

# HIDROLOGÍA APLICADA

## TEMA 5. ESCORRENTÍA



**Estilita Ruiz Romera**

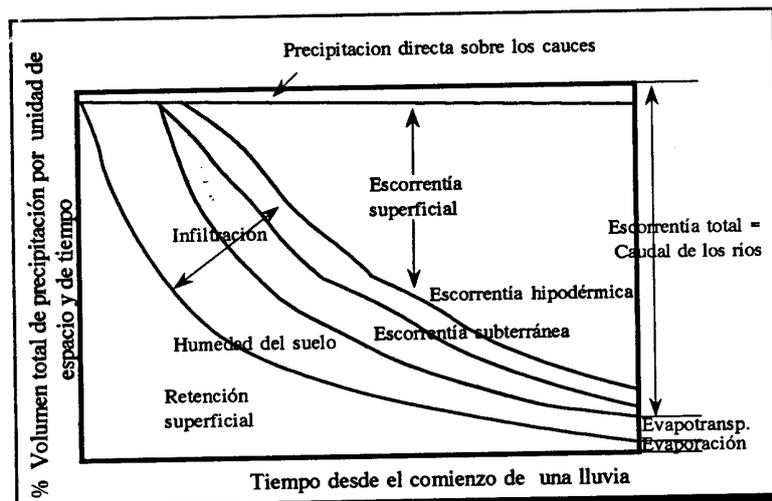
**Miren Martínez Santos**

## TEMA 5. ESCORRENTIA

Se define como escorrentía a todo el agua transportada fuera de una cuenca hidrográfica por los cursos superficiales (ríos y arroyos). Parte de esta agua procede de la escorrentía superficial, mientras que otra parte puede haberse originado a partir de la infiltración y el transporte a través del suelo (flujo subsuperficial) hasta su desembocadura en el río. Por su parte, el agua que se infiltra hasta alcanzar el acuífero puede emerger también en los cursos superficiales o manantiales (escorrentía subterránea), aunque su aparición suele ser más tardía (mayor tiempo de residencia).

### 5.1. Componentes de la escorrentía

Engloba la parte de precipitación que circula en superficie y que llega al curso superficial bien por circulación directa en superficie o por circulación indirecta a través del subsuelo. La escorrentía total para una precipitación de intensidad constante sobre una cuenca relativamente seca se recoge en la figura 5.1.



**Figura 5.1.** Componentes de la escorrentía

El caudal total de una cuenca que coincide con la escorrentía total está formado por cuatro componentes:

- \* Escorrentía superficial
- \* Escorrentía hipodérmica o subsuperficial
- \* Escorrentía subterránea
- \* Precipitación directa sobre las superficies del agua libre. Este volumen es muy pequeño y se engloba dentro del término de escorrentía superficial.

La observación de la *figura 5.1*, conlleva a una serie de comentarios adicionales:

- Cuando se produce una precipitación después de un período seco, la llegada

directa de esta precipitación al cauce es el único aporte al caudal de un río.

- Además, al comienzo de la lluvia la intercepción de agua por parte de la vegetación es alta. Posteriormente, se agota la capacidad de almacenamiento hasta que la intercepción desciende y ésta se iguala a la evapotranspiración.
- Parte de la precipitación se acumula en las depresiones del suelo, la cual se infiltra a través del suelo, circulando horizontalmente como flujo subsuperficial o hipodérmico. Mientras que el agua que se infiltra verticalmente por efecto de la gravedad puede alcanzar el nivel freático (acuífero). Aquella agua que no es infiltrada retorna a la atmósfera por evaporación.
- Cuando aumenta la saturación del suelo, la infiltración de agua a través del suelo desciende, de manera que se incrementa la escorrentía superficial de agua por la superficie del terreno.

Las aguas de escorrentía, a su vez, se verán influenciadas por distintos factores, principalmente por la permeabilidad del suelo, la intensidad de la lluvia, la pendiente del terreno y su rugosidad (resistencia). Así pues, para realizar el grado de conversión que permita pasar de pluviosidad a escorrentía para el cálculo de caudales punta o flujos crecientes, ya sea en cauces acuáticos o en sistemas de drenaje, alcantarillado, etc., será necesario considerar todos los efectos integrantes. Si, por ejemplo, la precipitación decrece eventualmente en intensidad con el aumento de su duración, cuanto más corto sea el tiempo transcurrido (tiempo de concentración, etc.) mayor será el flujo o caudal. Por su parte, el tiempo de concentración dependerá a su vez del tipo de cuenca, siendo mínimo para áreas pequeñas, anchas e inclinadas (rápido escurrimiento), mientras que para suelos secos, con superficie rugosa y desigual, y con cubierta vegetal, dichos valores serán mayores.

Como ya se ha comentado, la "escorrentía subterránea" considera el volumen de agua que circula a través de los acuíferos y que posteriormente emerge en los cursos superficiales o manantiales, mientras que la "escorrentía superficial" engloba el resto de componentes de la escorrentía total, es decir todo el agua que no alcanza los acuíferos. Por su parte, considerando el caudal de un río, el caudal base (o baseflow) proviene de los aportes del acuífero o, lo que es lo mismo, de la escorrentía subterránea durante los periodos de estiaje o aguas bajas; mientras que el caudal evento suele ser la aportación de la escorrentía superficial (flujos superficiales y subsuperficiales) durante los periodos de crecida.

Aunque esta diferenciación ha sido muy criticada por diferentes autores que no admiten que la complejidad del ciclo hidrológico pueda esquematizarse en dos o tres términos, la dificultad del estudio conjunto del sistema hidrológico ha condicionado que numerosos métodos de estimación de la escorrentía se basen en esta diferenciación.

## 5.2. Estimación de la cantidad de escorrentía

- Para estimar la escorrentía se disponen de varios métodos: Análisis estadísticos basados en registros observados durante un determinado periodo de tiempo y con una frecuencia de observación óptima, lo cual permita la realización de estudios de probabilidad. La información registrada, no obstante, es rara vez suficientemente extensa para identificar las magnitudes críticas directamente a partir de la experiencia. La información, por lo tanto, deberá generalizarse llegando a extrapolaciones racionales para cada intervalo de frecuencia. Las distribuciones de Gumbel y Pearson pertenecen a este tipo y se basan en el cálculo de probabilidades.
- Aumento estadístico de la información disponible mediante:
  - a) Intercorrelación a partir de los datos registrados en una o más cuencas adyacentes donde existan registros largos de datos.
  - b) Correlación entre la precipitación y la escorrentía cuando existan más datos de precipitación que de escorrentía.
  - c) Generación estadística de valores adicionales.
- Estimaciones racionales de la escorrentía procedente de la precipitación. Se incluyen aquí el método racional y el hidrograma unitario.
- Cálculos basados sobre formulaciones empíricas, que sin ser desarrolladas específicamente a partir de observaciones en el área de diseño, se pueden aplicar de forma razonable a las condiciones existentes en la cuenca hidrológica.

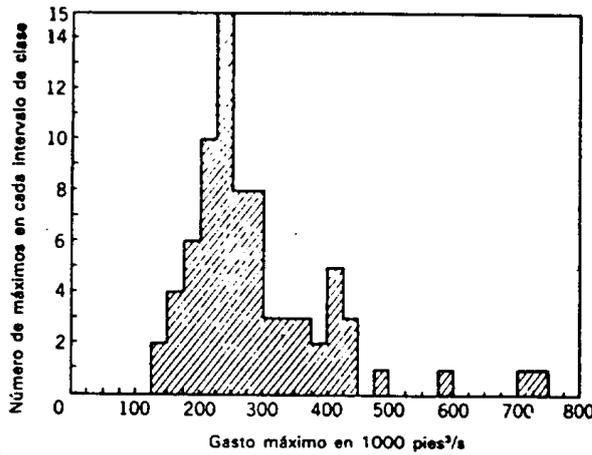
### 5.2.1. Métodos estadísticos

Dentro de estos métodos se incluyen los estudios de probabilidad, encaminados a planificar para el futuro en base a las variaciones probables de la escorrentía. Para ello es necesario que todos los datos de una serie sean recogidos o recopilados en condiciones similares.

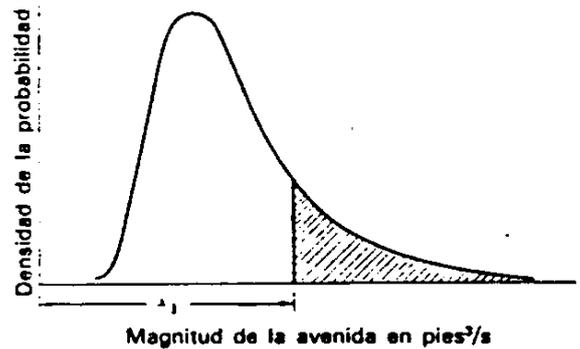
- ESTUDIO DE EVENTOS DE RARA OCURRENCIA

Imaginemos que tenemos datos de caudal ( $m^3/s$ ) de una serie de avenidas para un período de 77 años. Lo primero que hacemos es agrupar los datos en intervalos de clase

obteniendo un histograma de **frecuencias** (figura 5.2) que podemos pasarlo a histograma integrado. Si estamos trabajando con un período de registros extremadamente largo, podemos utilizar intervalos más pequeños, con lo que la distribución de frecuencias que se obtiene es más suave (figura 5.3). De esta distribución se puede deducir que para cada valor de  $X_1$  (de caudal), el área dentro de la curva por encima de  $X_1$  nos da la probabilidad de que  $X_1$  sea igualada o excedida en cualquier año.



**Figura 5.2.** Ejemplo de histograma de frecuencias de avenida máximas



**Figura 5.3.** Distribución idealizada de la frecuencia de avenidas

Dentro de los métodos existentes para el cálculo del escurrimiento fluvial aquí se expondrán los de Gumbel y Log-Pearson III, los cuales permiten calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento de intensidad mayor o igual a  $X$  tomando valores extremos o máximos (Gumbel) o calculando magnitudes de avenidas mediante distribuciones logarítmicas (Pearson):

Distribución de Gumbel:

Considera que la distribución de valores extremos es la adecuada para los análisis de avenidas (usa datos de variables que serán máximos o mínimos), dado que una avenida anual puede considerarse como la máxima de una muestra de 365 valores posibles cada año. Dado que se asume que la distribución de las avenidas es ilimitada, Gumbel propuso que la probabilidad de ocurrencia sería:

$$P = 1 - e^{-e^{-b}}$$

Donde  $e$  es la base del logaritmo neperiano y  $b$  viene dado por:

$$b = \frac{1(X - \bar{X} + 0,45\sigma)}{0,7797\sigma}$$

Donde  $\sigma$  es la desviación estándar de las series, calculada para el número de años de registros ( $n$ ),  $X$  es la magnitud de la avenida con probabilidad  $P$  y  $\bar{X}$  es el promedio aritmético de todas las avenidas en serie. La probabilidad  $P$  está relacionada con el periodo de retorno  $T$  y los valores de  $b$  se corresponden con los diversos periodos de retorno.

#### Método de Log-Pearson III:

Esta técnica consiste en transformar las crecidas anuales a valores logarítmicos ( $y_i = \log x_i$ ) y calcular la media, la desviación estándar y el coeficiente de asimetría de los logaritmos. La magnitud de las crecidas ( $Q$ ) es estimada mediante la siguiente ecuación:

$$\log Q = \bar{y} + K \sigma_y$$

Donde la  $K$  es la frecuencia ( $K$  es una función del periodo de retorno  $T$  y varía con el coeficiente de asimetría o *skewness* y puede verse afectado por el número de años registrados),  $\sigma$  es la desviación estándar y  $\bar{y}$  es el valor medio.

