{ap} < \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_{ap}^2} \end{aligned} \quad (1.11.2)$$

Con ello, (1.11.1), queda:

$$P_{x_off}(\Theta, \Phi) = \int_{x_{ap}=-D/2}^{D/2} \int_{y'=-\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_{ap}^2}}^{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_{ap}^2}} E_{ax_off}(x_{ap}, y_{ap}) e^{jk[U(\Theta, \Phi)x_{ap} + V(\Theta, \Phi)y_{ap}]} dx_{ap} dy_{ap}$$

$$P_{y_off}(\Theta, \Phi) = \int_{x_{ap}=-D/2}^{D/2} \int_{y'=-\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_{ap}^2}}^{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - x_{ap}^2}} E_{ay_off}(x_{ap}, y_{ap}) e^{jk[U(\Theta, \Phi)x_{ap} + V(\Theta, \Phi)y_{ap}]} dx_{ap} dy_{ap}$$

(1.11.3)

Para resolver las integrales anteriores, habría que sustituir las expresiones de las componentes del campo en la apertura, en el caso del modelo real según la forma referida en(1.10.6), obtenida de sustituir de (1.10.5) a (1.10.2) en (1.10.1-e) .

1.12. Resolución numérica por el método de Gauss-Legendre de las integrales que definen los parámetros Px_off y Py_off

Una manera de resolver el problema es aplicar el método de Gauss-Legendre a (1.11.3) , tras realizar transformaciones de coordenadas desde el sistema cartesiano de la apertura al sistema polar de la bocina, lo que supondría un cambio de variables (xap,yap) -> (ρ , θ , φ). De esta manera, podríamos utilizar directamente la expresión del campo en la apertura (1.10.1.e), además se debe añadir al integrando el jacobiano de la transformación y también expresar ρ en función de θ. La variación de las coordenadas polares sería 0 < θ < Ψs y 0 < φ < 2π.

Otra manera de resolver el problema es aplicar el método de Gauss-Legendre a (1.11.3) directamente en el sistema de coordenadas de la apertura (xap,yap). Sobre

este sistema, la superficie de la apertura donde se efectúa la integración queda expresada de forma sencilla y los parámetros y **los puntos de Gauss** (puntos derivados de las raíces del polinomio de Legendre donde es necesario evaluar el integrando para aplicar el método) tienen también expresiones sencillas. El integrando de (1.11.3) está compuesto de 2 factores. El segundo factor se puede evaluar directamente en los puntos de Gauss expresados en coordenadas cartesianas del Sistema de la apertura. Para evaluar el primer factor (el campo en la apertura del reflector) en los puntos de Gauss, en el caso del modelo real debemos obtener su correspondencia en puntos de la superficie del reflector en el sistema esférico de la Bocina mediante transformaciones de coordenadas para poder aplicar (1.10.1-e), ya que (1.10.1-e) nos da el campo en la apertura en los puntos de la superficie de la apertura pero a partir de las coordenadas esféricas en el sistema de la bocina de sus correspondientes en la superficie del reflector. Estas transformaciones se mostraron en el apartado anterior, y como allí se comentó, para obtener el tipo buscado (1.10.6), habría que aplicarlas hacia atrás sobre (1.10.1-e), es decir, de (1.10.5) hasta (1.10.2).

Aplicaremos el método de Gauss en la segunda manera expuesta, es decir, partiendo del sistema cartesiano de coordenadas de la apertura. De acuerdo con ello, la superficie de integración queda definida mediante (1.11.2). Siguiendo el **método de Gauss para integración doble de orden 15**, se verá en el capítulo 2 con detalle.

Finalmente, para estimar la integral, se sustituirían los resultados que se han ido obteniendo en la **fórmula de Gauss para integrales dobles**

$$p \sum_{i=0}^{14} w_i c_i \sum_{j=0}^{14} w_j f(x_{ap_gi}, y_{ap_gij}) \quad (1.12.1)$$

Donde f representa alguno de los integrandos de (1.11.3)

1.13. Componentes copolar y contrapolar del campo radiado por el reflector (según polariz. en y): E_{CP_off} y E_{XP_off}

Se obtienen a partir de las componentes polares del campo radiado.. Denominando a las componentes polares del campo radiado por el reflector (E_{θ_off} , E_{ϕ_off}), las componentes copolar y contrapolar del campo radiado, que denominaremos E_{CP_off} y E_{XP_off} . Considerando al reflector como apertura son aplicables las fórmulas siguientes

$$\begin{bmatrix} E_{CP_off} \\ E_{XP_off} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}\Phi & \cos\Phi \\ \cos\Phi & -\text{sen}\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\theta_off} \\ E_{\phi_off} \end{bmatrix} \quad (1.13.1)$$

a) Según el primer principio de equivalencia:

$$\begin{bmatrix} E_{CP_off} \\ E_{XP_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \frac{1 + \cos\Theta}{2} \begin{bmatrix} P_{y_off} \\ P_{x_off} \end{bmatrix} \quad (1.13.2)$$

b) Según el segundo principio de equivalencia:

$$\begin{bmatrix} E_{CP_off} \\ E_{XP_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \begin{bmatrix} \text{sen}\Phi \cos\Phi (1 - \cos\Theta) & \text{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi \cos\Theta \\ \text{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi \cos\Theta & \text{sen}\Phi \cos\Phi (1 - \cos\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x_off} \\ P_{y_off} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} E_{CP_off} \\ E_{XP_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \begin{bmatrix} \text{sen}\Phi \cos\Phi (1 - \cos\Theta) P_{x_off} + (\text{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi \cos\Theta) P_{y_off} \\ (\text{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi \cos\Theta) P_{x_off} + \text{sen}\Phi \cos\Phi (1 - \cos\Theta) P_{y_off} \end{bmatrix}}$$

(1.13.2')

1.14. Diagramas normalizados de las componentes copolar y contrapolar del campo radiado por el reflector (según polariz. en y): $f_{E_CP_off}$ y $f_{E_XP_off}$

a) Según el primer principio de equivalencia

Módulo de las componentes copolar y contrapolar:

$$|E_{CP_off}| = \frac{1}{\lambda r} \frac{1 + \cos\Theta}{2} |P_{y_off}|$$

$$|E_{XP_off}| = \frac{1}{\lambda r} \frac{1 + \cos\Theta}{2} |P_{x_off}|$$
(1.14.1)

Módulo máximo de las componentes copolar (se produce para $\Theta = \Phi = 0$):

$$|E_{CP_off}|_{mx} = |E_{CP_off}|_{\Phi=\Theta=0} = \frac{1}{\lambda r} |P_{y_off}(0,0)|$$
(1.14.2)

Funciones normalizadas de campo:

$$f_{E_CP_off} = \frac{|E_{CP_off}|}{|E_{CP_off}|_{mx}} = \frac{\frac{1}{\lambda r} \frac{1 + \cos\Theta}{2} |P_{y_off}|}{\frac{1}{\lambda r} |P_{y_off}(0,0)|} = \frac{1 + \cos\Theta}{2} \cdot \frac{|P_{y_off}|}{|P_{y_off}(0,0)|}$$

$$f_{E_XP_off} = \frac{|E_{XP_off}|}{|E_{CP_off}|_{mx}} = \frac{\frac{1}{\lambda r} \frac{1 + \cos\Theta}{2} |P_{x_off}|}{\frac{1}{\lambda r} |P_{y_off}(0,0)|} = \frac{1 + \cos\Theta}{2} \cdot \frac{|P_{x_off}|}{|P_{y_off}(0,0)|}$$
(1.14.3)

Para expresarlas en dB hay que aplicar $20\log$:

b) Según el segundo principio de equivalencia

$$A = \text{sen}\Phi \cos\Phi (1 - \cos\Theta)$$

$$B = \text{sen}^2\Phi + \cos^2\Phi \cos\Theta$$
(1.14.4)

Módulo de las componentes copolar y contrapolar:

$$|E_{CP_off}| = \frac{1}{\lambda r} |AP_{x_off} + BP_{y_off}|$$

$$|E_{XP_off}| = \frac{1}{\lambda r} |BP_{x_off} + AP_{y_off}|$$
(1.14.5)

Módulo máximo de las componentes copolar y contrapolar (se produce para $\Theta = \Phi = 0 \Rightarrow A=0, B=1$):

$$|E_{CP_off}|_{mx} = |E_{CP_off}|_{\Phi=\Theta=0} = \frac{1}{\lambda r} |P_{y_off}(0,0)| \quad (1.14.6)$$

Funciones normalizadas de campo:

$$f_{E_CP_off} = \frac{|E_{CP_off}|}{|E_{CP_off}|_{mx}} = \frac{\frac{1}{\lambda r} |AP_{x_off} + BP_{y_off}|}{\frac{1}{\lambda r} |P_{y_off}(0,0)|} = \frac{|AP_{x_off} + BP_{y_off}|}{|P_{y_off}(0,0)|}$$

$$f_{E_XP_off} = \frac{|E_{XP_off}|}{|E_{CP_off}|_{mx}} = \frac{\frac{1}{\lambda r} |BP_{x_off} + AP_{y_off}|}{\frac{1}{\lambda r} |P_{y_off}(0,0)|} = \frac{|BP_{x_off} + AP_{y_off}|}{|P_{y_off}(0,0)|} \quad (1.14.7)$$

Para expresarlas en dB hay que aplicar $20\log$.

1.15. Campo radiado por la bocina referido a su centro de fase

Los campos procedentes de la bocina llegan en fase a la apertura del reflector cuando su foco se hace coincidir con el centro de fase de la bocina.

Para hacer coincidir el centro de fase del alimentador con el foco debemos trasladar el alimentador una distancia igual a la distancia del centro de la apertura al centro de fase de la bocina que vale L_{ph} . En general, el campo radiado por una antena trasladada es igual al de la antena sin trasladar por un factor de fase de la forma:

$$e^{jk\vec{r}_1 \cdot \hat{r}} = e^{jk r_1 \cos \alpha}$$

- \vec{r}_1 : vector de posición del punto al que se traslada la bocina
- α : ángulo que forma el vector de posición de dicho punto con el de la dirección de propagación considerada.
- r_1 : distancia del centro de la apertura al centro de fase de la bocina que vale L_{ph} y como la dirección \vec{r}_1 coincide con el eje z: $\alpha = \theta$. Sustituyendo nos queda:

$$e^{jkL_{ph} \cos \theta} \quad (1.15.1)$$

Este factor deberá añadirse a las fórmulas de los campos del reflector que dependen del campo radiado por el alimentador (normalizado), calculado con centro de la apertura del alimentador situado en el foco, es decir, ha de realizarse el siguiente cambio:

$$\begin{bmatrix} e_{\theta} \\ e_{\phi} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} e_{\theta} \\ e_{\phi} \end{bmatrix} e^{jkL_{ph} \cos \theta} \quad (1.15.2)$$

2. REFLECTOR PARABÓLICO CENTRADO

2.1. Caso particular del reflector Offset

Un reflector parabólico centrado se obtiene cortando un paraboloides con un plano perpendicular a su eje focal. Su geometría se muestra en la siguiente figura

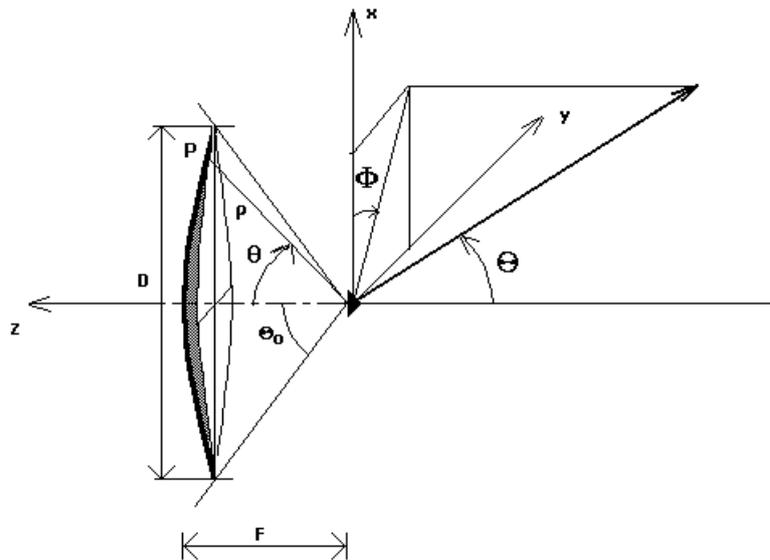


Fig. 2.1

Ya que ,

$$h_0=0$$

$$\Psi_0=0$$

$$\Psi_s=\theta_0$$

Por lo que el sistema de coordenadas de bocina y de reflector coinciden.

Particularizando las formulas vistas para el reflector offset para el reflector centrado. Obtenemos:

$$\rho(\theta) = \frac{2F}{1 + \cos\theta} = \frac{F}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \quad (2.1.1)$$

$$h(\theta) = x(\theta) = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (2.1.2)$$

En particular, para los puntos extremos del reflector $h=D/2$ y $\theta=\theta_0$, con lo que:

$$\frac{D}{2} = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \Leftrightarrow \theta_0 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4F/D} \right) \quad (2.1.2')$$

Y para el campo en la apertura del reflector off-set (1.10.1-e) para el caso del reflector parabólico centrado ($\Psi_0=0$ y $\Psi_s=\theta_0$), se tiene:

$$S_1 = (1 + \cos\theta) \operatorname{sen}\phi$$

$$C_1 = -(1 + \cos\theta) \operatorname{cos}\phi$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{ax'_{pc}} \\ E_{ay'_{pc}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 & S_1 \\ -S_1 & C_1 \end{bmatrix} \frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} \begin{bmatrix} -(1 + \cos\theta) \operatorname{cos}\phi & (1 + \cos\theta) \operatorname{sen}\phi \\ -(1 + \cos\theta) \operatorname{sen}\phi & -(1 + \cos\theta) \operatorname{cos}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{je^{-jk2F}}{2\lambda F} (1 + \cos\theta) \begin{bmatrix} \operatorname{cos}\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \operatorname{cos}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.1.1):

$$\boxed{\begin{bmatrix} E_{ax_{pc}} \\ E_{ay_{pc}} \end{bmatrix} = -\frac{je^{-jk2F}}{\lambda \rho} \begin{bmatrix} \operatorname{cos}\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \operatorname{cos}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\theta(\theta, \phi) \\ e_\phi(\theta, \phi) \end{bmatrix}} \quad (2.1.3)$$

A partir del campo en la apertura del reflector parabólico centrado los parámetros P_x y P_y y las diferentes componentes del campo radiado se calcularían con las mismas expresiones vistas para el reflector offset (ver apartados 1.11 a 1.15)

2.2. Ganancia del reflector . Eficiencia global del reflector

Para obtener la ganancia del reflector, comenzaremos expresando el campo en la apertura del reflector en función de la potencia radiada por el alimentador y su ganancia, a partir del *método de la apertura* explicado en 1.10

$$E_i = E_r = \frac{\sqrt{60P_f G_f(\theta)}}{\rho} \cdot e^{-jk\rho} \quad (2.2.1)$$

Donde:

Pf: potencia radiada por el alimentador.

Gf: ganancia del alimentador.

Teneiendo en cuenta 1.4.1 obtenemos:

$$\vec{E}_{ap} = E_r e^{-jk\rho \cos\theta} \hat{y} = \frac{\sqrt{60P_f G_f(\theta)}}{\rho} \cdot e^{-jk\rho} e^{-jk\rho \cos\theta} \hat{y} = \frac{\sqrt{60P_f G_f(\theta)}}{\rho} \cdot e^{-jk2F} \hat{y} \quad (2.3.2)$$

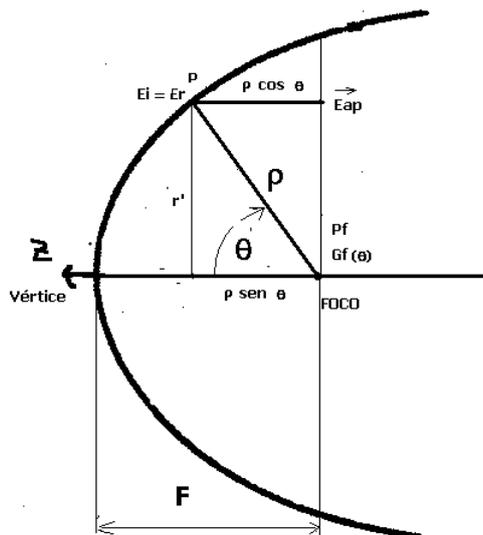


Fig. 2.2

2.3. Alimentador ideal tipo cos-q

a) Campo radiado

El campo radiado por el alimentador ideal tipo cos-q, con polarización según y, vale:

$$\vec{e}_f = \cos^q(\theta)\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_f = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \cdot \vec{e}_f = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \cdot \cos^q(\theta)\hat{y} \quad (2.3.1)$$

Teniendo en cuenta que de, cara al receptor, el vector unitario \hat{y} puede descomponerse en:

$$\hat{y} = \text{sen}\phi\hat{\theta} + \text{cos}\phi\hat{\phi} \quad (2.3.2)$$

Las componentes polares del campo radiado por el alimentador resultan:

$$\begin{bmatrix} E_{f\theta} \\ E_{f\phi} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \cdot \begin{bmatrix} e_{f\theta} \\ e_{f\phi} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jkr}}{\lambda r} \cdot \cos^q(\theta) \begin{bmatrix} \text{sen}\phi \\ \text{cos}\phi \end{bmatrix} \quad (2.3.3)$$

El módulo del campo resulta inmediato de (2.3.1), también se deduce fácilmente de (2.3.3):

$$|\vec{E}_f| = \sqrt{|E_{f\theta}|^2 + |E_{f\phi}|^2} = \frac{1}{\lambda r} \sqrt{\cos^{2q}(\theta)(\text{sen}^2\phi + \text{cos}^2\phi)} = \frac{\cos^q(\theta)}{\lambda r} \quad (2.3.4)$$

Como vemos, es independiente de ϕ , sólo dependiente de θ

b)Potencia radiada P_r . Ganancia $G_f(\theta)$

$$G_f(\theta) = \frac{\langle S(\theta) \rangle}{\langle S \rangle_m} = \frac{\frac{1}{2Z_0} |\vec{E}(\theta)|^2}{\frac{P_f}{4\pi r^2}}$$

Para hallar la ganancia como vemos necesitamos la Pf

$$P_f = \iint_s \langle S \rangle ds = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2Z_0} |\bar{E}|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= 2\pi r^2 \frac{1}{2Z_0} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos^{2q}(\theta)}{\lambda^2 r^2} \sin\theta d\theta = \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{1}{2Z_0} \left[\frac{\sin^{2q+1}(\theta)}{2q+1} \right]_{\theta=0}^{\pi/2} = \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{1}{2Z_0} \frac{1}{2q+1}$$

Sustituyendo (2.3.5) y(2.3.5) .Obtenemos (2.3.5)

$$G_f(\theta) = \frac{\langle S(\theta) \rangle}{\langle S \rangle_{iso}} = \frac{\frac{1}{2Z_0} |\bar{E}(\theta)|^2}{\frac{P_f}{4\pi r^2}} = \frac{\frac{1}{2Z_0} \frac{1}{\lambda^2 r^2} \cos^{2q}(\theta)}{\frac{2\pi}{\lambda^2 r^2} \frac{1}{2Z_0} \frac{1}{2q+1}} = 2(2q+1) \cos^{2q}(\theta)$$

(2.3.6)

Como q es arbitrario, **2q** también y podemos sustituirlo por una misma variable **n**, con lo que la expresión de la ganancia del alimentador ideal tipo cos-q, se puede escribir como:

$$G_f(\theta) = 2(n+1) \cos^n(\theta)$$

(2.3.6')

2.4. Eficiencia global $\epsilon_g(\theta)$ del reflector con alimentador ideal tipo cos-q

Para obtener la expresión analítica de la eficiencia global del reflector en el caso de que esté alimentado con un alimentador ideal tipo cos-q, basta sustituir la expresión de la ganancia de este alimentador, dada por(2.3.6'), en la expresión de la eficiencia global:

$$\epsilon_g = \cot g^2 \frac{\theta_0}{2} \left(\int_{\theta=0}^{\theta_0} \sqrt{G_f(\theta)} \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \right)^2$$

3. REFLECTORES DOBLES CENTRADOS

3.1. Introducción.

Como se dijo en la introducción se utilizan en aplicaciones de gran potencia, se precisa una antena de grandes dimensiones.

3.2. Antena Cassegrain centrada

a) Descripción geométrica

Su geometría se muestra en la figura 3.1. Según se muestra en la figura 3.1, todo rayo que partiendo de F_1 se refleje en un punto P' del subreflector, lo hará siguiendo la dirección marcada por la recta $P'F_2$ hacia el reflector, donde de nuevo se reflejará en P , como siguiendo una trayectoria paralela al eje focal del paraboloide.

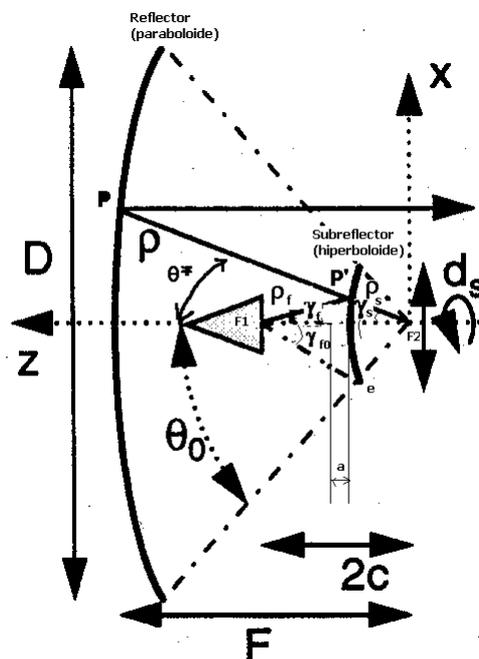


Fig. 3.1

De acuerdo con la figura 3.1, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

D: diámetro de la base circular del reflector principal (casquete de paraboloide de revolución)

d_s : diámetro de la base circular del subreflector (casquete de hiperboloide de revolución)

ρ : Módulo del radio vector de un punto genérico P del reflector (distancia P-F2)

$\theta^* = \theta$: ángulo que forma el radio vector de P con el eje polar del paraboloide (en el sistema de coordenadas definido en la figura 3.1, coincide con el ángulo cenital θ). Si P es uno de los puntos del borde, este ángulo se denomina θ_o^* ($=\theta_o$)

ρ_f ρ_s : Módulos de los radio-vectores de un punto genérico del subreflector P' con respecto al alimentador F2(distancia P'-F2) y al foco del paraboloide F1 (distancia P'-F1), respectivamente.

γ_f , γ_s : ángulos que forman los respectivos radio vectores de P', referidos anteriormente, con sus respectivos ejes polares con el eje focal. Estos ángulos están definidos sobre ejes polares con sentidos contrarios, siguiendo el convenio de que el eje polar correspondiente a cada foco está definido desde dicho foco al otro.

F: distancia focal del paraboloide (distancia entre el vértice del paraboloide y su foco F2)

a : distancia centro-vértice hipérbola

c: semidistancia focal del hiperboloide (semidistancia entre sus dos focos F1 y F2), el parámetro c está relacionado con los otros parámetros **a** y **b**.

e: excentricidad de la hipérbola ($e=c/a$).

b) Ecuaciones polares del subreflector(hiperboloide de revolución)

En cualquiera de los planos determinados por los radio-vectores, las ecuaciones polares de un punto genérico del subreflector P', como el mostrado en la figura 3.1, vienen dadas por

$$\rho_f = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_f - 1} \quad (3.2.1)$$

$$\rho_s = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_s + 1} \quad (3.2.1')$$

Entre ambos radio-vectores existe la relación derivada del teorema del seno, que con la nomenclatura establecida para la antena Cassegrain, se escribe como:

$$\frac{\rho_f}{\text{sen}\gamma_s} = \frac{\rho_s}{\text{sen}\gamma_f} \quad (3.2.2)$$

c) Excentricidad e del hiperboloide en función de los ángulos polares

Entre las 3 ecuaciones anteriores podemos eliminar los radio-vectores, sustituyendo sus expresiones dadas por (3.2.1) y (3.2.1') en (3.2.2) y obtener una relación entre la excentricidad y los ángulos polares de un punto, de la cual podemos despejar la excentricidad, como se indica:

$$\frac{\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos\gamma_f - 1}}{\text{sen}\gamma_s} = \frac{\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos\gamma_s + 1}}{\text{sen}\gamma_f}$$

$$\text{sen}\gamma_f e \cos\gamma_s + \text{sen}\gamma_s = \text{sen}\gamma_s e \cos\gamma_f - \text{sen}\gamma_s$$

$$e = \frac{\text{sen}\gamma_f + \text{sen}\gamma_s}{\cos\gamma_f \text{sen}\gamma_s - \cos\gamma_s \text{sen}\gamma_f}$$

A continuación veremos la excentricidad en función del ángulo doble

$$e = \frac{2\text{sen}\frac{\gamma_f + \gamma_s}{2} \cos\frac{\gamma_f - \gamma_s}{2}}{\text{sen}(\gamma_s - \gamma_f)} = \frac{2\text{sen}\frac{\gamma_f + \gamma_s}{2} \cos\frac{\gamma_f - \gamma_s}{2}}{2\text{sen}\frac{\gamma_s - \gamma_f}{2} \cos\frac{\gamma_s - \gamma_f}{2}} =$$

$$= \frac{\text{sen}\frac{\gamma_s + \gamma_f}{2}}{\text{sen}\frac{\gamma_s - \gamma_f}{2}} \quad (3.2.3)$$

En particular, considerando un punto del borde del subreflector, tenemos que: $\gamma_f = \gamma_{f0}$, $\gamma_s = \theta_0$ y la expresión anterior queda:

$$e = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta_0 + \gamma_{f0}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta_0 - \gamma_{f0}}{2}} \quad (3.2.3')$$

En el caso de la hipérbola, como sabemos, este valor es mayor que uno

d) Factor de magnificación M

A la relación anterior se la denomina factor de magnificación M. Al ser $e > 1$, se deduce que $M > 1$. Como luego veremos, este factor permitirá transformar la antena Cassegrain centrada en una antena tipo reflector centrado.

$$\begin{aligned} ex - ey &= x + y \\ x(e - 1) &= y(e + 1) \\ \frac{x}{y} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\gamma_{f0}}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma_{f0}}{2}} = \frac{e + 1}{e - 1} = M \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

e) Diámetro del subreflector. Distancias entre los focos y la base circular del subreflector

De la figura 3.1, se desprende que el diámetro del subreflector es igual a dos veces la proyección vertical del módulo de alguno de los radio-vectores sobre la perpendicular al eje focal que pasa por el punto del borde, es decir:

$$\begin{aligned} d_s &= 2\rho_s \operatorname{sen} \theta_0 = 2 \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \theta_0 + 1} \operatorname{sen} \theta_0 \\ d_s &= 2\rho_f \operatorname{sen} \gamma_{f0} = 2 \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_{f0} - 1} \operatorname{sen} \gamma_{f0} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Denominando l_1 a la distancia del foco F1 a la base circular del subreflector y l_2 a la distancia del foco F2 a la base circular del subreflector, estas distancias se pueden poner en función del diámetro del subreflector los ángulos γ_{f_0} y θ_0 . Observando los triángulos rectángulos que se forman, se desprende que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_{f_0} &= \frac{d_s / 2}{l_1} \Rightarrow l_1 = \frac{d_s / 2}{\operatorname{tg} \gamma_{f_0}} \\ \operatorname{tg} \theta_0 &= \frac{d_s / 2}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{d_s / 2}{\operatorname{tg} \theta_0} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

La suma de ambas longitudes l_1 y l_2 da la distancia focal $2c$

f) Reflector parabólico centrado equivalente de la antena Cassegrain centrada

Si se prolongan las líneas que unen el foco F1 con los puntos del borde del subreflector hasta que corten a un plano, perpendicular al eje focal, en un base circular de igual diámetro que la del reflector parabólico real, podremos construir un reflector idéntico al real sobre la referida base circular, con foco el otro foco del hiperboloide, el de alimentador: F1. Este reflector parabólico centrado, de igual diámetro que el real y de distancia focal que denominaremos F_e , es equivalente a la antena Cassegrain a efectos de radiación. En la siguiente figura se muestra el reflector equivalente

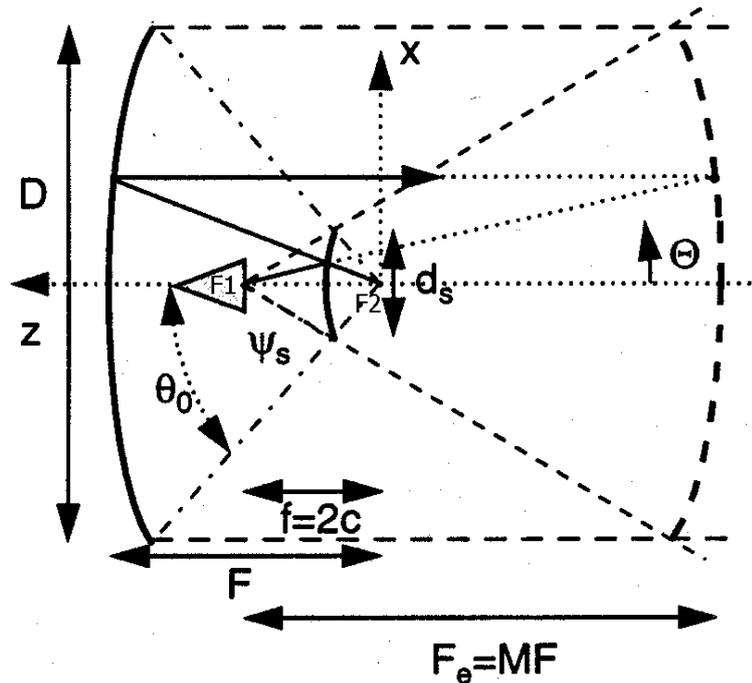


Fig. 3.2

Como hemos dicho, en el **reflector equivalente** el diámetro es igual que en el original, D , y la distancia focal F_e , que como se muestra en la figura anterior, y ahora demostraremos, es igual a la distancia focal del paraboloide real multiplicada por el factor de magnificación M , definido en el apartado d), es decir:

$$F_e = MF \tag{3.2.7}$$

Como $M > 1 \Rightarrow F_e > F$, de ahí que M sea denominado factor de magnificación, pues el factor con que se agranda F hasta conseguir F_e .

- Demostración de (3.2.7)

Aplicando la relación entre la distancia focal, diámetro y ángulo bajo el que se ven los puntos del borde del reflector centrado, dada en (2.1.2'), tanto al reflector real como el equivalente, de acuerdo con la figura 3.2, se tiene:

$$\frac{D}{2} = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \quad (3.2.7')$$

$$\frac{D}{2} = 2F_e \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_{f0}}{2}$$

Dividiendo la 2ª ecuación entre la primera, despejando la relación F_e/F , expresando las tangentes como cocientes de seno/coseno y aplicando (3.2.4) se tiene:

$$\frac{F_e}{F} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{f0}}{2}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\gamma_{f0}}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}}}{\frac{\operatorname{sen} \frac{\gamma_{f0}}{2} \cos \frac{\theta_0}{2}}{\cos \frac{\gamma_{f0}}{2}}} = \frac{e+1}{e-1} = M \quad (3.2.7'')$$

g) Cálculo de la excentricidad e del subreflector a partir de F/D, ds y 2c(=f)

En la práctica, la excentricidad e del subreflector no suele ser dato de partida de un diseño. Suele ser más conveniente fijar parámetros geométricos relativos a las dimensiones físicas de la antena Cassegrain y, en función de ellos, deducir la excentricidad. Luego, a partir de la excentricidad, junto a otros parámetros, se calculará el resto de parámetros de la antena, vistos en apartados anteriores.

Datos de partida para el cálculo de la excentricidad:

F/D: relación distancia focal /diámetro de la apertura del paraboloide

ds: diámetro del subreflector

2c=f: distancia interfocal del hiperboloide definido por el subreflector

El ángulo bajo el que se ve el borde del reflector desde el foco del paraboloide respecto a su eje focal, es decir, θ_0 , se obtiene aplicando (2.1.2):

$$\theta_0 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{4F/D} \right) \quad (3.2.8)$$

El ángulo anterior también es bajo el que se ve el subreflector desde el foco F2 del hiperboloide (coincidente con el foco del paraboloide) (ver fig. 3.2). Aplicando (3.2.6) podemos obtener l_2 a partir del ángulo anterior y del diámetro del subreflector d_s (dato de partida) y a partir de l_2 y la distancia interfocal $2c$ podemos obtener l_1 , ya que la suma de dichas distancias es la distancia interfocal.

$$l_2 = \frac{d_s / 2}{\operatorname{tg} \theta_0} ; \quad l_1 = 2c - l_2 \quad (3.2.9)$$

A partir de l_1 y el diámetro del subreflector d_s (dato de partida) , utilizando (3.2.6), podemos obtener el ángulo bajo el que se ve el borde del subreflector desde el otro foco:

$$\gamma_{f0} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{d_s / 2}{l_1} \quad (3.2.10)$$

A partir de los ángulos bajo los que se ve el borde del subreflector desde ambos focos, γ_{f0} y θ_0 , utilizando (3.2.3'), se obtiene finalmente la excentricidad:

$$e = \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta_0 + \gamma_{f0}}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta_0 - \gamma_{f0}}{2}} \quad (3.2.11)=(3.2.3')$$

h) Condición de bloqueo mínimo

En la antena Cassegrain centrada, la apertura del alimentador produce un bloqueo de ciertos rayos reflejados por el subreflector, produciéndose una zona de sombra en el reflector principal, que en la apertura de dicho reflector se traduce en una sombra circular de diámetro d_f , tal y como se muestra en la figura 3.3

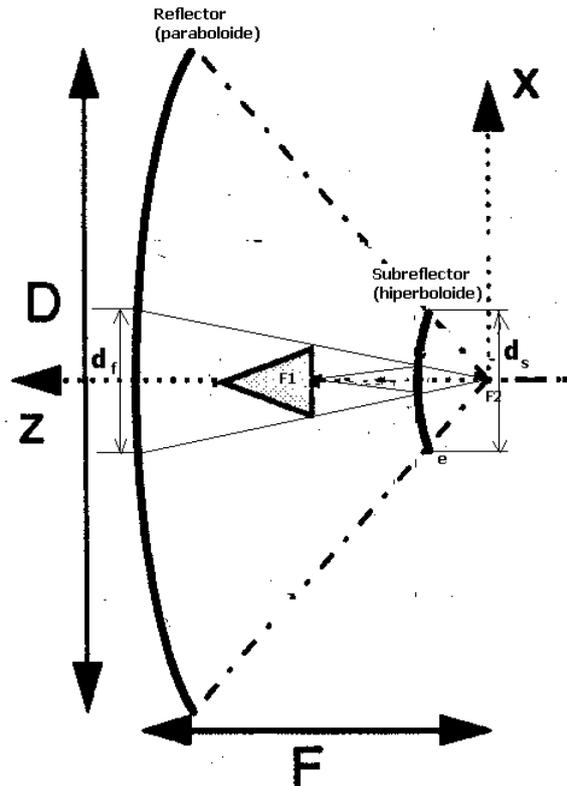


Fig. 3.3

El diámetro resultante del bloqueo será el mayor valor de entre d_f y d_s . Un aumento de la apertura del alimentador reduce el ancho de su haz de radiación, lo que permite alejar el alimentador y reducir d_s , pero para ello, es preciso aumentar la apertura del alimentador. Por contra, una disminución de la apertura del alimentador implicaría aumento del ancho de haz y, en consecuencia, aumento de d_s . El **bloqueo** será **mínimo** cuando:

$$(3.2.12)$$

$$d_f = d_s$$

Si el alimentador se diseña de manera que, cumpliendo la condición anterior, el primer cero de radiación caiga en el borde del subreflector, suponiendo que se utilizase una bocina sectorial plano H y que identificamos d_f con la anchura de la boca W , el ancho de haz entre nulos será, de acuerdo con (1,3.10.10)(ver tema de bocinas):

$$(3.2.13)$$

$$\Delta = 2 \frac{\lambda}{d_f}$$

Ajustando la expresión anterior al caso del ancho de haz a -10 dB, suponiendo el alimentador aproximadamente en el vértice del paraboloide y por consideraciones

geométricas, se puede establecer un valor de Δ función de la distancia focal del paraboloide F y λ ,. Despejando d_f y de acuerdo con (3.2.12), resulta:

$$d_f = d_s = \sqrt{2\lambda F} \tag{3.2.14}$$

En la práctica se utilizan alimentadores más pequeños, con subreflectores $d_s = 0,15D$.

3.3. Antena gregoriana centrada

a) Descripción geométrica

Su geometría se muestra en la figura 3.4. Según se muestra en la figura 3.3, todo rayo que partiendo de F_1 se refleje en un punto P' del subreflector, lo hará siguiendo la dirección marcada por la recta $P'F_2$ hacia el reflector, donde de nuevo se reflejará en P , como siguiendo una trayectoria paralela al eje focal del paraboloide. De acuerdo con la figura 3.4, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

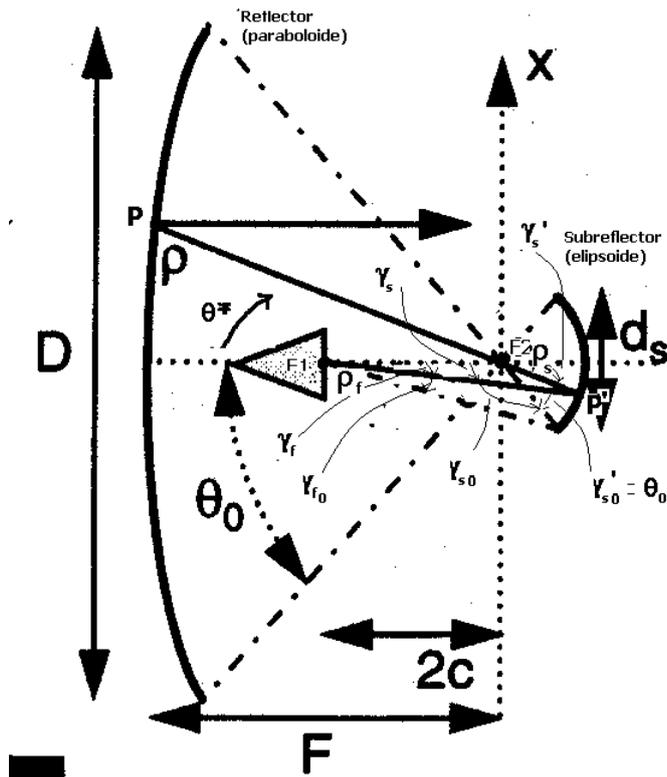


Fig. 3.4

D: diámetro de la base circular del reflector principal (casquete de paraboloides de revolución)

d_s: diámetro de la base circular del subreflector (casquete de elipsoide de revolución)

ρ: Módulo del radio vector de un punto genérico P del reflector (distancia P-F2)

θ* = θ: ángulo que forma el radio vector de P con el eje polar del paraboloides (en el sistema de coordenadas definido en la figura 3.1, coincide con el ángulo zenital θ). Si P es uno de los puntos del borde, este ángulo se denomina **θ_o*** (=θ_o)

ρ_f ρ_s: Módulos de los radio-vectores de un punto genérico del subreflector P' con respecto al alimentador F2 (distancia P'-F2) y al foco del paraboloides F1 (distancia P'-F1), respectivamente.

γ_f, γ_s : ángulos que forman los respectivos radio vectores de P', referidos anteriormente, con sus respectivos ejes polares con el eje focal. Estos ángulos están definidos sobre ejes polares con sentidos contrarios, siguiendo el convenio de que el eje polar correspondiente a cada foco está definido desde dicho foco al otro

F: distancia focal del paraboloides (distancia entre el vértice del paraboloides y su foco F)

a : distancia centro-vértice hipérbola

c: semidistancia focal del elipsoide (semidistancia entre sus dos focos F1 y F2), el parámetro c está relacionado con los otros parámetros **a** y **b**.

e: excentricidad de la hipérbola (e=c/a).

b) Ecuaciones polares del subreflector (elipsoide de revolución)

En cualquiera de los planos determinados por los radio-vectores, las ecuaciones polares de un punto genérico del subreflector P', como el mostrado en la figura 3.4, vienen dadas por

$$\rho_f = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_f - 1} \tag{3.3.1}$$

$$\rho_s = -\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_s + 1} \tag{3.3.1'}$$

Entre ambos radio-vectores existe la relación derivada del teorema del seno, que con la nomenclatura establecida para la antena Gregoriana, se escribe como:

$$\frac{\rho_f}{\text{sen}\gamma_s} = \frac{\rho_s}{\text{sen}\gamma_f} \quad (3.3.2)$$

c) Excentricidad e del elipsoide en función de los ángulos polares

Entre las 3 ecuaciones anteriores podemos eliminar los radio-vectores, sustituyendo sus expresiones dadas por (3.2.1) y (3.2.1') en (3.2.2) y obtener una relación entre la excentricidad y los ángulos polares de un punto, de la cual podemos despejar la excentricidad, como se indica:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos\gamma_f - 1}}{\text{sen}\gamma_s} &= \frac{-\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos\gamma_s' + 1}}{\text{sen}\gamma_f} \\ \text{sen}\gamma_f e \cos\gamma_s' + \text{sen}\gamma_f &= -\text{sen}\gamma_s' e \cos\gamma_f + \text{sen}\gamma_s' \\ e &= \frac{\text{sen}\gamma_s' - \text{sen}\gamma_f}{\text{sen}\gamma_f \cos\gamma_s' + \text{sen}\gamma_s' \cos\gamma_f} \\ e &= \frac{2 \cos \frac{\gamma_s' + \gamma_f}{2} \text{sen} \frac{\gamma_s' - \gamma_f}{2}}{\text{sen}(\gamma_s + \gamma_f)} = \frac{2 \cos \frac{\gamma_s' + \gamma_f}{2} \text{sen} \frac{\gamma_s' - \gamma_f}{2}}{2 \text{sen} \frac{\gamma_s' + \gamma_f}{2} \cos \frac{\gamma_s' + \gamma_f}{2}} = \\ &= \frac{\text{sen} \frac{\gamma_s' - \gamma_f}{2}}{\text{sen} \frac{\gamma_s' + \gamma_f}{2}} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

En particular, considerando un punto del borde del subreflector, tenemos que: $\gamma_f = \gamma_{f0}$, $\gamma_s' = \theta_0$ y la expresión anterior queda:

$$e = \frac{\text{sen} \frac{\theta_0 - \gamma_{f0}}{2}}{\text{sen} \frac{\theta_0 + \gamma_{f0}}{2}} \quad (3.3.3')$$

En el caso de la elipse, como sabemos, este valor es menor que uno

d) Factor de magnificación M

Aplicando la fórmula del seno de la suma/diferencia a (3.3.3'), desarrollamos el numerador y denominador:

$$\begin{aligned}
 ex + ey &= x - y \\
 x(1 - e) &= y(1 + e) \\
 \frac{x}{y} &= \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\gamma_{f0}}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma_{f0}}{2}} = \frac{1 + e}{1 - e} = M
 \end{aligned}
 \tag{3.3.4}$$

A la relación anterior se la denomina factor de magnificación M. Se observa que es como el de la antena gregoriana añadiéndole un menos. Al ser $e < 1$, se deduce que $M > 1$. Como luego veremos, este factor permitirá transformar la antena Gregoriana centrada en una antena tipo reflector centrado.

e) Diámetro del subreflector. Distancias entre los focos y la base circular del subreflector

De la figura 3.4, se desprende que el diámetro del subreflector es igual a dos veces la proyección vertical del módulo de alguno de los radio-vectores sobre la perpendicular al eje focal que pasa por el punto del borde, es decir:

$$\begin{aligned}
 d_s &= 2\rho_s \operatorname{sen} \theta_0 = -2 \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \theta_0 + 1} \operatorname{sen} \theta_0 \\
 d_s &= 2\rho_f \operatorname{sen} \gamma_{f0} = 2 \cdot \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_{f0} - 1} \operatorname{sen} \gamma_{f0}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.5}$$

Denominando l_2 a la distancia del foco F2 al vértice del subreflector, l_2 y la distancia interfocal $F_1F_2=2c$ están relacionadas con el diámetro del subreflector como se muestra a continuación, lo cual se deduce a partir de los triángulos rectángulos que se forman:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_0 &= \frac{d_s / 2}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{d_s / 2}{\operatorname{tg} \theta_0} \\ \operatorname{tg} \gamma_{f_0} &= \frac{d_s / 2}{2c + l_2} \Rightarrow 2c = \frac{d_s / 2}{\operatorname{tg} \gamma_{f_0}} - l_2 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

f) Reflector parabólico centrado equivalente de la antena Gregoriana centrada

Si se prolongan las líneas que unen el foco F1 con los puntos del borde del subreflector hasta que corten a un plano, perpendicular al eje focal, en una base circular de igual diámetro que la del reflector parabólico real, podremos construir un reflector idéntico al real sobre la referida base circular, con foco el otro foco del elipsoide, el de alimentador: F1. Este reflector parabólico centrado, de igual diámetro que el real y de distancia focal que denominaremos F_e , es equivalente a la antena Gregoriana a efectos de radiación. En la siguiente figura se muestra el reflector equivalente:

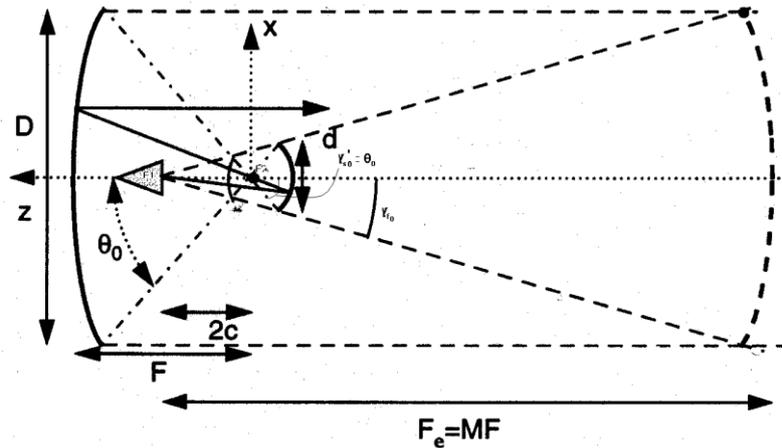


Fig. 3.5

Como hemos dicho, en el **reflector equivalente** el diámetro es igual que en el original, D , y la distancia focal F_e , que como se muestra en la figura anterior, y ahora demostraremos, es igual a la distancia focal del paraboloide real multiplicada por el factor de magnificación M , definido en el apartado d), es decir:

$$F_e = MF \quad (3.3.7)$$

Como $M > 1 \Rightarrow F_e > F$, de ahí que M sea denominado factor de magnificación, pues el factor con que se agranda F hasta conseguir F_e .

-----Demostración de (3.3.7)-----

Aplicando la relación entre la distancia focal, diámetro y ángulo bajo el que se ven los puntos del borde del reflector centrado, dada en (2.1.2'), tanto al reflector real como el equivalente, de acuerdo con la figura 3.2, se tiene:

$$\frac{D}{2} = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \quad (3.3.7')$$

$$\frac{D}{2} = 2F_e \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_{f0}}{2}$$

Dividiendo la 2ª ecuación entre la primera, despejando la relación F_e/F , expresando las tangentes como cocientes de seno/coseno y aplicando (3.3.4) se tiene:

$$\frac{F_e}{F} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_{f0}}{2}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\gamma_{f0}}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}}}{\frac{\operatorname{sen} \frac{\gamma_{f0}}{2} \cos \frac{\theta_0}{2}}{\cos \frac{\gamma_{f0}}{2}}} = \frac{1+e}{1-e} = M \quad (3.3.7'')$$

Que es equivalente a (3.3.7), con lo que dicha relación queda demostrada. Además de probar (3.3.7), hemos obtenido otra expresión para la relación $F_e/F=M$, en función de los ángulos bajo los que se ven los puntos del borde de reflector y subreflector, de la que se desprende que cada distancia focal es inversamente proporcional a la tangente del semiángulo con que se ve el borde de su reflector correspondiente (en el caso de F_e , coincidente con el semiángulo con que se ve el borde del subreflector). Con lo cual, manteniendo F constante, a medida que alejemos el alimentador del subreflector, menor será el ángulo con que se vea el borde del reflector desde F_2 y mayor será la relación F_e/F , o sea, el factor de M , y por tanto, mayor será F_e ; ello se aprecia geoméricamente de forma clara, al observar que el reflector equivalente, se forma más lejos conforme γ_{f0} se hace menor.

4. REFLECTORES DOBLES OFFSET

4.1. Introducción.

Para evitar el bloqueo, manteniendo la ventaja de alimentador accesible, se utilizan las antenas con doble reflector offset. Constan de un reflector parabólico tipo offset, que es un casquete de paraboloides que puede considerarse derivado de la intersección de un cono de vértice el foco con el paraboloides en una sección que no contenga al vértice del paraboloides (cono generatriz), y de un subreflector que es un casquete de hiperboloides o de elipsoides, teniéndose en el primer caso las **antenas Cassegrain offset** y en el segundo las antenas **Gregorianas offset**. Sus geometrías se muestran respectivamente en las Fig. 4.1 y 4.2.

El foco del paraboloides F2 coincide con uno de los focos del hiperboloides o elipsoides, pero los ejes focales del paraboloides y del hiperboloides o elipsoides, en general no coinciden, forman un ángulo β que, elegido de forma adecuada, proporciona ventajas en la radiación, además de facilitar el análisis y diseño, de las antenas dobles offset. En el otro foco F1 del hiperboloides o elipsoides se coloca el alimentador orientado hacia el subreflector de manera que la radiación sea reflejada desde él hacia el reflector principal.

El referido cono generatriz del reflector parabólico offset, determinará la superficie del subreflector, en concreto, dicha superficie quedará determinada por el corte del mencionado cono con el hiperboloides en el tipo Cassegrain o del bicono asociado con el elipsoides en el tipo Gregoriano, hiperboloides o elipsoides cuyo eje focal forma un ángulo β con el del paraboloides.

Los siguientes apartados tendrán como objetivo fundamental hallar para la antena doble offset un **reflector parabólico offset simple equivalente**, referido a un sistema de coordenadas situado en el foco del alimentador, cuyo eje z, orientado hacia el subreflector, en general, formará un ángulo α con respecto al eje focal de dicho paraboloides equivalente. Bajo ciertas restricciones aplicadas a los ángulos α y β , este reflector parabólico equivalente serán centrado en vez de offset.

En el caso de reflectores dobles offset, a diferencia de los reflectores dobles centrados, es más utilizada la antena de tipo gregoriano, debido a que los diseños presentan una estructura más compacta, y por tanto, más fácil de realizar en la práctica.

4.2. Descripción geométrica de las antenas Cassegrain y gregorianas offset

Como se ha indicado en la introducción, constan de un reflector principal parabólico offset de foco F2 y de un subreflector que es un casquete de hiperboloide de revolución en el tipo Cassegrain y un casquete de elipsoide de revolución con el foco F2 común al del reflector principal, y en cuyo otro foco F1 se sitúan el alimentador, determinando F1 y F2 un eje focal que no coincide con el del paraboloide, formando con el de éste un ángulo β . Sus geometrías se muestran en las figuras 4.1 y 4.2. Según se muestra en dichas figuras, todo rayo que partiendo de F1 se refleje en un punto P' del subreflector, lo hará siguiendo la dirección marcada por la recta P'F2 hacia el reflector, donde de nuevo se reflejará en P, como siguiendo una trayectoria paralela al eje focal del paraboloide. De acuerdo con la figuras 4.1 y 4.2, utilizaremos la siguiente nomenclatura:

D: diámetro de la apertura del reflector principal (casquete de paraboloide de revolución). La superficie de la apertura o simplemente apertura es la base de un cilindro de eje paralelo al del paraboloide que pasase por el contorno del casquete de paraboloide. (Sólo representado en fig.4.1)

d_s: diámetro de la apertura subreflector (casquete de hiperboloide/elipsoide de revolución). (Sólo representado en fig.4.1)

ρ : Módulo del radio vector de un punto genérico P del reflector (distancia P-F2)

θ^* : ángulo que forma el radio vector de P con el eje polar del paraboloide (en el sistema de coordenadas definido en la figura 4.1, es el suplementario del ángulo zenital θ , mientras que en el sistema de coordenadas de la figura 4.2, puede considerarse igual al ángulo zenital θ , si el radio vector lo extendemos hasta P'). Si P es el punto, cuya proyección sobre la apertura es el centro de la apertura, lo denominaremos θc^* , a la abscisa correspondiente, la denominaremos h_o . Si P es el punto del borde de mayor altura o abscisa($h_o+D/2$), lo denominaremos θu^* y si es el de menor altura o abscisa($h_o-D/2=C$, despejamiento), lo denominaremos θl^* . Estos ángulos sólo aparecen escritos en la figura 4.1 y sin definir su valor gráficamente, para no complicar la figura.

ρ_f ρ_s : Módulos de los radio-vectores de un punto genérico del subreflector P' con respecto al foco del alimentador F2(distancia P'-F2) y al foco del paraboloide F1 (distancia P'- F2), respectivamente.

$\gamma_f=\theta_\beta$, γ_s : ángulos que forman los respectivos radio vectores de P', referidos anteriormente, con sus respectivos ejes polares con el eje focal. Estos ángulos están definidos sobre ejes polares con sentidos contrarios, siguiendo el convenio de que el eje polar correspondiente a cada foco está definido desde dicho foco al otro.

F: distancia focal del paraboloide (distancia entre el vértice del paraboloide y su foco F2)

a : distancia centro-vértice hipérbola/elipse

c: semidistancia focal del hiperboloide/elipsoide (semidistancia entre sus dos focos F1 y F2), el parámetro **c** está relacionado con los otros parámetros **a** y **b**.

e: excentricidad de la hipérbola/elipse ($e=c/a$).

Sobre los diferentes elementos de la antena Cassegrain o Gregoriana se definen **4 sistemas cartesianos de coordenadas**, como se muestra en las figuras 4.1 y 4.2, que son los siguientes:

1) $x-y-z$ (S. del reflector principal): con origen de coordenadas el foco F2, su eje z se define sobre el eje focal del paraboloides de revolución orientado de vértice a foco. El eje x se coloca en el plano del papel, según se muestra en las figuras 4.1 y 4.2, el eje y resulta perpendicular al plano del papel

2) $x_\beta-y_\beta-z_\beta$ (S. del subreflector sobre foco F1): con origen de coordenadas el foco F1, su eje z se define sobre el eje focal del hiperboloide/elipsoide de revolución orientado de F1 a F2 y forma un ángulo β con el eje z del S. del reflector principal. El eje x_β se coloca en el plano del papel, según se muestra en las figuras 4.1 y 4.2, el eje y_β resulta perpendicular al plano del papel

3) $x_s-y_s-z_s$ (S. del subreflector sobre foco F2): con origen de coordenadas el foco F2, su eje z se define sobre el eje focal del hiperboloide/elipsoide de revolución con la misma orientación que el s. del subreflector sobre foco F1 $x_\beta-y_\beta-z_\beta$, por tanto, al igual que el de este, forma un ángulo β con el eje z del S. del reflector principal. El eje x_s se coloca en el plano del papel, según se muestra en las figuras 4.1 y 4.2, el eje y_s resulta perpendicular al plano del papel

4) $x_f-y_f-z_f$ (S. del alimentador): con origen de coordenadas el foco F1, su eje z se define formando un ángulo α con los ejes z de los sistemas del subreflector. El eje x_f se coloca en el plano del papel, según se muestra en las figuras 4.1 y 4.2, el eje y_f resulta perpendicular al plano del papel. En torno a este sistema construiremos el reflector parabólico simple equivalente a la antena Cassegrain/Gregoriana offset.

Cada uno de estos sistemas cartesianos tiene asociado un sistema de coordenadas esférico, de coordenadas ρ, θ, ϕ respectivamente: sin subíndices y con los subíndices β, s, f .

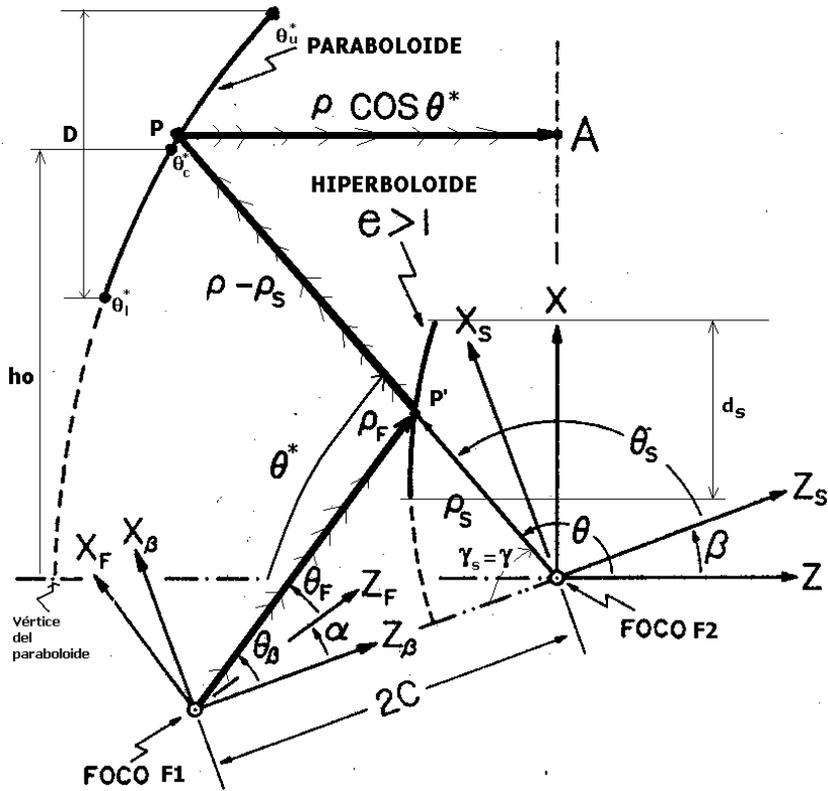


Fig. 4.1

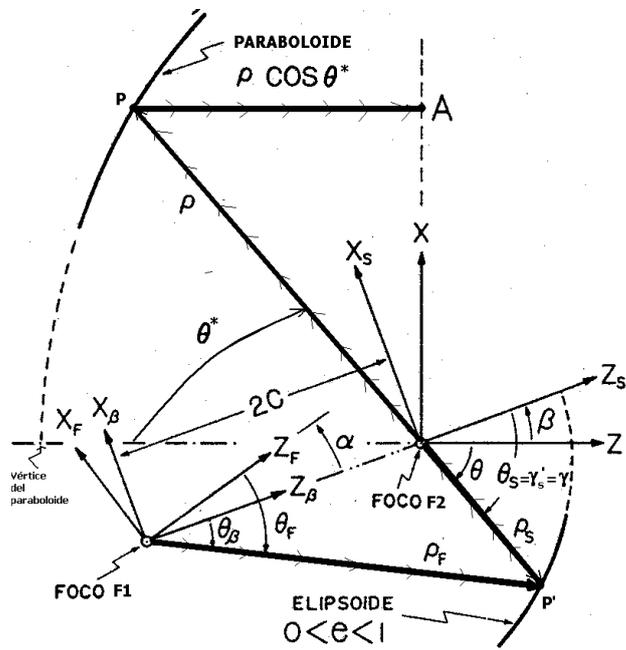


Fig. 4.2

4.3 Ecuaciones básicas de los reflectores

Estas ecuaciones ya han sido descritas en los apartados dedicados a reflectores simples, adaptadas a la nomenclatura establecida en el apartado anterior, son las siguientes

a) Ecuación del reflector principal (paraboloide de revolución). Abscisas del centro de la apertura y de los puntos extremos.

Para un punto genérico P de la superficie del reflector principal (parabólico), sus coordenadas polares están relacionadas mediante:

$$\rho(\theta^*) = \frac{2F}{1 + \cos\theta^*} = \frac{F}{\cos^2 \frac{\theta^*}{2}} \quad (4.3.1)$$

En la antena **Cassegrain**, de la fig. 4.1, se desprende que $\theta = 180 - \theta^*$, mientras que en la antena **Gregoriana**, de la fig. 4.2, se desprende que $\theta = \theta^*$. Así, La fórmula (4.3.1) utilizando θ , debido a que el coseno de un ángulo es igual al menos coseno de su suplementaria, quedaría igual para la antena gregoriana, pero habría que poner un signo menos en lugar de un más en el denominador para la antena Cassegrain. Podemos englobar ambas expresiones en una sola, utilizando un parámetro que denominaremos σ de manera que tome el valor -1 para la antena es Cassegrain y el valor 1 para la antena es Gregoriana, es decir:

$$\sigma = \begin{cases} -1 & \text{Cassegrain} \\ 1 & \text{Gregoriana} \end{cases}$$

De acuerdo con ello, se tiene la siguiente expresión para ρ , en función de θ , válida para ambos tipos de antenas:

$$\rho(\theta) = \frac{2F}{1 + \sigma \cos\theta} \quad (4.3.1')$$

La altura de un punto de la superficie del reflector: $h(\theta^*) = x(\theta^*)$, viene dada por (ver apartado 2.1, fórmula (2.1.2)):

$$h(\theta^*) = x(\theta^*) = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta^*}{2} \quad (4.3.2)$$

En particular, para h_0 y los puntos extremos del reflector, la expresión anterior queda:

$$h_0 - D/2 = C = h(\theta_l^*) = x(\theta_l^*) = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_l^*}{2}$$

$$h_0 = h(\theta_c^*) = x(\theta_c^*) = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_c^*}{2} \quad (4.3.2')$$

$$h_0 + D/2 = C + D = h(\theta_u^*) = x(\theta_u^*) = 2F \cdot \operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2}$$

Sumando y restando la primera y última ecuaciones, obtenemos expresiones de la altura del centro de la apertura y del diámetro de la apertura, en función de los ángulos extremos:

$$h_0 = F \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta_l^*}{2} \right)$$

$$D = 2F \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_l^*}{2} \right) \quad (4.3.2'')$$

b) Ecuaciones del subreflector (elipsoide/hiperboloide de revolución)

Las ecuaciones polares de un punto genérico del subreflector P' , respecto al foco F_1 , tanto si es un hiperboloide como si es un elipsoide, (ver 3.2.1 y 3.3.1), vienen dadas por:

$$\rho_f = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_f - 1} = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \theta_\beta - 1} \quad (4.3.3)$$

Las ecuaciones polares de un punto genérico del subreflector P' , respecto al foco F_2 , difieren para el caso de que sea un hiperboloide o un elipsoide, además, en el caso del elipsoide se toma el ángulo suplementario al que determina el eje polar. Con ello, teniendo como referencia las expresiones (3.2.1') y (3.3.1'), se tiene

Para la antena Cassegrain (hiperboloide):

$$\rho_s = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_s + 1} = -\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_s' - 1} \quad (4.3.4)$$

Para la antena Gregoriana (elipsoide):

$$\rho_s = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_s - 1} = -\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma_s' + 1} \quad (4.3.4')$$

Se observa que el 2º miembro de (4.3.4) y el tercer miembro de (4.3.4') difieren en un signo si se considera un único ángulo, que llamaremos γ , que en el caso de la antena Cassegrain (hiperboloide) será γ_s y que en el caso de la antena Gregoriana sea γ_s' , usando el parámetro σ , podemos expresar las 2 ecuaciones anteriores en la siguiente, válida para los 2 tipos de antenas:

$$\rho_s = -\sigma \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos \gamma + 1} \quad (4.3.4'')$$

Una alternativa para calcular ρ_s , es a través de su relación con ρ_f , derivada de la definición de hipérbola o elipse. En concreto, para la rama derecha de la hipérbola o la elipse, a la cual pertenecen los puntos del subreflector, según se desprende de la figuras 4.1 y 4.2, utilizando el parámetro σ , se cumple:

$$\rho_f + \sigma \rho_s = 2a = 2 \frac{c}{e} \Leftrightarrow \rho_s = -\sigma \left(\rho_f - 2 \frac{c}{e} \right) \quad (4.3.4''')$$

c) Relación entre la excentricidad e y los ángulos cenitales θ_β y θ_s de los sistemas cartesianos del subreflector

Las ecuaciones (3.2.3) y (3.3.3), que relacionan la excentricidad con los ángulos polares, se dedujeron para los puntos del subreflector de las antenas dobles centradas. Como el subreflector de las antenas dobles offset es una porción de aquel, dichas relaciones también son aplicables a las antenas dobles offset. Las ecuaciones formadas por el segundo y cuarto miembro de (3.2,3.4) y (3.2,3.7''), generalizadas a cualquier punto del subreflector, constituyen una forma equivalente, o sea, a estas se llega por manipulación directa de aquellas, es fácil ver el puente de conexión a través del tercer miembro de las relaciones (3.2,3.4) y (3.2,3.7''). De acuerdo con ello, con la nomenclatura de la figuras 4.1 y 4.2, tenemos:

Para la antena **Cassegrain**,

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma_s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{180 - \theta_s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta_s}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{e + 1}{e - 1} \quad (4.3.5)$$

El tercer miembro se ha obtenido desarrollando la tangente del numerador del 2º miembro con la fórmula de la tangente de la diferencia $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

$\text{tg}\beta/(1+\text{tga}\cdot\text{tg}\beta)$) y teniendo en cuenta que $\text{tg}(90^\circ)$ es infinito y un sumando constante frente a él es despreciable.

Para la antena **Gregoriana**:

$$\frac{\text{tg} \frac{\gamma_s'}{2}}{\text{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{\text{tg} \frac{\gamma}{2}}{\text{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{\text{tg} \frac{\theta_s}{2}}{\text{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{1+e}{1-e} \quad (4.3.5')$$

Las expresiones (4.3.5) y (4.3.5'), usando el parámetro σ y teniendo en cuenta que, debido a que $e > 1$ en la antena Cassegrain y $e < 1$ en la antena Gregoriana, el denominador del tercer miembro de las expresiones anteriores siempre es positivo, se pueden reunir en la siguiente expresión, válida para ambas antenas:

$$\frac{\left(\text{tg} \frac{\theta_s}{2}\right)^\sigma}{\text{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{\text{tg} \frac{\gamma}{2}}{\text{tg} \frac{\theta_\beta}{2}} = \frac{e+1}{|e-1|} = -\sigma \frac{e+1}{e-1} \quad (4.3.5'')$$

d) Relación entre los ángulos cenitales θ_β y θ_s de los sistemas cartesianos del subreflector y los módulos de los radio vectores respectivos ρ_f ρ_s

Existe la relación derivada del teorema del seno (Ap.2-3-11), que con la nomenclatura establecida, teniendo en cuenta que el seno de un ángulo es igual que el de su suplementario, queda:

$$\frac{\rho_f}{\text{sen}\theta_s} = \frac{\rho_s}{\text{sen}\theta_\beta} \quad (4.3.6)$$

4. 4 . Relación entre los ángulos polares de los diferentes sistemas de coordenadas

a) Relación entre el S. del Refl. principal (x,y,z) y el S. del Subrefl. del foco F2 (x_s, y_s, z_s)

El sistema (x_s, y_s, z_s) tiene igual eje **y** que el sistema (x, y, z) ; los ejes **x**, **z** de cada sistema con sus respectivos del otro, forman un ángulo β , como se observa en las figuras 4.1 y 4.2. Siguiendo los procedimientos de transformación de coordenadas aplicados en el apartado 1.3 se obtendrían expresiones análogas a (1.3.2). Con la nomenclatura establecida en las figuras 4.1 y 4.2, hay que cambiar Ψ_0 por β , quitar el superíndice ' a las variables que lo tienen y poner el subíndice **s** a las variables que no tiene índice, con ello, resulta:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= -\text{sen}\beta\text{sen}\theta_s \cos\phi_s + \cos\beta \cos\theta_s \\ \text{tg}\phi &= \frac{\text{sen}\theta_s \text{sen}\phi_s}{\cos\beta \text{sen}\theta_s \cos\phi_s + \text{sen}\beta \cos\theta_s} \end{aligned} \quad (4.4.1')$$

b) Relación entre los S. de Subrefl. del foco F2 (x_s, y_s, z_s) y del foco F1 $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$

El sistema de subreflector de foco F2 (x_s, y_s, z_s) se obtiene trasladando el sistema de subreflector de foco F1 $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ a lo largo del eje **z** un valor de **z** igual a la distancia interfocal $F1F2=2c$, por tanto, las **coordenadas x e y coinciden**, mientras que la coordenadas **z** difieren en **F**. Imaginando un punto en el eje **z** alejado de ambos orígenes en el sentido positivo, es inmediato ver que si la coordenada **z** referida al sistema $(x_\beta, y_\beta, z_\beta)$ es z_β , la coordenada **z** referida al sistema (x_s, y_s, z_s) , vale: **$z_s = z_\beta - 2c$** ,. De acuerdo con ello, y teniendo en cuenta la transformación de las coordenadas cartesianas a esféricas de su respectivo sistema asociado, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\beta \\ y_\beta \\ z_\beta - 2c \end{bmatrix} \\ \rho_s \begin{bmatrix} \text{sen}\theta_s \cos\phi_s \\ \text{sen}\theta_s \text{sen}\phi_s \\ \cos\theta_s \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho_f \text{sen}\theta_\beta \cos\phi_\beta \\ \rho_f \text{sen}\theta_\beta \text{sen}\phi_\beta \\ \rho_f \cos\theta_\beta - 2c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Podemos desdoblar la ecuación matricial anterior en 3 ecuaciones normales; para posteriores desarrollos nos interesa la primera y la 3ª, que escribimos a continuación

$$\begin{aligned}\rho_s \text{sen} \theta_s \cos \phi_s &= \rho_f \text{sen} \theta_\beta \cos \phi_\beta \\ \rho_s \cos \theta_s &= \rho_f \cos \theta_\beta - 2c\end{aligned}\quad (4.4.2')$$

c) Relación entre el S. de Subrefl. del foco F1 ($x_\beta, y_\beta, z_\beta$) y el del alimentador (x_f, y_f, z_f)

El sistema ($x_\beta, y_\beta, z_\beta$) tiene igual eje **y** que el sistema (x_f, y_f, z_f); los ejes x, z de cada sistema con sus respectivos del otro, forman un ángulo α , como se observa en las figuras 4.1 y 4.2. Siguiendo los procedimientos de transformación de coordenadas aplicados en el apartado 1.3 se obtendrían expresiones análogas a (1.3.1) y (1.3.2). De acuerdo con la nomenclatura establecida en las figuras 4.1 y 4.2, hay que cambiar Ψ_0 por β , quitar el superíndice ' a las variables que lo tienen y ponerles el subíndice f, añadir el subíndice f a ρ y cambiar el subíndice s por β , con ello, resulta:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_f \\ y_f \\ z_f \end{bmatrix} &= \rho_f \begin{bmatrix} \text{sen} \theta_\beta \cos \phi_\beta \\ \text{sen} \theta_\beta \text{sen} \phi_\beta \\ \cos \theta_\beta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \text{sen} \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen} \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \rho_f \begin{bmatrix} \text{sen} \theta_f \cos \phi_f \\ \text{sen} \theta_f \text{sen} \phi_f \\ \cos \theta_f \end{bmatrix} = \rho_f \begin{bmatrix} \cos \alpha \text{sen} \theta_f \cos \phi_f + \text{sen} \alpha \cos \theta_f \\ \text{sen} \theta_f \text{sen} \phi_f \\ -\text{sen} \alpha \text{sen} \theta_f \cos \phi_f + \cos \alpha \cos \theta_f \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