- SERIES DE DURACIÓN PARCIAL

Puede ocurrir que la segunda avenida en un año sea mayor o menor que la máxima o mínima para un año diferente. Para tener en cuenta estas situaciones se examinan las series de duración parcial. Las series parciales son aproximadamente iguales a las anuales para periodos de retorno superiores a 10 años. Estas series son importantes de cara a definir condiciones de bajo flujo (sequías).

Desde el punto de vista del ingeniero medioambiental hay que considerar tres tipos de flujo de estiaje:

- Flujo crítico para el control de la polución del agua: se eligen periodos de retorno de 10 años con 7 días de flujo bajo.

- Para diseño de plantas de tratamiento de aguas residuales: deben permitir descargas de efluente al río sin que ello conlleve un incumplimiento del límite máximo establecido por la directiva de aguas para aquellos compuestos considerados contaminantes.

- Para demanda de agua: se eligen situaciones de caudal bajo con larga duración y periodos de retorno más largos.

El procedimiento para determinar las series de duración parcial es muy similar al usado para series anuales (Gumbel).

- SERIES COMPLETAS

Todos los datos observados se incluirán en el análisis de las series completas. El análisis se puede presentar en una de las formas siguientes: como curvas de duración o como funciones de distribución de probabilidad acumulada (CDF).

En cada una de ellas se representa el porcentaje de tiempo que un determinado flujo es igualado o excedido, lo que se interpreta como la probabilidad de que una cuenca vertiente genere un flujo por encima de dicho umbral establecido y para un período de retorno dado. Esto se llama "Análisis de producción". El proceso de preparación de datos es el siguiente:

- 1.- Establecer una serie o intervalos de clase que cubran el rango de flujos observados en orden creciente de magnitud.
- 2.- Tabular el número de observaciones en cada intervalo de clase.
- 3.- Sumar de forma acumulada el número de observaciones de cada intervalo de clase, comenzando con las de mayor flujo.
- 4.- Computar el porcentaje de todas las observaciones que aparecen en cada clase.

Casos en los que se debe utilizar un método de análisis determinado u otro:

- Usar series anuales para predecir el tamaño de crecidas en corrientes de pluviales (tormentas) o canales de drenaje.
- Usar series parciales para predecir condiciones de bajo flujo, para dilución de aguas residuales y suministro de aguas.
- Usar series completas para determinar periodos largos de confianza, en sistemas de suministro de agua o generación de energía.

### **5.2.2. Aumento estadístico de la información disponible**

- a) Intercorrelación con la experiencia registrada en una o más cuencas adyacentes de similares características donde existan series largas de datos.
- b) Correlación entre la precipitación y la escorrentía. Cuando existan más datos de precipitación que de escorrentía se calculan estos últimos a partir de la correlación existente con la precipitación.
- c) Generación estadística de valores adicionales.

### 5.3. TRANSFORMACIÓN LLUVIA-ESCORRENTÍA

En la Hidrología superficial, uno de los pilares fundamentales, es poder calcular la cantidad de escorrentía que se va a generar si se produce una precipitación determinada (calcular el *hidrograma* que va a generar un *hietograma*). El tema es muy complejo y en el estudio de una cuenca con datos reales es necesario utilizar un modelo de ordenador. En este tema abordamos solamente los primeros pasos en esa dirección.

De forma esquemática las fases del proceso son:

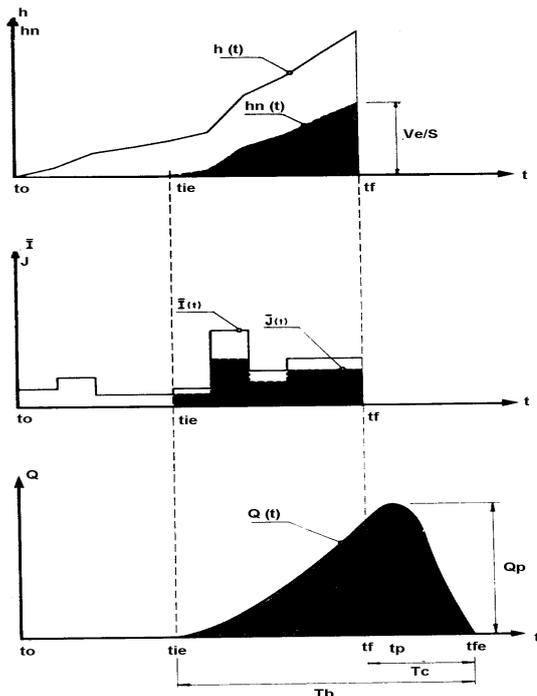
- 1) Separación de *la lluvia neta*: calcular qué parte de la precipitación caída va a generar escorrentía superficial.
- 2) Calcular *la escorrentía producida por esa precipitación neta*. Un método de cálculo puede ser el hidrograma unitario.
- 3) Calcular la variación del hidrograma a medida que el flujo circula a lo largo del cauce. A esto se denomina "tránsito de avenidas" (*flood routing*).
- 4) Opcionalmente, y teniendo en cuenta la geometría del cauce en una zona concreta, calcular las áreas que quedarán inundadas cuando el hidrograma calculado en los pasos anteriores pase por una sección determinada (Programa HEC-RAS).

#### Relación precipitación-escorrentía

Para poder realizar una transformación de lluvia (precipitación) a caudal de escorrentía se debe considerar:

- 1.- Que tipo de caudal se quiere calcular. Desde el punto de vista hidráulico la sección de cálculo para evacuar dicho caudal se referirá al caudal máximo que se produce como consecuencia de la precipitación.
- 2.- La lluvia a considerar que llega al sistema (río, red de saneamiento, etc.) será la lluvia neta, es decir, el agua que queda después de considerar las intercepciones producidas por las superficies, la vegetación, infiltración, evapotranspiración, etc.
- 3.- El diseño hidráulico para redes de saneamiento pluviales tendrá por misión canalizar la escorrentía producida por la lluvia en la sección de cálculo.

Antes de entrar en el cálculo del caudal basado en datos de precipitación cabe analizar las relaciones existentes entre "**Pluviograma**", "**Hietograma**" e "**Hidrograma**" de una determinada lluvia.



**Figura 5.4.** Relación entre Pluviograma, Hietograma e Hidrograma.

$t_0$  = instante en el que se inicia la lluvia.  
 $t_{ie}$  = instante en el que comienza a pasar la escoorrentía por la sección de cálculo.

$t_f$  = instante en el que finaliza la lluvia.  
 $t_{fe}$  = instante en el que deja de pasar escoorrentía por la sección de cálculo.

$Q_p$  = caudal máximo en el instante  $t_p$  (tiempo de punta).

$t_b$  = tiempo base, coincide con la duración del Hidrograma.

$t_c$  = tiempo de concentración.

$V_e/S$  es igual a la altura del pluviograma ( $h_n(t_i)$ ) e igual al área encerrada por el hietograma.

$V_e$  es el área encerrada por el hidrograma y es igual a la integral de  $Qdt$ .

Para estimar la escoorrentía directa es necesario la utilización conjunta de datos de precipitación sobre la cuenca, con datos de caudales evacuados por la misma a lo largo de una tormenta. El caudal o escoorrentía total será la suma de la escoorrentía directa y el caudal base. Si bien esta división arbitraria de componentes rápidos y lentos ha sido ampliamente utilizada para la identificación de la escoorrentía directa, debido a la subjetividad, no existe ningún método obvio para la separación de ambos componentes en el hidrograma, sino que se basan en consideraciones más o menos empíricas.

La representación gráfica de la descarga de una corriente en una estación de muestreo simple se llama hidrograma (Figura 5.5). Si analizamos este hidrograma o curva de caudales en función del tiempo  $Q=f(t)$ , típico para una tormenta, nos encontraríamos con una gráfica de variación de caudal con el tiempo que tiene forma de campana disimétrica, en donde pueden distinguirse cuatro partes:

- \* Curva de concentración que corresponde al ascenso de la crecida.
- \* Pico del hidrograma que corresponde al caudal máximo.
- \* Curva de descenso o disminución progresiva del caudal (correspondiente a la escoorrentía superficial, hipodérmica y subterránea) y se puede decir que cumple la ecuación exponencial.

$$Q_t = Q_0 e^{-at}$$

$Q_t$  = caudal en el instante  $t$ .

$Q_0$  = caudal en el instante  $t_0$ .

$a$  = coeficiente de descenso.

$e^{-a} = k$  = constante de agotamiento.

- \* Curva de agotamiento o decrecimiento del caudal a lo largo de un tiempo suficientemente largo de forma que la escorrentía superficial es cero y el río sólo se alimenta de la escorrentía subterránea.

Dentro del hidrograma de escorrentía directa (HED) (*Figura 5.5*) se incluye también:

- \* Tiempo de crecida o tiempo transcurrido desde el comienzo del ascenso hasta la punta (máximo).

- \* Tiempo de respuesta o "lag" como tiempo transcurrido desde el centro de gravedad de hietograma (aguacero) hasta la punta del hidrograma y representa el retraso de la escorrentía, El caudal máximo procede principalmente de la escorrentía superficial.

- \* Tiempo base como el que transcurre entre el comienzo de la crecida y el final de la escorrentía directa.

- \* Tiempo de concentración el que va desde el final de la lluvia neta o efectiva y el final de la escorrentía directa, es decir el tiempo que tarda en llegar al aforo la última gota de lluvia neta caída en el extremo más lejano de la cuenca y que circula como lluvia neta.

$$t_c = \frac{1,8(1,1 - C)(3,28D)^{0,5}}{(S)^{0,33}}$$

$t_c$  = tiempo de concentración, min.

$C$  = coeficiente de escorrentía.

$D$  = distancia del flujo superficial, m.

$S$  = pendiente, %.

El tiempo de respuesta y el tipo de curva de HED dependen de la forma de la precipitación y de las características de la cuenca (tamaño, pendiente, curvatura y capacidad de almacenamiento del cauce).

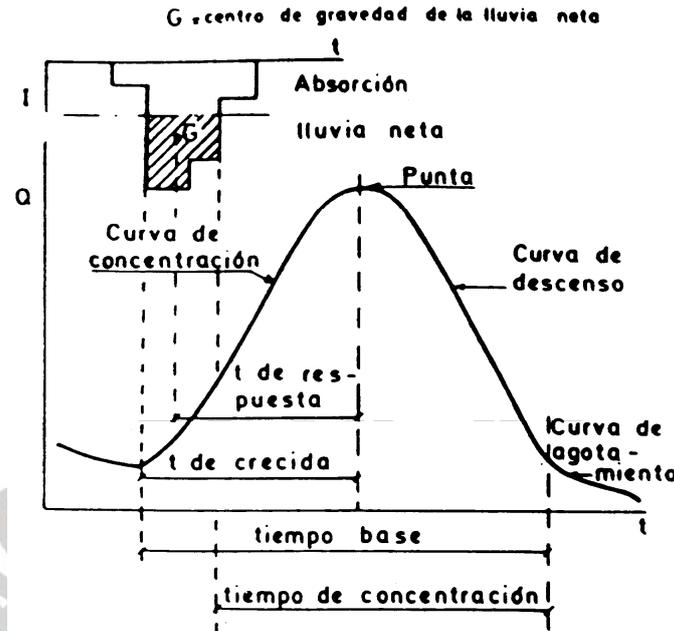


Figura 5.5. Hidrograma

Una vez que se ha estudiado el régimen de precipitaciones de una cuenca, obtenido una lluvia de diseño asociada a un determinado periodo de retorno y estimado las pérdidas con alguno de los modelos disponibles, de manera tal de encontrar la lluvia neta o efectiva, el paso siguiente es transformar esa lluvia efectiva en escorrentía o caudal.