Podemos desdoblar la ecuación matricial anterior en 3 ecuaciones normales; para posteriores desarrollos nos interesa la primera y la 3ª, que escribimos a continuación

$$\begin{aligned}\text{sen} \theta_\beta \cos \phi_\beta &= \cos \alpha \text{sen} \theta_f \cos \phi_f + \text{sen} \alpha \cos \theta_f \\ \cos \theta_\beta &= -\text{sen} \alpha \text{sen} \theta_f \cos \phi_f + \cos \alpha \cos \theta_f\end{aligned}\quad (4.4.3')$$

4. 5 . Cálculo de la relación $\rho_s/(\rho_f \rho)$ en función de las coordenadas angulares esféricas del sistema del alimentador (θ_f, ϕ_f), de α, β y e

Partiremos de la expresión del módulo del radio vector del paraboloide (4.3.1') e iremos utilizando las relaciones de transformación, vistas en el apartado anterior, hasta llegar al sistema del alimentador. Pasaremos en primer lugar del sistema del paraboloide al del subreflector (2º foco), sustituyendo en (4.3.1') el coseno de θ por su valor en función de θ_s, ϕ_s , dado por (4.4.1), según ello queda:

$$\rho = \frac{2F}{1 + \sigma(-\text{sen}\beta \text{sen}\theta_s \cos\phi_s + \cos\beta \cos\theta_s)} \quad (4.5.1)$$

Pasaremos ahora al sistema del paraboloide al del subreflector (1º foco), sustituyendo en la expresión anterior, (4.5.1), los términos en θ_s, ϕ_s , por otros función θ_β, ϕ_β , en virtud de (4.4.2'); según ello queda:

$$\rho = \frac{2F}{1 + \sigma\left(-\text{sen}\beta \frac{\rho_f}{\rho_s} \text{sen}\theta_\beta \cos\phi_\beta + \cos\beta \frac{\rho_f \cos\theta_\beta - 2c}{\rho_s}\right)} \quad (4.5.2)$$

Invertiendo la expresión anterior y multiplicando ambos miembros por ρ_s/ρ_f queda:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{1}{2F} \left[\frac{\rho_s}{\rho_f} + \sigma\left(-\text{sen}\beta \text{sen}\theta_\beta \cos\phi_\beta + \cos\beta \cos\theta_\beta - 2c \cos\beta \frac{1}{\rho_f}\right) \right] \quad (4.5.3)$$

Para pasar al sistema del alimentador, sustituimos en la expresión anterior, los términos en θ_β, ϕ_β , por otros función θ_f, ϕ_f , en virtud de (4.4.3'); según ello queda:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{1}{2F} \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_f} + \sigma\left[-\text{sen}\beta(\cos\alpha \text{sen}\theta_f \cos\phi_f + \text{sen}\alpha \cos\theta_f) + \cos\beta(-\text{sen}\alpha \text{sen}\theta_f \cos\phi_f + \cos\alpha \cos\theta_f) - 2c \cos\beta \frac{1}{\rho_f}\right] \right\}$$

Reduciendo términos función de θ_f, ϕ_f , en concreto, sacando factor común al producto seno, coseno de θ_f, ϕ_f y al coseno de θ_f , queda:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{1}{2F} \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_f} - \sigma\left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f(\text{sen}\beta \cos\alpha + \cos\beta \text{sen}\alpha) + \cos\theta_f(\text{sen}\alpha \text{sen}\beta - \cos\alpha \cos\beta) - 2c \cos\beta \frac{1}{\rho_f}\right] \right\}$$

Aplicando las fórmulas del seno y del coseno de la suma a los paréntesis queda:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{1}{2F} \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_f} - \sigma \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) - 2c \cos\beta \frac{1}{\rho_f} \right] \right\}$$

Sustituyendo en el segundo miembro el valor de ρ_s , dado por la expresión (4.3.4'''), que lo relaciona con ρ_f , sacando factor común a $-\sigma$, y luego a $2c/\rho_f$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s}{\rho_f \rho} &= \frac{-\sigma}{2F} \left\{ \frac{\rho_f - 2\frac{c}{e}}{\rho_f} + \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) - 2c \cos\beta \frac{1}{\rho_f} \right] \right\} \\ &= \frac{-\sigma}{2F} \left\{ 1 - \frac{2c}{\rho_f e} + \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) - 2c \cos\beta \frac{1}{\rho_f} \right] \right\} \\ &= \frac{-\sigma}{2F} \left\{ 1 - \frac{2c}{\rho_f} \left(\frac{1}{e} - \cos\beta \right) + \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) \right] \right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo en el segundo miembro el valor de ρ_f , dado por (4.3.4) y operando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s}{\rho_f \rho} &= \frac{-\sigma}{2F} \left\{ 1 - \frac{2c}{\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos\theta_\beta - 1}} \left(\frac{1 - e \cos\beta}{e} \right) + \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) \right] \right\} \\ &= \frac{-\sigma}{2F} \left\{ 1 - \frac{2(e \cos\theta_\beta - 1)(1 - e \cos\beta)}{e^2 - 1} + \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) \right] \right\} \\ &= \frac{-\sigma}{2F} \left\{ 1 - \frac{2(e \cos\theta_\beta - e^2 \cos\theta_\beta \cos\beta - 1 + e \cos\beta)}{e^2 - 1} + \left[\text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) \right] \right\} \\ &= \frac{-\sigma}{2F(e^2 - 1)} \left\{ \left[1 + \text{sen}\theta_f \cos\phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos\theta_f \cos(\alpha + \beta) \right] (e^2 - 1) - 2 \left[e \cos\theta_\beta (1 - e \cos\beta) - 1 + e \cos\beta \right] \right\} \end{aligned}$$

Sustituyendo $\cos \theta_\beta$ por su expresión en términos del sistema del alimentador dada en (4.4.3'):

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{-\sigma}{2F(e^2 - 1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[1 + \text{sen} \theta_f \cos \phi_f \text{sen}(\alpha + \beta) - \cos \theta_f \cos(\alpha + \beta) \right] (e^2 - 1) - \\ & - 2 \left[e(-\text{sen} \alpha \text{sen} \theta_f \cos \phi_f + \cos \alpha \cos \theta_f) (1 - e \cos \beta) - 1 + e \cos \beta \right] \end{aligned} \right\}$$

Sacando factor común por un lado al producto $\text{sen}(\theta_f) \cos(\phi_f)$ y por otro lado al factor $\cos(\phi_f)$ se tiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{-\sigma}{2F(e^2 - 1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \text{sen} \theta_f \cos \phi_f \left[\text{sen}(\alpha + \beta)(e^2 - 1) + 2e \text{sen} \alpha (1 - e \cos \beta) \right] + \\ & + \cos \phi_f \left[-\cos(\alpha + \beta)(e^2 - 1) - 2e \cos \alpha (1 - e \cos \beta) \right] + \\ & + e^2 + 1 - 2e \cos \beta \end{aligned} \right\}$$

Sacando factor común de la llave a los términos independientes de θ_f ϕ_f , desarrollando el seno y coseno de la suma y sacando factor común dentro de cada corchete a seno y coseno de α , y reduciendo términos semejantes, se tiene:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{-\sigma(e^2 + 1 - 2e \cos \beta)}{2F(e^2 - 1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 1 + \text{sen} \theta_f \cos \phi_f \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)(e^2 - 1) + 2e \text{sen} \alpha (1 - e \cos \beta)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} + \\ & + \cos \phi_f \frac{-\cos(\alpha + \beta)(e^2 - 1) - 2e \cos \alpha (1 - e \cos \beta)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{-\sigma(e^2 + 1 - 2e \cos \beta)}{2F(e^2 - 1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 1 + \text{sen} \theta_f \cos \phi_f \frac{(\text{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \beta)(e^2 - 1) + 2e \text{sen} \alpha (1 - e \cos \beta)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} + \\ & + \cos \phi_f \frac{(-\cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta)(e^2 - 1) - 2e \cos \alpha (1 - e \cos \beta)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_f \rho} = \frac{-\sigma(e^2 + 1 - 2e \cos \beta)}{2F(e^2 - 1)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 1 + \text{sen} \theta_f \cos \phi_f \frac{\text{sen} \alpha [2e - \cos \beta(e^2 + 1)] + \cos \alpha [\text{sen} \beta(e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} + \\ & + \cos \phi_f \frac{-\cos \alpha [2e - \cos \beta(e^2 + 1)] + \text{sen} \alpha [\text{sen} \beta(e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \end{aligned} \right\}$$

Para $\sigma=-1$ (Cassegrain), $e>1 \Rightarrow -\sigma/(e^2-1) = 1/(e^2-1) > 0$

Para $\sigma=1$ (Gregoriana), $e<1 \Rightarrow -\sigma/(e^2-1) = 1/(1-e^2) > 0$

Por tanto, en general, se cumple: $-\sigma/(e^2-1) = 1/|e^2-1|$. En consecuencia, la expresión anterior de $\rho_s/(\rho_f\rho)$, se puede escribir como:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f\rho} = \frac{e^2 + 1 - 2e \cos\beta}{2F|e^2 - 1|} \cdot \left(1 + C_1 \text{sen}\theta_f \cos\phi_f + C_2 \cos\phi_f\right)$$

donde:

$$C_1 = \frac{\text{sen}\alpha [2e - \cos\beta(e^2 + 1)] + \cos\alpha [\text{sen}\beta(e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos\beta} \quad (4.5.3')$$

$$C_2 = \frac{-\cos\alpha [2e - \cos\beta(e^2 + 1)] + \text{sen}\alpha [\text{sen}\beta(e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos\beta}$$

4.6. Campo en la apertura del reflector en función del campo radiado por el alimentador.

Denominando al fasor campo radiado por el alimentador $e_f'(\theta_f, \phi_f)$ (incluye dependencia con la frecuencia), se demuestra que el fasor campo E_A , en la apertura del reflector doble-offset (plano perpendicular al eje focal del reflector principal que pasa por el foco), viene dado por:

$$E_A = e_f'(\theta_f, \phi_f) \frac{\rho_s}{\rho_f\rho} e^{-j \left[k(\rho_f + \rho + \sigma\rho_f + \sigma\rho \cos\theta) - (\sigma+1)\frac{\pi}{2} \right]} \quad (4.6.1)$$

Sustituyendo el valor de la relación $\rho_s/(\rho_f\rho)$, dada por (4.5.3'), en la expresión anterior, queda:

$$E_A = e_f'(\theta_f, \phi_f) \frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}{2F|e^2 - 1|} \cdot (1 + C_1 \sin \theta_f \cos \phi_f + C_2 \cos \phi_f) e^{-j \left[k(\rho_f + \rho + \sigma \rho_f + \sigma \rho \cos \theta) - (\sigma + 1) \frac{\pi}{2} \right]}$$

donde:

$$C_1 = \frac{\sin \alpha [2e - \cos \beta (e^2 + 1)] + \cos \alpha [\sin \beta (e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}$$

$$C_2 = \frac{-\cos \alpha [2e - \cos \beta (e^2 + 1)] + \sin \alpha [\sin \beta (e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}$$

(4.6.1')

4.7 Paraboloide offset equivalente de una antena de doble reflector offset. Distancia focal equivalente F_{eq} y ángulo α que forman el eje focal del paraboloide offset equivalente con el eje focal del subreflector. Condición de Mizugutch

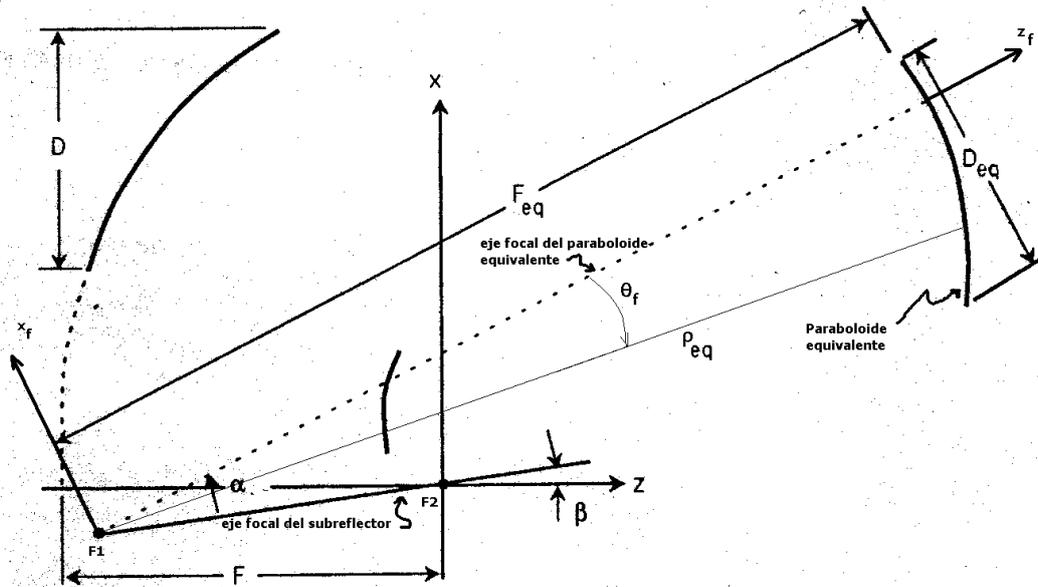
Se busca ahora un paraboloide offset simple equivalente a la antena de doble reflector offset, tanto del tipo Cassegrain como Gregoriano. Para ello, haremos coincidir el **eje z_f** del Sistema de coordenadas del subreflector referido al foco F1 (del alimentador) con el **eje focal del paraboloide equivalente buscado**, el cual formará un ángulo α con el eje focal del subreflector. En estas condiciones, el módulo del campo en la apertura del paraboloide equivalente en función del módulo del campo normalizado radiado por el alimentador, de acuerdo con (2.3.2), se puede expresar como:

$$|E_A| = \frac{|e_f'(\theta_f, \phi_f)|}{\rho_{eq}} \quad (4.7.1)$$

Donde ρ_{eq} es el módulo del radio vector del paraboloide equivalente, que sobre el sistema de coordenadas del alimentador, estaría relacionado con el ángulo cenital θ_f y la distancia focal, que denominamos F_{eq} , por la expresión vista en (2.1.1), adaptando la nomenclatura, es decir:

$$\rho_{eq} = \frac{2F_{eq}}{1 + \cos\theta_f} \quad (4.7.2)$$

En la figura 4.3., se muestran los elementos anteriores sobre un paraboloide equivalente de una antena offset Cassegrain



Sustituyendo el valor de ρ_{eq} , dado por (4.7.2) en (4.7.1), se obtiene

$$|E_A| = \frac{|e_f'(\theta_f, \phi_f)|}{\frac{2F_{eq}}{1 + \cos\theta_f}} = |e_f'(\theta_f, \phi_f)| \frac{1 + \cos\theta_f}{2F_{eq}} \quad (4.7.3)$$

Comparando (4.7.3) con (4.6.1') se desprende que:

$$F_{eq} = \frac{|e^2 - 1|}{e^2 + 1 - 2e \cos\beta} \cdot F$$

siempre que:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 1$$

(4.7.4)

Observando las expresiones de C_1 y C_2 , las condiciones $C_1=0$ y $C_2=0$ implican relaciones entre los ángulos α , β y la excentricidad del subreflector e . A continuación desarrollaremos estas relaciones, para expresar el ángulo α en función de β y e .

$$C_1 = \frac{\text{sen}\alpha [2e - \cos\beta(e^2 + 1)] + \cos\alpha [\text{sen}\beta(e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos\beta} = 0$$

$$C_2 = \frac{-\cos\alpha [2e - \cos\beta(e^2 + 1)] + \text{sen}\alpha [\text{sen}\beta(e^2 - 1)]}{e^2 + 1 - 2e \cos\beta} = 1$$

Simplificadamente:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by = 0 \\ bx - ay = c \end{array} \right\} \quad (4.7.5)$$

donde

$$\begin{aligned} x = \text{sen}\alpha & \quad ; \quad a = 2e - \cos\beta(e^2 + 1) \\ y = \cos\alpha & \quad ; \quad b = \text{sen}\beta(e^2 - 1) \\ & \quad \quad \quad c = e^2 + 1 - 2e \cos\beta \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores de incógnitas x, y por la regla de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & -a \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-b}{-a^2 - b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (4.7.6)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{ac}{-a^2 - b^2} = -\frac{ac}{a^2 + b^2}$$

Antes de sustituir en (4.7.6), vamos a demostrar que se cumple que $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$. Sustituiremos sus valores, dados en (4.7.5) y comprobaremos por separado que cada miembro, tras operar, da el mismo resultado.

Desarrollando el 2º miembro:

$$\begin{aligned} c^2 &= (e^2 + 1)^2 + 4e^2 \cos^2 \beta - 4e(e^2 + 1)\cos \beta = \\ &= e^4 + 1 + 2e^2 + 4e^2 \cos^2 \beta - 4e(e^2 + 1)\cos \beta \end{aligned}$$

Desarrollando el primer miembro:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4e^2 + (e^2 + 1)^2 \cos^2 \beta - 4e(e^2 + 1)\cos \beta + (e^2 - 1)^2 \sin^2 \beta \\ &= 4e^2 + (e^4 + 1 + 2e^2) \cos^2 \beta - 4e(e^2 + 1)\cos \beta + (e^4 + 1 - 2e^2) \sin^2 \beta \\ &= 4e^2 + (e^4 + 1)(\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + 2e^2(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - 4e(e^2 + 1)\cos \beta \\ &= 4e^2 + (e^4 + 1) + 2e^2(-1 + 2\cos^2 \beta) - 4e(e^2 + 1)\cos \beta \\ &= 2e^2 + (e^4 + 1) + 4e^2 \cos^2 \beta - 4e(e^2 + 1)\cos \beta \end{aligned}$$

Comprobamos que se llega al mismo resultado, con lo que queda probado que $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$. Aplicando esto a (4.6.1) y sustituyendo los valores de a, b, c, x e y, dados en (4.7.5), se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta (e^2 - 1)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} = \sin \alpha \quad (4.7.7) \\ y &= -\frac{ac}{a^2 + b^2} = -\frac{a}{c} = -\frac{2e - \cos \beta (e^2 + 1)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} = \cos \alpha \end{aligned}$$

Dividiendo miembro a miembro:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta (e^2 - 1)}{\cos \beta (e^2 + 1) - 2e} \quad (4.7.8)$$

Para darle una forma más compacta a la expresión anterior, aplicamos una de las fórmulas que relaciona la tangente del ángulo mitad con el seno y el coseno del ángulo completo, en concreto:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

(para comprobarla basta aplicar las fórmulas del ángulo doble a $\cos x$ y $\sin x$, la ec. fundamental trigonométrica y operar). Sustituyendo los valores de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$, dados en (4.7.7), de acuerdo con la fórmula trigonométrica anterior, y operando, se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 + \frac{2e - \cos \beta (e^2 + 1)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \beta (e^2 - 1)}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}} = \frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta + 2e - \cos \beta (e^2 + 1)}{\operatorname{sen} \beta (e^2 - 1)} = \\ &= \frac{-\cos \beta (2e + e^2 + 1) + (2e + e^2 + 1)}{\operatorname{sen} \beta (e^2 - 1)} = \frac{(e + 1)^2 (1 - \cos \beta)}{\operatorname{sen} \beta (e^2 - 1)} = \frac{e + 1}{e - 1} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

Escribiendo la ecuación formada por el primer y último miembro de la ecuación anterior, se tiene:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{e + 1}{e - 1} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \quad (4.7.9)$$

Fórmula que constituye la denominada **condición de Mizugutch**, que, además de expresar una relación que debe cumplir el ángulo que forma el eje focal del paraboloide equivalente con el del subreflector y la excentricidad de dicho subreflector, según se demuestra por óptica geométrica, expresa una relación que si se cumple elimina la componente de radiación contrapolar del reflector doble, la cual es inherente a los reflectores offset simples.

4.8. Diámetro de la apertura del reflector offset equivalente D_{eq} . Altura del centro de la apertura del reflector offset equivalente h_{oeq}

a) Expresión de la tangente de $\theta_f/2$ en función de θ, e y β

Antes de obtener las expresiones de D_{eq} y h_{oeq} , obtendremos una relación entre los ángulos cenitales del sistema del reflector y del sistema del alimentador con el ángulo β y la excentricidad e . Para ello, partimos de la relaciones siguientes, válidas para ambos tipos de reflectores dobles- offset, deducidas de las figuras 4.1 y 4.2:

$$\begin{aligned} \theta_\beta &= \theta_f + \alpha \\ \theta_s &= \theta - \beta \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4.3.5"), queda:

$$\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\theta - \beta}{2}\right)^\sigma}{\operatorname{tg} \frac{\theta_f + \alpha}{2}} = \frac{e + 1}{|e - 1|} \quad (4.8.1)$$

Desarrollando las tangentes y aplicando la condición de Mizugutch para eliminar α , se llega a la siguiente expresión equivalente:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_f}{2} = \frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}{|e^2 - 1|} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right)^\sigma - \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sen} \beta \quad (4.8.2)$$

b) Obtención de D_{eq}

Reescribiendo la fórmula del diámetro de la apertura dada en (4.3.2'), añadiendo el subíndice "eq" para hacer referencia al paraboloide equivalente, se tienen

$$D_{eq} = 2F_{eq} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_{ueq}^*}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_{leq}^*}{2} \right) \quad (4.8.3)$$

Los ángulos θ^* de la expresión anterior son ángulos referidos al sistema de coordenadas del alimentador, por tanto, las tangentes de la mitad de dichos ángulos pueden sustituirse por su valor dado por (4.8.2). Sustituyendo además la expresión de F_{eq} , dada en (4.7.4) en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} D_{eq} &= 2 \frac{|e^2 - 1|}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \cdot F \cdot \left[\frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}{|e^2 - 1|} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2}\right)^\sigma - \frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}{|e^2 - 1|} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2}\right)^\sigma \right] \\ &= 2F \cdot \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2}\right)^\sigma - \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2}\right)^\sigma \right] \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

En la antena Cassegrain offset $\sigma = -1$ y se cumple que $\theta = 180 - \theta^*$ (ver fig. 4.1), teniendo en cuenta, además que $\operatorname{tg}((180-x)/2) = 1/\operatorname{tg} x$, sobre (4.8.4), se tiene que:

$$\begin{aligned} D_{eq} &= 2F \cdot \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2}\right)^{-1} - \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2}\right)^{-1} \right] = 2F \cdot \left[\left(\operatorname{tg} \frac{180 - \theta_u^*}{2}\right)^{-1} - \left(\operatorname{tg} \frac{180 - \theta_l^*}{2}\right)^{-1} \right] = \\ &= 2F \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_l^*}{2} \right) \end{aligned}$$

(4.8.4')

En la antena Gregoriana offset $\sigma=1$ y se cumple que $\theta=\theta^*$ (ver fig. 4.2), con lo que (4.8.4) se transforma en:

$$\begin{aligned} D_{eq} &= 2F \cdot \left[\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2} \right] = \\ &= 2F \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta_l^*}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.8.4'')$$

En ambos casos se obtiene la misma expresión, que es la misma que la da el diámetro de la apertura del paraboloide real, según (4.3.2'). Por tanto, podemos concluir que el diámetro de la apertura del paraboloide equivalente es igual que el diámetro de la apertura del paraboloide real, es decir:

$$\boxed{D_{eq} = D} \quad (4.8.4''')$$

c) Obtención de h_{0eq}

Reescribiendo la fórmula de la altura del centro de la apertura dada en(4.3.2'), añadiendo el subíndice “**eq**” para hacer referencia al paraboloide equivalente, se tienen

$$h_{0eq} = F_{eq} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_{u_{eq}}^*}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta_{l_{eq}}^*}{2} \right) \quad (4.8.5)$$

Los ángulos θ^* de la expresión anterior son ángulos referidos al sistema de coordenadas del alimentador, por tanto, las tangentes de la mitad de dichos ángulos pueden sustituirse por su valor dado por (4.8.2). Sustituyendo además la expresión de F_{eq} , dada en (4.7.4) en la expresión anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} h_{0eq} &= \frac{|e^2 - 1|}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \cdot F \cdot \left[\frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}{|e^2 - 1|} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2} \right)^\sigma + \frac{e^2 + 1 - 2e \cos \beta}{|e^2 - 1|} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2} \right)^\sigma - 2 \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sen} \beta \right] \\ &= F \cdot \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2} \right)^\sigma + \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2} \right)^\sigma - \frac{|e^2 - 1|}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \cdot 2 \cdot \frac{2e}{e^2 - 1} \operatorname{sen} \beta \right] \end{aligned} \quad (4.8.6)$$

En la antena Cassegrain offset: $\sigma=-1$ y $e>1$ por lo que $|e^2-1|=e^2-1=-\sigma(e^2-1)$

En la antena Gregorian offset: $\sigma=1$ y $e<1$ por lo que $|e^2-1|=(e^2-1)=-\sigma(e^2-1)$

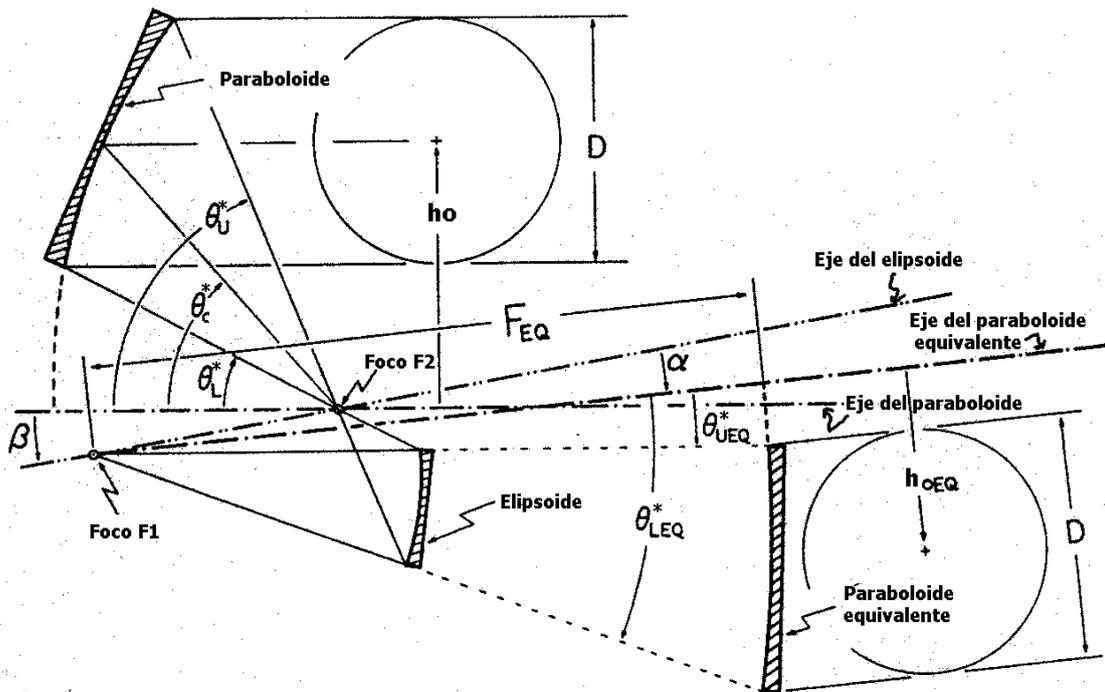
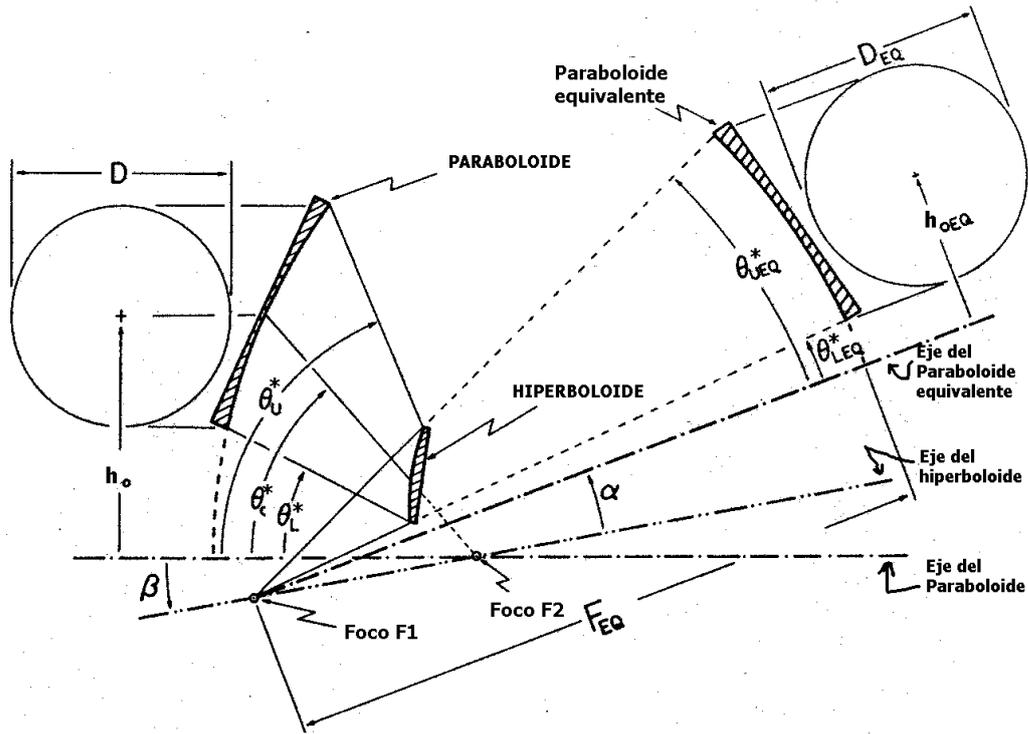
Es decir, en cualquier caso, se cumple que: $|e^2-1|=-\sigma(e^2-1)$. Aplicando esto en (4.8.6), introduciendo F en el corchete y sacando factor común a $-\sigma$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 h_{0eq} &= F \cdot \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2} \right)^\sigma + \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2} \right)^\sigma - 2 \cdot (-\sigma) \cdot \frac{2e}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \operatorname{sen} \beta \right] \\
 &= (-\sigma) \cdot \left\{ \frac{F}{-\sigma} \left[\left(\operatorname{tg} \frac{\theta_u}{2} \right)^\sigma + \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_l}{2} \right)^\sigma \right] - 2F \cdot \frac{2e}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \operatorname{sen} \beta \right\} \quad (4.8.6')
 \end{aligned}$$

Los términos de las tangentes, como se vio en el paso de (4.8.4) a (4.8.4') y (4.8.4''), se transforman en términos idénticos en θ^* , sin el exponente σ , según esto y en virtud de (4.3.2''), el minuendo de expresión entre llaves es h_0 , considerando que en la antena Cassegrain es un valor positivo y en la Gregoriana es un valor negativo, lo cual lo determina efectivamente el término $-\sigma$. Por tanto, se tiene la siguiente expresión para la altura del centro de la apertura del paraboloides equivalente:

$$h_{0eq} = (-\sigma) \cdot \left(h_0 - 2F \cdot \frac{2e}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \operatorname{sen} \beta \right) \quad (4.8.6'')$$

En las siguientes figuras se muestran los paraboloides equivalentes de antenas genéricas de doble reflector offset, una tipo offset Cassegrain y otra tipo offset gregoriana, respectivamente en figuras 4.4 y 4.5.



4.9. Paraboloide equivalente centrado. Condición de Rusch

Si el paraboloide equivalente de una antena doble-offset es centrado, además de simplificar el análisis de las antenas dobles-offset, se obtiene la ventaja que tienen los reflectores centrados de no generar radiación contrapolar, debido a su simetría. Para obtener un paraboloide equivalente centrado, la altura equivalente del centro de la apertura h_{0eq} **ha de ser cero**, imponiendo esta condición en (4.8.6"), de deduce que **para ello**, se debe cumplir:

$$h_0 = 2F \cdot \frac{2e}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \operatorname{sen} \beta \quad (4.9.1)$$

De acuerdo con (4.3.2'), podemos sustituir el valor de h_0 por su expresión en función de θ_c^* y queda:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_c^*}{2} = \frac{2e}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \operatorname{sen} \beta \quad (4.9.2)$$

A partir de la expresión anterior, por manipulación directa, se podría llegar a una expresión más compacta, pero existe un camino alternativo, basado en el hecho de que cuando el paraboloide equivalente es centrado el eje zf está alineado con el centro angular del subreflector, según se puede intuir en las figura 4.3, 4.4 y 4.5. En este caso, para el punto del subreflector centro angular del mismo, al pertenecer al eje zf, formará un ángulo con él $\theta_r=0$, y su punto correspondiente en el reflector, centro angular de dicho reflector desde su foco, tiene forma un ángulo θ con el eje focal del reflector que puede ponerse en función θ_c^* , de forma diferente dependiendo del tipo de antena, por lo que realizaremos un desarrollo particular para cada tipo de antena:

Para la antena offset-Cassegrain: $\sigma=-1$, $e>1$, y de la figura 4.1 se desprende que: $\theta = 180 - \theta_c^*$; aplicando esto a (4.8.1), teniendo en cuenta, además, que $\operatorname{tg}((180-x)/2)=1/\operatorname{tg}x$, y aplicando la condición de Mizugutch (4.7.9), se tiene:

$$\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{180 - \theta_c^* - \beta}{2} \right)^{-1}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{e+1}{e-1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{e+1}{e-1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2} = \left(\frac{e+1}{e-1} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Para la antena offset-Gregoriana: $\sigma=1$, $e<1$, y de la figura 4.2 se desprende que: $\theta = -\theta_c^*$ (el signo menos pone en relieve el diferente sentido de giro de definición); aplicando esto a (4.8.1) y aplicando la condición de Mizugutch (4.7.9), se tiene:

$$\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{-\theta_c^* - \beta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{e+1}{-(e-1)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{e+1}{e-1}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2} = \left(\frac{e+1}{e-1} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

Como se observa se obtienen las mismas expresiones para ambos tipos de antenas, reescribiendo la última línea de ambos desarrollos, se tiene:

$$\boxed{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2} = \left(\frac{e+1}{e-1} \right)^2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

Fórmula que constituye la **condición de Rusch**, que junto a la condición de Mizugutch (la cual ha sido utilizada en la obtención de la condición de Rusch), da lugar a un paraboloide equivalente centrado. Ambas condiciones se suelen fijar en los diseños prácticos.

4.10. Análisis de reflectores dobles offset. Cálculo del reflector offset equivalente

Este apartado tiene como objetivo establecer un procedimiento sistemático de análisis de los reflectores que permita, a partir de una serie de parámetros de partida que en principio podrían considerarse como datos fáciles de fijar, obtener por una parte parámetros geométricos derivados de los anteriores por las relaciones vistas en los apartados anteriores y por otra parte los parámetros del reflector parabólico simple equivalente, que en general, será de tipo offset si no se impone la condición de Rusch.

Parámetros de partida:

- 1) σ , determina el tipo de antena : -1(Cassegrain), 1(Gregoriana)
- 2) D, diámetro de la apertura del reflector parabólico (real y equivalente)
- 3) c, semidistancia focal del subreflector
- 4) h_0 , altura del centro de la apertura del reflector parabólico offset
- 5) F, distancia focal del reflector parabólico real
- 6) β , ángulo que forman los ejes focales del reflector y subreflector
- 7) e, excentricidad del subreflector

PASO 1) Cálculo de los ángulos θ_c^* θ_u^* θ_l^* del reflector parabólico offset

(referidos al eje polar del paraboloide offset, que designamos con θ^*).