Esta transformación puede llevarse a cabo **mediante diferentes métodos**. El más popular es el del hidrograma unitario, introducido por Sherman en los años 30. También es posible la utilización de modelos de depósito y, si el nivel de información es el adecuado, también se pueden usar modelos basados en las ecuaciones del movimiento del fluido, especialmente en zonas urbanas.

### 5.3.1. MÉTODO RACIONAL

Es uno de los procedimientos más sencillos para ver la influencia de la lluvia en la forma del hidrograma. Permite calcular el caudal punta (máximo) a partir de la intensidad de precipitación y en función de las características de la cuenca (coeficiente de escorrentía,  $C$ ).

Parte de dos hipótesis:

- 1) La precipitación es uniforme en el espacio y en el tiempo.
- 2) Coeficiente de escorrentía constante en toda la cuenca.

Se considera que si las lluvias se aplican con velocidad o intensidad constantes durante un período suficientemente largo, en algún momento el sistema alcanzará el equilibrio o estado máximo. El tiempo necesario para llegar a este equilibrio se denomina tiempo de concentración ( $t_c$ ). Para pequeñas áreas impermeables donde la lluvia persiste con un ritmo uniforme durante un período mínimo de  $t_c$ , el máximo escurrimiento será igual al ritmo de la lluvia y, por lo tanto, podemos calcular el escurrimiento o escorrentía como producto de la intensidad de la lluvia ( $i$ ) y el área de la cuenca ( $A$ ).

$$Q = iA_d$$

Dado que pocas superficies son completamente impermeables, no toda la precipitación alcanza la salida de la cuenca, con lo que la ecuación nos quedaría de la siguiente forma:

$$Q = \frac{iCA}{3,6}$$

$Q$  = caudal máximo,  $m^3/s$ .

$C$  = coeficiente de escorrentía.

$I$  = intensidad media de precipitación,  $mm/h$ .

$A$  = área de la cuenca,  $km^2$ .

En esta ecuación aparece la hipótesis de distribución triangular de la escorrentía, que no debe inducir a la idea de que con dicha ecuación se puede llegar a estimar el hidrograma total de la crecida, ya que únicamente se puede emplear para calcular el caudal máximo.

En el hidrograma de escorrentía aparece una rama ascendente de pendiente relacionada con la intensidad de la precipitación, y una rama descendente, normalmente más suave, debido al almacenamiento superficial y escorrentía subsuperficial.

El perfil triangular de pendientes semejantes a ambos lados del pico de escorrentía, que caracteriza a la fórmula racional, nos indica que ésta estima con precisión caudales generados para áreas o cuencas pequeñas de baja capacidad de retención, características que coinciden con las de cuencas urbanas de pequeñas dimensiones, por lo que la fórmula racional ha tenido gran aplicación en este campo.

Este método racional es empleado en superficies menores de 20 Ha, donde la superficie urbanizada supere el 80%, y para tiempos de concentración inferiores a 15 minutos.

La intensidad de precipitación es la correspondiente a una duración de tormenta igual al tiempo de concentración ( $t_c$ ), por lo que esto se aplicará a cuencas con tiempos de concentración pequeños.

Los valores de los coeficientes de escorrentía que se aplican a tormentas con periodos de retorno de 5 a 10 años se recogen en la tabla 5.1. Para el caso de tormentas de alta intensidad se requiere de coeficientes mayores, debido principalmente a las pérdidas por infiltración. Estas tormentas tienen un efecto proporcionalmente menor sobre la escorrentía.

**Tabla 5.1.** Valores de los coeficientes de escorrentía.

<b>Superficie</b>	<b>Coefficiente de escorrentía</b>
Empresas	
Centro	0,70 a 0,95
Barrio	0,50 a 0,70
Residencial	0,30 a 0,75
Industrial	
Ligero	0,50 a 0,80
Pesado	0,60 a 0,90
Parques	0,20 a 0,35
Ferrocarril	0,20 a 0,35
Pavimentos	
Asfálticos	0,70 a 0,95
Bloque	0,70 a 0,85
Césped, suelo arcilloso	
Llano, 2%	0,05 a 0,10
Medio, 2 a 7%	0,10 a 0,15
Alto, 7%	0,15 a 0,20
Césped, suelo pesado	
Llano, 2%	0,13 a 0,17
Medio, 2 a 7%	0,18 a 0,22
Alto, 7%	0,25 a 0,35

### 5.3.2. HIDROGRAMA UNITARIO (HU)

El hidrograma unitario propuesto por Sherman (1932), permite calcular la escorrentía que producirán unas precipitaciones determinadas, es decir, es un método que permite transformar la lluvia efectiva en escorrentía directa.

Se define el *Hidrograma Unitario de una cuenca* como el hidrograma de escorrentía directa que se produciría en la salida de la cuenca como consecuencia de una lluvia efectiva unitaria (por ejemplo 1cm ó 1mm), de intensidad constante a lo largo de la duración efectiva y distribuida homogéneamente en toda la superficie de la cuenca. A partir de este diagrama unitario podremos determinar el hidrograma producido por cualquier lluvia.

Dicho método se basa en dos hipótesis:

a.- La respuesta de la cuenca ante el proceso de escorrentía sigue un comportamiento lineal. Esto implica que son aplicables los principios de proporcionalidad y superposición.

b.- No se tiene en cuenta la variabilidad temporal de las características de la cuenca, de manera que una misma lluvia efectiva produce siempre el mismo hidrograma de escorrentía directa.

Así, en virtud de estas hipótesis, las condiciones que deben cumplirse son las siguientes:

1. La lluvia efectiva tiene que tener una intensidad constante dentro de la duración efectiva. Esta condición exige que las tormentas deban ser de corta duración.

2. La lluvia efectiva deberá estar uniformemente distribuida a través de todo el área de drenaje. Para ello, el área de drenaje no deberá ser muy grande o bien deberá ser subdividida en subcuencas de modo que se cumpla esta suposición.

3. El tiempo base del hidrograma de escorrentía directa resultante de una lluvia efectiva de una duración dada debe ser constante. Así es necesario asumir que los hidrogramas de escorrentía superficial generados por lluvias netas de igual duración tienen el mismo tiempo base, independientemente de la intensidad de dichas lluvias netas.

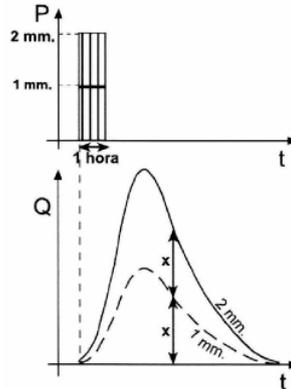
4. El hidrograma unitario de una duración determinada debe ser único para una cuenca e invariante en el tiempo. Para que se cumpla esta condición, las características del cauce no deben sufrir cambios y la cuenca no debe tener almacenamientos apreciables. Esta condición se infringe cuando la cuenca estudiada contiene numerosos embalses o las corrientes fluyen por las planicies de inundación, produciendo así un considerable almacenamiento.

### **Principio de proporcionalidad**

Para una lluvia efectiva de una duración dada, el volumen de escorrentía directa es proporcional a la intensidad de dicha lluvia. Por lo tanto, como los hidrogramas de escorrentía directa correspondientes a lluvias efectivas de la misma duración tienen el mismo tiempo base, las ordenadas de dichos hidrogramas serán por tanto proporcionales a la intensidad de la lluvia efectiva.

Así, si se dispone del hidrograma unitario de una cuenca (1mm de precipitación durante una hora, por ejemplo) y se registra una precipitación de 2 mm durante una

hora, para obtener el hidrograma producido por esta precipitación, bastará con multiplicar por dos las ordenadas de todos los puntos del hidrograma (Figura 5.6).

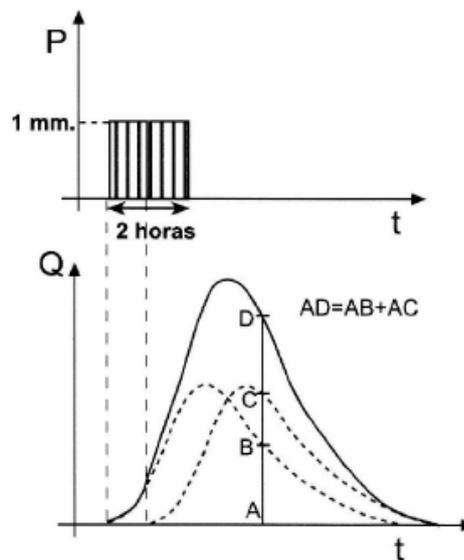


**Figura 5.6.** Hidrograma de escorrentía directa correspondiente a una precipitación de 2 mm durante una hora.

**Principio de superposición**

Los caudales de un hidrograma total de escorrentía directa producidos por lluvias efectivas sucesivas pueden ser calculados sumando los caudales de los hidrogramas de escorrentía directa correspondientes a las lluvias efectivas individuales, teniendo en cuenta los tiempos en que ocurren tales lluvias.

De esta manera si se posee el hidrograma unitario de una cuenca (1mm de precipitación durante una hora, por ejemplo), y llueve 1mm durante 2 horas, bastará dibujar dos hidrogramas unitarios desplazados horizontalmente entre sí 1 hora y, finalmente, sumar las ordenadas de sus puntos. (Figura 5.7).



**Figura 5.7.** Hidrograma de escorrentía directa correspondiente a una precipitación de 1mm durante dos horas.

Ambas propiedades posibilitan el que, si se conoce el hidrograma unitario de una cuenca, se pueda construir el hidrograma producido por cualquier precipitación.

Por ejemplo, si tenemos un hidrograma unitario, donde  $U(1), U(2), \dots, U(k)$  representan los caudales de escorrentía directa producida por una tormenta de duración  $T$  y lluvia  $P$ , y queremos obtener el hidrograma producido por una tormenta representada por un hietograma de intervalos de precipitación  $P_1$  y  $P_2$  (Figura 5.8):

\* Para el primer intervalo de tiempo la precipitación caída en la cuenca sería  $P_1$  y la respuesta generada por la cuenca a esta precipitación, según la propiedad de superposición, sería la siguiente:

$$Q(1) = P_1/P, U(1) \text{ y en general } Q(k) = P_1/P, U(k)$$

\* En el segundo intervalo de tiempo la precipitación es  $P_2$  y la respuesta generada sería:

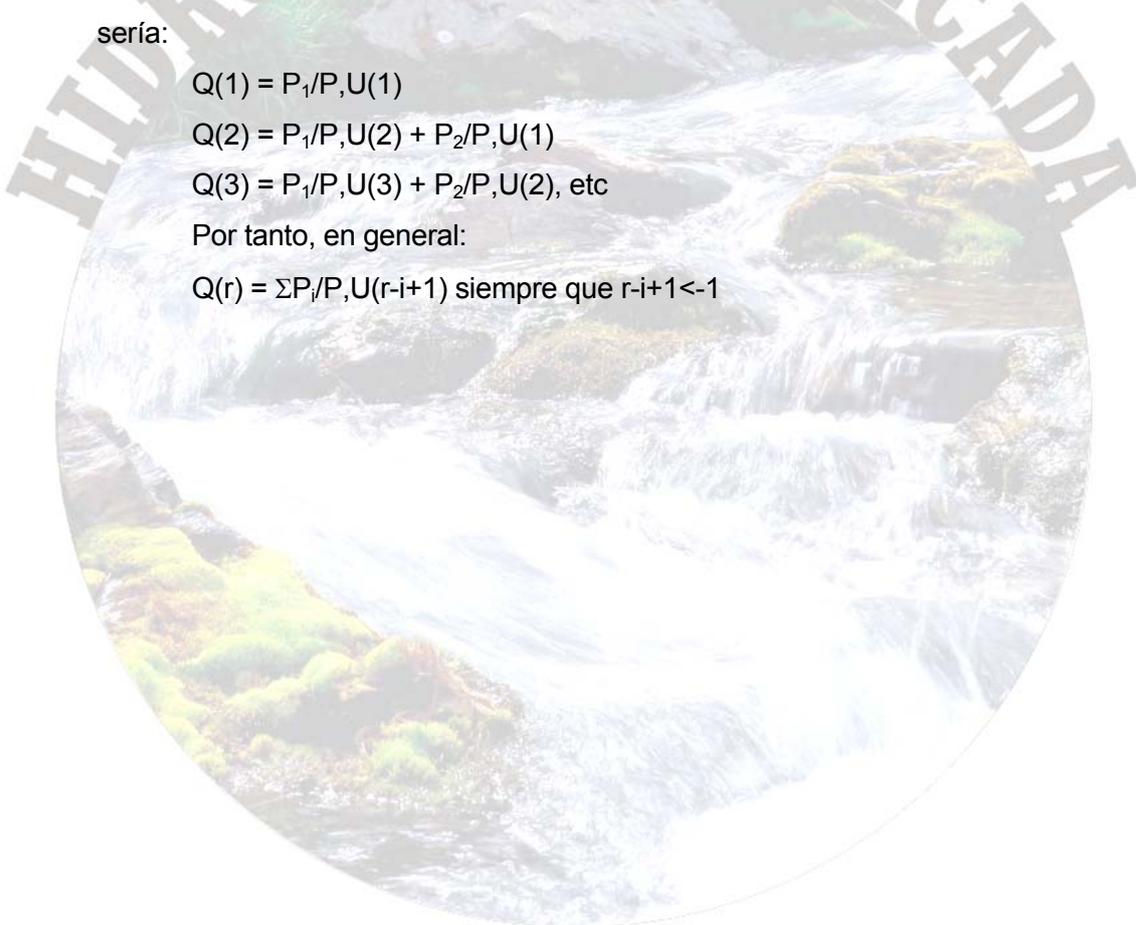
$$Q(1) = P_1/P, U(1)$$

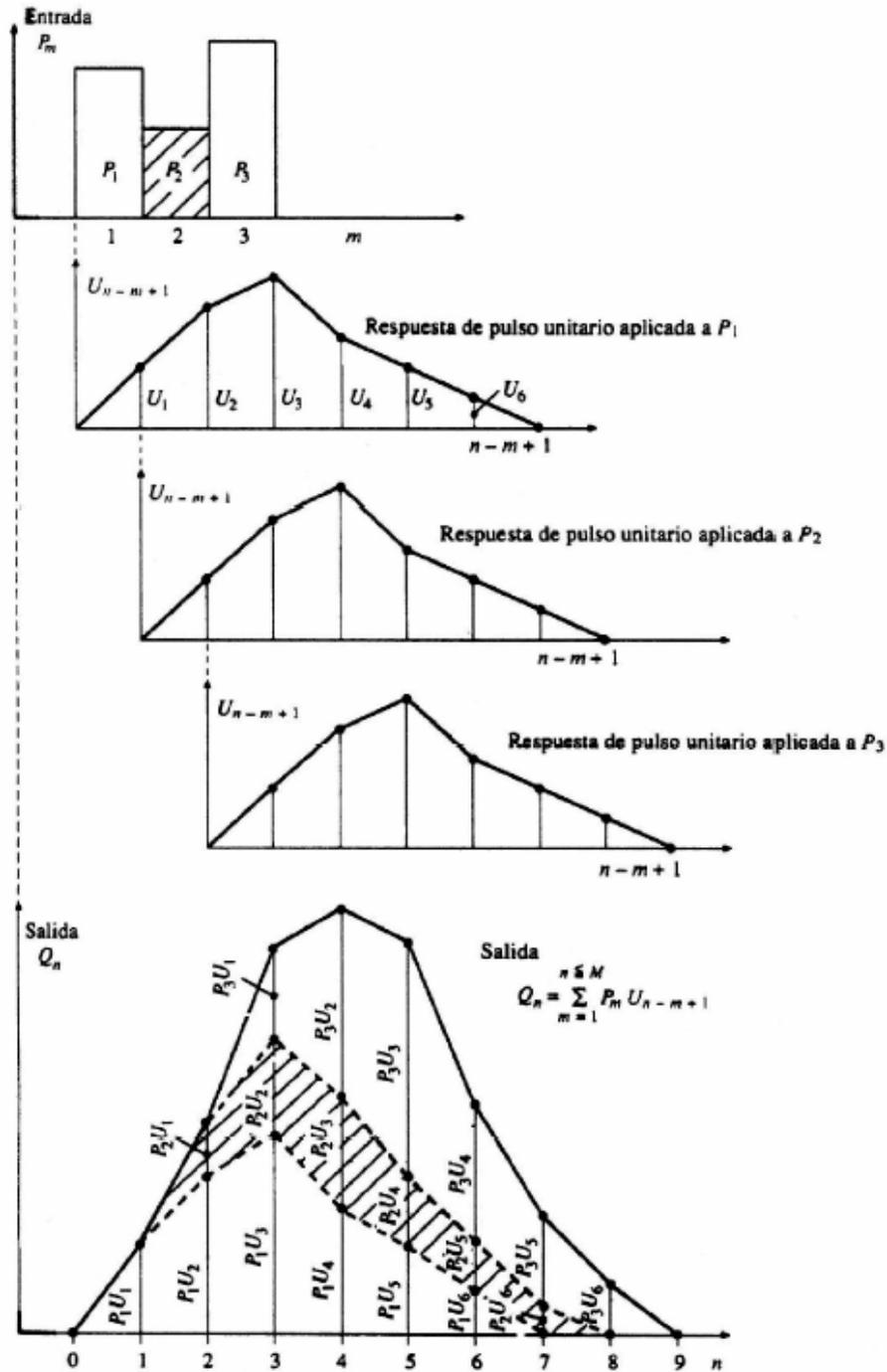
$$Q(2) = P_1/P, U(2) + P_2/P, U(1)$$

$$Q(3) = P_1/P, U(3) + P_2/P, U(2), \text{ etc}$$

Por tanto, en general:

$$Q(r) = \sum P_i/P, U(r-i+1) \text{ siempre que } r-i+1 < -1$$





**Figura 5.8.** Hidrograma de escorrentía directa correspondiente a una lluvia efectiva compuesta por 3 bloques ( $m=3$ ) de igual duración e intensidades  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ .

Es decir para cada precipitación del hietograma se obtiene un hidrograma proporcional al unitario y desplazado una unidad de tiempo respecto al anterior, siendo el hidrograma resultante la suma de todos ellos. En términos de intensidad de lluvia ( $I$ ) y tiempo de duración de la misma ( $T$ ) la relación sería:

$$Q(r) = T \cdot \sum I_i \cdot U(r-i+1)$$

El método del hidrograma unitario, si es aplicado correctamente, proporciona unos resultados bastante aceptables, con la ventaja de la obtención de un hidrograma total y no una estimación del caudal máximo o punta, como sucede en el caso de las formulas empíricas.

La obtención del hidrograma unitario se puede realizar a partir del hietograma de precipitación efectiva y del hidrograma de escorrentía directa, donde para n ordenadas de P(t) y m ordenadas de escorrentía, la relación sería:

$$Q(1) = P_1 U(1)$$

$$Q(2) = P_1 U(2) + P_2 U(1)$$

$$Q(3) = P_1 U(3) + P_2 U(2) + P_3 U(1)$$

De esta forma se obtendría una matriz donde habría que calcular el vector U.

**Otro método sería construir el hidrograma unitario** a partir del hidrograma de escorrentía fluvial y del hietograma. Para ello hay que seguir los siguientes pasos:

1. Construir un hidrograma unitario (HU) eliminando la contribución del agua subterránea, a esto se denomina hidrograma de separación. Para el trazado de este hidrograma existen varios métodos empíricos basados en el área de la cuenca. El procedimiento consiste en ampliar la línea de base que existe antes del inicio de la precipitación a un punto directamente superior al de descarga del HED (línea AB, *Figura 5.9*). De este punto se dibuja una línea recta para cortar el hidrograma N días después del pico. El valor de N se calcula mediante la ecuación:

$$N = 0,83 A^{0,2}$$

donde A es el área de la cuenca en km<sup>2</sup>.

2. Estimar el volumen total de agua que aparece como escorrentía directa. El área bajo la curva de HED es igual al volumen de escorrentía directa.

3. Convertir el volumen directo de escorrentía directa a una altura de escorrentía de tormenta, que se calcula dividiendo el volumen directo de escorrentía directa por el área de la cuenca (m<sup>2</sup>) y multiplicar por un factor de conversión de 100 cm/m.

4. Dividir las ordenadas de la HED para la altura de escorrentía de tormenta computada en el tercer estado. Los cocientes son las ordenadas de la HU y las unidades serán m<sup>3</sup>/s.cm.

La unidad de duración del HU viene determinada por el hietograma de la tormenta seleccionada para el desarrollo del HU.

Dado que el hidrograma unitario se basa en la utilización de datos exclusivamente de precipitación y escorrentía obtenidos en un punto de medición concreto, el hidrograma así obtenido solamente puede ser utilizado con fiabilidad en dicho punto, lo que supone una limitación del modelo, ya que sólo podría aplicarse, en principio, a puntos dotados de limnógrafos.

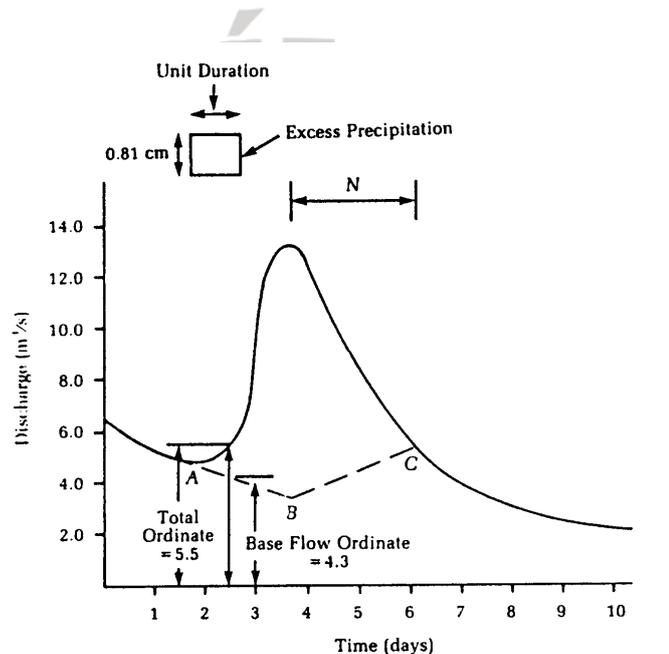


Figura 5.9. Hidrograma del río

### Aplicación del método del Hidrograma Unitario

Una vez que se ha obtenido el hidrograma unitario correspondiente a la duración de una lluvia efectiva determinada, la aplicación del método del hidrograma unitario para encontrar el hidrograma de escorrentía directa puede resumirse en los siguientes pasos:

- Determinar el hietograma de la lluvia de diseño.
- Determinar el hietograma de lluvia efectiva a través de la estimación de las abstracciones.
  - Ajustar la duración del hidrograma unitario según se necesite, a través del hidrograma en S. Esto puede ser necesario dado que el intervalo de tiempo utilizado para definir las ordenadas del hietograma de lluvia efectiva debe ser el mismo que el especificado para el hidrograma unitario.
- Calcular el hidrograma de escorrentía directa a través de la ecuación discreta de convolución.

- Calcular el hidrograma de caudal sumando un flujo base estimado al hidrograma de escorrentía directa.

A pesar de que el hidrograma unitario fue desarrollado originalmente para cuencas grandes, se ha encontrado que puede aplicarse a cuencas pequeñas menores de 0,5 hectáreas hasta cuencas de 25 km<sup>2</sup>.

Por último cabe comentar que dicho método no se puede aplicar a aquella escorrentía originada por la nieve o el deshielo.

### 5.3.3. HIDROGRAMAS UNITARIOS SINTÉTICOS

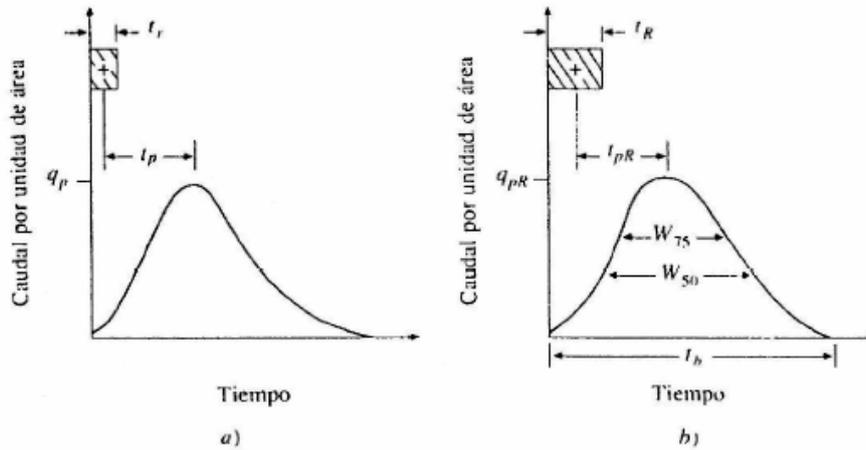
El hidrograma unitario calculado a partir de la precipitación y los caudales registrados en una cuenca, se aplica exclusivamente a dicha cuenca y al punto o lugar del cauce donde se han medido dichos caudales. Los hidrogramas unitarios sintéticos, sin embargo, se utilizan para calcular hidrogramas unitarios en otros puntos del cauce dentro de la misma cuenca, o bien, en cuencas adyacentes de características similares. Existen tres tipos de hidrogramas unitarios sintéticos:

- Los que relacionan las características del hidrograma unitario con las características de la cuenca: **Snyder**.
- Los basados en hidrogramas unitarios adimensionales: Soil Conservation Service (SCS).
- Los basados en modelos de almacenamiento y tránsito de la cuenca: Clark.

#### 5.3.3.1. Hidrograma unitario sintético de SNYDER

Snyder (1938) realizó estudios en cuencas de los Montes Apalaches (EEUU), con áreas de cuenca comprendidas entre 30 y 30000 km<sup>2</sup>. Éste encontró relaciones sintéticas de un *hidrograma unitario estándar* a partir de las cuales pueden calcularse las características de un *hidrograma unitario requerido* (Figura 5.10). Dichas características son:

1. Retardo de la cuenca,  $tpR$ : diferencia de tiempo entre el centroide del hidrograma de exceso de lluvia y el pico del hidrograma unitario.
2. Caudal punta o pico por unidad de área de la cuenca,  $q_pR$ .
3. Tiempo base,  $t_b$ .
4. Ancho  $W_{50}$  (en unidades de tiempo) del hidrograma unitario al 50% del caudal pico.
5. Ancho  $W_{75}$  (en unidades de tiempo) del hidrograma unitario al 75% del caudal pico.



**Figura 5.10.** Hidrograma sintético de Snyder. a) Hidrograma unitario estándar ( $t_p=5,5t_r$ ). b) Hidrograma unitario requerido ( $t_{pR} 5,5t_r$ ).

Snyder definió el *hidrograma unitario estándar* como aquel que cumple lo siguiente:

$$t = \frac{t_p}{5,5} \quad [\text{h}]$$

siendo:

$t_r$ , la duración de la lluvia efectiva del hidrograma unitario estándar

$t_p$ , el tiempo de retardo del hidrograma unitario estándar.

Además, Snyder encontró que para un *hidrograma unitario estándar*.

**A. El tiempo de retardo ( $t_p$ ) es:**

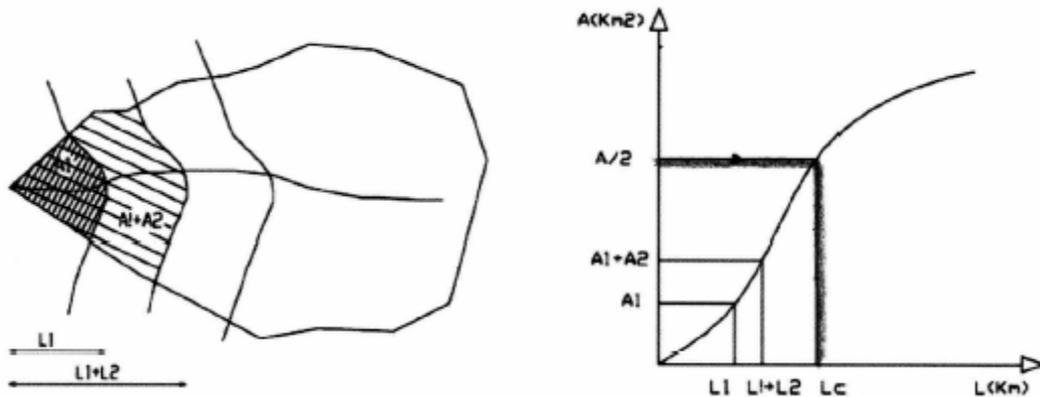
$$t_p = 0,75C_t(LL_c)^{0,3} \quad [\text{h}]$$

donde:

$C_t$ : es el coeficiente de retardo de Snyder, que varía entre 1,35 (cuencas con pendientes altas) y 1,65 (cuencas con pendientes bajas).

$L$ : es la longitud del cauce principal hasta la divisoria de aguas arriba (km).

$L_c$ : es la distancia desde la salida de la cuenca hasta el punto del cauce principal más cercano al centroide del área de la cuenca (km). Este parámetro puede determinarse representando gráficamente la relación existente entre las subáreas comprendidas entre curvas de nivel acumuladas y las sucesivas longitudes del curso principal comprendidas en dichas subáreas, también acumuladas (Figura 5.11).



**Figura 5.11.** Esquema de la cuenca con algunas curvas de nivel. Gráfica longitudes acumuladas del cauce principal comprendidas en las subáreas - subáreas acumuladas comprendidas entre las curvas de nivel.

Sobre esa relación, que constituye una curva de masa, para el 50% del área acumulada total ( $A/2$ ) se obtiene el  $L_c$  buscado en el eje de longitudes (Figura 5.11).

**B. El caudal pico por unidad de área es:**

$$q_p = \frac{2,75C_p}{t_n} \quad [m^3/s \text{ km}^2]$$

donde:

$C_p$ , es un coeficiente que varía normalmente entre 0,56 y 0,69, aunque para áreas de montaña con fuertes pendientes este último valor puede ser superado, mientras que en regiones llanas el coeficiente  $C_p$  puede ser inferior a 0,5.

Para **calcular los coeficientes de  $C_t$  y  $C_p$**  de una cuenca instrumentada se sigue el siguiente procedimiento:

- Se mide  $L$  y  $L_c$  utilizando un mapa de la cuenca.
- A partir de un *hidrograma unitario deducido* con una lluvia efectiva y un *hidrograma de caudales*, que será el hidrograma unitario requerido, se obtiene:
  - a. la duración efectiva,  $t_R$ .
  - b. el tiempo de retardo en la cuenca,  $t_{pR}$ .
  - c. el caudal pico por unidad de área de drenaje,  $q_{pR}$ .
- Si  $t_{pR} \approx 5,5t_R$ , entonces se considera que  $t_{pR}=t_p$ ,  $q_{pR}=q_p$ , y se calculan  $C_t$  y  $C_p$  de las ecuaciones correspondientes.
- Si  $t_{pR}$  es muy distinto de  $5,5t_R$ , entonces se trata de una lluvia efectiva de una duración  $t_R$  distinta de la unitaria ( $t_r$ ) definida por Snyder. Así, el tiempo de retardo resulta modificado y se expresa recalculándolo en función de la nueva duración:

$$t_{pR} = t_p + \frac{t_R - t_r}{4} \longrightarrow t_p = t_{pR} + \frac{t_r - t_R}{4}$$

que se resuelve junto con:

$$t_p = 5,5t_r$$

Así, a partir de estas dos ecuaciones obtenemos  $t_r$  y  $t_p$ .

- Una vez obtenido  $t_r$  y  $t_p$ , y considerando  $t_{pR}=t_p$  y  $q_{pR}=q_p$ , se calcula:

$C_t$ , a partir de la ecuación

$$t_p = 0,75C_t(LL_t)^{0,3}$$

$C_p$ , a partir de la ecuación

$$q_p = \frac{2,75C_p}{t_p}$$

### 5.3.3.2. Hidrograma unitario adimensional SCS

El método SCS (Soil Conservation Center), como ya se ha dicho, es un hidrograma unitario que requiere una base de datos similar a la de otros métodos: cuenca hidrográfica, factor de escorrentía, tiempo de concentración y precipitación. Si se toma en cuenta la distribución de la precipitación en función del tiempo, el método SCS es mucho más sofisticado. Ya que, por ejemplo, el factor de infiltración va disminuyendo a la vez que la tormenta se alarga en el tiempo.

Por lo tanto se puede decir que este método tiene dos partes. En la primera parte, se hace una estimación del volumen de escorrentía resultante de una precipitación, escorrentía directa, ya visto en el capítulo de infiltración. En la segunda, se determina el tiempo de distribución de la escorrentía, incluyendo el caudal punta.

El método SCS se puede utilizar con todo tipo de propósitos, como son los sistemas de desagües para tormentas, zanjas pequeñas de drenaje y canales abiertos, así como en disipadores de energía. No en vano, el método SCS forma parte de la normativa del Ministerio de Obras Públicas (1990) en el estado español para los estudios previos a la construcción de carreteras.

#### Generación del hidrograma

Para la distribución en el tiempo de la escorrentía se hace uso del hidrograma unitario adimensional desarrollado por el Servicio de Conservación de Suelos, cuya forma está predeterminada.

Dependiendo de cómo sea la cuenca hidrográfica, en cuanto a sus características, el hidrograma tendrá una forma más o menos picuda. Es decir, en zonas montañosas, siempre dependiendo del resto de características de la cuenca, el diagrama presentará una forma mucho más picuda que en una cuenca costera donde las pendientes sean prácticamente nulas.

El hidrograma adimensional del SCS (Servicio de Conservación de Suelos de los EEUU) es un hidrograma unitario sintético en el cual se expresan los caudales en función del caudal pico ( $q_p$ ) y los tiempos en función del tiempo al pico ( $T_p$ ) (Figura 5.12a). Los valores de  $q_p$  y  $T_p$  se estiman basándose en el hidrograma unitario triangular del SCS (Figura 5.12b). Cuando la escorrentía superficial alcanza el máximo caudal ( $q_p$ ) la relación tiene un valor de 1.