Cualquier ángulo puede ser obtenido si se conoce la abscisa correspondiente, además de la distancia focal, despejándolo de (4.3.2), resulta:

$$\theta^* = 2 \cdot \text{arc tg} \left(\frac{x(\theta^*)}{2F} \right) \quad (4.10.1)$$

En particular para los ángulos del centro angular del paraboloide y de los puntos extremos, es decir, para θ_c^* θ_u^* θ_l^* , se tiene (resultado de despejar de(4.3.2')):

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_c^* &= 2 \cdot \text{arc tg} \left(\frac{h_0}{2F} \right) \\ \theta_{u,l}^* &= 2 \cdot \text{arc tg} \left(\frac{h_0 \pm D}{2F} \right) \end{aligned}} \quad (4.10.1')$$

Se deduce de la condición de Mizugutch expresada en (4.7.9), despejando α de (4.7.9), resulta:

$$\alpha = \text{arc tg} \left(\frac{e+1}{e-1} \text{tg} \frac{\beta}{2} \right) \quad (4.10.2)$$

De las figuras 4.1, 4.2, 4.4 y 4.5, se desprende que este ángulo, saldrá **positivo** para la antena offset **Cassegrain** y **negativo** para las antena offset **gregoriana** (lógico si se piensa que en el primer caso $e > 1$ y en el segundo $e < 1$, que β es en ambos casos positivo y que el arc tg es una función impar)

PASO 3) Cálculo del radio mínimo de curvatura del subreflector ρ_s ($\gamma=0$)

Observando (4.3.4"), se deduce que el valor mínimo de ρ_s se obtiene con el denominador mayor, que se obtendrá con el coseno de 0, es decir, cuando $\gamma=0$; en este caso, el valor que da (4.3.4") es el radio mínimo de curvatura del subreflector que valdrá:

$$\rho_{s, \text{min}} = -\sigma \frac{c(e^2 - 1)}{e} \quad (4.10.3)$$

PASO 4) Cálculo del diámetro de la apertura del subreflector **ds**

Para determinar la abscisa de cualquier punto del subreflector, referida al sistema de coordenadas del subreflector del segundo foco, se determinaría primero el módulo del radio vector referido al segundo foco, que vendría dado por (4.3.4"). De las figuras 4.1 y 4.2, se desprende que, sin considerar signos de sentido de ángulo (sólo mirando si los márgenes angulares se suman o se restan), se cumple que $\gamma = \beta + \theta^*$ en los dos tipos de antenas, por lo que (4.3.4"), se puede escribir como:

$$\rho_s = -\sigma \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta^*) + 1}$$

La abscisa para la antena offset **Cassegrain** ($\sigma=-1$), de la figura 4.1 se desprende que es **positiva** y se obtiene como la proyección del módulo del radio vector sobre el eje x, es decir:

$$x_s(\theta^*) = \rho_s \text{sen}\theta^* = \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta^*) + 1} \text{sen}\theta^* \quad (4.104a)$$

La abscisa para la antena offset **Gregoriana** ($\sigma=1$), de la figura 4.2 se desprende que es **negativa** y se obtiene como la proyección del módulo del radio vector sobre el eje x con signo menos, es decir:

$$x_s(\theta^*) = -\rho_s \text{sen}\theta^* = -\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta^*) + 1} \text{sen}\theta^*$$

Se observa que ambos tipos de antenas la expresión de la abscisa de un punto del sistema del subreflector, referida al sistema del subreflector definido en foco F2, tiene la misma forma.

El diámetro de la apertura del subreflector se obtendrá restando las abscisas de los puntos extremos y utilizando la expresión anterior particularizada para dichos puntos. En principio, resultan expresiones diferentes para cada tipo de antena, para conseguir que el diámetro sea positivo en los dos casos. En la antena Cassegrain, debido a que las abscisas son positivas, habría que restar la abscisa del punto extremo superior del subreflector menos la abscisa del punto extremo inferior del subreflector, mientras que en la antena Gregoriana la resta se debe efectuar al revés, debido a que las abscisas son negativas. Como las expresiones de las abscisas si tienen la misma forma, sólo cambiaría el orden de la resta, no la forma de los términos, luego se puede utilizar una única expresión fácilmente, cambiando el signo mediante el parámetro identificador de antena σ . Pero antes de poner la fórmula única, para que se vea mejor, analicemos cada paso por separado

Para la antena Cassegrain, se tiene:

$$d_s = x_s(\theta_u^*) - x_s(\theta_l^*) = \frac{c(e^2 - 1)}{e} \cdot \left(\frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} - \frac{\text{sen}\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \right)$$

Para la antena Gregoriana, se tiene:

$$d_s = x_s(\theta_l^*) - x_s(\theta_u^*) = \frac{c(e^2 - 1)}{e} \cdot \left(\frac{\text{sen}\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} - \frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \right)$$

Tomando como referencia la segunda, multiplicando por σ , esta segunda expresión no se alteraría para la antena gregoriana, mientras que para la antena Cassegrain sí cambiaría de signo, obteniéndose la primera expresión que es la que corresponde a dicha antena, por lo que la expresión única para ambas antenas, sería:

$$d_s = \sigma \frac{c(e^2 - 1)}{e} \cdot \left(\frac{\text{sen}\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} - \frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \right) \quad (4.10.4b)$$

PASO 5) Cálculo de la separación vertical (respecto al eje del reflector) entre el subreflector y reflector: d_c (distancia de clearance). Según se desprende de las figuras 4.6 y 4.7 y de acuerdo con los ejes de coordenadas definidos en las figuras 4.1 y 4.2, d_c se obtiene de una resta de abscisas, pero referidas a sistemas de coordenadas diferentes, el del reflector y del subreflector (referido al 2º foco), en el primer caso, los valores de abscisa se deducen directamente de la figura, en el segundo caso habrá que utilizar (4.10.4a) para calcularlos. Teniendo presente que d_c ha de ser un valor positivo, para cada tipo de antena se tiene:

Para la antena Offset-Cassegrain:

$$d_c = x(\theta_l^*) - x_s(\theta_u^*) = h_0 - \frac{D}{2} - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \text{sen}\theta_u^*$$

Para la antena offset-gregoriana:

$$d_c = x(\theta_l^*) - x_s(\theta_l^*) = h_0 - \frac{D}{2} - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \text{sen}\theta_l^*$$

Se observa que los 2 primeros términos de ambas fórmulas coinciden, mientras que el tercero, aunque tiene forma parecida, es diferente por el ángulo θ^* . Teniendo en cuenta este hecho, puede construirse una fórmula única, válida para ambas antenas, usando el parámetro σ , identificador del tipo de antena, de manera que se aplique en

una expresión a ambos terceros términos y en el caso $\sigma=-1$ al operarse con otro término se genere el tercer término de la antena Cassegrain y en el caso $\sigma=1$ al operarse con otro término se genere el tercer término de la antena gregoriana. En concreto, en la nueva fórmula pondremos el tercer término de la antena Cassegrain y añadiremos un cuarto término compuesto por el factor $(\sigma+1)/2$ y otro factor compuesto a por el tercer término de la fórmula de la antena offset-gregoriana menos el de la antena Cassegrain(el doble menos se convierte en más). De este modo, cuando $\sigma=-1$, el cuarto término es nulo y se tiene la fórmula de la antena Cassegrain, mientras que cuando $\sigma=1$, el primer factor del cuarto término vale 1 y por tanto se añade restando el tercer término de la antena offset-Cassegrain con lo que se cancela con el que pusimos en la fórmula única y se añade sumando el tercer término de la antena Gregoriana. Por tanto, la fórmula de d_s , para ambas antenas es la siguiente:

$$d_c = h_0 - \frac{D}{2} - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \text{sen}\theta_u^* + \frac{\sigma + 1}{2} \cdot \left(-\frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \text{sen}\theta_l^* + \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \text{sen}\theta_u^* \right)$$

Esta expresión se puede simplificar más, teniendo en cuenta que cuando no se anula el cuarto término, es decir, en el caso de la antena gregoriana, para $\sigma=1$, el interior del paréntesis es la expresión del diámetro de la apertura del subreflector d_s para esta antena, cambiada de signo, en virtud de (4.10.4b). Por tanto, podemos poner que:

$$d_c = h_0 - \frac{D}{2} - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \text{sen}\theta_u^* - \frac{\sigma + 1}{2} d_s \quad (4.10.5)$$

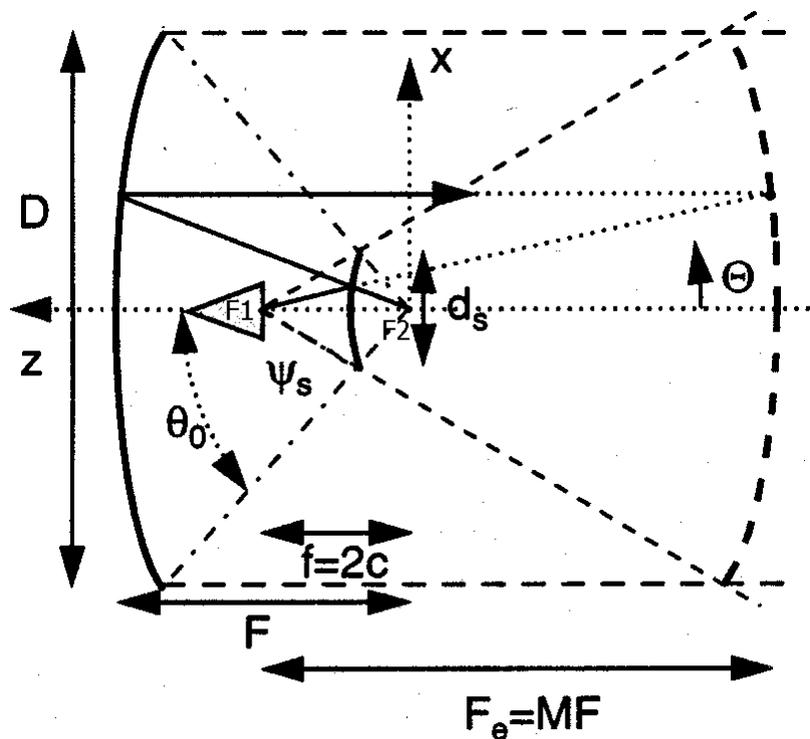
PASO 6) Cálculo de la separación máxima horizontal (respecto al eje del reflector) entre el subreflector y reflector: L . Según se desprende de las figuras 4.6 y 4.7 y de acuerdo con los ejes de coordenadas definidos en las figuras 4.1 y 4.2, L se obtiene de una resta o suma de coordenadas z, pero referidas a sistemas de coordenadas diferentes, el del reflector y del subreflector (referido al 2º foco), en cualquier caso, para calcular las coordenadas z hay primero que calcular los módulos de los radio vectores de los puntos extremos, mediante (4.3.1) y (4.3.4'') respectivamente, y luego proyectar sobre el eje z multiplicando por el coseno del ángulo θ^* correspondiente . De acuerdo, con las figuras y expresiones mencionadas anteriormente, se tiene:

Para la antena Offset-Cassegrain:

$$L = z(\theta_l^*) - z_s(\theta_u^*) = \rho \cos\theta_l^* - \rho_s \cos\theta_u^* = \frac{2F}{1 + \cos\theta_l^*} \cos\theta_l^* - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \cos\theta_u^*$$

Para la antena Offset-Gregoriana:

$$L = z(\theta_l^*) + z_s(\theta_l^*) = \rho \cos\theta_l^* + \rho_s \cos\theta_l^* = \frac{2F}{1 + \cos\theta_l^*} \cos\theta_l^* - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \cos\theta_l^*$$



Se observa que el primer término de ambas fórmulas coincide, mientras que el segundo, aunque tiene forma parecida, es diferente por el ángulo θ^* . Teniendo en cuenta este hecho, puede construirse una fórmula única, válida para ambas antenas, usando el parámetro σ , identificador del tipo de antena. Se podría obtener la fórmula única procediendo como en el caso de dc, pero en este caso es preferible usar una manera más sencilla directa, y que da una expresión más corta, antes se hizo de aquella manera con vistas a obtener (4.10.5). Para obtener la fórmula única, ponemos el primer término común a ambas fórmulas y añadimos los dos segundos términos diferentes, precedidos de un factor, función de σ , que, dependiendo del tipo de antena se haga uno para su 2º término correspondiente y 0 para el otro 2º término. En concreto, el 2º término que debe quedar con la antena Cassegrain, en que $\sigma=-1$, se multiplicará por $-(\sigma-1)/2$, mientras que el 2º término que debe quedar con la antena gregoriana, en que $\sigma=1$, se multiplicará por $(\sigma+1)/2$; de este modo, se comprueba

fácilmente como efectivamente para cada valor de σ queda sólo el 2º término de la antena correspondiente. Por tanto, se tiene la siguiente fórmula de L , válida para ambos tipos de antenas:

$$L = \frac{2F}{1 + \cos\theta_l^*} \cos\theta_l^* - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \cos\theta_u^* \cdot \left(-\frac{\sigma - 1}{2}\right) - \frac{c}{e} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \cos\theta_l^* \cdot \left(\frac{\sigma + 1}{2}\right)$$

Sacando factor común al segundo y tercer miembro de la expresión anterior queda:

$$L = \frac{2F \cos\theta_l^*}{1 + \cos\theta_l^*} + \frac{c}{e} \frac{e^2 - 1}{2} \left[(\sigma - 1) \frac{\cos\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} - (\sigma + 1) \frac{\cos\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \right] \quad (4.10.6)$$

PASO 7) Cálculo del semiángulo bajo el que se ve el subreflector desde el alimentador θ_e (Suponiendo que se cumple la **condición de Rusch**). Aplicaremos la relación de los ángulos de los radios vectores de un punto con la excentricidad del subreflector, dada por (4.3.5"), al punto extremo superior del subreflector. En dicho punto, según se observa en las figuras 4.1, 4.2, 4.6 y 4.7, se cumple que:

- $\gamma = \theta_u^* + \beta$

- $\theta_\beta = \theta_f - \sigma\alpha = \theta_e - \sigma\alpha$, ya que al cumplirse la condición de Rusch, al ser el paraboloide equivalente centrado, el eje z_f pasa por el centro de la apertura del subreflector, dividiendo el margen angular de los puntos extremos respecto a dicho eje en dos ángulos iguales θ_e , y dicho eje forma un ángulo α con respecto al eje focal del subreflector, eje z_β , ángulo que es **positivo en la antena Cassegrain**, al estar en este caso z_f por encima del eje focal del subreflector y **negativo en la antena Gregoriana** al estar en este caso z_f por debajo del eje focal del subreflector.

Por tanto, sustituyendo los valores anteriores en el 2º miembro de (4.3.5") y considerando el último miembro de (4.3.5"), se tiene:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_{\beta}}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_u^* + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{-\sigma\alpha + \theta_e}{2}} = -\sigma \frac{e+1}{e-1} \quad (4.10.7)$$

De donde, teniendo en cuenta que $-\sigma=1/-\sigma$, se obtiene:

$$\theta_e = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\sigma \frac{e-1}{e+1} \operatorname{tg} \frac{\theta_u^* + \beta}{2} \right) + \sigma\alpha$$

Como el arco tangente es una función impar, se puede sacar fuera del arco tangente $-\sigma$ y luego sacar factor común a $-\sigma$, con lo que queda :

$$\theta_e = -\sigma \left[2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{e-1}{e+1} \operatorname{tg} \frac{\theta_u^* + \beta}{2} \right) - \alpha \right] \quad (4.10.7')$$

PASO 8) Cálculo de los parámetros del **paraboloide equivalente**:

- Distancia de focal del paraboloide equivalente: F_{eq}
- Altura del centro de la apertura del paraboloide equivalente
- Ángulos θ_{eqc}^* θ_{equ}^* θ_{eqi}^* del reflector parabólico equivalente

Para el cálculo de F_{eq} se utiliza la expresión (4.7.4). Teniendo en cuenta que $e>1$ en las antenas Cassegrain ($\sigma=-1$) y que $e<1$ en las antenas gregorianas ($\sigma=-1$), podemos sustituir el valor absoluto de la fórmula por un factor $(-\sigma)$, con lo que queda :

$$F_{eq} = (-\sigma) \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \cdot F \quad (4.10.8a)$$

Si no se cumple la condición de Rusch, h_{eq} no es cero, y para su cálculo se utiliza (4.8.6''), que volvemos a escribir ahora:

$$h_{0eq} = (-\sigma) \cdot \left(h_0 - 2F \cdot \frac{2e}{e^2 + 1 - 2e \cos \beta} \operatorname{sen} \beta \right) \quad (4.10.8b)$$

Para el cálculo de los ángulos del punto centro angular y los puntos extremos del reflector parabólico bajo el que se ven desde el foco, respecto al eje focal, $\theta_{eq_c}^*$ $\theta_{eq_u}^*$ $\theta_{eq_l}^*$ se utilizan expresiones análogas a (4.10.1'):

$$\theta_{c_{eqc}}^* = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{h_{eq0}}{2F} \right) \quad (4.10.8c)$$

$$\theta_{eq_{u,l}}^* = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{h_{eq0} \pm D}{2F} \right)$$

Si se cumple la condición de Rusch, $\theta_{eq_c}^* = 0$, $\theta_{eq_l}^* = -\theta_{eq_u}^*$

4.11. Diseño de reflectores dobles offset.

a) Introducción

El objetivo de los siguientes desarrollos es establecer un procedimiento sistemático de diseño de los reflectores que permita, a partir de una serie de parámetros de partida prácticos, en principio más fáciles de establecer que en el análisis, e **imponiendo las condiciones de Mizugutch y Rusch**, deducir el resto de los parámetros que, junto a los de partida, cumplen ambas condiciones.

En un primer desarrollo, los parámetros de partida coinciden con los establecidos para el análisis en el apartado anterior, sólo podría cambiar el tercer parámetro que en lugar de c se parta de ds , ambos parámetros están relacionados por (4.10.4b), y se elimina como parámetro de partida la excentricidad e , que es sustituido por la imposición de la condición de Rusch (4.9.3). El procedimiento de análisis casi coincide exactamente con el de diseño, sólo habría que intercalar entre los pasos 1) y 2) del análisis un paso intermedio para calcular la excentricidad del subreflector a partir de la condición de Rusch, a partir de aquí los siguientes pasos coinciden con los del análisis, salvo en el orden de los pasos 3) y 4), dependiendo de si el dato de partida es ds o es c que cambia.. Para poder adaptar el proceso de análisis al de diseño, llamaremos 1') al cálculo de la excentricidad el resto de pasos coincidirá con los del análisis, por lo que sólo se expondrá este paso. Posteriormente cambiaremos 3 de

los parámetros de partida por otros más fáciles de establecer de forma práctica y veremos como pasar a los de partida del procedimiento básico de diseño.

b) Procedimiento básico de diseño

Parámetros de partida:

- 1) σ , determina el tipo de antena : -1(Cassegrain), 1(Gregoriana)
- 2) D, diámetro de la apertura del reflector parabólico (real y equivalente)
- 3) c, semidistancia focal del subreflector; o bien, **ds**, diámetro de la apertura del subreflector
- 4) ho, altura del centro de la apertura del reflector parabólico offset
- 5) F, distancia focal del reflector parabólico real
- 6) β , ángulo que forman los ejes focales del reflector y subreflector

PASO 1): Coincide con el del análisis

PASO 1') Cálculo de la excentricidad e a partir de la condición de Rusch

Extrayendo la raíz cuadrada sobre ambos miembros de (4.9.3), llamando r al resultado y quitando denominadores, tenemos:

$$\frac{e-1}{e+1} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}} = r$$
$$(e-1)r = e+1$$

De donde, despejando la excentricidad, teniendo en cuenta para elegir el doble signo de la raíz que en las antenas tipo Cassegrain $\sigma=-1$, $e>1$ y en las de tipo Gregoriano $\sigma=1$, $e<1$, resulta:

$$e = \frac{r+1}{r-1} = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}}}{1 \mp \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}}} = \frac{1 - \sigma \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}}}{1 + \sigma \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}}} \quad (4.11.1)$$

PASOS 2-7) Coinciden con los del análisis, descritos en el apartado anterior, salvo el orden de cálculo entre el paso 3) y 4), si el dato es. Al imponer las condición de Rusch desde el principio, en el paso 7) no hay que verificarla y, además, este paso, que estaba condicionado a la verificación de dicha condición, siempre se podrá dar.

PASO 8) A cumplirse la condición de Rusch se obtendrá un paraboloides equivalente centrado por lo que $h_{eq}=0$.

c) Selección de los parámetros de partida en el diseño

Por diversas razones, que se exponen a continuación, a veces resulta conveniente fijar otros parámetros de partida en el diseño de las antenas de doble reflector - offset. A continuación, se muestran los 3 parámetros que se suelen cambiar (los 3 últimos parámetros de partida del diseño básico), por cuales se cambian y las razones del cambio. Más adelante, se verá como pasar de ellos a los del diseño básico.

4) **dc**, en lugar de **ho**. El parámetro dc, que representa la separación vertical del reflector y subreflector, conviene especificarlo con un valor no muy pequeño para reducir el fenómeno de difracción que se produce en los bordes de los reflectores, no considerado en las fórmulas de campo, obtenidas sólo con óptica geométrica, en las cuales descansan los desarrollos precedentes. Por tanto el parámetro dc es más importante que ho.

5) **L** en lugar de **F**. Aunque a veces conviene fijar F para ciertas aplicaciones, suele ser más útil fijar L, ya que determina la anchura máxima de la antena.

6) θ_e en lugar de β . Debido a que θ_e determina el tamaño del alimentador y que respecto al valor de β , que suele ser un valor pequeño, el resultado del diseño no es muy sensible, suele ser conveniente fijar θ_e en vez de β

d) Obtención de h_0 en función de d_c

Supondremos que es dato d_s . Despejando de la expresión (4.10.4b) c, teniendo en cuenta que $\sigma=1/\sigma$ se tiene:

$$c = \sigma \frac{e}{(e^2 - 1)} \cdot \frac{d_s}{\frac{\text{sen}\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} - \frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1}} \quad (4.11.2)$$

Sustituyendo el valor de c , dado por la expresión anterior, en la fórmula de d_c , (4.10.5), se obtiene:

$$\begin{aligned} d_c &= h_0 - \frac{D}{2} - \frac{1}{e} \cdot \sigma \frac{e}{(e^2 - 1)} \cdot \frac{d_s}{\frac{\text{sen}\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} - \frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1}} \cdot \frac{e^2 - 1}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} \text{sen}\theta_u^* - \frac{\sigma + 1}{2} d_s = \\ &= h_0 - \frac{D}{2} - \sigma d_s \frac{1}{\frac{\text{sen}\theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} - \frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1}} \cdot \frac{\text{sen}\theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} - \frac{\sigma + 1}{2} d_s \end{aligned}$$

Suponiendo $\beta \ll \theta_l, \theta_u^*$ y que $e \gg 1$, en la práctica suele ser así, podemos aplicar la fórmula trigonométrica $\text{tg}(x/2) = \text{sen}x/(1+\text{cos}x)$ y la expresión anterior se transforma en:

$$d_c = h_0 - \frac{D}{2} - \sigma d_s \frac{1}{\text{tg} \frac{\theta_l^*}{2} - \text{tg} \frac{\theta_u^*}{2}} \cdot \text{tg} \frac{\theta_u^*}{2} - \frac{\sigma + 1}{2} d_s$$

De acuerdo con (4.3.2''), la resta de tangentes del denominador vale $-D/(2F)$ y la otra tangente, de acuerdo con (4.3.2'), vale $(h_0 + D/2)/(2F)$, sustituyendo estos valores y operando, se tiene:

$$d_c = h_0 - \frac{D}{2} + \sigma d_s \frac{1}{\frac{D}{2F}} \cdot \frac{h_0 + \frac{D}{2}}{2F} - \frac{\sigma + 1}{2} d_s =$$

$$= h_0 - \frac{D}{2} + \sigma d_s \frac{h_0}{D} - \frac{d_s}{2}$$

Despejando h_0 , se tiene:

$$h_0 = \frac{d_c + \frac{D}{2} + \frac{d_s}{2}}{1 + \frac{\sigma d_s}{D}} = D \frac{d_c + \frac{D}{2} + \frac{d_s}{2}}{D + \sigma d_s}$$

Sacando factor común $\frac{1}{2}$ en el numerador, queda finalmente:

$$h_0 = \frac{D}{2} \cdot \frac{2d_c + D + d_s}{D + \sigma d_s} \quad (4.11.3)$$

Hay que remarcar que la fórmula anterior es una **aproximación**, obtenida bajo las hipótesis de que

$\beta \ll \theta_l, \theta_u^*$ y que $e \ll 1$.

e) Obtención de **L** en función de **F**

Apoyándonos en la expresión de **c** en función de **ds**, obtenida en el apartado anterior, (4.11.2), despejamos de dicha expresión $c(e^2 - 1)/e$ y sustituimos su valor en la expresión de **L** en función de **F**, (4.10.6):

$$L = \frac{2F \cos \theta_l^*}{1 + \cos \theta_l^*} + \sigma \frac{d_s}{\frac{\sin \theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} - \frac{\sin \theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1}} \cdot \frac{1}{2} \left[(\sigma - 1) \frac{\cos \theta_u^*}{e \cos(\beta + \theta_u^*) + 1} - (\sigma + 1) \frac{\cos \theta_l^*}{e \cos(\beta + \theta_l^*) + 1} \right]$$

Al igual que en el apartado anterior, supondremos $\beta \ll \theta_{l,u}^*$ y que $e \ll 1$, en la práctica suele ser así, en cuyo caso, podemos aplicar la fórmula trigonométrica $\text{tg}(x/2) = \text{sen}x/(1+\text{cos}x)$ al denominador de la 2ª fracción y la expresión anterior se transforma en:

$$L = \frac{2F \cos\theta_l^*}{1 + \cos\theta_l^*} + \sigma \frac{d_s}{\text{tg} \frac{\theta_l^*}{2} - \text{tg} \frac{\theta_u^*}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left[(\sigma - 1) \frac{\cos\theta_u^*}{\cos\theta_u^* + 1} - (\sigma + 1) \frac{\cos\theta_l^*}{\cos\theta_l^* + 1} \right]$$

Al igual que se hizo en el apartado anterior, de acuerdo con (4.3.2''), la resta de tangentes del denominador se sustituye por $-D/(2F)$, sacando además factor común a F y simplificando el 2, se tiene:

$$L = F \left\{ \frac{2 \cos\theta_l^*}{1 + \cos\theta_l^*} - \sigma \frac{d_s}{D} \left[(\sigma - 1) \frac{\cos\theta_u^*}{\cos\theta_u^* + 1} - (\sigma + 1) \frac{\cos\theta_l^*}{\cos\theta_l^* + 1} \right] \right\} \quad (4.11.4)$$

Sustituyendo el valor de $\text{cos}x$ en función de la $\text{tg}(x/2)$ (usado para transformar integrales trigonométricas en integrales racionales), en concreto: $\text{cos}x = (1 - \text{tg}^2 x/2) / (1 + \text{tg}^2 x/2)$, en el cociente $\text{cos}x/(1 + \text{cos}x)$ y operando se llega a que:

$$\frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}{2}$$

Aplicando la identidad trigonométrica anterior a los cocientes de (4.11.4) y sustituyendo las tangentes que aparecen de acuerdo con (4.3.2'), se obtiene la siguiente expresión para los referidos cocientes:

$$\frac{\cos\theta_{l,u}^*}{\cos\theta_{l,u}^* + 1} = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{\theta_{l,u}^*}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{h_0 \mp \frac{D}{2}}{2F} \right)^2 \right] \quad (4.11.5)$$

Sustituyendo en (4.11.4) los cocientes por el valor obtenido en (4.11.5), y operando queda:

$$L = F \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{h_0 - \frac{D}{2}}{2F} \right)^2 \right] \left[2 + (\sigma + 1) \sigma \frac{d_s}{D} \right] - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{h_0 + \frac{D}{2}}{2F} \right)^2 \right] (\sigma - 1) \sigma \frac{d_s}{D} \right\}$$

Multiplicando por F ambos miembros y operando queda:

$$FL = \left\{ \frac{1}{2} \left[F^2 - \left(\frac{h_0 - \frac{D}{2}}{2} \right)^2 \right] \left[2 + (\sigma + 1) \sigma \frac{d_s}{D} \right] - \frac{1}{2} \left[F^2 - \left(\frac{h_0 + \frac{D}{2}}{2} \right)^2 \right] (\sigma - 1) \sigma \frac{d_s}{D} \right\}$$

Trasponiendo y reduciendo términos, se obtiene una ecuación de 2º grado en la variable F de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde

$$a = \frac{1}{2} \left[2 + (\sigma + 1) \sigma \frac{d_s}{D} \right] - \frac{1}{2} (\sigma - 1) \sigma \frac{d_s}{D} = 1 + \sigma \frac{d_s}{D}$$

$$b = -L$$

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{8} \left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 \left[2 + (\sigma + 1) \sigma \frac{d_s}{D} \right] + \frac{1}{8} \left(h_0 + \frac{D}{2} \right)^2 (\sigma - 1) \sigma \frac{d_s}{D} = \\ &= -\frac{1}{4} \left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} (\sigma + 1) \sigma \frac{d_s}{D} \left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} (\sigma - 1) \sigma \frac{d_s}{D} \left(h_0 + \frac{D}{2} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{4} \left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \sigma \frac{d_s}{D} \left[(\sigma + 1) \left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 - (\sigma - 1) \left(h_0 + \frac{D}{2} \right)^2 \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \sigma \frac{d_s}{D} \left[-2\sigma h_0 D + 2 \left(h_0^2 + \frac{D^2}{4} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\left(h_0 - \frac{D}{2} \right)^2 + \sigma \frac{d_s}{D} \left(h_0 + \frac{\sigma D}{4} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de 2º grado en F, con los coeficientes anteriores, resulta:

$$F = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + \left(1 + \sigma \frac{d_s}{D}\right) \left[\left(h_0 - \frac{D}{2}\right)^2 + \sigma \frac{d_s}{D} \left(h_0 + \frac{\sigma D}{2}\right)^2 \right]}}{2 \left(1 + \sigma \frac{d_s}{D}\right)} \quad (4.11.6)$$

Hay que remarcar que la fórmula anterior es una **aproximación**, obtenida bajo las hipótesis de que $\beta \ll \theta_l, u^*$ y que $e \ll 1$.

f) Obtención de β en función de θ_e .

Para obtener una relación entre β y θ_e hay que eliminar α y e entre las ecuaciones de Mizugutch y Rusch y (4.10.7). Para ello, despejamos de la ecuación de Rusch el término al cuadrado, función de e , y sustituyendo su valor en la expresión (4.10.7) elevada al cuadrado, se llega a:

$$\frac{tg^2 \frac{\theta_u^* + \beta}{2}}{tg^2 \frac{-\sigma\alpha + \theta_e}{2}} = \frac{tg \frac{\theta_c^* + \beta}{2}}{tg \frac{\beta}{2}} \quad (4.11.7)$$

Desarrollando las tangentes del primer miembro y utilizando la condición de Mizugutch, para eliminar α , se llega a la siguiente expresión equivalente:

$$tg^2 \frac{\theta_e}{2} = \frac{tg \frac{\beta}{2}}{tg \frac{\theta_c^* + \beta}{2}} \cdot \left(\frac{tg \frac{\theta_c^* + \beta}{2} - tg \frac{\theta_u^* + \beta}{2}}{tg \frac{\beta}{2} tg \frac{\theta_u^* + \beta}{2} + 1} \right)^2 \quad (4.11.7')$$

Extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros, aplicando arc tangente y despejando θ_e , se obtiene:

$$\theta_e = 2 \operatorname{arc} tg \left(\sqrt{\frac{tg \frac{\beta}{2}}{tg \frac{\theta_c^* + \beta}{2}} \cdot \frac{tg \frac{\theta_c^* + \beta}{2} - tg \frac{\theta_u^* + \beta}{2}}{tg \frac{\beta}{2} tg \frac{\theta_u^* + \beta}{2} + 1}} \right) \quad (4.11.7'')$$

A partir de (4.11.7), vamos a obtener a continuación una expresión aproximada de β en función de θ_e . Para simplificar el desarrollo haremos el siguiente cambio de nomenclatura:

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \\ x &= \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_e}{2} \end{aligned} \tag{4.11.8}$$

$$\begin{aligned} k &= \operatorname{tg} \theta_c^* \\ k' &= \operatorname{tg} \theta_u^* \end{aligned}$$

Con esta nomenclatura, las tangentes de las semisumas de β y θ (con los subíndices apropiados), desarrollando con la fórmula de la tangente de la suma, se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta_c^* + \beta}{2} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_c^*}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta_c^*}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{y + k}{1 - ky} \\ \operatorname{tg} \frac{\theta_u^* + \beta}{2} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\theta_u^*}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{k' + y}{1 - k'y} \end{aligned} \tag{4.11.8'}$$

De acuerdo con (4.11.8) y (4.11.8'), (4.11.7') puede escribirse como:

$$x = \frac{y}{k + y} \cdot \left(\frac{\frac{k + y}{1 - ky} - \frac{k' + y}{1 - k'y}}{y \frac{k' + y}{1 - k'y} + 1} \right)^2 \tag{4.11.9}$$

Sumando las fracciones del interior del paréntesis y operando, se tiene:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{y(1-ky)}{k+y} \cdot \left[\frac{k - kk'y + y - kk'y^2 - (k'+y - kk'y - ky^2)}{k'y + y^2 + 1 - k'y} \cdot \frac{(1-k'y)}{(1-ky)(1-k'y)} \right]^2 = \\
 &= \frac{y}{(k+y)(1-ky)} \cdot \left[\frac{(k-k')y^2 + (k-k')}{y^2 + 1} \right]^2 = \\
 &= \frac{y(k-k')^2}{(k+y)(1-ky)} \cdot \left[\frac{y^2 + 1}{y^2 + 1} \right]^2 \\
 &= \frac{y(k-k')^2}{(k+y)(1-ky)} = \frac{(k-k')^2 y}{-ky^2 + (1-k^2)y + k} \quad (4.11.9')
 \end{aligned}$$

Pasando todo al primer miembro, se obtiene la siguiente función implícita de las variables x e y:

$$F(x, y) = x[-ky^2 + (1-k^2)y + k] - (k-k')^2 y = 0 \quad (4.11.9'')$$

Con vistas al desarrollo siguiente, obtendremos a continuación la derivada primera y segunda de y respecto a x, a través de las fórmulas de derivación implícita aplicadas a F(x,y). Para ello, calcularemos previamente las derivadas parciales primera y segunda de F respecto a x e y, particularizadas para x=0 (=>y=0, según se desprende de (4.11.9)):

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} &= -ky^2 + (1-k^2)y + k \Big|_{x=0, y=0} = k \\
 \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} &= [-2ky + (1-k^2)]x - (k-k')^2 \Big|_{x=0} = -(k-k')^2 \\
 \left. \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x=0, y=0} &= -2kx \Big|_{x=0, y=0} = 0 \\
 \left. \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x=0, y=0} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) \Big|_{x=0, y=0} = \frac{\partial}{\partial x} \{ [-2ky + (1-k^2)]x - (k-k')^2 \} \Big|_{x=0, y=0} = -2ky + (1-k^2) \Big|_{x=0, y=0} = 1-k^2
 \end{aligned} \quad (4.11.10)$$

Utilizando la fórmula de la derivación implícita para la derivada primera y sustituyendo valores primero según (4.11.10) y luego según (4.11.8) y luego según (4.3.2'), se tiene:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0, y=0} = - \frac{\left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0, y=0}}{\left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=0, y=0}} = \frac{k}{(k - k')^2} = \frac{tg \theta_c^*}{(tg \theta_c^* - tg \theta_u^*)^2} = \frac{\frac{h_0}{2F}}{\left(-\frac{D}{4F}\right)^2} = \frac{8h_0 F}{D^2} \quad (4.11.11)$$

Utilizando la fórmula de la derivación implícita para la derivada segunda y sustituyendo valores primero según (4.11.10), luego según (4.11.8) y luego según (4.3.2'), se tiene:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0, y=0} &= - \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 F(x, y)}{\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right)^3} \bigg|_{x=0, y=0} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial xy^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x}}{\left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right)^3} \bigg|_{x=0, y=0} = \\ &= - \frac{0 + 0 - 2(1 - k^2)k(k - k')^2}{(k - k')^6} = \frac{2(1 - k^2)k}{(k - k')^4} = \frac{2(1 - tg^2 \theta_c^*)tg \theta_c^*}{(tg \theta_c^* - tg \theta_u^*)^4} = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{h_0}{2F} \right)^2 \right] \frac{h_0}{2F}}{\left(-\frac{D}{4F} \right)^4} = \\ &= \frac{256F^3 h_0 \left[1 - \left(\frac{h_0}{2F} \right)^2 \right]}{D^4} \end{aligned} \quad (4.11.12)$$

Apoyándonos en lo anterior, desarrollaremos a continuación en serie de Taylor $y=f(x)$ en $x=0$, con ello, observando (4.11.8), obtendremos una expresión aproximada de β en función de θ_e . Tomando dos términos de la fórmula de Taylor, tenemos que:

$$y \approx y(0) + \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} \cdot x^2$$

Según se desprende de (4.11.9): $y(0)=0$. Con ello y sustituyendo el resto de los términos, de acuerdo con de acuerdo con (4.11.11) y (4.11.12) y deshaciendo el cambio de nomenclatura hecho en (4.11.8), se tiene:

$$tg \frac{\beta}{2} \approx \frac{8h_0 F}{D^2} \cdot tg^2 \frac{\theta_e}{2} + \frac{128F^3 h_0 \left[1 - \left(\frac{h_0}{2F} \right)^2 \right]}{D^4} \cdot tg^4 \frac{\theta_e}{2} \quad (4.11.13)$$

Sacando factor común al primer término del segundo miembro y despejando β , se tiene:

$$\beta \approx 2 \operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{8h_0 F}{D^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_e}{2} \left[1 + \left(\frac{4F}{D} \right)^2 \left(1 - \frac{h_0^2}{4F^2} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{\theta_e}{2} \right] \right\} \quad (4.11.14)$$

Hay que remarcar que la fórmula anterior es una **aproximación**. La aproximación será tanto más exacta, cuando se particularice para valores más próximos al punto del desarrollo $x=0, y=0$, o sea para valores pequeños de, **$\operatorname{tg}\theta_e$ y $\operatorname{tg}\beta$** , y en consecuencia para valores pequeños de β

5. BLOQUEO DEL ALIMENTADOR O SUBREFLECTOR

Uno de los inconvenientes del alimentador frontal, especialmente en el Cassegrain por la mayor superficie del subreflector, es el bloque que produce el alimentador o subreflector, creando una sombra de radiación, debido a esto disminuye la directividad y aumenta el nivel de los óvulos secundarios.