Basándose en una gran cantidad de hidrogramas unitarios, el SCS sugiere que el tiempo de recesión puede aproximarse a  $1,67 T_p$ . Como el área del hidrograma es igual a  $1 \text{ cm}$ , se demuestra que:

$$q_p = \frac{2,08A}{T_p}$$

donde:

$q_p$  es el caudal pico,  $\text{m}^3/\text{s}\cdot\text{cm}$ .

$A$  es el área de drenaje,  $\text{km}^2$

$T_p$  es el tiempo al pico, h

*Tiempo de concentración de la cuenca,  $T_c$* : es el tiempo que tarda una gota de agua en trasladarse desde el punto más alejado de la cuenca hasta la salida. De acuerdo con esta definición, según análisis realizados en cuencas españolas, podría calcularse el tiempo de retardo,  $t_p$ , también llamado *lag*, como:

$$t_{lag} \approx 0,35 T_c$$

De esta manera el tiempo al pico será:

$$T_p = \frac{t_r}{2} + t_p$$

donde  $t_r$  es la duración de la lluvia efectiva.

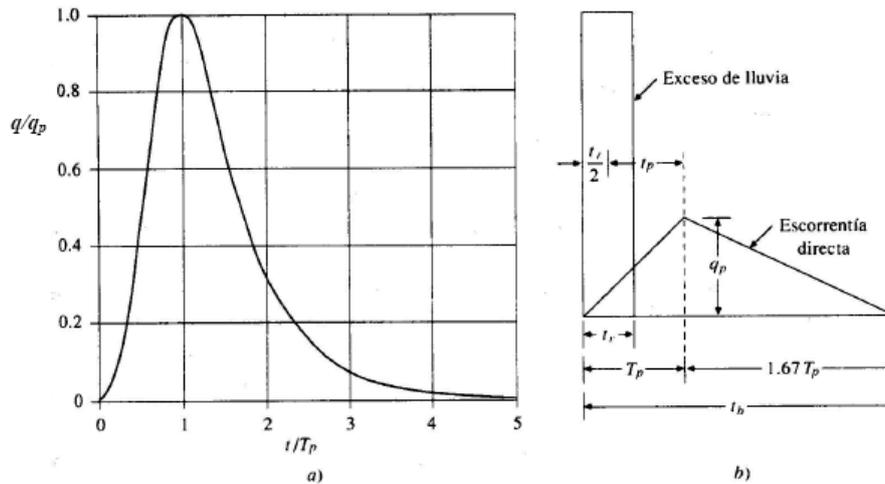


Figura 5.12: a) hidrograma adimensional del SCS; b) hidrograma unitario triangular

Tras analizar un gran número de hidrogramas se encontró que como norma general se verifica lo siguiente:

$$T_R = 1,67 T_p$$

donde:

$T_p$  = período de elevación o tiempo hasta el caudal pico.

$T_R$  ( $t_r$ )= tiempo desde el caudal pico hasta el final del escorrentía directo-recesión.

### 5.3.3.3. Hidrograma unitario de CLARK. Método de las isocronas

El método se basa en la distribución de la superficie de la cuenca entre líneas isócronas para computar el volumen de agua caído sobre cada una de esas superficies y considerar el retardo producido por el tránsito del agua a lo largo de la cuenca. Las curvas isocronas son curvas que unen aquellos puntos de la cuenca que tienen igual tiempo de desagüe (Figura 5.13a). Para construir el hidrograma unitario de Clark, a partir de las curvas isocronas trazadas por cada cierto intervalo de tiempo (por ej., 1 hora), se dibuja un histograma área-tiempo (Figura 5.13b). Si se aplica uniformemente una lluvia efectiva instantánea de 1 cm en toda la cuenca, el histograma área-tiempo multiplicado por 1 cm dará el volumen desaguado por la cuenca al final de cada intervalo de tiempo definido en el histograma, siendo éste el hidrograma unitario instantáneo (HUI) de la cuenca. Para transformar el área en caudales, es necesario aplicar la fórmula:

$$q = \frac{2,78A}{\Delta t}$$

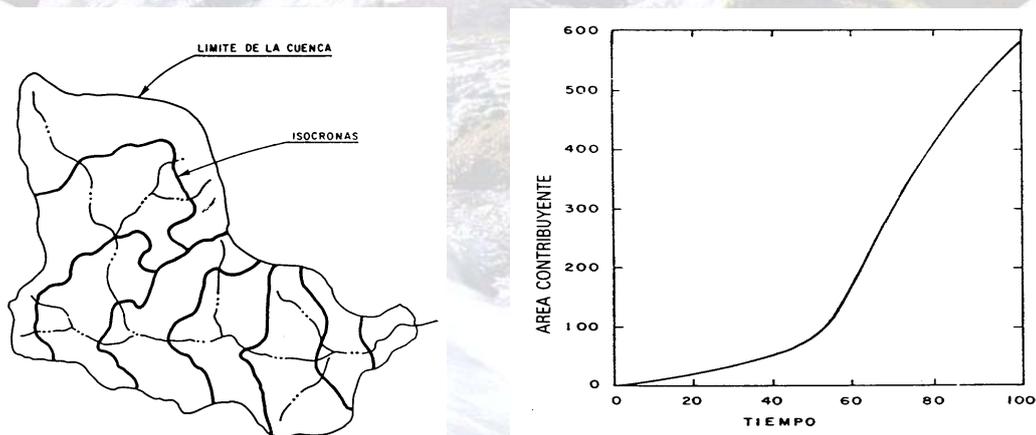
Donde:

$q$  es el caudal en  $[\text{m}^3/\text{s}\cdot\text{cm}]$

$A$  área de la cuenca,  $\text{km}^2$

$\Delta t$ , intervalo de tiempo en función del cual está definido el histograma área-tiempo, en [h].

Para obtener el hidrograma unitario correspondiente a una duración cualquiera de lluvia neta, puede usarse el método que se explica en el siguiente apartado. Sin embargo, también puede considerarse que el hidrograma unitario obtenido es el correspondiente a una duración igual al intervalo con que es definido el histograma área-tiempo, ya que es indiferente que la lluvia neta unitaria caiga instantáneamente o que caiga en un tiempo inferior o igual al definido en dicho histograma. Clark propone que este hidrograma sea transitado por algún método de almacenamiento, por ejemplo, un depósito, para simular las retenciones que se producen en la cuenca y atenuar los picos.



**Figura 5.13:** a) Ejemplo de curvas isocronas para una cuenca; b) Ejemplo de histograma tiempo-área.

#### 5.3.3.4. Hidrograma unitario para diferentes duraciones de lluvia.

##### Hidrograma en S

Si se dispone de un hidrograma unitario para una duración dada, pueden deducirse los hidrogramas unitarios para otras duraciones. Si las otras duraciones son múltiplos enteros de la duración dada, el nuevo hidrograma unitario puede calcularse directamente aplicando los principios de proporcionalidad y superposición.

Existe un método general aplicable a hidrogramas unitarios de cualquier duración, basado en estos principios, llamado el método del *hidrograma en S*. El hidrograma en

S es aquel que resulta de una lluvia efectiva continua a una tasa constante de 1 cm/h durante un periodo indefinido.

Si conocemos el hidrograma unitario para una duración de lluvia neta cualquiera,  $\Delta t$ , podemos considerar que el hietograma que produce el hidrograma en S está formado por un número indefinido de hietogramas de esa duración y con una intensidad  $1/\Delta t$ , uno tras otro. Esto se puede definir como:

$$g(t) = h(t) + h(t - \Delta t) + h(t - 2\Delta t) + \dots + h(t - n\Delta t)$$

Donde la  $h$  es la altura de pico y la  $g$  es el caudal acumulado (Figura 5.14).

Si se acepta el principio de superposición, el hidrograma de escurrimiento directo (HED) será como el indicado en la Figura 5.14. El caudal máximo del hidrograma en S es el denominado caudal de equilibrio,  $Q_e$ , que es igual a:

$$Q_e = iA = \frac{1 \text{ cm}}{\Delta t} A$$

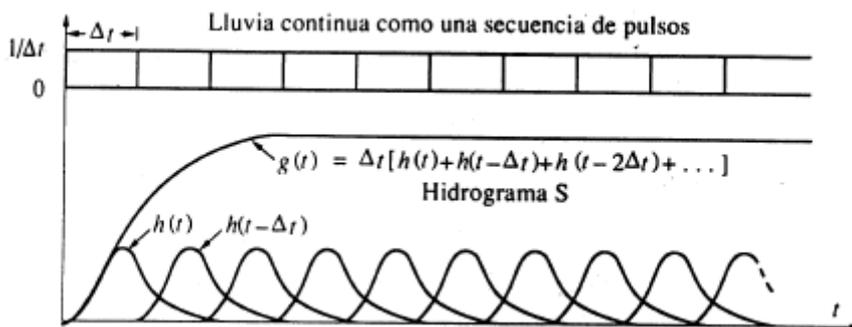


Figura 5.14. Hidrograma en S.

Teóricamente, el hidrograma obtenido de esta manera debería ser una curva suave, debido a que se supone que la lluvia efectiva de entrada tiene una intensidad constante y continua. Sin embargo, el proceso de suma producirá una forma ondulatoria si existen errores en las abstracciones o en la separación del flujo base, o también si la distribución temporal y/o espacial de la lluvia efectiva con la que se calculó el hidrograma unitario no fue uniforme. Antes de utilizar este hidrograma para nuestros cálculos, se deberá suavizar dicho hidrograma, sabiendo que para un tiempo igual al tiempo de concentración el caudal será igual al caudal de equilibrio ( $Q_e$ ).

Para obtener un hidrograma unitario de diferente duración de lluvia efectiva, se sigue el siguiente procedimiento (Figura 5.15):

- Se desplaza el hidrograma en S una duración igual a la de la lluvia efectiva de la cual queremos obtener el hidrograma unitario,  $\Delta t'$ .

- Se restan las ordenadas del hidrograma en S desplazado a las del hidrograma en S original, con lo que se obtiene un hidrograma no unitario para una duración de lluvia efectiva de  $\Delta t'$ .

- Se transforma el hidrograma obtenido en unitario, teniendo en cuenta que  $i \cdot \Delta t = i' \cdot \Delta t' = 1$

cm, por lo cual:

$$i' = i \frac{\Delta t}{\Delta t'}$$

siendo  $i'$  la intensidad del hidrograma unitario de duración  $\Delta t'$ .

- Por último, para obtener el hidrograma unitario correspondiente a una duración  $\Delta t'$ , se deberá multiplicar las ordenadas del hidrograma obtenido por  $\Delta t/\Delta t'$ .

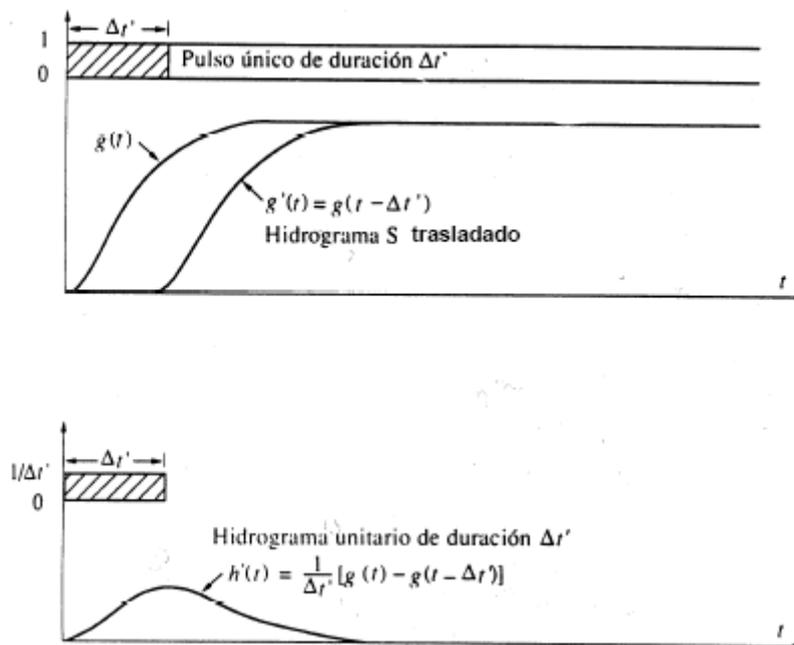


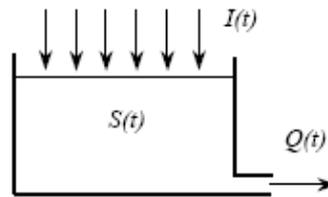
Figura 5.15: Uso del hidrograma en S para encontrar el hidrograma unitario de otra duración.