En la práctica, para incluir el efecto del bloqueo en la radiación, se estima la contribución a la radiación total debida a la zona de bloqueo y luego se resta esta contribución a la radiación producida en el caso ideal sin bloqueo.

En el caso de **bloqueo circular**, debido bien a un alimentador que sea bocina cónica en el reflector parabólico centrado simple o al subreflector en la antena Cassegrain centrada, para estimar la radiación que produce la zona de bloqueo, ésta se modela como una apertura circular con distribución de campo ideal de tipo parabólico sobre pedestal, cuya expresión es de la forma vista en (2.2.1), en la que el campo máximo **E_o** de dicha apertura es el de la apertura real y el campo en el borde **E_b** se aproxima por el promedio de el campo real en la apertura del reflector en 4 puntos esquiapaciados del borde, en concreto:

$$E_b = \frac{E_{ap}(0, d/2) + E_{ap}(0, -d/2) + E_{ap}(d/2, 0) + E_{ap}(-d/2, 0)}{4} \quad (5.1)$$

Donde:

- $E_{ap}(x,y)$: campo real en la apertura del reflector en un punto de coordenadas cartesianas (x,y) .

- d : diámetro del alimentador o de la apertura del subreflector. Si el alimentador es una bocina rectangular, d se puede estimar como promedio de los lados del rectángulo de la apertura

Si se utilizan coordenadas polares para calcular el campo en la apertura: $E_{ap}(\theta, \phi)$. El ángulo θ se obtiene a partir de la fórmula que lo relaciona con el diámetro de la apertura (2.1.2'), sustituyendo D por d , y ϕ toma los valores $0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$.

El **campo** radiado por la apertura del reflector **sin bloqueo** en un punto genérico, aplicando alguno de los principios de equivalencia puede expresarse en función de los parámetros p (añadimos subíndices sbl) como:

$$\vec{E}_{sbl} = \left(k_1 P_{x_{sbl}} + k_2 P_{y_{sbl}} \right) \hat{\theta} + \left(k_3 P_{x_{sbl}} + k_4 P_{y_{sbl}} \right) \hat{\phi}$$

El **campo** radiado por la apertura de la zona **bloqueo** en el punto genérico anterior, aplicando alguno de los principios de equivalencia puede expresarse en función de los parámetros p (añadimos subíndices bl) como:

$$\vec{E}_{bl} = (k_1 P_{x_bl} + k_2 P_{y_bl}) \hat{\theta} + (k_3 P_{x_bl} + k_4 P_{y_bl}) \hat{\phi}$$

Las constantes k1, k2, k3 y k4 al depender del punto considerado y ser el mismo en ambos casos son iguales.

Aplicando el teorema de superposición, el **campo real** del reflector con bloqueo será la resta de los anteriores:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{sbl} - \vec{E}_{bl} = \\ &= \left[k_1 (P_{x_sbl} - P_{x_bl}) + k_2 (P_{y_sbl} - P_{y_bl}) \right] \hat{\theta} + \left[k_3 (P_{x_sbl} - P_{x_bl}) + k_4 (P_{y_sbl} - P_{y_bl}) \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

Pero también, aplicando alguno de los principios de equivalencia a la apertura real, en un punto genérico el campo real que produciría sería de la forma

$$\vec{E} = (k_1 P_x + k_2 P_y) \hat{\theta} + (k_3 P_x + k_4 P_y) \hat{\phi}$$

Identificando ambas expresiones de campo, se desprende que, en un punto genérico, los parámetros Px, Py de la apertura real es la resta de los producidos por ambas aperturas, la apertura total sin bloqueo y la determinada por la zona de bloqueo:

$$\begin{aligned} P_x &= P_{x_sbl} - P_{x_bl} \\ P_y &= P_{y_sbl} - P_{y_bl} \end{aligned} \quad (5.2)$$

6. PARÁMETROS DEL REFLECTOR

6.1. Ganancia

La ganancia se define como el cociente entre el valor medio de la densidad de potencia transmitida por la componente copolar del campo radiado por la antena en la dirección de máxima radiación a una distancia r y el que transmitiría en su lugar la antena isotrópica a la que se entregara igual potencia P_{ea} . Según esto:

$$G = \frac{\langle S \rangle_{mx}}{\langle S \rangle_{iso}} = \frac{1}{2Z_0} \frac{|E_{cp}|_{mx}^2}{\frac{P_{ea}}{4\pi r^2}} \quad (6.1.1)$$

El módulo de la componente copolar del campo radiado por una apertura, según y , se obtiene aplicando las fórmulas del tema de bocinas (2.7.2) o (2.7.3), según el principio de equivalencia elegido, para $\theta = \phi = 0$. En este caso, se obtiene el mismo resultado con ambas fórmulas. Veámoslo:

Según el primer principio de equivalencia:

$$|E_{CP}|_{\max} = \frac{1}{\lambda r} \left| \frac{1 + \cos\theta}{2} \right| |Py(\theta, \phi)| = \frac{|Py(0,0)|}{\lambda r} \quad (6.1.2)$$

Según el segundo principio de equivalencia:

$$|E_{CP}|_{\max} = \frac{1}{\lambda r} \left| \sin\phi \cos\phi (1 - \cos\theta) Px(\theta, \phi) + (\sin^2\phi + \cos^2\phi \cos\theta) Py(\theta, \phi) \right| = \frac{|Py(0,0)|}{\lambda r} \quad (6.1.2')$$

En general, los parámetros P_x, P_y se obtendrán incluyendo el **efecto de bloqueo**, usando (5.2).

La potencia P_{ea} proviene de la radiada por el alimentador; sólo parte de ésta será radiada por el reflector, el resto constituirá diferentes pérdidas, que estarán representadas por las eficiencias que más adelante veremos. Calculando ésta potencia integrando los campos en la apertura de la bocina, se tiene:

$$P_{ea} = P_{rad_boci} = \frac{1}{2Z_0} \iint_{S_{ap}} (|E_{ax_boci}(x, y)|^2 + |E_{ay_boci}(x, y)|^2) dx dy \quad (6.1.4)$$

En particular, en el caso del **alimentador ideal cos-q** ideal, como se vio en (2.4.5), la potencia radiada venía dada por:

$$P_{ea} = P_{rad_boci_cosq-ideal} = \frac{2\pi}{\lambda^2} \frac{1}{2Zo} \frac{1}{2q+1} \quad (6.1.4')$$

Sustituyendo las expresiones del campo y la potencia dadas por (6.1.2) o (6.1.2') y (6.1.4) en (6.1.1) y simplificando se obtiene la siguiente fórmula de la **ganancia de un reflector con alimentador no ideal**:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{|Py(0,0)|^2}{\iint_{Sap} (|E_{ax_boci}(x,y)|^2 + |E_{ay_boci}(x,y)|^2) dx dy} \quad (6.1.5)$$

Sustituyendo las expresiones del campo y la potencia dadas por (6.1.2) o (6.1.2') y (6.1.4') en (6.1.1) y simplificando se obtiene la siguiente fórmula de la **ganancia de una antena con alimentador ideal tipo cos-q**:

$$G = |Py(0,0)|^2 2(2q+1) \quad (6.1.5')$$

6.2. Eficiencia global del reflector

Aplicando la fórmula general de ganancia de una apertura a la apertura del reflector, de superficie efectiva S_{ef} , eficiencia global ε , superficie real S y diámetro D , se obtiene:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S_{ef} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot (\varepsilon \cdot S) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \varepsilon \cdot \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \varepsilon \cdot \left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2 \quad (6.2.1)$$

Despejando de la fórmula anterior la eficiencia total del reflector ε , se tiene, la siguiente fórmula que nos permite calcularla a partir de G , que se obtendrá de (6.1.5) o (6.1.6) :

$$\varepsilon = \frac{G}{\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2} \quad (6.2.2)$$

6.3. Eficiencia de la apertura

la superficie efectiva de una apertura, como ya se ha mostrado en (6.2.1), determina la ganancia de la apertura y está relacionada con la superficie geométrica real mediante un factor denominado eficiencia. En aquella fórmula, al tratarse de cálculo de ganancia incluye todos los efectos de pérdidas de potencia que se producen en el reflector. Si en la fórmula anterior, no consideramos ninguna pérdida de potencia, en vez de ganancia se hablaría de directividad de la apertura D_0 y en vez de eficiencia global del reflector de eficiencia de la apertura ε_{ap} , es decir, se tendría que:

$$D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot S_{ef} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot (\varepsilon_{ap} \cdot S) = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cdot \varepsilon_{ap} \cdot \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \quad (6.3.1)$$

Por otra parte, del estudio de una apertura genérica, como vimos en el tema de bocinas, acuerdo con (2.9.5), la directividad del reflector (allí llamada D) en función de los componentes del campo en la apertura del reflector, sería:

$$D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{|Px(0,0)|^2 + |Py(0,0)|^2}{\iint_{S_{ap}} (|E_{ax}(x_{ap}, y_{ap})|^2 + |E_{ay}(x_{ap}, y_{ap})|^2) dx_{ap} dy_{ap}} \quad (6.3.2)$$

Identificando, se tiene:

$$S_{ef} = \varepsilon_{ap} \cdot S = \varepsilon_{ap} \cdot \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{|Px(0,0)|^2 + |Py(0,0)|^2}{\iint_{S_{ap}} (|E_{ax}(x_{ap}, y_{ap})|^2 + |E_{ay}(x_{ap}, y_{ap})|^2) dx_{ap} dy_{ap}} \quad (6.3.3)$$

De donde:

$$\varepsilon_{ap} = \frac{S_{ef}}{S} = \frac{S_{ef}}{\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2} = \frac{1}{\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2} \cdot \frac{|Px(0,0)|^2 + |Py(0,0)|^2}{\iint_{S_{ap}} (|E_{ax}(x_{ap}, y_{ap})|^2 + |E_{ay}(x_{ap}, y_{ap})|^2) dx_{ap} dy_{ap}} \quad (6.3.3')$$

El valor máximo de la superficie efectiva se da cuando la distribución de campo en la apertura es uniforme. En este caso, llamando a $E_{ax}=E_1$ y $E_{ay}=E_2$, independientes de (x,y), sustituyendo en (6.3.3), se tiene que:

$$S_{ef} = \frac{\iint_{S_{ap}} |E_1 dx dy|^2 + \iint_{S_{ap}} |E_2 dx dy|^2}{\iint_{S_{ap}} (|E_1|^2 + |E_2|^2) dx dy} = \frac{|E_1|^2 S^2 + |E_2|^2 S^2}{(|E_1|^2 + |E_2|^2) S} = S$$

Es decir, que la superficie efectiva igual a la superficie geométrica, o lo que es lo mismo, de acuerdo con (6.3.3'), la eficiencia de radiación de la apertura es la unidad. Pero como se vio en el estudio del reflector parabólico simple, en el caso ideal, la distribución uniforme de campo en la apertura no daba una eficiencia global máxima, sino que ésta se conseguía para una distribución de campo en la que entre el centro y el borde hubiera una caída de unos -10 dB (ver apartado 2.5). Al fijar esta caída en la distribución de campo como objetivo prioritario para alcanzar máxima eficiencia global, la consecuencia es que considerando la radiación del reflector generada por su apertura aislada, su eficiencia no es la máxima que podría generar esa apertura. Esta eficiencia de la apertura vendría dada, en general, por (6.3.3'); en

el caso de polarización lineal según **y**, sólo habría que considerar la componente **y** del campo en la apertura:

$$\varepsilon_{ap} = \frac{1}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \frac{|P_y(0,0)|^2}{\iint_{S_{ap}} |E_{ay}(x_{ap}, y_{ap})|^2 dx_{ap} dy_{ap}} \quad (6.3.4)$$

6.4. Eficiencia de bloqueo

La eficiencia de bloqueo se define como el cociente entre el valor medio de la densidad de potencia transmitida por la componente copolar del campo radiado por la antena en la dirección de máxima radiación a una distancia *r* en el caso real de que se produzca bloqueo y el que transmitiría si no hubiese bloqueo (añadimos subíndice **sbl** al campo y a los parámetros *P*). Aplicando el teorema de Poynting, y expresando el campo radiado en función de los parámetros *P*, se tiene:

$$\varepsilon_{ap} = \frac{\langle S \rangle_{|_{mx}}}{\langle S \rangle_{|_{sbl mx}}} = \frac{\frac{1}{2Z_0} |\bar{E}|_{|_{mx}}^2}{\frac{1}{2Z_0} |\bar{E}_{sbl}|_{|_{mx}}^2} = \frac{|k_1 P_x(0,0) + k_2 P_y(0,0)|^2}{|k_1 P_{x_{sbl}}(0,0) + k_2 P_{y_{sbl}}(0,0)|^2}$$

Considerando contribución al campo radiado sólo de la componente copolar del campo en la apertura, en polarización según **y**, es decir que $E_{ax}=E_{ax_sbl}=0 \Rightarrow P_x=P_{x_sbl}=0$ y teniendo en cuenta (5.2), se tiene:

$$\varepsilon_{ap} = \frac{|P_y(0,0)|^2}{|P_{y_{sbl}}(0,0)|^2} = \frac{|P_{y_{sbl}}(0,0) - P_{y_{bl}}(0,0)|^2}{|P_{y_{sbl}}(0,0)|^2} \quad (6.4.1)$$

6.5. Eficiencia de Spillover

No toda la potencia radiada por la bocina es recogida por el reflector. La fracción de potencia recogida por el reflector procedente de la bocina con la que es iluminado se denomina **eficiencia de spillover** $\varepsilon_{spillover}$. La eficiencia de Spillover será igual al cociente entre la potencia radiada por la bocina en el margen angular con que ve al reflector (=potencia incidente en el reflector = radiada por el reflector) y la potencia total radiada por la bocina, es decir:

$$\varepsilon_{spillover} = \frac{P_{rad_refl}}{P_{rad_boci}}$$

Ambas potencias se pueden obtener integrando los campos en las respectivas aperturas, de reflector y bocina. En ese caso, se tiene:

$$\varepsilon_{spillover} = \frac{\frac{1}{2Z_0} \iint_{Sap} |\vec{E}_{ap_refl}|^2 ds}{\frac{1}{2Z_0} \iint_{Sap} |\vec{E}_{ap_boci}|^2 ds} = \frac{\iint_{Sap} |\vec{E}_{ap_refl}|^2 ds}{\iint_{Sap} |\vec{E}_{ap_boci}|^2 ds} = \frac{\iint_{Sap} (|E_{ax_refl}(x_{ap}, y_{ap})|^2 + |E_{ay_refl}(x_{ap}, y_{ap})|^2) dx_{ap} dy_{ap}}{\iint_{Sap} (|E_{ax_boci}(x, y)|^2 + |E_{ay_boci}(x, y)|^2) dx dy} \quad (6.5.2)$$

Una alternativa más conveniente para el cálculo de la eficiencia de Spillover es a partir del resto de las eficiencias, cuyo procedimiento de cálculo ha sido descrito en los apartados anteriores. La eficiencia global es igual al producto de todas las eficiencias, de donde, despejando la de Spillover, se tiene:

$$\varepsilon_{spillover} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{ap} \varepsilon_{bl}} \quad (6.5.3)$$

6.6. Coeficiente de reflexión Γ del alimentador

En sistemas centrados (reflector parabólico centrado simple y reflector Cassegrain), debido al bloqueo de radiación de la bocina, parte de la potencia que ésta entrega regresa a ella, tras reflejarse en el reflector o subreflector. Denominando **Pf** a la potencia radiada por la bocina y **Gf** a la ganancia de la bocina en la dirección normal (de máxima radiación) y Z_0 a la impedancia característica del vacío, que vale $Z_0=120\pi$, el campo E_d que produce en el punto de incidencia del reflector o subreflector, situado a una distancia d , viene dado por:

$$E_d = \frac{\sqrt{\frac{Z_0}{2\pi} P_f G_f}}{d} \quad (6.6.1)$$

El campo incidente en el reflector **Ed**, tras reflejarse puede considerarse como **onda plana y permanece constante en su viaje de regreso a la apertura de la bocina**. Esta onda genera en los puntos de la apertura una densidad de potencia de valor medio $\langle S_{bl} \rangle$ y una potencia P_{bl} , denominando S_{ef_boci} al área efectiva de la apertura de la bocina, la potencia P_{bl} se puede obtener integrando la densidad de potencia en la superficie efectiva. Con ello, y aplicando el teorema de Poynting, se tiene:

$$P_{bl} = \langle S_{bl} \rangle S_{ef_boci} = \frac{1}{2Z_0} |E_d|^2 S_{ef_boci} \quad (6.6.2)$$

Sustituyendo el valor de E_d dado por (6.6.1) en (6.6.2), se tiene:

$$P_{bl} = \frac{1}{2Z_0} \frac{Z_0}{2\pi} \frac{P_f G_f}{d^2} S_{ef_boci} = \frac{1}{4\pi} \frac{P_f G_f}{d^2} S_{ef_boci} \quad (6.6.3)$$

Sustituyendo en (6.6.3) la expresión de la superficie efectiva de una apertura en que se relaciona con la ganancia de esa apertura, es decir, adaptando la nomenclatura al caso que nos ocupa: $S_{ef} = (\lambda^2/4\pi)G_f$ y se tiene que:

$$P_{bl} = \frac{1}{4\pi} \frac{P_f G_f}{d^2} \frac{\lambda^2}{4\pi} G_f = \left(\frac{\lambda G_f}{4\pi d} \right)^2 \cdot P_f \quad (6.6.4)$$

El módulo del coeficiente de reflexión de la bocina al cuadrado es igual a la fracción de potencia reflejada en el reflector y que retorna a la bocina P_{bl} de entre la total radiada por la bocina P_f . Por tanto, denominando Γ al coeficiente de reflexión y aplicando (6.6.4), se tiene :

$$|\Gamma|^2 = \frac{P_{bl}}{P_f} = \left(\frac{\lambda G_f}{4\pi d} \right)^2 \quad (6.6.5)$$

En particular, respecto al **valor de d**, se tiene que:

-En el reflector **parabólico centrado**: $d=F$ (distancia focal del paraboloides)

-En el reflector **Cassegrain centrado**: $d=Fe$ (distancia focal del paraboloides equivalente)

6.7. Ancho de Haz a -XdB

Se define como el ángulo θ_0 que se obtiene del diagrama normalizado de campo en el que el campo vale -X dB. En la práctica X se toma de manera que en la región $2\theta_0$ se concentre la mayor parte de la potencia radiada, suele tomarse $X=3$, es decir:

$$\theta_0 = \theta_{-XdB} \quad , \text{ con } X=3 \text{ en la práctica}$$

7. POLARIZACIÓN CIRCULAR Y BEAM SQUINT

En general, un campo lejano radiado por una antena, con polarización elíptica, con elipse de polarización centrada, se puede expresar como:

$$\vec{E} = E_{\theta}\hat{\theta} + E_{\phi}\hat{\phi} = E_0(\theta_0\hat{\theta} + j\phi_0\hat{\phi}) \quad (7.1)$$

En particular:

Si $\theta_0=1$ y $\phi_0=-1$, la polarización es circular a derechas

Si $\theta_0=1$ y $\phi_0=+1$, la polarización es circular a izquierdas

El campo con polarización elíptica, expresado en (7.1), se puede descomponer en una combinación de 2 campos con polarizaciones circulares, una a derechas y otra a izquierdas, en la forma:

$$\vec{E} = E_R \frac{(\hat{\theta} - j\hat{\phi})}{\sqrt{2}} + E_L \frac{(\hat{\theta} + j\hat{\phi})}{\sqrt{2}} \quad (7.2)$$

Identificando (7.1) y (7.2) y operando se obtienen las siguientes fórmulas de las componentes de polarización circular del campo E_1 , E_2 en función de las componentes de polarización elíptica:

$$E_R = \frac{\theta_0 + \phi_0}{\sqrt{2}} E_0 = \frac{E_{\theta} - jE_{\phi}}{\sqrt{2}}; \quad E_L = \frac{\theta_0 - \phi_0}{\sqrt{2}} E_0 = \frac{E_{\theta} + jE_{\phi}}{\sqrt{2}} \quad (7.3)$$

Matricialmente, podemos expresar las relaciones anteriores como:

$$\begin{bmatrix} E_R \\ E_L \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \phi_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\theta} \\ E_{\phi} \end{bmatrix} \quad (7.3')$$

Definiendo los vectores unitarios de polarización circular como:

$$\hat{u}_R = \frac{(\hat{\theta} - j\hat{\phi})}{\sqrt{2}}; \quad \hat{u}_L = \frac{(\hat{\theta} + j\hat{\phi})}{\sqrt{2}} \quad (7.4)$$

Al multiplicar escalarmente el vector campo por ellos se obtiene E_R y E_L , pero de forma cruzada, es decir E_R al multiplicar por u_L y E_L al multiplicar por u_R . es decir:

$$\vec{E} \cdot \hat{u}_L = E_R; \quad \vec{E} \cdot \hat{u}_R = E_L \quad (7.5)$$

De acuerdo con (7.4) y (7.5), (7.2) se puede expresar como:

$$\vec{E} = E_R \hat{u}_R + E_L \hat{u}_L = (\vec{E} \cdot \hat{u}_L) \hat{u}_R + (\vec{E} \cdot \hat{u}_R) \hat{u}_L \quad (7.6)$$

También las componentes E_R y E_L pueden obtenerse a partir de los términos originales de la expresión (7.1), utilizando (7.3) o (7.3').

En general, el campo radiado por una bocina se puede expresar (ver tema de bocinas) como:

$$\vec{E}_{bocina} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} (e_{\theta}\hat{\theta} + e_{\phi}\hat{\phi}) \quad (7.7)$$

Las componentes cartesianas del campo en la apertura de un reflector offset en función de las componentes normalizadas del campo radiado por la bocina e_{θ} y e_{ϕ} se vio que venían dadas por (1.10.1.e). Aplicando transformación de coordenadas se podrían obtener las componentes polares del campo en la apertura del reflector: $E_{a\theta_off}$ y $E_{a\phi_off}$. Aplicándoles la transformación matricial vista (7.3'), se obtendrían las componentes de la polarización circular: E_{aR_off} y E_{aL_off} .

Denominando:

$$\begin{aligned} S_1 &= (\cos\Psi_0 + \cos\theta)\text{sen}\phi \\ C_1 &= \text{sen}\Psi_0\text{sen}\theta - (1 + \cos\Psi_0 \cos\theta)\cos\phi \\ \Omega &= \text{arc tg} \frac{S_1}{C_1} \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} E_{aR_off} \\ E_{aL_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} e^{j\Omega} \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\theta}(\theta, \phi) \\ e_{\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} = \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} e^{j\Omega} \begin{bmatrix} e_{\theta} - je_{\phi} \\ e_{\theta} + je_{\phi} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Si las componentes normalizadas del campo radiado por la bocina e_{θ} y e_{ϕ} se pueden expresar en función de e'_{θ} y e'_{ϕ} , que son funciones **reales** sólo de θ , del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} e_{\theta} \\ e_{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e'_{\theta}(\theta)e^{j\phi} \\ -je'_{\phi}(\theta)e^{j\phi} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

La expresión (7.8) se transforma en :

$$\begin{bmatrix} E_{aR_off} \\ E_{aL_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} e'_{\theta}(\theta) - e'_{\phi}(\theta) \\ e'_{\theta}(\theta) + e'_{\phi}(\theta) \end{bmatrix} e^{j(\Omega+\phi)} \quad (7.10)$$

Como se observa, en general, el diagrama de fase del campo queda afectado por un desplazamiento de fase que depende de la dirección (θ, ϕ) considerada, salvo si el reflector es parabólico centrado, ya que en este caso $\Psi_0 = 0 \Rightarrow \Omega = \text{arc tg}(S_1/C_1) = \text{arc tg}(\text{tg}(-\phi)) = -\phi$ y, por tanto, $\Omega + \phi = 0$, con lo que la exponencial última vale 1 y no afecta al diagrama de fase.

En particular, si el campo radiado por la **bocina tiene polarización circular pura a derechas**, y se cumple (7.9), de acuerdo con la expuesto al principio sobre la forma de (7.1) para polarización circular a derechas, la expresión (7.7) será de la forma:

$$\vec{E}_{bocin} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \left[e'_{\theta}(\theta)\hat{\theta} - je'_{\theta}(\theta)\hat{\phi} \right] e^{j\phi} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} e'_{\theta}(\theta) (\hat{\theta} - j\hat{\phi}) e^{j\phi} \quad (7.11)$$

Al ser $e'_{\phi} = e'_{\theta}$, (7.10), queda:

$$\begin{bmatrix} E_{aR_off} \\ E_{aL_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ 2e'_{\theta}(\theta) \end{bmatrix} e^{j(\Omega+\phi)} \quad (7.12)$$

En particular, si el campo radiado por la **bocina tiene polarización circular pura a izquierdas**, y se cumple (7.9), de acuerdo con la expuesto al principio sobre la forma de (7.1) para polarización circular a derechas, la expresión (7.7) será de la forma:

$$\vec{E}_{bocin} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \left[e'_{\theta}(\theta)\hat{\theta} + je'_{\theta}(\theta)\hat{\phi} \right] e^{j\phi} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} e'_{\theta}(\theta) (\hat{\theta} + j\hat{\phi}) e^{j\phi}$$

Al ser $e'_{\phi} = -e'_{\theta}$, (7.10) queda:

$$\begin{bmatrix} E_{aR_off} \\ E_{aL_off} \end{bmatrix} = \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} \begin{bmatrix} 2e'_{\theta}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} e^{j(\Omega+\phi)}$$

Se observa como al tener que considerar referencias de giro en la polarización opuestas para el alimentador y reflector, aparentemente hay una inversión en el giro de la polarización circular

Un **alimentador ideal tipo-cosq con polarización circular pura a derechas/izquierdas** tendría $e'_{\phi} = e'_{\theta} = \cos^q(\theta)/\sqrt{2}$, en este caso la expresión (7.7) será de la forma:

$$\vec{E}_{bocin} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} \cos^q(\theta) \frac{(\hat{\theta} \mp j\hat{\phi})}{\sqrt{2}} e^{j\phi} \quad (7.13)$$

En este caso, respectivamente para polarización circular a derechas y a izquierdas del alimentador, (7.10) quedaría:

$$\begin{bmatrix} E_{aR_off} \\ E_{aL_off} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \frac{je^{-jk2F}}{\lambda\rho} \cos^q(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{j(\Omega+\phi)} \quad (7.14)$$

$$\begin{bmatrix} E_{aR_off} \\ E_{aL_off} \end{bmatrix} = \sqrt{2} \frac{j e^{-jk2F}}{\lambda \rho} \cos^q(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{j(\Omega+\phi)} \quad (7.14')$$

En general, un reflector offset iluminado con un alimentador que genera campo con polarización circular pura no despolariza este campo, es decir, el reflector no genera componente contrapolar de campo con polarización circular contraria; no obstante, cada componente lineal de la polarización sufre un desfase diferente (en las fórmulas anteriores ya se observa como la fase de las componentes de la polarización, en general varía con la dirección considerada), ello se traduce en un desplazamiento angular el diagrama de campo del reflector (**beam squint**), que en general es función del ángulo Ψ_0 . Denominando a este desplazamiento angular θ_{BS} , Adatia y Rudge han estimado θ_{BS} mediante la siguiente expresión:

$$\theta_{BS} = \text{arc sen} \frac{\lambda \text{sen} \Psi_0}{4\pi F} \quad (7.15)$$

8. DESPLAZAMIENTO DEL ALIMENTADOR

Si se desplaza el alimentador(centro de fase) respecto al foco, en un desplazamiento axial y transversal (es decir, manteniéndose el eje del alimentador paralelo al eje Z), para analizar la radiación del reflector habría que realizar una transformación de coordenadas para definir la radiación del alimentador respecto al sistema en que se define la superficie del reflector offset.

Si el desplazamiento del alimentador es pequeño en comparación con ρ , el campo radiado por la bocina incidente en el reflector, dado por (7.7), queda afectado significativamente sólo en su fase, pudiendo ser considerada la variación del módulo despreciable, de manera que simplemente habría que modificar (7.7) añadiéndole un término de fase. A continuación veremos como calcular este término de fase.

Denominaremos a las coordenadas cartesianas de la posición desplazada referidas al sistema de coordenadas cartesianas de la bocina situada en el foco como $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, Δt a la distancia del origen del sistema de coordenadas a la proyección de la posición de la bocina sobre el plano XY (desplazamiento transversal=coordenada cilíndrica radial) y ϕ_d al ángulo ϕ de la posición desplazada de la bocina en el sistema de coordenadas esféricas de la bocina en el foco (=coordenada cilíndrica ϕ). Estas magnitudes se muestran en la figura 8.1. De la figura se desprenden de forma inmediata las relaciones que se adjuntan a la misma.

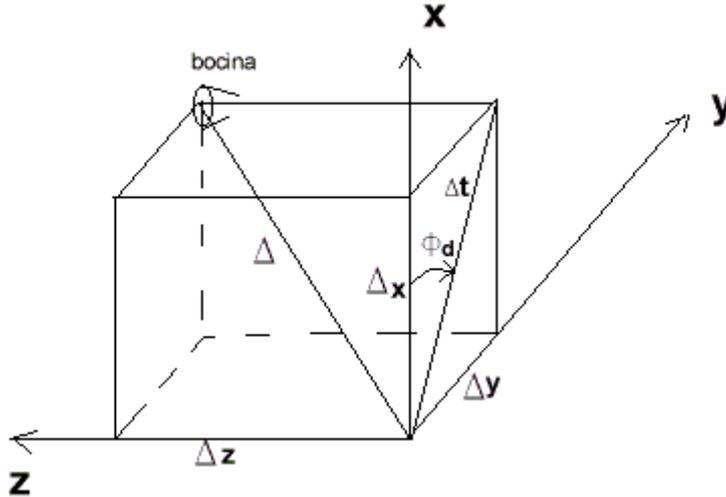


Fig. 8.1

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2} = \sqrt{\Delta_t^2 + \Delta_z^2}$$

$$\phi_d = \text{arc tg} \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$$

Si $\Delta^2/\rho^2 \ll 1$, $\Delta t/\rho < 1$ y $\Delta z/\rho < 1$, se demuestra que el término de fase K_{df} que habría que añadir a (7.7) para calcular el campo radiado por la bocina incidente en el reflector vale:

$$K_{df} = e^{jk[\Delta_t \text{sen} \theta \cos(\phi - \phi_d) + \Delta_z \cos \theta]} = e^{jkR_{df}} \quad (8.2)$$

Por tanto (7.7) se convierte en:

$$\vec{E}_{boci_despl} = \frac{je^{-jk\rho}}{\lambda\rho} (e_\theta \hat{\theta} + e_\phi \hat{\phi}) K_{df} = \frac{je^{jk(\rho - R_{df})}}{\lambda\rho} (e_\theta \hat{\theta} + e_\phi \hat{\phi}) \quad (8.3)$$

De la expresión anterior se deduce que el campo normalizado de la bocina desplazada se puede considerar como el de la bocina sin desplazar por el término de fase K_{df} , es decir:

$$\begin{bmatrix} e_{\theta_despl} \\ e_{\phi_despl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_\theta \\ e_\phi \end{bmatrix} K_{df} \quad (8.4)$$

Considerando estas componentes en la fórmula del campo en la apertura del reflector (1.10.1.e), se desprende que el campo en la apertura del reflector con el alimentador desplazado es el que se obtiene con el alimentador en el foco multiplicado por el término de fase K_{df} , es decir:

$$\vec{E}_{ap_off_despl} = K_{df} \vec{E}_{ap_off} \quad (8.5)$$

Como consecuencia del cambio del el campo en la apertura del reflector por desplazamiento del alimentador la dirección del máximo de radiación del reflector cambia, deja de producirse para $(\theta= 0, \phi=0)$. Para obtener el diagrama normalizado es preciso conocer los nuevos valores (θ_{mx}, ϕ_{mx}) para los que la radiación del reflector es máxima. Las siguientes fórmulas dan valores aproximados de ϕ_{mx} y θ_{mx} , a partir de los cuales se puede realizar una búsqueda más precisa de dichos valores:

$$\begin{aligned} \phi_{mx} &= 2\pi - \phi_d \\ \theta_{mx} &= \left[1 - \left(\frac{2 - \frac{F_e}{D}}{2,45} \right)^4 \right] \text{arc tg} \frac{\Delta_t}{F_e} \end{aligned} \quad (8.6)$$

Donde:

D: diámetro del reflector

Fe: distancia focal del reflector equivalente

resto magnitudes: definidas anteriormente en este mismo apartado.

En particular, si sólo se produce **desplazamiento axial** $\Delta t=0$ y (8.2) y (8.6) se convierten en:

$$\begin{aligned} K_{df} &= e^{jk\Delta_z \cos\theta} = e^{jkR_{df}} \\ \phi_{mx} &= 2\pi = 0 \\ \theta_{mx} &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, la dirección del máximo de radiación del reflector no se altera, se produce para $(\theta= 0)$ (\Rightarrow eje Zap), pero la distribución de campo varía debido al término de fase lo que se traduce en un cambio del diagrama de radiación caracterizado el relleno de los nulos de radiación y como consecuencia por una disminución de la ganancia del reflector.

En particular, si sólo se produce **desplazamiento transversal** $\Delta z=0$, (8.6) no cambia y (8.2) se convierten en:

$$K_{df} = e^{jk\Delta_t \text{sen}\theta \cos(\phi - \phi_d)} = e^{jkR_{df}}$$

Es decir, la dirección del máximo de radiación se altera, y el diagrama cambia incrementándose asimétricamente el nivel de los lóbulos secundarios hasta juntarse uno de ellos con el lóbulo principal, lo cual también implica una disminución de la ganancia del reflector.

9. DESAPUNTAMIENTO DEL ALIMENTADOR

El desapuntamiento se produce cuando el eje del alimentador se desvía respecto al eje z, pivotando sobre el foco (centro de fase), hasta formar un ángulo θ_{desapunt} , respecto al eje z. El desapuntamiento del eje se

puede dar en un plano ϕ arbitrario. En la figura 9.1 se muestra el plano ϕ en que se produce desapuntamiento.

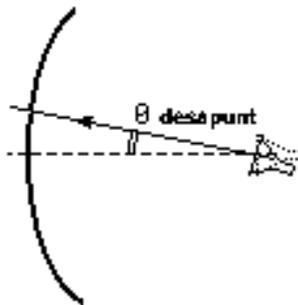


Fig. 9.1

Ahora el máximo de radiación del alimentador no incide en el centro de la apertura. De cara al análisis del reflector, hay que considerar el campo radiado por la bocina **cambiando en la expresión del campo** radiado por el alimentador la coordenada polar θ por $(\theta - \theta_{\text{desajustado}})$, es decir:

$$E_{\text{boci}}(\theta, \phi) \rightarrow E_{\text{boci}}(\theta - \theta_{\text{desajustado}}, \phi)$$

Para $\theta = \theta_{\text{desajustado}}$ debemos ahora tener el máximo de radiación del alimentador. Efectivamente, resultaría $E(\theta - \theta_{\text{desajustado}}, \phi) = E(0, \phi)$, es decir el campo en eje de la bocina, el máximo, efectivamente.

Capitulo 3.Método de integración numérica de Gauss-Legendre

1. INTRODUCCIÓN

Como se dijo en la introducción, vamos a utilizar el método de integración de Gauss-Legendre, este método de cuadratura se basa en muestrear el integrando de la función cuya integral se desea encontrar valores que representan raíces de polinomios ortogonales.

2. INTEGRACIÓN SIMPLE

2.1. Cuadratura de Gauss-Legendre de dos puntos

El objetivo de la cuadratura de Gauss - Legendre es determinar las abscisas x_1 y x_2 y dos coeficientes w_1 y w_2 de manera que la fórmula:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \approx w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) \quad (2.1.1)$$

Sea exacta para polinomios cúbicos de la forma $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Como hay que determinar cuatro números w_1 , w_2 , x_1 y x_2 en la expresión anterior, se deben seleccionar cuatro condiciones que deben cumplirse. Usando el hecho de que la integración es aditiva, será suficiente con exigir que la integral anterior sea exacta para las cuatro funciones $f(x) = 1, x, x^2, x^3$. Por lo tanto, las cuatro condiciones de integración son:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 : \quad & \int_{-1}^1 1 \cdot dx = 2 = w_1 + w_2 \\ f(x) = x : \quad & \int_{-1}^1 x \cdot dx = 0 = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 \\ f(x) = x^2 : \quad & \int_{-1}^1 x^2 \cdot dx = \frac{2}{3} = w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 \\ f(x) = x^3 : \quad & \int_{-1}^1 x^3 \cdot dx = 0 = w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

De esta manera, el sistema de ecuaciones no lineales que se debe resolver es:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 2 \\ w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 = 0 \\ w_1 \cdot x_1^2 + w_2 \cdot x_2^2 = 2/3 \\ w_1 \cdot x_1^3 + w_2 \cdot x_2^3 = 0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

La solución del sistema anterior está dada por:

$$w_1 = w_2 = 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Así, se ha encontrado los nodos y los coeficientes o pesos con los que se construye la cuadratura de Gauss - Legendre. En consecuencia, si f es continua en $[-1;1]$, resulta:

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx \approx G_2(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La cuadratura de Gauss - Legendre con dos nodos $G_2(f)$ tiene grado de precisión $n=3$ y si $f \in C^4[-1;1]$, entonces,

$$\int_{-1}^1 f(x) \cdot dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + E_2(f)$$

Siendo

$$E_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} \cdot f^{(2n)}(\xi), \quad \text{con } -1 < \xi < 1 \quad (2.1.3)$$

$$E_2(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{135}$$

para algún punto $\xi \in [-1;1]$.

2.2 Cuadratura de Gauss-Legendre con más puntos

Además de la fórmula de dos puntos descrita en la sección anterior, es posible desarrollar versiones con más puntos en la forma general:

$$I \approx w_1 \cdot f(x_1) + w_2 \cdot f(x_2) + \dots + w_n \cdot f(x_n) \quad (2.2.1)$$

donde n es la cantidad de nodos que se toma.

Los nodos $x_{n,k}$ y los pesos $w_{n,k}$ que hay que usar, en cada caso, se encuentran tabulados. En la siguiente tabla, se muestran los valores correspondientes para las cuadraturas de Gauss - Legendre con hasta cinco nodos, así como la forma de los términos de error $E_n(f)$ correspondientes a las aproximaciones:

$$G_n(f) = w_{n,1} \cdot f(x_{n,1}) + w_{n,2} \cdot f(x_{n,2}) + \dots + w_{n,n} \cdot f(x_{n,n}) \quad (2.2.2)$$

n	Nodos $x_{n,k}$	Pesos $w_{n,k}$	Error $E_n(f)$
2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx -0,5773503$	1	$\frac{f^{(4)}(\xi)}{135}$
3	$\pm \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,7745967$ 0	$\frac{5}{9} \approx 0,5555556$ $\frac{8}{9} \approx 8888889$	$\frac{f^{(6)}(\xi)}{15750}$
4	$\pm 0,8611363$ $\pm 0,3399810$	0,3478548 0,6521452	$\frac{f^{(8)}(\xi)}{3472875}$
5	$\pm 0,9061798$ $\pm 0,5384693$ 0	0,2369269 0,4786287 0,5688889	$\frac{f^{(10)}(\xi)}{1237732650}$

Los nodos que se usan para construir una cuadratura de n puntos son las raíces del **polinomio de Legendre de grado n y los pesos**, como ya se explicó anteriormente, se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones no lineales.

Como se puede observar en la tabla, el término de error de una cuadratura de tres puntos es proporcional a la derivada de orden seis de la función $f(x)$. Esto implica que ese tipo de cuadratura será exacta si el integrando es un polinomio de grado cinco o menor. De mismo modo, una cuadratura de cuatro puntos será exacta si la función a integrar es un polinomio de grado siete o menor. Esto se debe a que su término de error involucra una derivada de orden ocho de la función $f(x)$.

En general, una cuadratura de Gauss - Legendre de n puntos será exacta para funciones polinomiales de grado menor o igual que $2n - 1$.

2.3. Traslación de la cuadratura de Gauss-Legendre

Para aplicar la cuadratura de Gauss - Legendre en un intervalo $[a;b]$, se debe efectuar el cambio de variable:

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2} \qquad dx = \frac{b-a}{2} \cdot dt$$

De esta manera,

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{2} dt$$

Por lo tanto, la fórmula de cuadratura está dada por:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{k=1}^n w_{n,k} \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x_{n,k} + \frac{a+b}{2}\right)$$

3. INTEGRALES DOBLES

Sea $S(x,y)$ un recinto en el plano (x,y) , definido mediante la siguiente variación de las variables (x,y) :

$$\begin{aligned} x_a < x < x_b \\ y_a(x) < y < y_b(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sea $f(x,y)$ una función real de 2 variables integrable en dicho recinto. La denominaremos I_T , siguiendo la notación de Leibnitz :

$$I_T = \iint_S f(x,y) dy dx = \int_{x=x_a}^{x_b} \int_{y=y_a(x)}^{y_b(x)} f(x,y) dy dx \tag{3.2}$$

Realizamos primero la integración respecto a y , entonces x queda como una constante.

$$I(x) = \int_{y=y_a(x)}^{y_b(x)} f(x,y) dy \tag{3.3}$$

Para aplicar el método numérico de integración de Gauss-Legendre debemos hacer variar la variable de integración, en este caso y , entre -1 y 1. Para ello, se ha de efectuar un cambio de variable lineal, es decir, de la forma $y=ct+d$, donde el coeficiente c es la semidiferencia de los límites de integración superior e inferior y el término d es la semisuma de dichos límites (que en este caso serán funciones de x), es decir:

$$\begin{aligned} y &= c(x) \cdot t + d(x) = \\ &= \frac{y_b(x) - y_a(x)}{2} \cdot t + \frac{y_b(x) + y_a(x)}{2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Quedando:

$$I(x) = c(x) \int_{t=-1}^1 f[x, c(x)t + d(x)] dt \tag{3.5}$$

Resolviendo numéricamente la integral, según (3.4) (cambiamos índice i por j porque luego se utilizará el i), se tiene que :

$$I(x) = c(x) \int_{t=-1}^1 f[x, c(x)t + d(x)] dt = c(x) \sum_{j=1}^n w_j \cdot f[x, c(x)t_j + d(x)] + E_{ny} \quad (3.6)$$

Realizamos ahora la segunda integración de la integral doble, ahora respecto a x , sobre el resultado de la primera integración, que hemos denominado **I(x)**

$$I_T = \int_{x=x_a}^{x_b} I(x) dx \quad (3.7)$$

Procedemos ahora de forma análoga a como se hizo en la primera integración:

Primeramente efectuamos el cambio de variable necesario para que los límites de integración sean -1 y 1. Recordemos que para ello se ha de efectuar un cambio de variable lineal de la forma $x=pt+q$, donde el coeficiente **p** es la semidiferencia de los límites de integración superior e inferior y el término **q** es la semisuma de dichos límites, es decir:

$$\begin{aligned} x &= p \cdot t + q = \\ &= \frac{x_b - x_a}{2} \cdot t + \frac{x_b + x_a}{2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Quedando:

$$I_T = p \int_{t=-1}^1 I(pt + q) dt \quad (3.9)$$

Aproximando la integral con la fórmula de Gauss, tenemos que:

$$I_T = p \int_{t=-1}^1 I(pt + q) dt = p \sum_{i=1}^n w_i I(pt_i + q) + E_{nx} \quad (3.10)$$

Antes de sustituir el valor de $I(x)$ dado por (5.6), para simplificar la notación, denominaremos al argumento de **I** **abscisa de gauss i** y la escribiremos como xg_i , es decir, haremos:

$$xg_i = pt_i + q \quad (3.11)$$

Con lo cual, sustituyendo el valor de $I(x)$ dado por (3.6) en (3.10), se tiene:

$$\begin{aligned}
 I_T &= p \int_{t=-1}^1 I(pt + q) dt = p \sum_{i=1}^n w_i I(pt_i + q) + E_{nx} & (3.12) \\
 &= p \sum_{i=1}^n w_i I(xg_i) + E_{nx} = p \sum_{i=1}^n w_i \left\{ c(xg_i) \sum_{j=1}^n w_j \cdot f \left[xg_i, c(xg_i)t_j + d(xg_i) \right] + E_{ny} \right\} + E_{nx}
 \end{aligned}$$

Para simplificar más la notación, seguiremos la siguiente nomenclatura:

$$\begin{aligned}
 c_i &= c(xg_i) \\
 d_i &= d(xg_i) \\
 yg_{ij} &= c(xg_i)t_j + d(xg_i) = c_i t_j + d_i
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

A yg_{ij} la llamaremos **ordenada de Gauss (i,j)-ésima**. Con este convenio en la notación (5.12) queda:

$$I_T = p \sum_{i=1}^n w_i c_i \sum_{j=1}^n w_j f(xg_i, yg_{ij}) + E_{ny} + E_{nx} \tag{3.14}$$

En resumen, para aplicar (5.14), para un orden dado n , se han de seguir los siguientes pasos:

1) Hay que conocer las **raíces del polinomio de Legendre de grado n** y los **correspondientes pesos** de la fórmula de Gauss. Se puede utilizar la ley de recurrencia para obtener los polinomios de Legendre y la fórmula de Newton para las raíces, para calcular los pesos; no obstante, estos valores están tabulados y se suele partir de ellos como datos conocidos:

$$\begin{aligned}
 t_1, t_2, t_3, \dots, t_n &\rightarrow t_i, t_j \\
 w_1, w_2, w_3, \dots, w_n &\rightarrow w_i, w_j
 \end{aligned}$$

2) A partir de los límites de integración en x_a y x_b se obtiene la semisuma y la semidiferencia, es decir, los **parámetros p y q** :

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{x_b - x_a}{2} \\
 q &= \frac{x_b + x_a}{2}
 \end{aligned}$$

3) A partir de los t_i , p y q se obtienen las **abscisas de Gauss xg_i** , con la expresión (5.11) que repetimos a continuación:

$$xg_i = pt_i + q$$

4) A partir de las definiciones de $c(x)$ y $d(x)$ dadas en (5.4) se obtienen las **ordenadas de Gauss yg_{ij}** , siguiendo los pasos marcados por (5.13), es decir:

$$c_i = c(xg_i) = \frac{y_b(xg_i) - y_a(xg_i)}{2}$$
$$d_i = d(xg_i) = \frac{y_b(xg_i) + y_a(xg_i)}{2}$$
$$yg_{ij} = c_i t_j + d_i$$

5) Se sustituyen valores de p, ci y coordenadas de los puntos de Gauss en (3.14)

4.OBTENCIÓN DE PUNTOS Y PESOS PARA APERTURA CIRCULAR.

Las siguientes funciones muestran como se consiguieron los puntos en la apertura circular, necesarios para determinar el campo en la apertura del reflector.

```
function [x,w]=lgwt(reflectoresideales,a,b)

%Calcula los N nodos y pesos de Gauss-Legendre en el intervalo [a,b]
%para el cálculo de integrales definidas.
% Si se quiere calcular la integral de f(x) es ese intervalo
% calcular el valor de f(x) en todos los puntos del vector x.
% La integral es sum(f.*w);

function [xapgit yap wt] = PyP_IntDobleC(reflectoresideales,ds,D)
%Apartir de los puntos (nodos) y pesos de una apertura circular que se
% consigue haciendo una llamada a lgwt(reflectoresideales,a,b), calcula
% los puntos de la apertura circular.
%Datos de entrada
%D:diametro del reflector
%ds:diametro del subreflector .Se pasa este dato cuando existe bloqueo
sino
%es igual a 0
%Datos de salida
%xapgit:abscisas de Gauss.
%yap : ordenadas de Gauss.
%wt : pesos en la apertura.
```

Capitulo4.EntornoMatlab:
Guide y Programación Orientada a Objetos

1.INTODUCCIÓN

Debido a que el proyecto está desarrollado con Matlab , que es una herramienta de software matemático ,vamos a explicar las diferentes herramientas utilizadas para dicho desarrollo, como son: la creación de interfaces de usuario (GUI) y la programación orientada a objetos(OOP).

2. GUIDE

GUIDE es un entorno de programación visual disponible en MATLAB para realizar y ejecutar programas que necesiten ingreso continuo de datos.

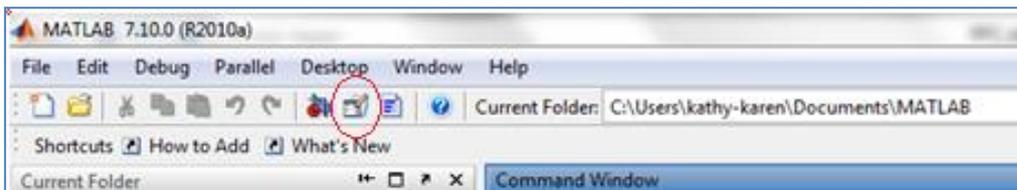
2.1 Inicio

Para iniciar nuestro proyecto, lo podemos hacer de dos maneras:

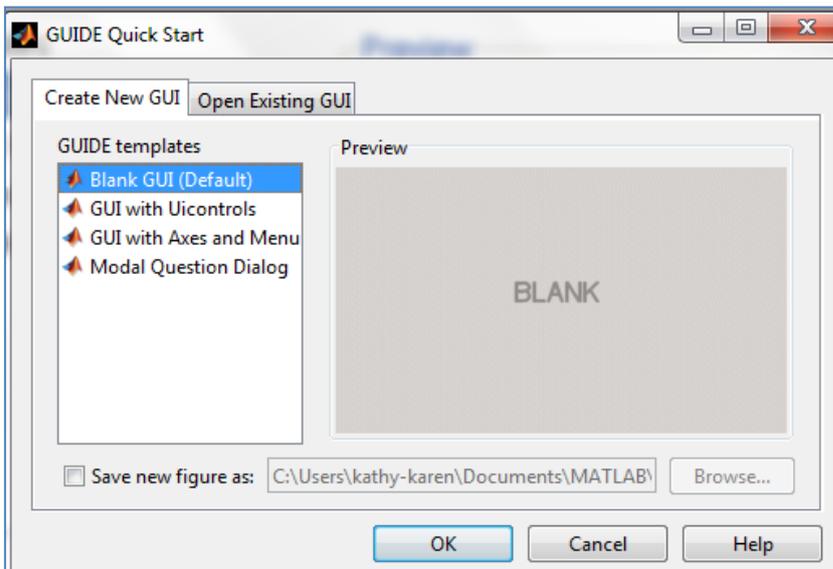
a) Ejecutando la siguiente instrucción en la ventana de comandos:

```
>> guide
```

b) Haciendo un click en el ícono que muestra la figura:



Se presenta el siguiente cuadro de diálogo:



Se presentan las siguientes opciones:

a) Blank GUI (Default)

La opción de interfaz gráfica de usuario en blanco (viene predeterminada), nos presenta un formulario nuevo, en el cual podemos diseñar nuestro programa.

b) GUI with Uicontrols

Esta opción presenta un ejemplo en el cual se calcula la masa, dada la densidad y el volumen, en alguno de los dos sistemas de unidades. Podemos ejecutar este ejemplo y obtener resultados.

c) GUI with Axes and Menu

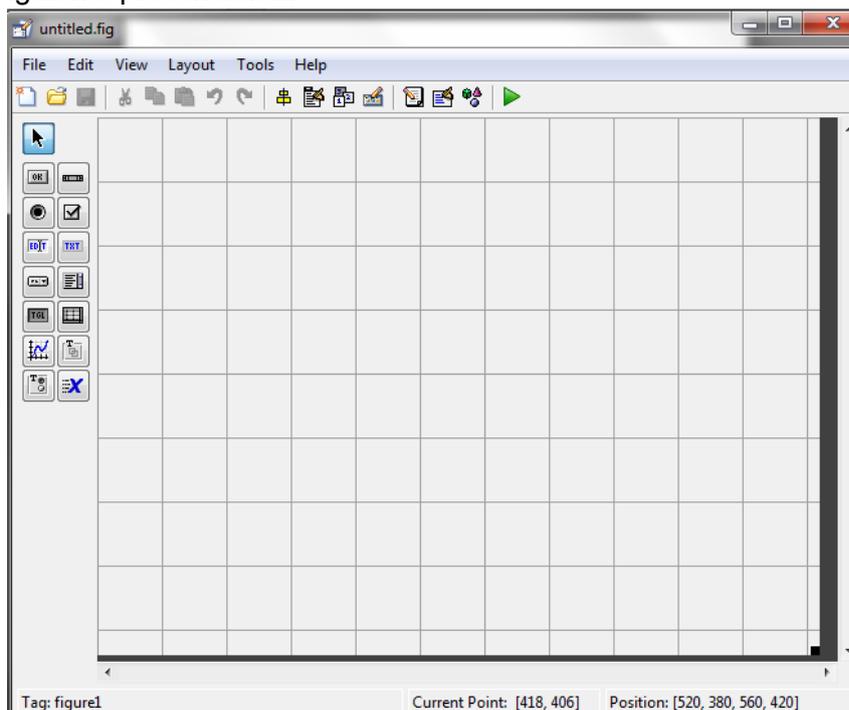
Esta opción es otro ejemplo el cual contiene el menú File con las opciones Open, Print y Close. En el formulario tiene un *Popup menu*, un *push button* y un objeto *Axes*, podemos ejecutar el programa eligiendo alguna de las seis opciones que se encuentran en el menú despegable y haciendo click en el botón de comando.

d) Modal Question Dialog

Con esta opción se muestra en la pantalla un cuadro de diálogo común, el cual consta de una pequeña imagen, una etiqueta y dos botones *Yes* y *No*, dependiendo del botón que se presione, el GUI retorna el texto seleccionado (la cadena de caracteres 'Yes' o 'No').

Para obtener la etiqueta de cada elemento de la paleta de componentes ejecutamos: *File>>Preferentes* y seleccionamos *Show names in component palette*.

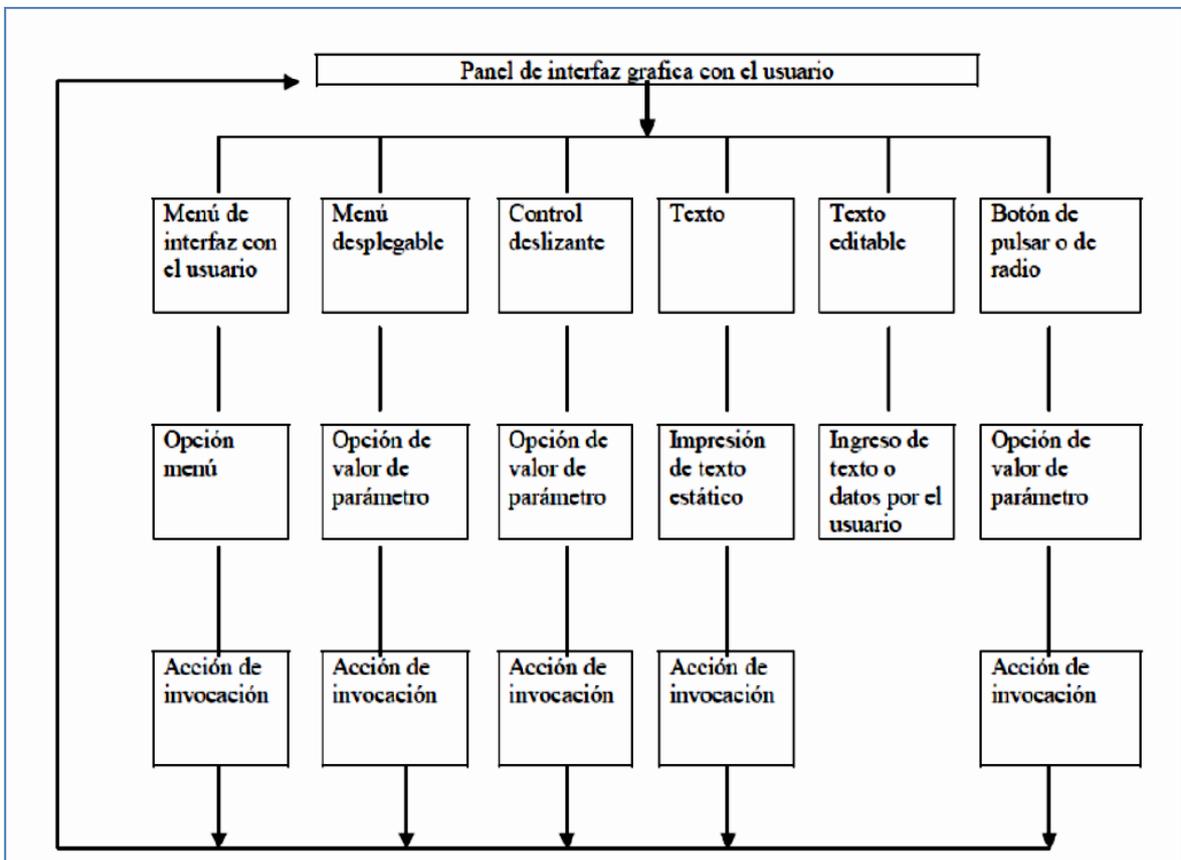
Tenemos la siguiente presentación:



2.2 Características de los diferentes botones que aparecen en GUI

CONTROL	DESCRIPCIÓN
Push Button	Genera una acción
Slider	Representa un rango de valores
Radio Button	Representa una opción
Check Box	Indica el estado de una opción
Edit Text	Para editar texto
Static text	Muestra un string de texto
Pop-up Menu	Provee una lista de opciones
Listbox	Lista deslizable
Toggle Button	Genera una acción on, off
Axes	Para graficar
Panel	Visualiza grupo de controles
Button Grup	Es un panel exclusivo para radio buttons y toggle buttons
ActiveX Control	Despliega controles ActiveX en Gui

2.3 Flujo de operaciones de GUI



2.4. Funcionamiento de una aplicación GUI

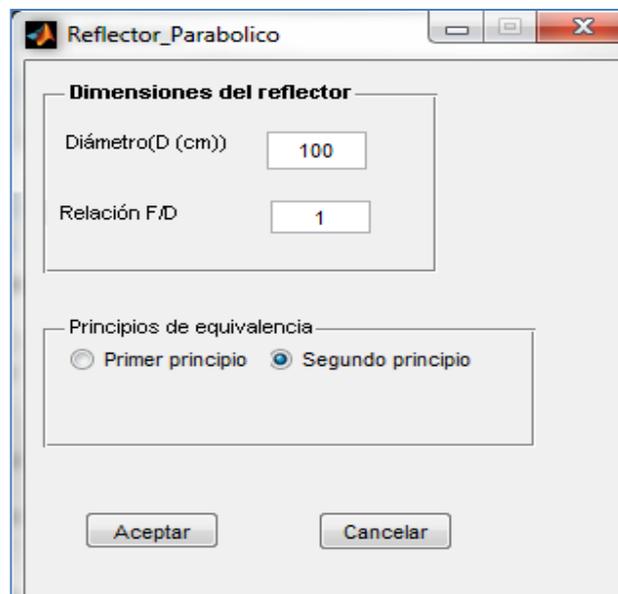
Una aplicación GUIDE tiene dos archivos: *.m* y *.fig*. El archivo *.m* es el que contiene el código con las correspondencias de los botones de control de la interfaz y el archivo *.fig* contiene los elementos gráficos.

Cada vez que se añada un nuevo elemento en la interfaz gráfica, se genera automáticamente código en el archivo *.m*. Para ejecutar una Interfaz Gráfica, si la hemos etiquetado con el nombre *SABOR.fig*, simplemente ejecutamos en la ventana de comandos `>> SABOR`. O haciendo click derecho en el m-file y seleccionando la opción *RUN*.

SENTENCIAS GET Y SET

La asignación u obtención de valores de los componentes se realiza mediante las sentencias *get* y *set*. Por ejemplo:

Con este ejemplo vamos a leer datos de entrada para ello se utiliza GET



Lo que GUI genera es un archivo *.m*, en el cual se puede configurar los diferentes botones:

```
function aceptar_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to aceptar (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

Da=str2double(get(handles.datoD,'String'));%leemos el diametro
relacion=str2double(get(handles.datofd,'String'));%leemos relación

%COMPROBAMOS QUE LOS DATOS DE ENTRDA SON VALORES NUMERICOS VALIDOS
SINO
% HAY QUE ENSEÑAR UN MENSAJE (LOS DATOS NO SON VALIDOS)

if isnan(Da)||isnan(relacion);
    errordlg('Valor incorrecto','ERROR DATOS DE ENTRADA')
    return
end
```

end

3.PROGRAMACIÓN ORENTADA A OBJETOS

MATLAB dispone de herramientas necesarias para realizar una Programación Orientada a Objetos (POO) con muchas de las características disponibles en otros lenguajes como C++ y Java. Las variables miembro de una clase son los miembros de una **estructura**. Las funciones miembro de la clase se definen en un directorio con el mismo nombre de la clase precedido por el carácter @. Dichas funciones pueden ser públicas y privadas. A diferencia de C++ y Java, las funciones miembro deben recibir el objeto al que se aplican como uno de los argumentos explícitos, y no mediante el operador punto (.). Existen también los conceptos de herencia y polimorfismo.

3.1 Definición de clase y Objeto

Una clase es un nuevo tipo de dato, a una estructura, para el que se pueden definir funciones específicas y redefinir los operadores.

Un objeto es un caso particular de una clase.

Los campos de la estructura asociada a una clase se llamarán propiedades de la clase, y las funciones asociadas a una clase funciones método.

3.2 Características de la programación a objeto:

- Redefinición de operadores específicos para la clase.
- Datos encapsulados: Las propiedades de un objeto no son visibles y sólo se puede acceder a ellas desde las funciones método de la clase.
- Herencia: Una clase se puede crear a partir de otra, heredando todas sus funciones método
- Agregación: Un objeto puede contener otros objetos.
- Toda la información de una clase, está en el directorio asociado @.
- Las propiedades de clase usada quedan en memoria. Se deben limpiar para poder modificarlas, **clear**

3.3 Herencia

- Muchas veces se desea crear una nueva clase con las mismas propiedades y funciones métodos que otra ya existente a la que se añaden nuevas propiedades y funciones método.
- Esto se puede conseguir añadiendo un objeto de la clase existente *ClasePadre* en la definición de la nueva clase.
- Los objetos de la nueva clase serán *ObjetoHijo*, y los de la clase existente *ObjetoPadre*.
- Un *ObjetoHijo* puede acceder a todos las funciones método de la *ClasePadre* que no estén definidos en su clase.
- La forma de definir un objeto hijo es la siguiente:

ObjetoHijo= class(ObjetoHijo , ' ClaseHi jo ' , ObjetoPadre) ;

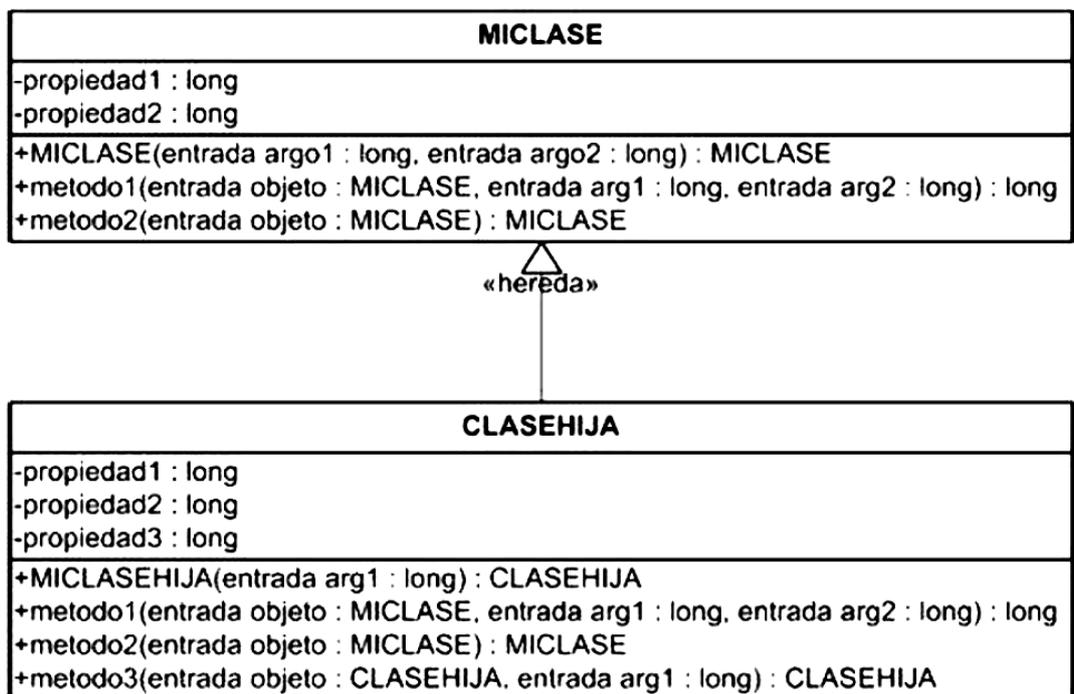
- Con esta definición Matlab crea un componente *ObjetoHijo*. *ClasePadre* donde se guardará la información de la parte del *ObjetoHijo* con las mismas propiedades que el *ObjetoPadre*.

- Un objeto hijo puede recibir herencia de varios objetos padres, *ObjetoHijo=class (ObjetoHijo,' ClaseHijo ',ObjetoPadre1,ObjetoPadre2)* ;

Una función método que no posea la *ClaseHijo* será buscada en las funciones de la clase *ClasePadre1* y de no ser encontrada entre las de la clase *ClasePadre2*.

3.4 Clases agregadas

- Una clase puede tener de componentes objetos de otras clases ya definidas.
- Con ello, no se heredan directamente sus funciones método, pero estas funciones podrían ser usadas en la definición de las nuevas funciones método.



Ejemplo:

- **Objetivos:** Se pretende realizar una clase para trabajar con polinomios. Para ello se definen las siguientes funciones método:
 - Método constructor **polynom**: Se crea un objeto a partir de los coeficientes del polinomio.
 - Método **double**: El polinomio se podría convertir a un vector.
 - Método **display**: El objeto se verá en la pantalla en forma de cadena de caracteres.
 - Sobrecarga de operadores: Los operadores suma (+), resta (-) y multiplicación (*) son redefinidos para polinomios.
- Método constructor,

```
function p = polynom( a )
% polynom Constructor de la clase polynom .
```

```
% p = polynom( v ) crea un polinomio de un vector .
% Los coeficientes están en orden decreciente
% de las potencias de x .
if nargin == 0
p.c=[] ;
p=class(p,' polynom ');
elseif isa(a,' polynom ')
p=a ;
else
p.c=a( : ) . ' ;
p=class( p , ' polynom ' ) ;
end
```

- Método display:

```
function display( p )
% polynomn display . Comando ventana para ver el objeto .
disp(int2str( p . c ) ) ;
```

- Método double:

```
function c = double( p )
% polynomn doubl e . Convierte polynom a un vector double .
% c = double ( p ) . Convierte un polinomio en vector .
c = p.c;
```

- Operador +:

```
function r=plus(p,q)
% polynomn p l u s . Define p + q para polinomios .
p = polynom( p ) ;
q = polynom( q ) ;
k = length(q.c)- length(p.c) ;
r = polynom([zeros(1,k)p.c] + [zeros(1 , -k )q.c]) ;
```

- Operador -:

```
function r = minus( p , q )
% polynomnminus . Implementa p ? q e n t r e p o l i n o m i o s .
p = polynom(p);
q = polynom(q) ;
k = length(q.c)-length(p.c) ;
r = polynom ([zeros(1,k)p.c]-[zeros(1,-k)q.c]) ;
```

- Operador *:

```
function r=mtimes(p,q)
% polynomnmtimes . Implementa p*q entre polinomios .
p = polynom( p ) ;
q = polynom( q ) ;
r = polynom( conv ( p . c , q . c ) ) ;
```

- Ejemplo de su uso en workspace:

```
>> p= polynom      % Crea un objeto vacio
```

```

>> p= polynom( p ) % De vuelve el objeto que se manda
>> p= polynom ( [ 1 , 2 , 3 ] ) % Crea un objeto p lleno
>> q= p+p
>> t= q-p
>> a= doubl e ( p )

```

Ejemplo de herencia

- Un ejemplo muy sencillo de una clase derivada es el de una clase de funciones , cuyas propiedades son:

Nombre de la función.
Polinomio característico.