### 5.3.4. MODELOS DE DEPÓSITOS

#### 5.3.4.1. Modelo de sistema hidrológico integral

La cantidad de agua almacenada en una cuenca, S, puede relacionarse con los caudales de entrada, I y de salida, Q, de la cuenca (Figura 41), a través de la ecuación integral de continuidad:

$$\frac{dS}{dt} = I(t) - Q(t)$$



**Figura 5.16.** Representación simplificada de un sistema hidrológico.

Como la cantidad de agua almacenada en la cuenca aumenta y disminuye con el tiempo en función de  $I$  y  $Q$  de su variación con el tiempo, el almacenamiento en cualquier instante podrá expresarse por una función tal como:

$$S = f\left(I, \frac{dI}{dt}, \frac{d^2I}{dt^2}, \dots, Q, \frac{dQ}{dt}, \frac{d^2Q}{dt^2}, \dots\right)$$

Donde la función  $f$  estará determinada por la naturaleza del sistema hidrológico analizado (cuenca o tramo de cauce). La solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas ( $I$  y  $Q$ ), puede resolverse de dos maneras:

- 1) Diferenciar la ecuación de almacenamiento. Sustituir el resultado en la primera y resolver la ecuación diferencial integrando para  $I$  y  $Q$ .
- 2) Aplicar el método de diferencias finitas a las dos ecuaciones para resolverlas en puntos discretos del tiempo.

### 5.3.4.2. Modelo de embalse lineal

Un embalse lineal es aquel cuyo almacenamiento,  $S$ , está relacionado linealmente con su caudal de salida,  $Q$ , a través de una constante de almacenamiento  $k$ :

$$S = kQ$$

$$[L^3] = [T] \cdot [L^3T^{-1}]$$

de manera que  $k$  debe tener unidades de tiempo.

Reemplazando esta definición del almacenamiento en la ecuación de continuidad de un sistema hidrológico, nos quedaría que:

$$\frac{dS}{dt} = k \frac{dQ}{dt} = I(t) - Q(t)$$

Operando, encontramos que:

$$\frac{dQ}{dt} = \left( \frac{I(t)}{k} - \frac{Q(t)}{k} \right)$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k}Q(t) = \frac{1}{k}I(t)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por el factor integrante  $e^{t/k}$ , nos queda que:

$$e^{t/k} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k} e^{t/k} Q(t) = \frac{1}{k} e^{t/k} I(t)$$

que puede expresarse también como:

$$\frac{d}{dt} (Q e^{t/k}) = \frac{1}{k} e^{t/k} I(t)$$

Integrando con condiciones iniciales  $Q = Q_0$  en  $t = 0$  quedará:

$$\int_{Q_0}^Q d(Q e^{t/k}) = \int_0^t \frac{1}{k} e^{\tau/k} I(\tau) d\tau$$

donde  $\tau$  es una variable auxiliar de tiempo en la integración. Resolviendo:

$$Q(t) e^{t/k} - Q_0 = \int_0^t \frac{1}{k} e^{\tau/k} I(\tau) d\tau$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/k} + \int_0^t \frac{1}{k} e^{-(t-\tau)/k} I(\tau) d\tau$$

Suponiendo constantes  $k$  y  $I(\tau)$  y con  $Q_0$  igual a 0:

$$Q(t) = I \int_0^t \frac{1}{k} e^{\frac{\tau-t}{k}} d\tau = I \left[ e^{\frac{\tau-t}{k}} \right]_0^t$$

Para un instante correspondiente a un tiempo  $t \leq t_0$ , siendo  $t_0$  la duración de la entrada  $I$ , tendremos:

$$Q(t) = I \left( 1 - e^{-\frac{t}{k}} \right)$$

Para un instante correspondiente a un tiempo  $t > t_0$ , es decir cuando  $I$  es igual a 0, entonces:

$$-Q(t) = k \frac{dQ}{dt}$$

$$-\frac{1}{k} dt = \frac{dQ}{Q}$$

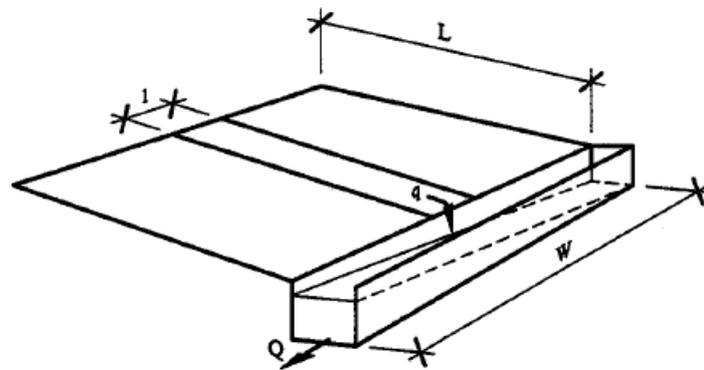
Integrando:

$$-\frac{1}{k} t = \ln Q$$

$$Q(t) = e^{-\frac{(t-t_0)}{k}}$$

### 5.3.4.3. Modelo de onda cinemática

La modelación del proceso de transformación lluvia-escorrentía también puede efectuarse a través de la aplicación de las ecuaciones del movimiento del agua sobre la superficie de la cuenca. Esto permite el conocimiento en detalle de las características del flujo sobre la superficie de la cuenca pero, como contrapartida, es necesario tener información de dicha superficie con el suficiente detalle espacial. La superficie de la cuenca es simulada a través de porciones de plano inclinado, definidos por una rugosidad, una longitud, un ancho y una pendiente (Figura 5.16). El comportamiento del flujo sobre estos planos inclinados se considerará equivalente al comportamiento del mismo sobre la superficie de nuestra cuenca.



**Figura 5.16.** Esquema de planos inclinados para simular la escorrentía sobre la superficie de una cuenca.

El movimiento del agua puede describirse a través de las ecuaciones del flujo no permanente (ecuaciones de Saint-Venant). Existe una simplificación de estas ecuaciones considerando únicamente las fuerzas de gravedad y de fricción como relevantes en la descripción del movimiento, simplificación que se conoce como aproximación de la onda cinemática.

Analicemos el flujo en un plano inclinado permeable de rugosidad  $n$  y pendiente  $S_0$  producido como consecuencia de una lluvia de intensidad uniforme  $i$  sobre este plano y con una tasa uniforme de infiltración  $f$ . El caudal unitario ( $q$ ) y el calado ( $y$ ) de dicho flujo, deben cumplir las siguientes ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento (o equilibrio de fuerzas):

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = i - f$$

$$q = \frac{y^{5/3} S_0^{1/2}}{n}$$

Si derivamos la ecuación de equilibrio de fuerzas con respecto al calado, nos queda:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{5}{3} \frac{y^{2/3} S_0^{1/2}}{n}$$

que se transforma, previa multiplicación del numerador y denominador por el calado, en:

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{5}{3} \frac{y^{5/3} S_0^{1/2}}{yn} = \frac{5}{3} \frac{q}{y} = \frac{5}{3} v = c$$

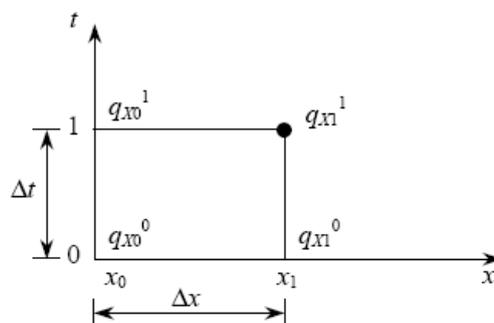
donde  $c$  es la celeridad con que se propaga una perturbación, en este caso una onda de caudal, por efecto exclusivo de la gravedad y de la fricción. Combinando esta ecuación con la de continuidad, podemos llegar a:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} = c(i - f)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden en términos del caudal  $q$ . Si consideramos  $c = dx/dt$  igual a la pendiente de una línea característica, se llega a que la derivada total de  $q$  en esa línea es igual a la celeridad por la diferencia entre la intensidad  $i$  y la tasa de infiltración  $f$ .

$$\frac{dq}{dt} = c(i - f)$$

Para resolver la ecuación puede recurrirse a esquemas numéricos en diferencias finitas, como el representado en la Figura 5.17.



**Figura 5.17.** Esquema de solución en diferencias finitas para la aproximación de la onda cinemática.

Utilizando dicho esquema, la ecuación del movimiento quedaría:

$$\frac{q_{x1}^1 - q_{x1}^0}{\Delta t} + c \frac{q_{x1}^1 - q_{x0}^1}{\Delta x} = c(i - f)$$

Para resolver esta ecuación es necesario proporcionar únicamente una condición de contorno, la de aguas arriba. En este caso se toma un caudal nulo en el extremo aguas arriba del plano. Por su formulación, el modelo de la onda cinemática no es capaz de reproducir la influencia del flujo desde aguas abajo, lo que no debe preocuparnos, ya que estamos hablando de láminas de agua de, a lo sumo, unos pocos centímetros. Este modelo tampoco es capaz de reproducir los efectos de laminación o atenuación, aspecto que puede deducirse considerando nulas tanto la contribución de la precipitación,  $i = 0$ , como la de la infiltración,  $f = 0$ . Con todo ello la ecuación quedaría:

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

Lo cual significa que el caudal es constante a lo largo de la línea característica.

El caudal unitario  $q$  obtenido a partir de esta metodología es el resultante en el extremo aguas abajo del plano inclinado y será el que reciba, por ejemplo, el cauce principal de nuestra cuenca o el colector de la red de drenaje pluvial en el caso de una cuenca urbana. Como se vio al plantear las ecuaciones del movimiento, la información de la cuenca necesaria para aplicar este método sería, además de la intensidad de precipitación  $i$ , las características de la superficie de la cuenca (rugosidad y pendiente) y las características del suelo en el caso de que éste sea permeable, necesarias para calcular la tasa de infiltración.

#### 5.4. PROPAGACIÓN DE CAUDALES

Se denomina *propagación de caudales* al procedimiento a través del cual se puede determinar el hidrograma de caudal en un punto de un curso de agua utilizando hidrogramas conocidos en uno o más puntos aguas arriba. Dicho procedimiento puede aplicarse a sistemas agregados o distribuidos. Cuando se aplica a sistemas agregados, el flujo se calcula como una función del tiempo en un lugar en particular, lo que también se conoce como *propagación hidrológica*. Cuando se aplica a sistemas distribuidos, el flujo se calcula como una función del espacio y del tiempo a través del sistema, lo que se conoce también como *propagación hidráulica*.