- Está claro que esta clase *función* puede ser propuesta como derivada de la clase polinomio *polynom*, añadiendo a la misma una propiedad donde se escriba el nombre de la función.
- Todas las funciones método de la clase *polynom* pueden ser usadas en la *clase función* excepto el *método constructor*, el *método display* y el *subsref*, que van a ser redefinidos.
- Cuando los objetos *funcion* use funciones método de la clase *polynom*, se está trabajando con la parte del objeto *función* heredada, y el resultado de la operación podría ser un objeto *polynom* o de otra clase ya definida, pero nunca de la clase *función*
- Función método constructor de **funcion**. Código.

```

function p=funcion(varargin)
%FUNCION Construtor de la clase funcion .
switch nargin
case 0
    poly = polynom ;
    p.nombre = '' ;
    p = class(p,'funcion',poly) ;
case 1
    if isa (varargin f1g , 'funcion')
        p = varargin f1g;
    else
        error ('Tipo de argumento erroneo') ;
    end
case 2
    if is char(varargin f1g) ,
        p . nombre= varargin f1g;
    else
        error ('Arg : nombre , polinomio ') ;
    end
    poly = polynom(varargin f2g) ;
    p = class(p, 'funcion' ,poly) ;
otherwise
    error('Numero de argumentos erroneo') ;
end

```

- Función método **display**.

```
function display ( p )
```

```
%POLYNOM/DISPLAY Comando ventana para ver el objeto .
disp( '' );
disp( [ 'Funcion ' , p.nombre , ' = ' ] )
disp( '' );
disp( [ '' char(p)] );
```

- Ejemplos en el workspace:

```
>> p= funcion% Objeto funcion nulo
>> p1= funcion( 'zeta' , [ 1 , 2 , 3 ] ) % Objeto funcion con nombre y parámetros .
>> p2= funcion('eta' , [2,3,4])
>> p3= p1+p2 % Se usa un método del padre . El resultado en un objeto polynom
```

- Función método subsref: Muestra por campos el nombre y polinomio de la funcion, y por índice el valor de la función en un punto.

```
function b = subsref( a , s )
    %SUBSREF Muestra , por campos el contenido del
    % objeto , por índices el valor en un cierto punto .
    switchs.type ,
    case ' . ' ,
        switchs.subs
        case ' nombre ' ,
            b= a.nombre ;
        case ' poly ' ,
            b= char(a.polynom) ;
        otherwise
            error( 'Campos : nombre , poly. ' ) ;
    end
    case' ( ) ' ,
        ind= s.subs f : g ;
        b= a.polynom( ind ) ;
    otherwise
        error ( 'Campo o indice erroneo. ' ) ;
end
```

Capitulo5. Simulador SABOR

1. ESTRUCTURA DEL PROYECTO

El proyecto consta de las siguientes clases que vienen precedidas de @, como se ve la carpeta, GUI no la lleva porque dicha carpeta lleva las interfaces gráficas de la aplicación.

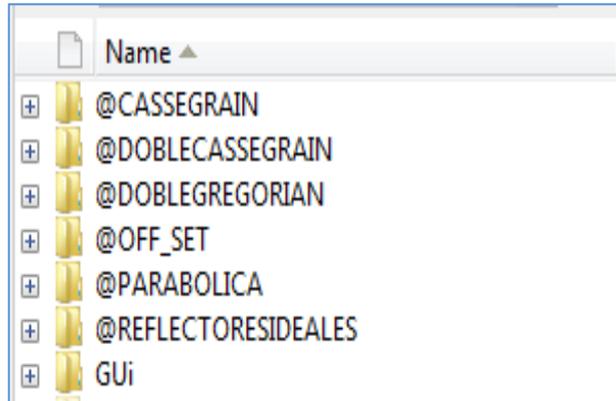


Fig.5.1 Estructura

Dentro de GUI tenemos:

Una serie de archivos que hace que el programa genere la interfaz gráfica que se verá más adelante. En la siguiente figura se puede ver qué tipo de archivos contiene GUI.

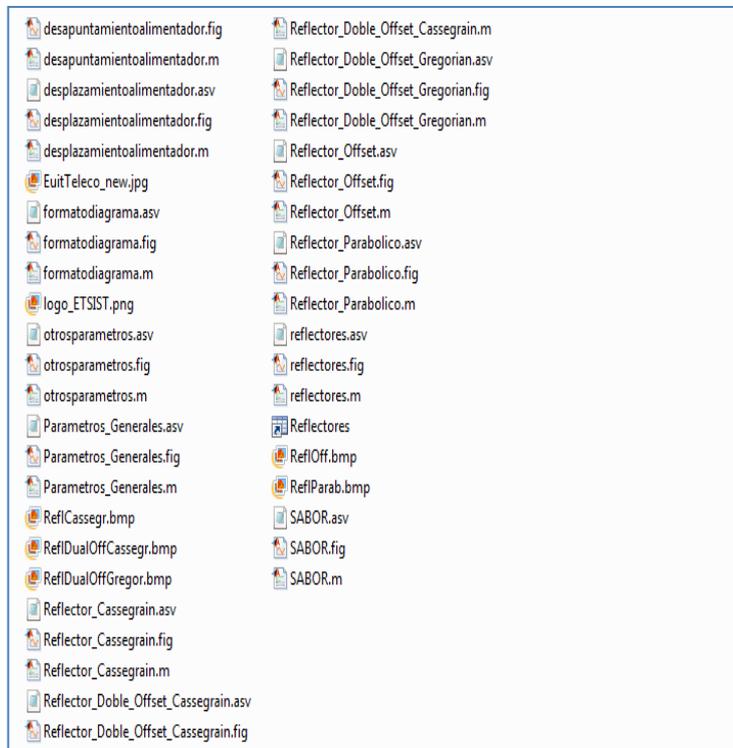
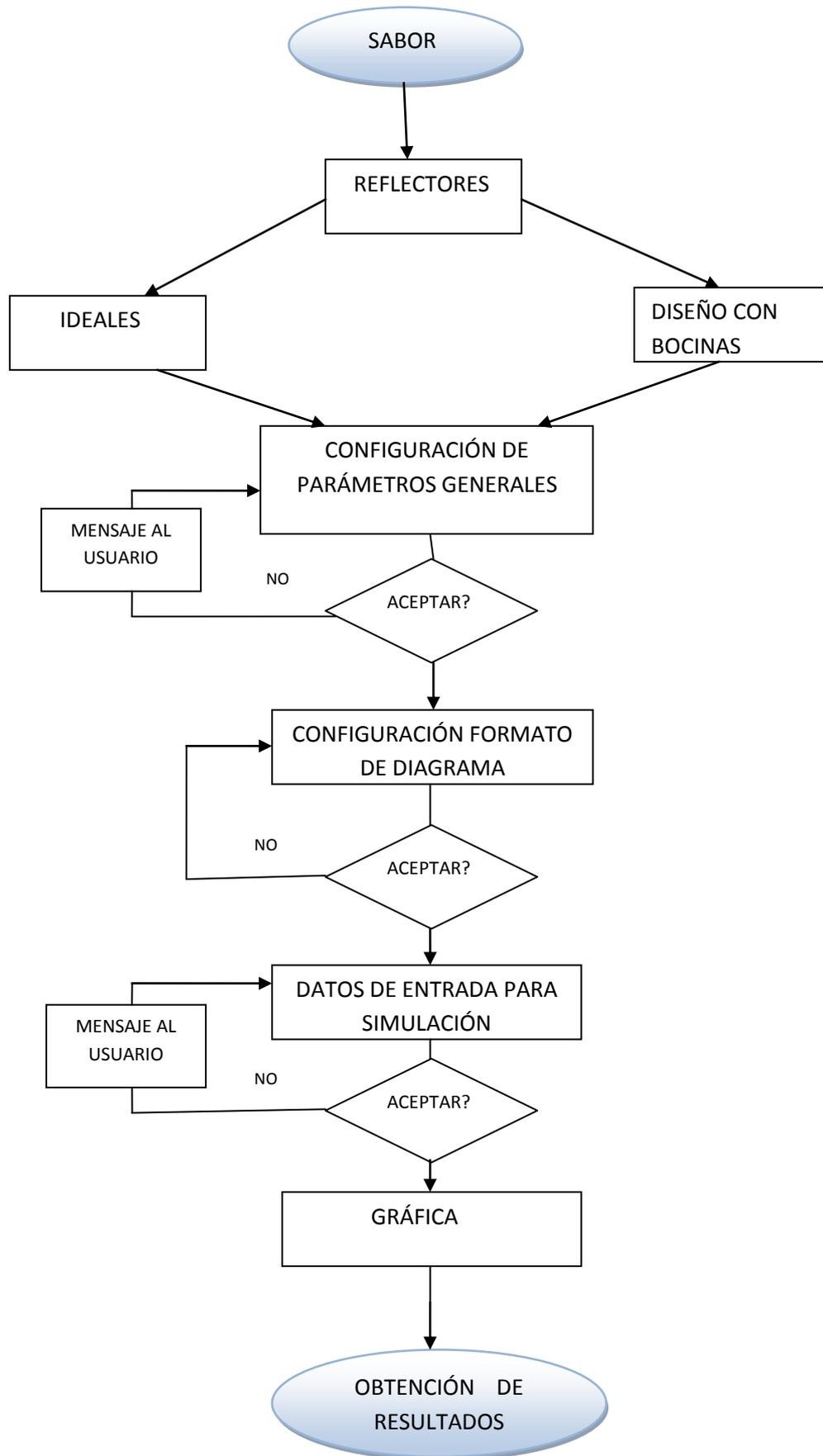


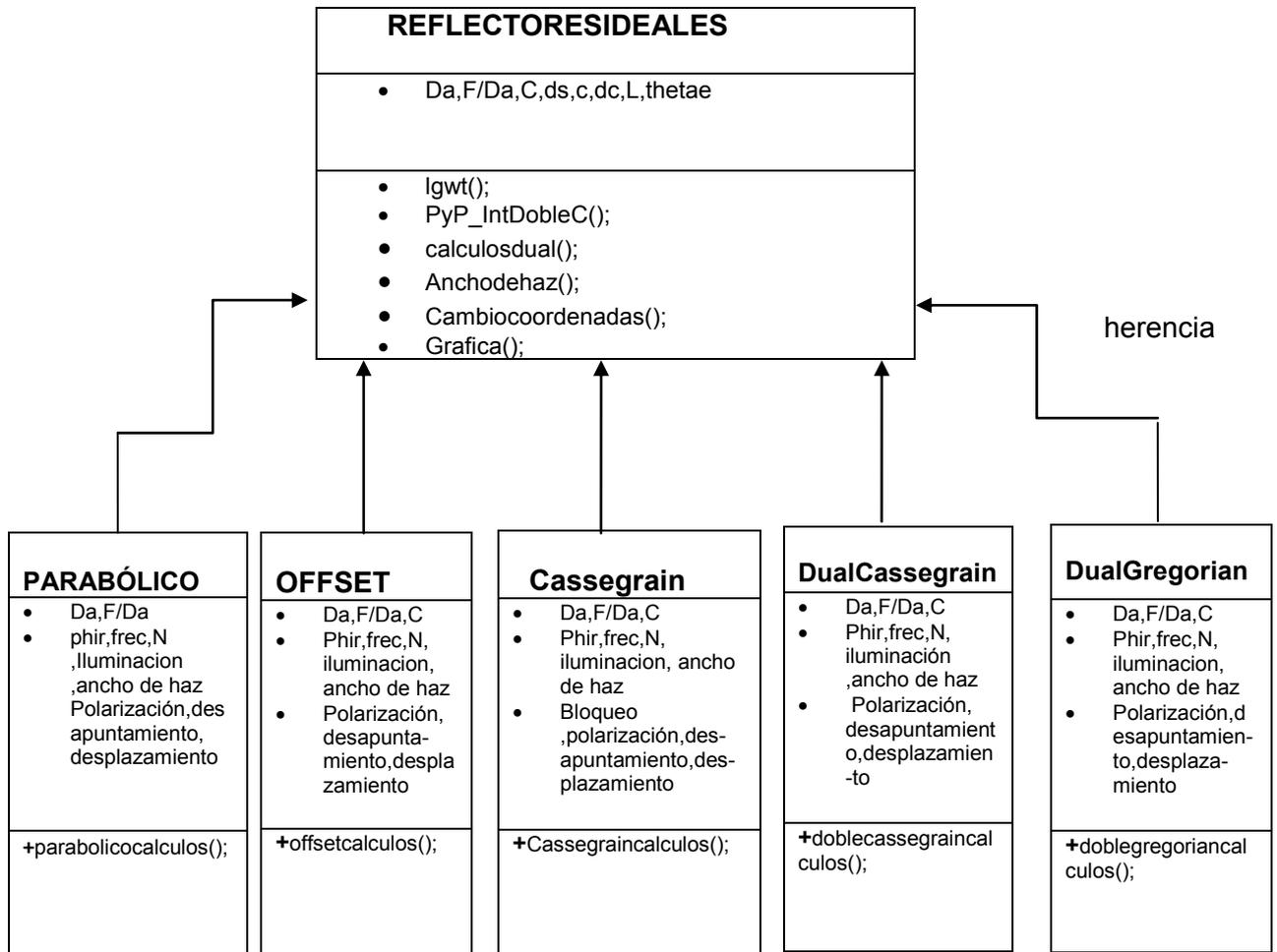
Fig.5.2 Contenido GUI

1.2 Diagrama de flujo general de la interfaz gráfica



2. DIAGRAMA DE CLASES UML DE LA APLICACIÓN

A continuación, pasamos a describir la funcionalidad de cada una de las clases que han sido desarrolladas así como sus propiedades y métodos.



2.1. Clase Reflectoresideales

- **CONSTRUCTOR**

`function r=REFLECTORESIDEALES(varargin)`

%CONSTRUCTOR DE REFLECTORES IDEALES

- **varargin**: dependiendo del número de entradas se crea el CONSTRUCTOR de un tipo de reflector: PARABÓLICO; OFFSET; CASSEGRAIN; DUAL CASSEGRAIN; DUALGREGORIAN
- **r**: objeto de REFLECTORESIDEALES
- **ra=varargin{1}**: propiedad de r ; diámetro de la parábola
- **r.relacion=varargin{2}**: propiedad de r ; F/D
- **r.C=varargin{3}**: clearance

- **r.ds=varargin{2}**: diámetro del subreflector, se utiliza en CASSEGRAIN; DUAL CASSEGRAIN; DUALGREGORIAN
- **r.dif=varargin{4}**: distancia interfocal 'c', se utiliza en CASSEGRAIN
- **r.l=varargin{4}**: propiedad de r ; longitud, se utiliza en DUAL CASSEGRAIN; DUALGREGORIAN
- **r.thetae=varargin{5}**: semiángulo subreflector, se utiliza en DUAL CASSEGRAIN; DUAL GREGORIAN

- **MÉTODOS**

```
function [xapgit yap wt] =PyP_IntDobleC(reflectoresideales,ds,D)
```

%función descrita en el capítulo 3

```
function
```

```
[q,theta0,directividad,Pf,Ns]=calculosdual(reflectoresideales,ilu,f,theta0)
```

```
%DESCRIPCION:
```

```
%funcion que dará el orden(q)necesario para asegurar el decaimiento en los bordes.Cálculo realizado con el alimentador con un diagrama de radiación :(Df).  $D=\cos(\theta)^q$   $0 \leq \theta \leq 90$  y 0 resto
```

```
% ENTRADA:
```

```
%F:distancia focal
%Da=diametro de la apertura en cm
%ilu:decaimiento en el borde dB
%F/Da :relacion
%f:frecuencia en GHz
%N=reflectoresideales.N;
```

```
% SALIDA:
```

```
q,theta0,directividad,Pf,Ns
```

```
function [anchohaz]=thetaanchohaz(reflectoresideales)
```

```
%DESCRIPCION
```

```
%Funcion que calcula el angulo en el cual se quiere averiguar el ancho de haz del diagrama normalizado.
```

```
%ENTRADA
```

```
%ECP:campo polar calculado.
%EXdB:dato en el -XdB que se quiere calcular el anco de haz.
```

```
%SALIDA
```

```
%thetahaz:angulo obtenido a -XdB.
```

```

function
[xap,yap,w,roprima,thetaprima,phiprima,ro,theta,phi]=cambiocoo
rdenadas (reflectoresideales,D,F,phi0,h0)
%DESCRIPCION
%Funcion que se encarga de hacer el cambio de coordenadas en
los distintintos sistemas que utilizamos para calcular el campo
en la apertura del reflector.
%ENTRADA

%reflectoresidelaes:tipo de reflector utilizado.
%D:diametor del reflector.
%F:distancia focal o en caso de los reflectoress cassegrain ,y
delos doblesoffset la distancia focal equivalente.
%Psi0:angulo subtendido
%h0:altura del reflector C+D/2.

%SALIDA
%COORDENADAS DE LA BOCINA X Y Z
%COORDENADAS DEL REFECTOR X' Y' Z'
%COORDENADAS DE LA APERTURA Xap Yap Zap

function [Exp,Ecp,Exp2,Ecp2,thetar,Ns,G,cbr,eficiencia,effbloqueo
,Gr,effglobal,effap,effspill]
=grafica (reflectoresideales,D,F,phi0,ds,phis,h0,bloqueo)
%DESCRIPCION
%Funcion que se encarga de obtener el campo polar y contrapolar
en el reflector
%ENTRADAS

%reflectoresidelaes:tipo de reflector utilizado.
%D:diametro del reflector.
%F:distancia focal o en caso de los reflectoress cassegrain ,y
delos dobles
%offset la distancia focal equivalente.
%Psi0:angulo subtendido
%h0:altura del reflector C+D/2.
%ds:diametro del subreflector
%Bloqueo:variable que indica que el reflector puede tener
bloqueo sel
%subreflector
%Psis. angulo subtendido
%SALIDAS

%Exp:campo contrapolar
%Ecp:campo polar
%effbloqueo:eficiencia de bloqueo
%Gr:ganancia de reflector
%effglobal.eficiencia global
%effap:eficiencia de apertura
%effspill:eficiencia de spillover
%cbr:coeficiente bocina-reflector

```

2.2 Clase Parabólica

- **CONSTRUCTOR**

```
function p=PARABOLICA (varargin)
```

```
%DESCRIPCION:
% Constructor de la clase PARABOLICA. (Hereda de clase
REFLECTORSIDEALES)
% PROPIEDADES
%D:diaametro del reflector
%relacion:F/D
% SALIDA:
% p: Objecto de tipo PARABOLICO
```

- **MÉTODOS**

```
function parabolicocalculos(parabolica)
```

```
%DESCRIPCION:
%Funcion que realiza los calculos necesarios para dibujar el
campo del reflector,se ayuda de los Metodos heredados de
reflectoresideales
%PARAMETROS DE ENRADA
%r : OBJETO DE TIPO REFLECTORESIDEALES

%F:distancia focal
%Da=diametro de la apertura en cm
%PARAMETROS DE SALIDA

%Ecp : CAMPO COPOLAR

%Exp :CAMPO CONTRAPOLAR
```

2.3 Clase Offset

- **CONSTRUCTOR**

```
%DESCRIPCION:
% Constructor de la clase OFFSET. (Hereda de clase
REFLECTORSIDEALES)
%PROPIEDADES
% D: diametro en cm
% relacion:F/D
% C:clearence
% SALIDA:
% p: Objecto de tipo OFFSET
```

- **MÉTODOS**

```
function offsetcalculos(off_set)%(Da,C,relacion,phir,f)
%DESCRIPCION:
%Funcion que realiza los calculos necesarios para dibujar el
campo del reflector,se ayuda de los Metodos heredados de
reflectoresideales
%PROPIEDADES
%r : OBJETO DE TIPO REFLECTORESIDEALES

%F:distancia focal
%D:diametro del reflector en cm
%C:clearence o despejamiento
%SALIDA
%Ecp : CAMPO COPOLAR
%Exp :CAMPO CONTRAPOLAR
```

2.4 Clase Cassegrain

- **CONSTRUCTOR**

```
function p=CASSEGRAIN(varargin)

%DESCRIPCION:
% Constructor de la clase CASSEGRAIN. (Hereda de clase
REFLECTORSIDEALES)
% PROPIEDADES

% SALIDA:
% p: Objecto de tipo CASSEGRAIN
```

- **MÉTODOS**

```
function cassegraincalculos(cassegrain)
%DESCRIPCION:
%Funcion que realiza los calculos necesarios para dibujar el campo
del
%reflector,se ayuda de los Metodos heredados de reflectoresideales

%PARAMETROS DE ENRADA
%r      : OBJETO DE TIPO REFLECTORESIDEALES

%F:distancia focal
%Da=diametro de la apertura en cm
%ds:diametro del subreflector
%F/D : relacion DTO DE ENTRADA
%df:distancia interocal del hiperboliode DATO DE ENTRADA f=2*c;

%PARAMETROS DE SALIDA

%Ecp : CAMPO COPOLAR
%Exp :CAMPO CONTRAPOLAR
%c:semidist focal del hiper
%M:factor de magnificacion
%e:excenticidad del sub
%Fe:distancia focal equivalent
%l2:distacia F2 a la base circ del subreflector
%l1:distacia F1 a la base circ del subreflector
%gammaf0: ang bajo el que se ve el borde del subr dede F1
%ANT CASSEGRAIN
```

2.5 Clase Doble Cassegrain

- **CONSTRUCTOR**

```
function p=DOBLECASSEGRAIN(varargin)

%%DOBLE CASSEGRAIN
%
%DESCRIPCION:
% Constructor de la clase DOBLECASSEGRAIN. (Hereda de clase
REFLECTORSIDEALES)
% PROPIEDADES
%F:distancia focal real
%Da=diametro de la apertura en cm
%ds:diametro del subreflector
%F/D : relacion DTO DE ENTRADA
%L:longitud maxima horizontal
%thetae:semiangulo subreflector
```

```

%C:clearance-distancia entre extremos final y comienzo de los
%reflectores(dc)

% SALIDA:
% p: Objeto de tipo DOBLECASSEGRAIN

• MÉTODOS
function doblecassegaincalulos(doblecassegain)
%DUAL CASSEGRAIN

%DESCRIPCION:
%Funcion que realiza los calculos necesarios para dibujar el campo
del
%reflector,se ayuda de los Metodos heredados de reflectoresideales
%PARAMETROS DE ENTRADA
%r      : OBJETO DE TIPO REFLECTORESIDEALES

%Da=diametro de la apertura en cm
%ds:diametro del subreflector
%relacion: F/D
%L:longitud maxima horizontal
%thetae:semiángulo subreflector
%C:clearance-distancia entre extremos final y comienzo de los
%reflectores(dc)
%PARAMETROS DE SALIDA
%h0:altura del centro de la apertura
%Feq:distancia focal equivalente
%e:exentricidad
%c:distancia interfocal
%thetae0:semiángulo subreflector
%alfa:ángulo que forma el eje paraboloide con el eje focal del
subreflector
%beta:ángulo que forman los ejes focales del reflector y
subreflector

```

2.6 Clase Doble Gregorian

- **CONSTRUCTOR**

```

function p=DOBLEGREGORIAN(varargin)
%%DOBLEGREGORIAN
%
%DESCRIPCION:
% Constructor de la clase GREGORIAN. (Hereda de clase
REFLECTORSIDEALES)
% PROPIEDADES

%Da=diametro de la apertura en cm
%ds:diametro del subreflector
%L:longitud maxima horizontal
%thetae:semiángulo subreflector
%C:clearance-distancia entre extremos final y comienzo de los
%reflectores(dc)
%SALIDA:
% p: Objeto de tipo DOBLE GREGORIAN

```

- **MÉTODOS**

```
function doblegreogoriancalulos(doblegregorian)
```

```
%DUAL GREGORIAN

%DESCRIPCION:
%Funcion que realiza los calculos necesarios para dibujar el campo
del reflector, se ayuda de los Metodos heredados de
reflectoresideales
%PARAMETROS DE ENTRADA
    %r      : OBJETO DE TIPO REFLECTORESIDEALES

    %Da=diametro de la apertura en cm
    %ds:diametro del subreflector
    %L:longitud maxima horizontal
    %thetae:semiangulo subreflector
    %C:clearance-distancia entre extremos final y comienzo de los
    %reflectores(dc)
%PARAMETROS DE SALIDA
    %h0:altura del centro de la apertura
    %Feq:distancia focal equivalente
    %e:exentricidad
    %c:distancia interfocal
    %thetae0:semiangulo subreflector
    %alfa:angulo que forma el eje paraboloides con el eje focal del
subreflector
    %beta:angulo que forman los ejes focales del reflector y
subreflector
```

3.REALIZACIÓN DEL EJECUTABLE CON MATLAB

El ejecutable de la aplicación nos sirve para que el programa funcione sin necesidad de tener instalado Matlab en cualquier ordenador.

Para ello seguimos los mismos pasos del proyecto *Análisis de Bocinas en Matlab* en el apartado 5.4 COMPILADOR DE MATLAB. CREACIÓN DE EJECUTABLES.EXE

4.SABOR

En este apartado se explica cómo se tiene que actuar con la aplicación SABOR para su buen funcionamiento. Seguiremos los siguientes pasos:

4.1Manual Usuario

En la pantalla de inicio de SABOR aparece las opciones que tiene nuestra aplicación, es decir, podemos analizar bocinas o reflectores. La siguiente figura muestra la pantalla de inicio:

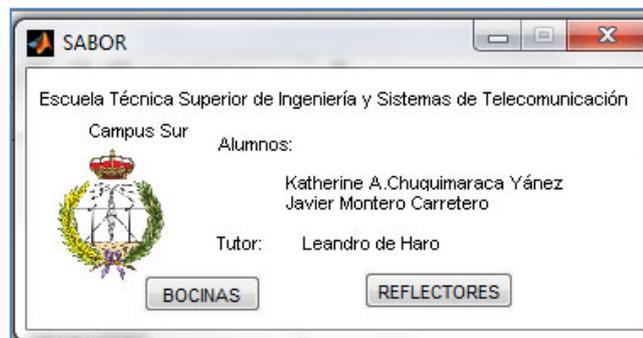


Fig.5.3 Ventana de Inicio

En este caso vamos a seleccionar *REFLECTORES* y nos aparecerá la siguiente ventana:

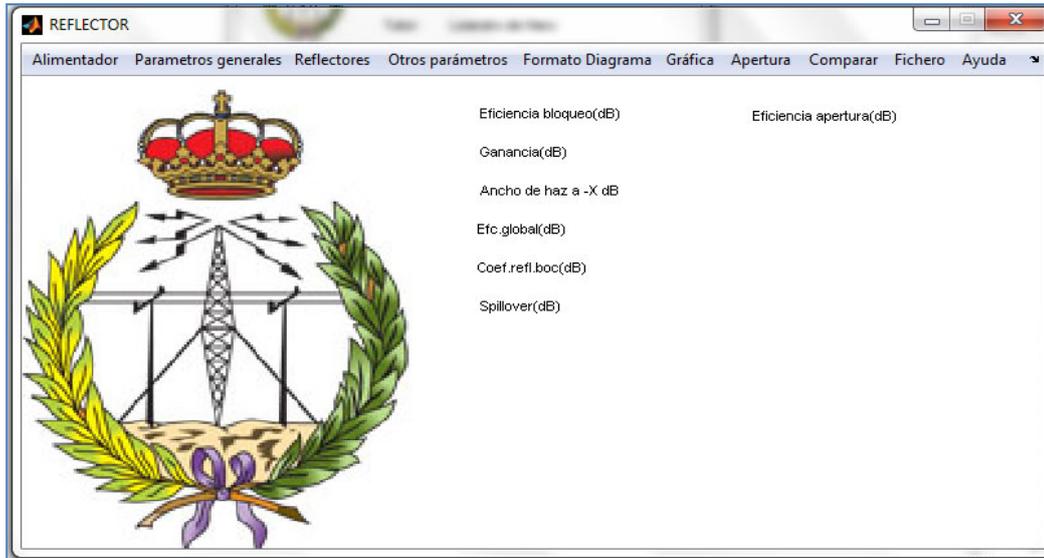


Fig.5.4 Ventana Estructura

En la cual tenemos que configurar *Parámetros generales*, *Otros parámetros*, que se verán a continuación :

Parámetros generales

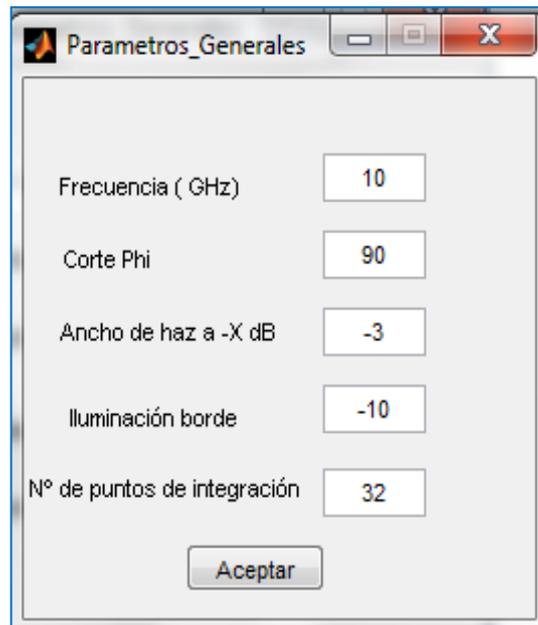


Fig.5.5 Ventana Parámetros generales

En la cual tenemos datos predeterminados ,los cuales e pueden modificar según lo que el usuario quiera analizar, una vez aceptado y si todos los datos de entrada son correctos la ventana se cerrará ,sino aparecerá un mensaje de error ,como se ve en la siguiente figura.

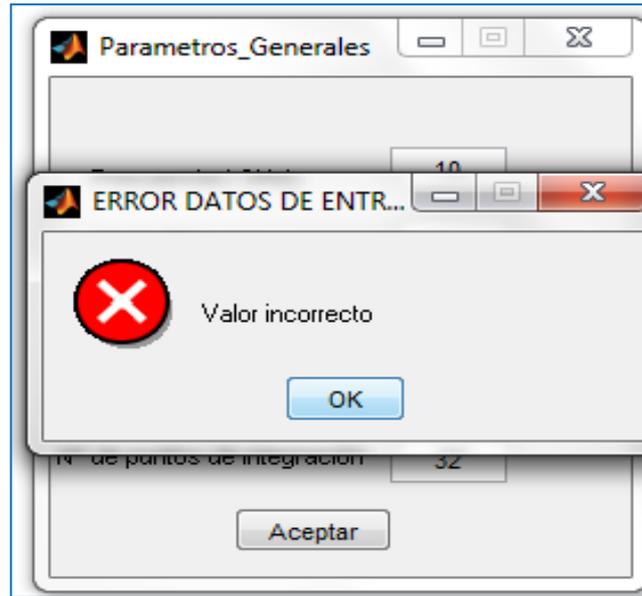


Fig.5.6 Ventana de mensaje de Error

Una vez configurados los *Parámetros Generales* seleccionaremos el tipo de reflector que queremos analizar, como se muestra en la siguiente figura.

La cual nos muestra los diferentes reflectores que podemos analizar y con sus respectivos datos de salida, obtenidos una vez hecho el análisis. Como se puede ver y se dijo en el apartado 2 de este capítulo los reflectores que se pueden analizar son: *Parabólico, Cassegrain, Offset* y los *reflectores dobles offset Cassegrain y Gregorian*.

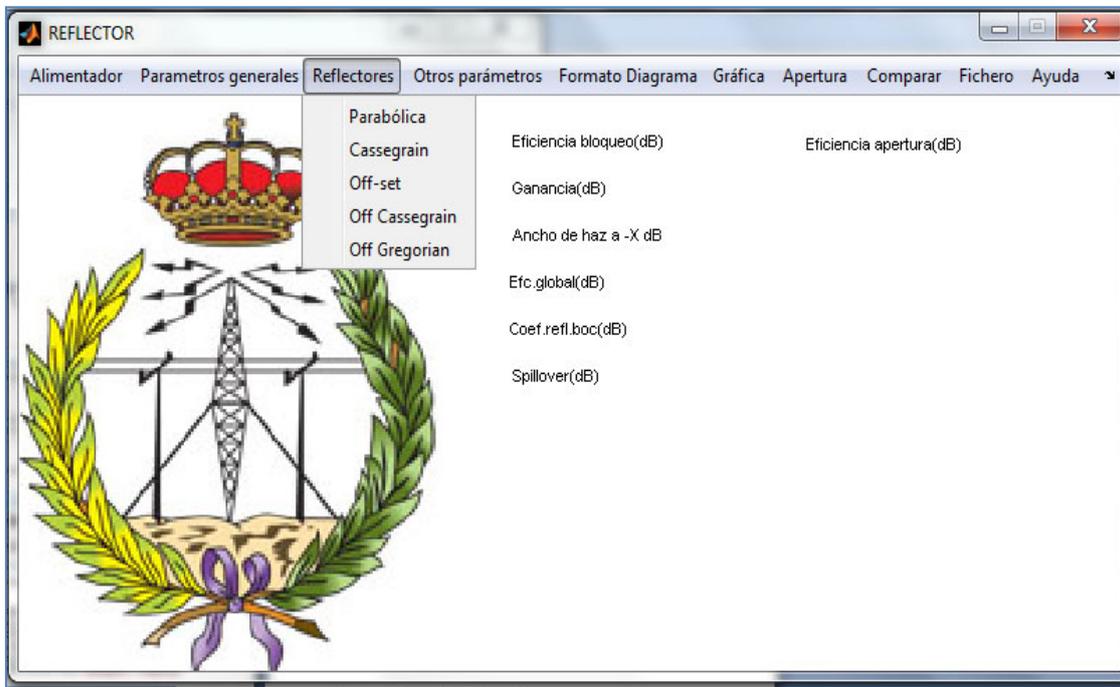


Fig.5.7 Ventana Selección de Reflector

Una vez seleccionado el tipo de reflector, en este caso voy a seleccionar el *Reflector Parabólico* y nos aparecerá la siguiente ventana, que nos pide los datos de entrada para realizar la simulación.

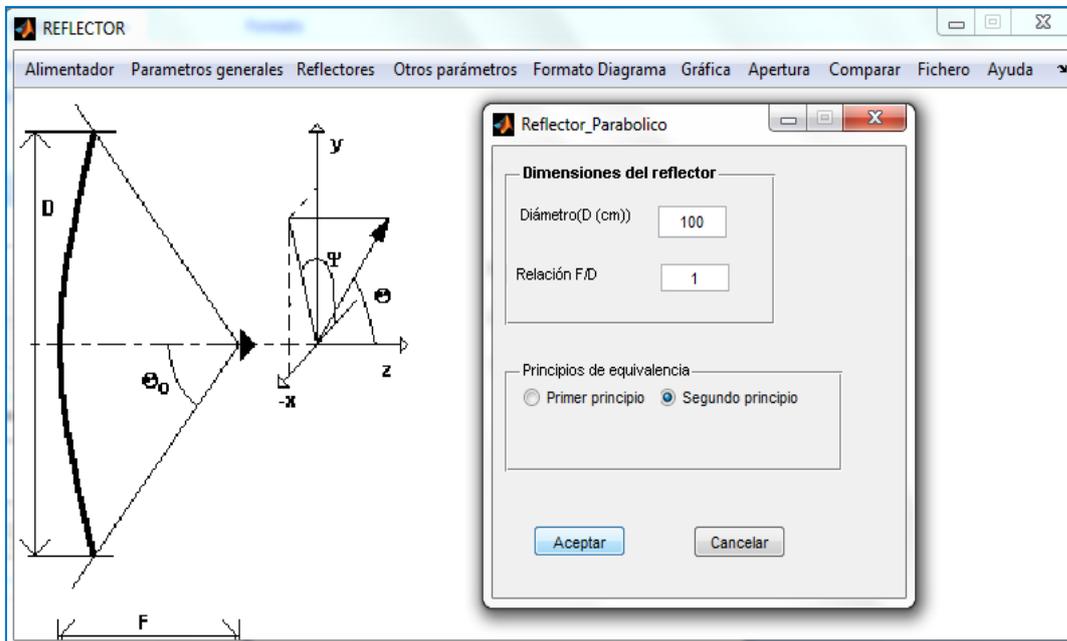


Fig.5.8 Ventana de Parámetros de Entrada

A continuación se configura *Otros parámetros*

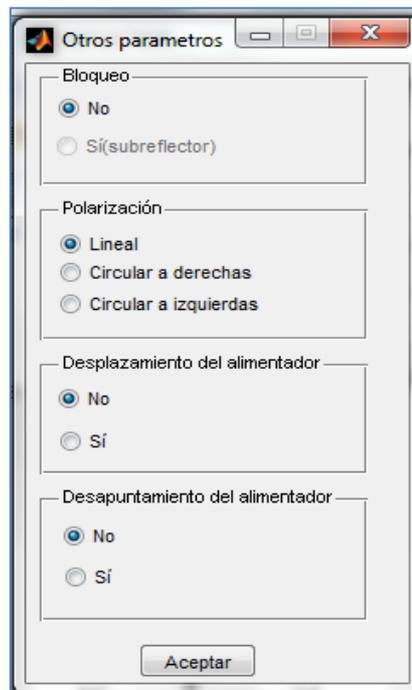


Fig.5.9 Ventana Otros Parámetros

Como se ve en la figura en esta ventana seleccionaremos *Bloqueo*, *Polarización*, *Desplazamiento del alimentador* y *Desapuntamiento del alimentador*.

Una configuración más será la escala de la ventana en la que queremos visualizar nuestro campo,

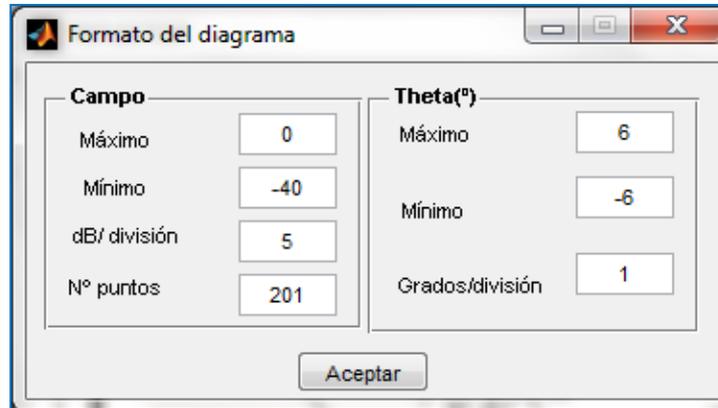


Fig.5.10 Ventana Formato Diagrama

Para visualizar los datos de salida y la gráfica del campo hacemos click en el botón Gráfica , y se obtiene :

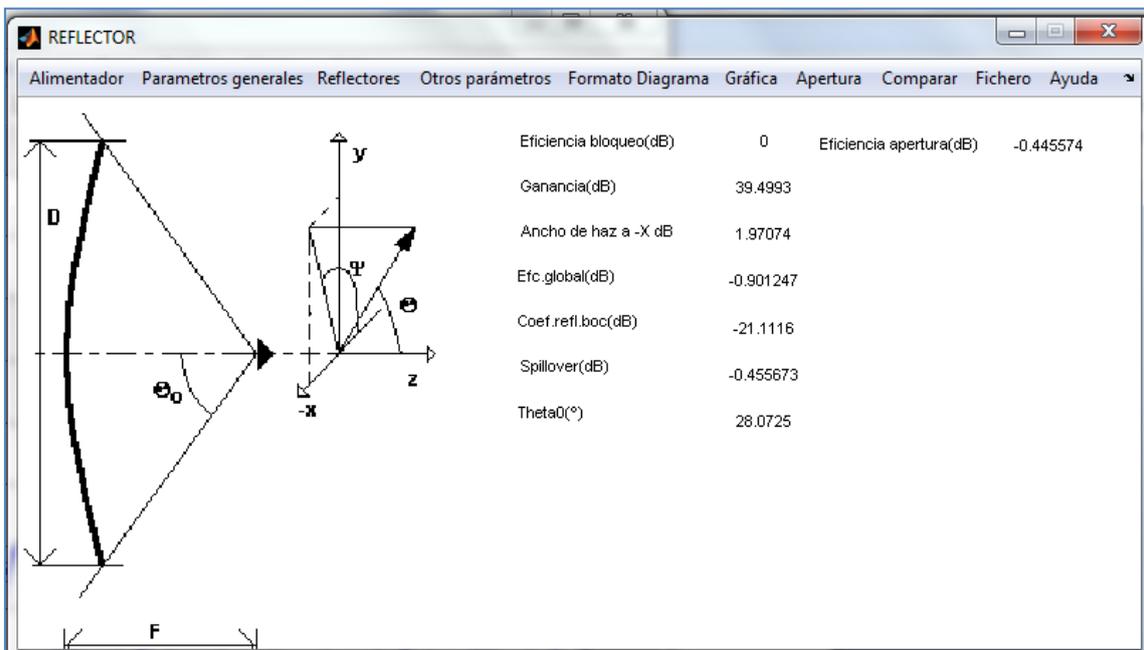


Fig.5.11 Ventana Resultados

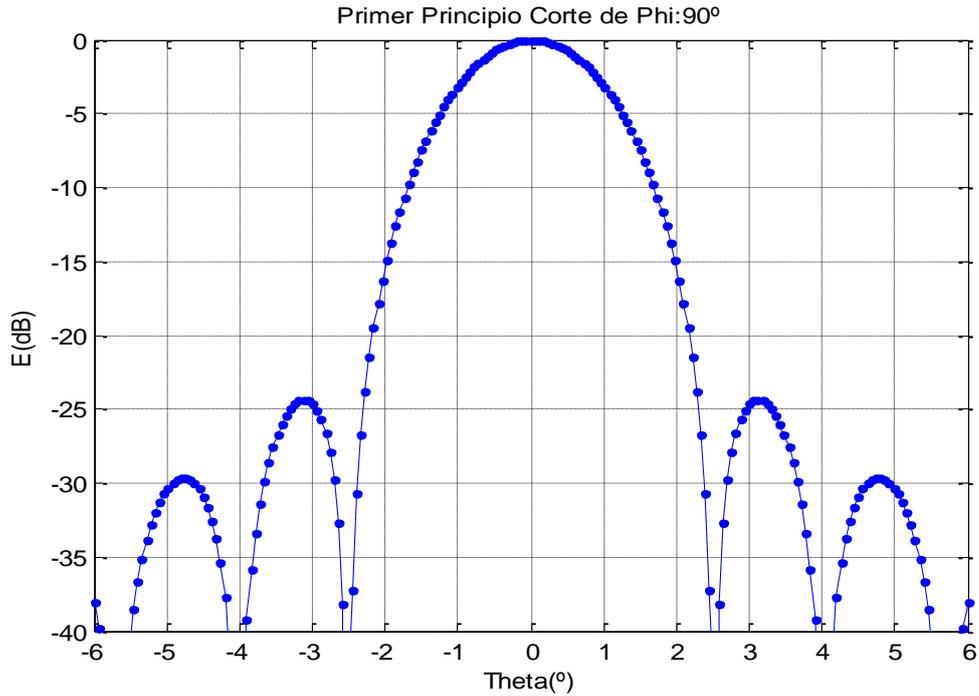


Fig 5.12 Gráfica de campo obtenido

Una vez realizado este análisis, podemos comparar campos con distintos parámetros, una vez configurados los distintos parámetros que se quiera cambiar se hace click en *COMPARAR*, mostrará los campos con distintos colores y también los resultados del reflector comparado.

En este caso esta comparado con un *Offset*.

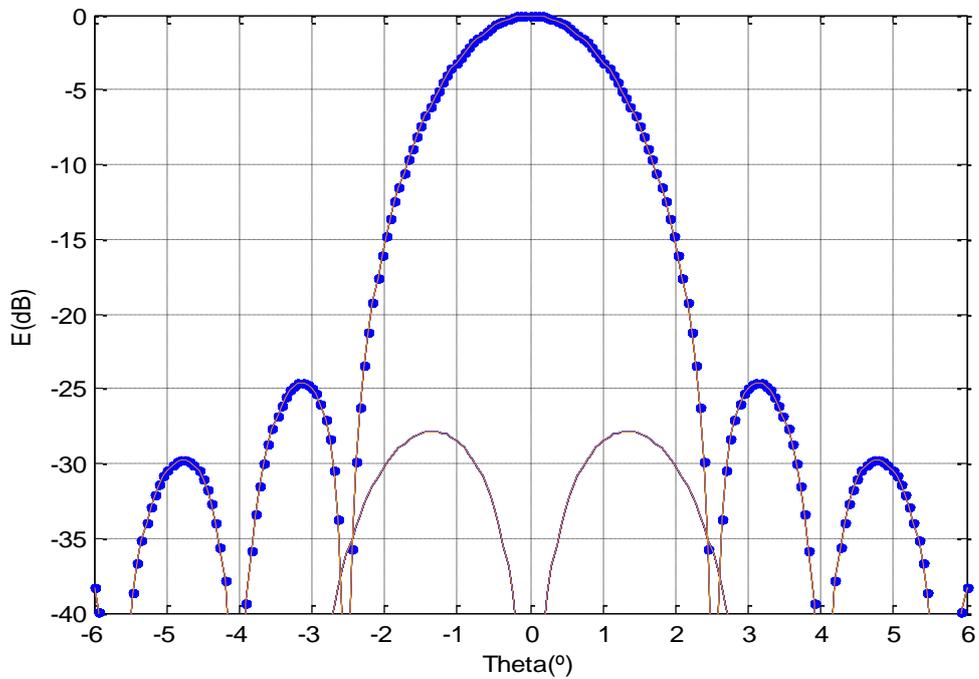


Fig 5.13 Gráfica de campo obtenido y comparado

4.2. Diferencias de cálculos con las anteriores versiones de SABOR .

A continuación validaremos los resultados obtenidos con las versiones anteriores de Sabor .Para ello ,lo analizaremos en plano $\phi=90$ y con los datos de entrada que aparecerán en cada figura ;también hay que tener en cuenta los siguientes consideraciones:

El plano $\phi=90^\circ$ de Sabor y Sabor hecho con Matlab es $\phi=0$.

4.2.1 Reflector Parabólico con polarización lineal , sin desplazamiento ni despuntamiento .

Variables	Sabor Matlab	Sabor
Eficiencia bloqueo(dB)	0	0
Ganancia(dB)	39,499	39,51
Ancho de haz($^\circ$)	1,9707	1,96
Eficiencia global(dB)	-0,9012	
Coefficiente reflector-bocina(dB)	-21,116	-20,7
Eficiencia spillover(dB)	-0,455	-0,49
Theta($^\circ$)	28,07	28,1
Eficiencia apertura(dB)	-0,445	-0,49

4.2.2 Reflector Offset con polarización lineal ,sin desplazamiento ni despuntamiento .



Fig 5.14 Ventana de Parámetros de entrada

Variables	Sabor Matlab	Sabor
Eficiencia bloqueo(dB)	0	0
Ganancia(dB)	39,461	39,47
Ancho de haz($^\circ$)	1,975	1,96
Eficiencia global(dB)	-0,938	
Coefficiente reflector-bocina(dB)	-20,4	
Eficiencia spillover(dB)	-0,463	-0,41
Psis($^\circ$)	25,948	25,9
Eficiencia apertura(dB)	-0,475	-0,52
Psi0($^\circ$)	31,673	31,7

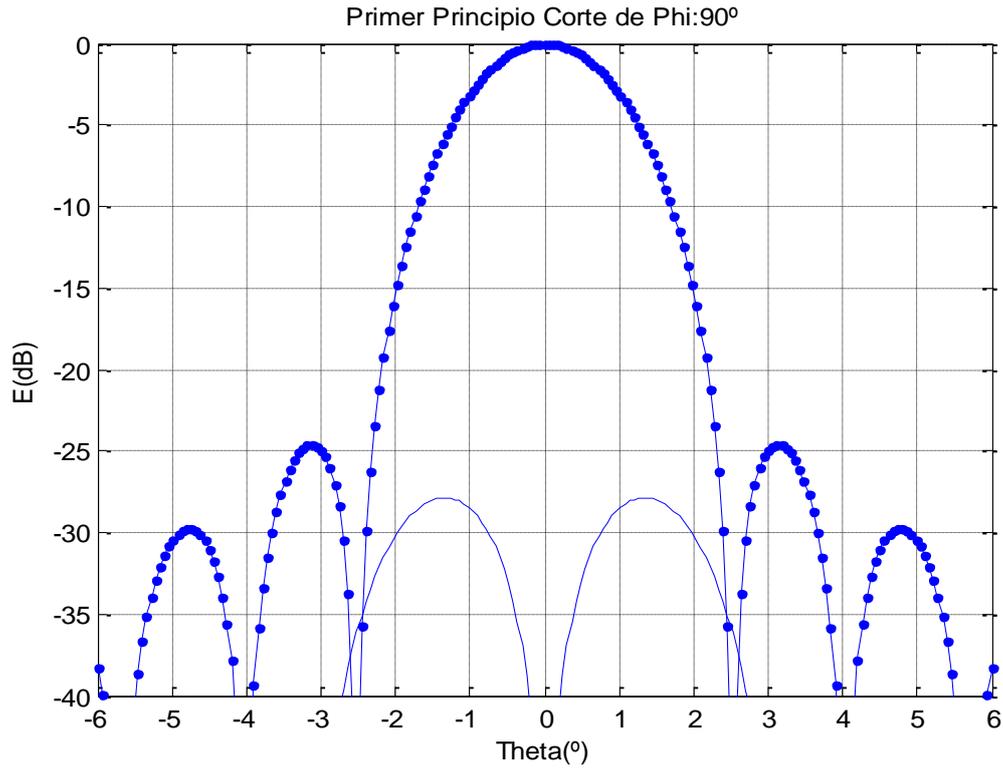


Fig 5.15 Campo Obtenido

4.2.3 Reflector Cassegrain con polarización lineal ,sin desplazamiento ni despuntamiento , sin bloqueo primera columna y con bloqueo la segunda columna.

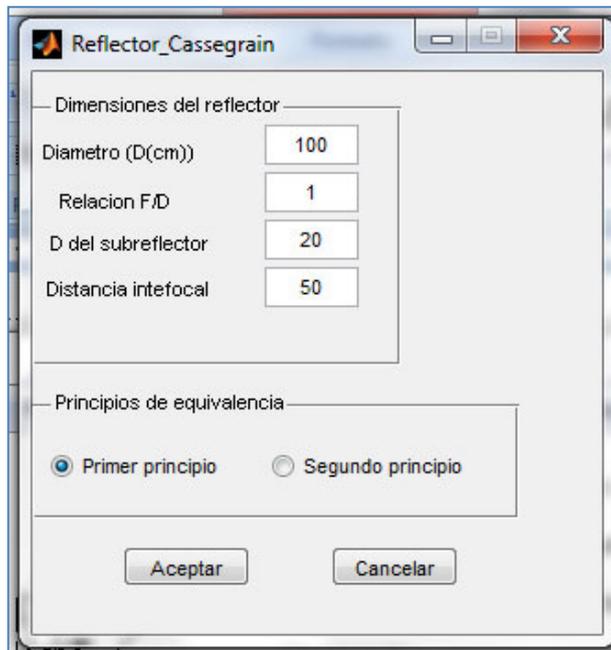


Fig 5.17 Ventana de Parámetros de entrada

Variables	Sabor Matlab		Sabor	
	Sin bloqueo	Con bloqueo	Sin bloqueo	Con bloqueo
Eficiencia bloqueo(dB)	0	-0,591	0	-0,597
Ganancia(dB)	39,497	38,906	39,5	38,91
Ancho de haz(°)	1,97	1,9	1,96	1,891
Eficiencia global(dB)	-0,902	-1,49		
Coefficiente reflector-bocina(dB)	-17,02	-17,02	-16,8	-16,8
Eficiencia spillover(dB)	-0,457	-0,13	-0,435	-0,435
Theta0(°)	28,07	28,07	28,1	28,1
Psis(°)	17,74	17,74	17,7	17,7
Eficiencia apertura(dB)	-0,445	-1,037	-0,463	-0,463
e	4,32	4,32	4,32	4,32
M	1,6	1,6	1,6	1,6

Como se puede observar hay una diferencia de cálculo en la eficiencia spillover, ya que esta depende de la eficiencia global, la de bloqueo y la de apertura, la eficiencia de bloqueo fue calculada con la potencia total, es decir, la resta de la potencia sin bloqueo y potencia con bloqueo por lo que la eficiencia spillover.

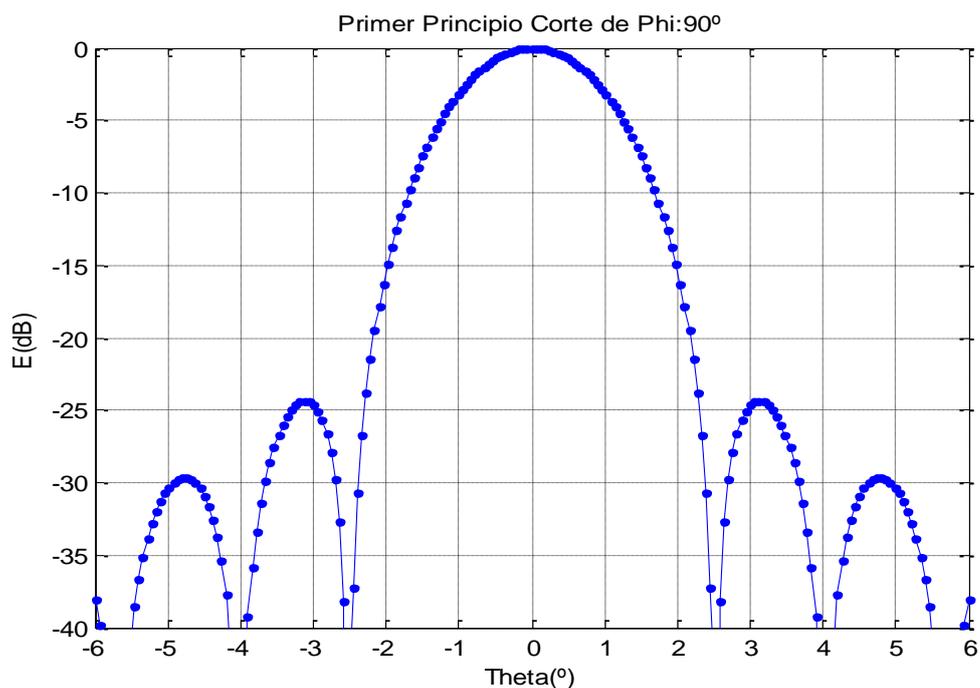


Fig 5.18 Campo Obtenido sin bloqueo

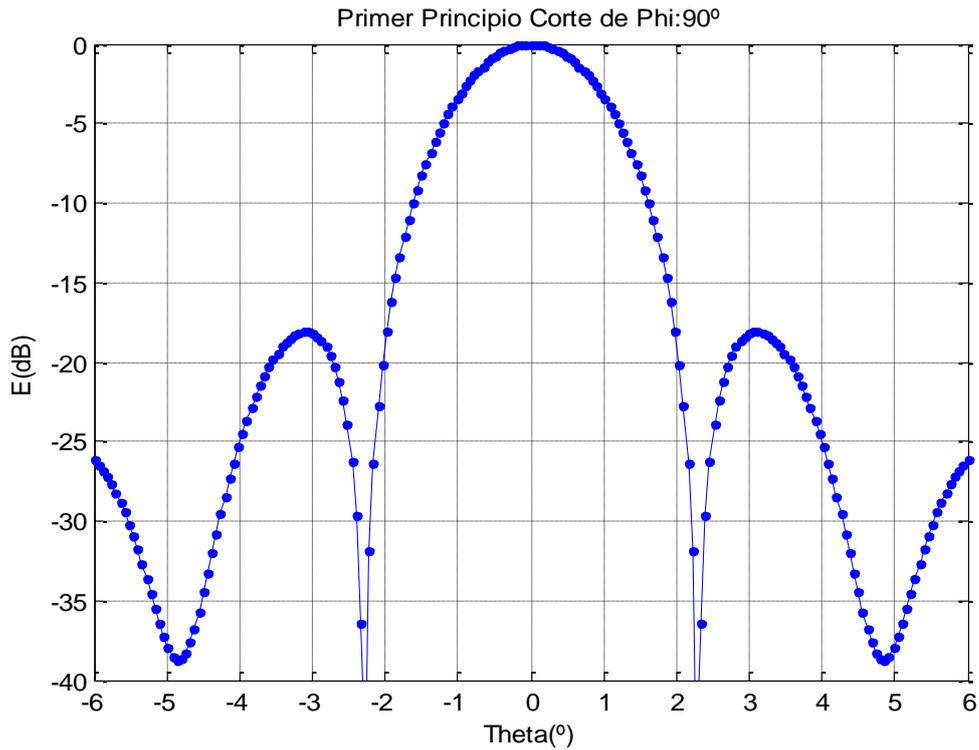


Fig 5.19 Campo Obtenido con bloqueo

4.2.4 Reflector Doble-Offset-Cassegrain con polarización lineal ,sin desplazamiento ni despuntamiento , sin bloqueo .

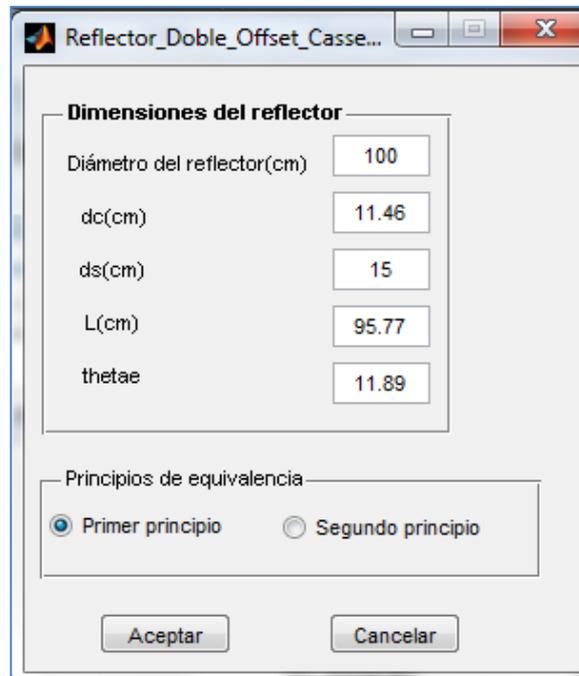


Fig 5.20 Ventana de Parámetros de entrada

Variables	Sabor Matlab	Sabor
Eficiencia bloqueo(dB)	0	0
Ganancia(dB)	39,497	39,5
Ancho de haz(°)	1,97	1,96
Eficiencia global(dB)	-0,903	
Coefficiente reflector-bocina(dB)	-13,42	
Eficiencia spillover(dB)	-0,457	-0,447
e	2,52	2,52
Eficiencia apertura(dB)	-0,4456	-0,453
L0	96,59	96,6
dc	13,03	13
2c(distancia interfocal)	33,726	33,7
θ_e (°)	11,77	11,8
α (°)	23,431	23,4
β (°)	10,234	10,2

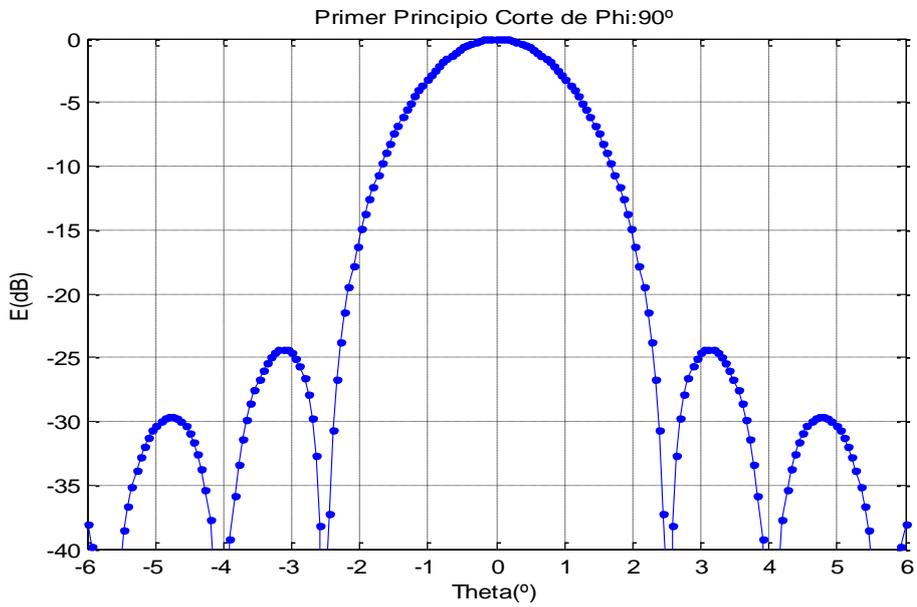


Fig 5.21 Campo Obtenido

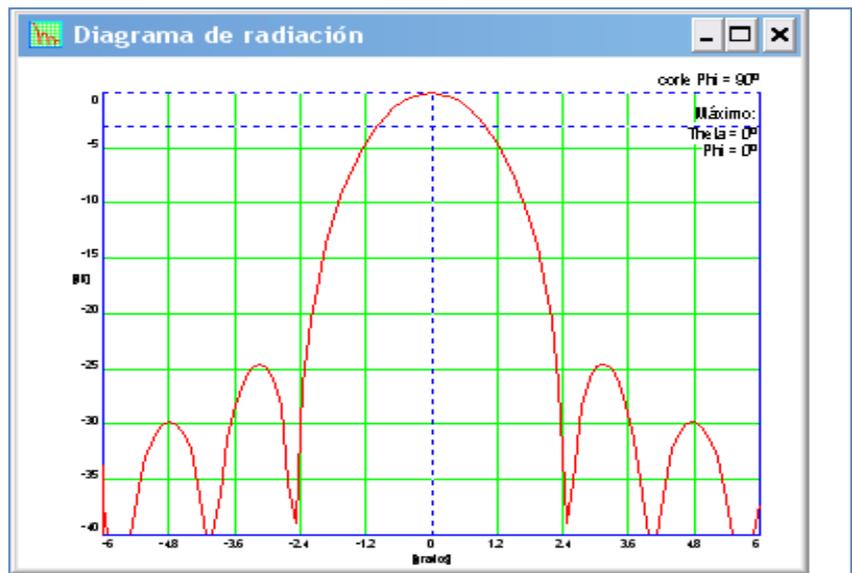


Fig 5.22 Campo Obtenido con Sabor

4.2.5 Reflector Doble-Offset-Gregoriano con polarización lineal ,sin desplazamiento ni despuntamiento , sin bloqueo .



Fig 5.23 Ventana de Parámetros de entrada

Variables	Sabor Matlab	Sabor
Eficiencia bloqueo(dB)	0	0
Ganancia(dB)	39,497	39,5
Ancho de haz(°)	1,97	1,96
Eficiencia global(dB)	-0,903	
Coefficiente reflector-bocina(dB)	-13,353	
Eficiencia spillover(dB)	-0,457	-0,447
e	0,487	0,492
Eficiencia apertura(dB)	-0,445	-0,453
L0	99,7	97,3
dc	13,45	11,6
2c(distancia interfocal)	27,31	27,1
θ_e (°)	11,68	11,8
α (°)	-16,29	-16,1
β (°)	5,5	5,5

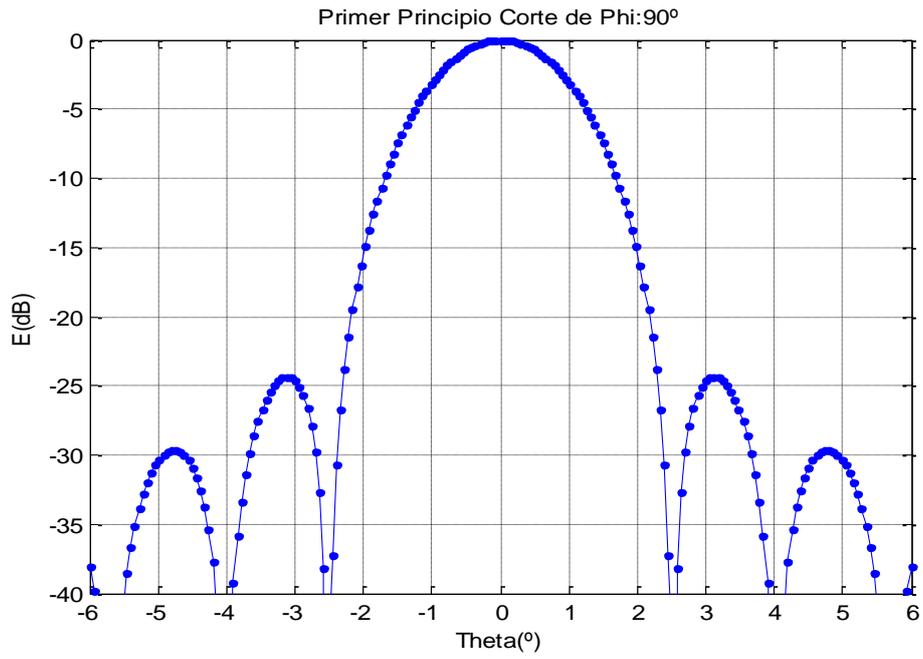


Fig 5.24 Campo Obtenido

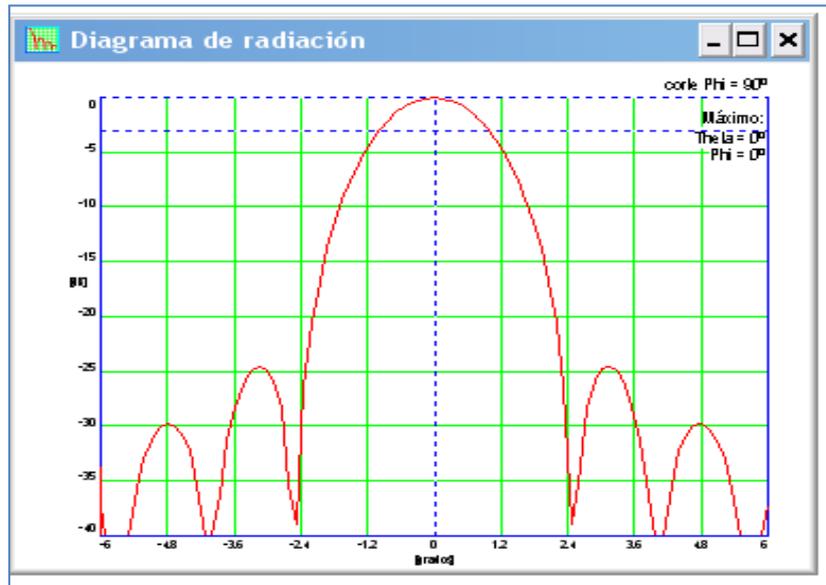


Fig 5.25 Campo Obtenido con Sabor

Capitulo6. Conclusiones y trabajos futuros

Conclusiones y trabajos futuros

El proyecto pretende que los resultados sean los más parecidos a Sabor ,*Software de Análisis de Bocinas y Reflectores*, herramienta didáctica la cual se utiliza en la escuela para hacer las distintas clase de prácticas para la asignatura de Antenas y Compatibilidad Electromagnética.

Se ha implementado cinco tipos de reflectores, como son: *Parabólico Offset, Cassegrain y los dos Dobles Offset, Cassegrain y Gregorian* , y han sido analizados con un alimentador ideal , *cos-q* , los resultados obtenidos se han comparado con las versiones anteriores de Sabor, como se ha visto en el apartado de verificación de resultados.

El proyecto consta de partes muy bien diferencias como son :

- La interpretación correctas de las formulas que se han utilizado para la realización de este proyecto ,dichas formulas han sido las dadas por el proyecto fin de carrera titulado Sabor3.0 de Francisco Egea Castejón .
- GUIDE, *the graphical user interface development environment* ,con el que se creó: GUI, *graphical user interface*, que es la parte de Matlab dedicada a crear interfaces de usuario , herramienta utilizada para crear nuestras distintas ventanas dedicadas para la obtención de datos para analizar los distintos reflectores y para mostrar por pantalla los distintos resultados.
- Programación Orientada a Objetos de Matlab y sus distintas propiedades como son la herencia lo cual es muy útil para ocupar menos memoria ya que con un único método podemos realizar distintos cálculos con los distintos reflectores , *objetos* ,solo cambiando las propiedades de cada objeto
- Y por último ha sido la realización de validación de los resultados con la ayuda de las versiones anteriores de Sabor , que están detallados en el capítulo 5 y la unión con bocinas del proyecto fin de carrera *Análisis de Bocinas en Matlab* de Javier Montero.

También hay que comentar que esta nueva versión de Sabor ha vuelto a la sencillez de interfaz de usuario, así los alumnos puedan desenvolverse con el software de forma muy sencilla .

En cuanto los resultados son los más parecidos al primer Sabor que se realizó , por lo que es una ventaja ya que ese Sabor fue modificado por profesores de la escuela para que tengan resultados más fiables.

En este proyecto se ha utilizado Matlab que es una herramienta que en sus distintas versiones en la parte de cálculo no varía mucho por lo que la distintas funciones que se han creado pueden ser reutilizadas para realizar distintas mejoras que se pueden implementar al programa, se ha utilizado y programado el método de integración Gauss-Legendre por lo cual no tarda en hacer los distintos cálculos en las aperturas circulares, es una gran ventaja.

Otra ventaja es que el software se puede utilizar en cualquier ordenador con Matlab a partir de la versión 7 que es la que esta implementado la programación orientada a objetos ,también se puede utilizar el software sin necesidad de tener instalado Matlab ,ya que Matlab permite hacer un ejecutable , y así sustituir al Sabor primera versión ya que solo funciona en ordenadores de 32 bits y en Windows XP ,mayor desventaja ya que Windows XP ya no tiene soporte técnico y los nuevos Ordenadores son de 64 bits y con distintas versiones de sistema operativo.

Por otra parte tenemos las mejoras realizadas a las antiguas versiones como son: realización de registros que el usuario puede guardar y cargar con las distintas variables, también se ha realizado un fichero .txt en el que consta la amplitud del campo con su respectiva theta para que el usuario pueda visualizarlo de la forma que quiera, aparte que con Matlab al tener una buena funcionalidad en el tratamiento gráfico.

Las líneas futuras de trabajo que se pueden realizar son las mejoras del software e implementación de nuevas funciones para mejorar algunos resultados y la realización de reflectores multialimentados, también queda por implementar las bocinas como alimentadores con desviación de haz y bloqueo ya que solo se ha realizado bocinas como alimentadores con polarización lineal y las polarizaciones circulares a derecha e izquierda.

Bibliografía

1. Warren L. Stuzman and Gary A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, Second Edition.
2. Constantine A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*, Second Edition.
3. Satish K. Sharma Rao, Sudhakar Rao and Lotfollah Shafai, *Handbook of Reflector Antennas and Feed Systems, Volume I, Theory desing of Reflectors*,
4. Ángel Cardama Aznar, Lluís Jofre Roca, Juan Manuel Rius Casals, Jordi Romeu Robert y Sebatíán Blanch Boris, *Antenas*, Primera Edición, Septiembre de 1998.
5. Miguel A. Campo, Francisco J. Del Rey, L. Besada and Leandro de Haro, *SABOR: Description of the Methods Applied for a Fast Analysis of Horn and Reflector Antennas*, Grupo de Radiación, Dpto. Señales Sistemas y Telecomunicaciones, ETSI de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid.
6. W.V.T. Rusch, A. Prata, Y. Rahmat-Samii, R. A. Shore, *Derivation and Application of the Equivalent Paraboloid for Classical Offset Cassegrain and Gregorian Antennas*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-38, August 1990.
7. Lo Y. T., Lee S. W., *Antenna Handbook, Volume II, Antenna Theory*, Chapman & Hall, 1993.
8. Matlab, help, *GUI Development*.
9. Matlab, help, *Object-Oriented Programming*.
10. Y. Mizugutch, M. Akagawa and H. Yokoi, *Offset Dual Reflector Antenna*, Kokusai Denshin Denwa Co., Ltd. Tokio, Japan
11. Alberto Herreros y Enrique Baeyens, *Curso de Programación en matlab y Simulink*, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática (DISA)
12. Diego Orlando Barragán Guerrero, *Manual De Interfaz Gráfica De Usuario en Matlab*.
https://www.dspace.espol.edu.ec/bitstream/123456789/10740/19/%255Bmatlab%255D_MATLAB_GUIDE.pdf
13. Programación avanzada,
http://ocw.upc.edu/sites/default/files/materials/15015406/tema_6_programacion_avanzada_api-5158.pdf