### 5.4.1. Propagación de sistemas agregados o propagación hidrológica

Como ya hemos visto, en un sistema hidrológico la entrada,  $I(t)$ , la salida,  $Q(t)$  y el almacenamiento  $S(t)$ , se relacionan por la ecuación de continuidad:

$$\frac{dS}{dt} = I(t) - Q(t)$$

Conociendo  $I(t)$ , no podemos obtener  $Q(t)$  si no se conoce una segunda relación llamada función

de almacenamiento, que en general es:

$$S = f\left(I, \frac{dI}{dt}, \frac{d^2I}{dt^2}, \dots, Q, \frac{dQ}{dt}, \frac{d^2Q}{dt^2}, \dots\right)$$

Estas dos ecuaciones nos brindan una combinación de dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden resolverse, por ejemplo, por el método de diferencias finitas. La forma de la ecuación de almacenamiento depende de la naturaleza del sistema analizado. Existen varios métodos que se diferencian entre sí en la manera de considerar la función de almacenamiento:

- Método del embalse a nivel: el almacenamiento es función no lineal de  $Q$

$$S = f(Q)$$

- Método de Muskingum: el almacenamiento es función lineal de  $I$  y  $Q$

$$S = f(I, Q)$$

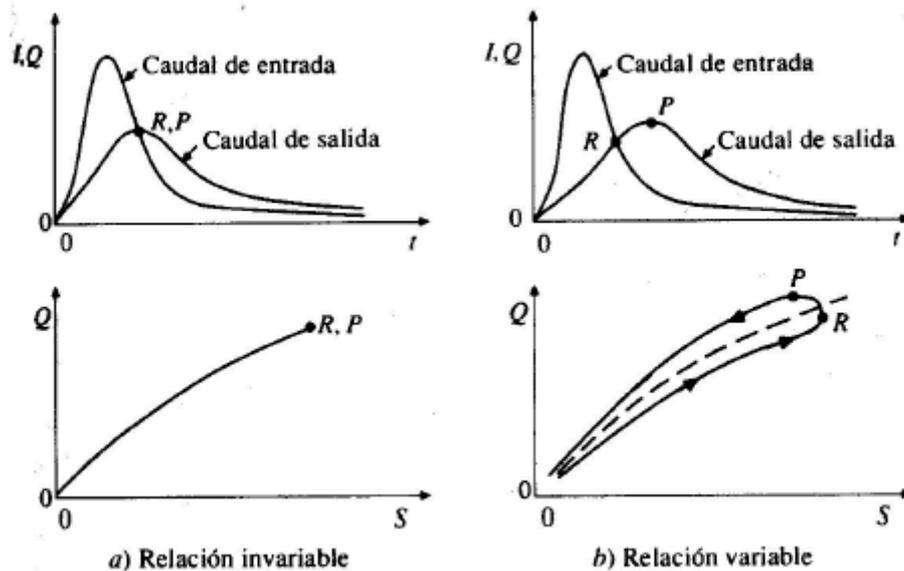
- Modelos de depósitos o embalses lineales: el almacenamiento es función lineal de  $Q$

$$S = kQ$$

La relación que existe entre el almacenamiento,  $S$ , y el caudal de salida,  $Q$ , es invariable cuando se tiene un embalse con superficie de agua horizontal. En este caso,  $S$  es función únicamente de la altura de la lámina de agua en el embalse y  $Q$  es función de la altura de agua sobre la estructura de control, de manera que combinando ambas relaciones, se llega a una relación única entre  $S$  y  $Q$ :  $S = f(Q)$ , como se muestra en la Figura 5.18a).

La relación entre  $S$  y  $Q$  suele ser variable cuando se trata de embalses largos y angostos y de canales o cauces de ríos, ya que la superficie del agua suele tener una pendiente debido a los efectos de remanso. En este caso,  $S$  dependerá del nivel variable a lo largo del sistema y ya no existe una función única entre la altura de la

lámina de agua y  $Q$ , lo que finalmente conduce a una relación variable entre  $S$  y  $Q$ , formando un bucle como se muestra en la Figura 5.18b).



**Figura 5.18.** Relación entre el caudal y el almacenamiento.

El efecto del almacenamiento sobre el hidrograma de salida es, por un lado, el de modificar la forma del hidrograma, retrasando el tiempo del pico, aumentando el tiempo base y disminuyendo el caudal punta y, por otro lado, el de retrasar el comienzo del hidrograma, especialmente si se trata de cauces muy largos donde la onda de avenida debe viajar una distancia considerable.

De esta manera, el tiempo de movimiento de la avenida puede considerarse compuesto por un tiempo de redistribución, provocado por el cambio en la forma del hidrograma, más un tiempo de traslación, provocado por el viaje de la onda de avenida a lo largo del cauce, tal como se muestra en la Figura 5.19.

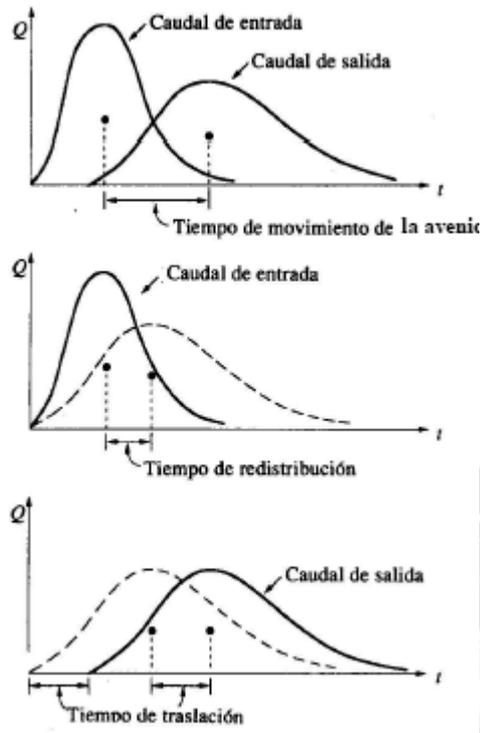


Figura 5.19. Tiempo de movimiento de una avenida.

#### 5.4.1.1 Propagación de embalse a nivel

Al procedimiento para calcular un hidrograma a la salida de un embalse con una superficie de agua horizontal se lo conoce como método del embalse a nivel. Si se considera lineal la variación entre los caudales de entrada y de salida a lo largo de un intervalo de tiempo, cuando se tengan en cuenta intervalos de tiempo pequeños (menores a 0,1 veces el tiempo al pico del hidrograma de entrada), la variación en el almacenamiento en el intervalo puede calcularse mediante la siguiente ecuación:

$$S_2 - S_1 = \frac{I_1 + I_2}{2} \Delta t - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \Delta t$$

Donde  $I_1$  e  $I_2$  son los caudales de entrada,  $Q_1$  y  $Q_2$  son los caudales de salida y  $S_1$  y  $S_2$  son los almacenamientos correspondientes al instante inicial y final del intervalo, respectivamente.

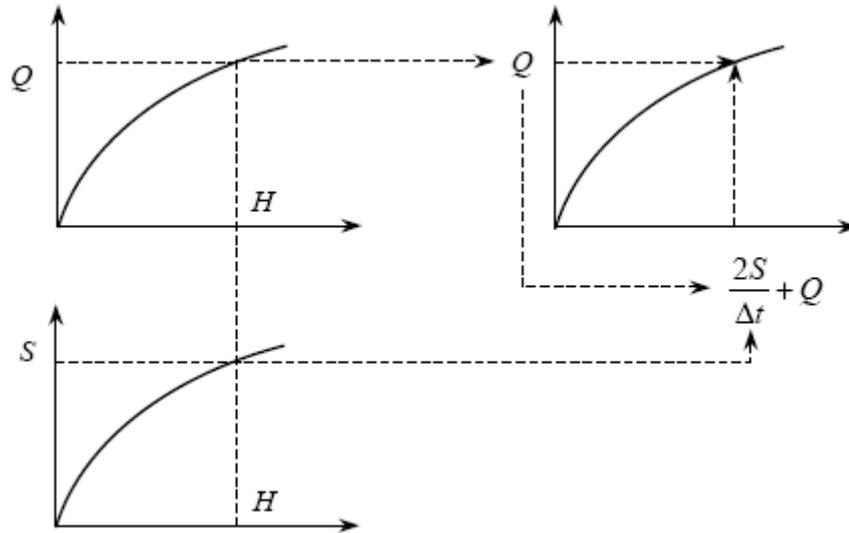
En esta ecuación, las incógnitas son  $Q_2$  y  $S_2$ . Agrupando las incógnitas por un lado y los datos por el otro podemos obtener:

$$\left( \frac{2S_2}{\Delta t} + Q_2 \right) = (I_1 + I_2) + \left( \frac{2S_1}{\Delta t} - Q_1 \right)$$

que puede resolverse conociendo la relación entre  $S$  y  $Q$ , que como ya se ha comentado es invariable. La relación entre  $S$  y  $Q$  se obtiene a partir de:

- La relación entre altura y almacenamiento,  $S = f(H)$ , obtenida a través de levantamientos topográficos o bien de mapas cartográficos.
- La relación entre altura y caudal de salida,  $Q = f(H)$ , que son ecuaciones que dependen del tipo de vertedero o estructura de salida (con o sin compuertas).

En la Figura 5.20 se muestra la manera de obtener una relación entre  $2S/\Delta t$  y  $Q$ .

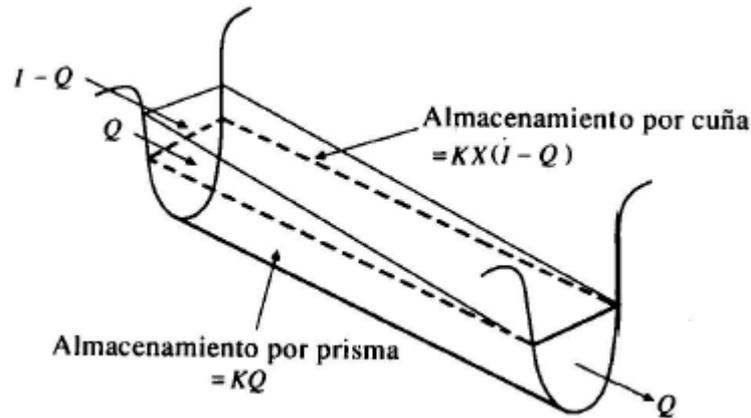


**Figura 5.20:** Forma de obtener una relación entre  $S$  y  $Q$  para su uso en el método del embalse a nivel

#### 5.4.1.2. Propagación en cauces. Método de Muskingum.

El método de Muskingum fue presentado por McCarthy (1938) y maneja relaciones variables entre caudal y almacenamiento. Este método modela el almacenamiento en un cauce mediante la combinación de dos tipos de almacenamientos, tal como se muestra en la Figura 5.21.

- Un *almacenamiento prismático*, formado por un volumen de sección transversal constante a lo largo del cauce prismático.
- Un *almacenamiento en cuña*, formado por la diferencia entre los caudales de entrada y salida, o bien, por la pendiente de la lámina de agua en el tramo considerado.



**Figura 5.21.** Almacenamientos por prisma y por cuña en un tramo de cauce.

Durante el avance de la avenida, el caudal de entrada es mayor que el de salida y se forma lo que se denomina *cuña positiva*, mientras que durante la recesión el caudal de entrada es menor al caudal de salida, formándose una *cuña negativa*.

El volumen de almacenamiento prismático es proporcional al caudal de salida, ya que se supone que el caudal de salida es proporcional al área de la sección del cauce:

$$S_p = KQ$$

El valor de  $K$  se considera igual al tiempo de tránsito de la onda de avenida a través del tramo. El volumen de almacenamiento por cuña es proporcional a la diferencia entre las entradas y las salidas:

$$S_c = KX(I - Q)$$

Donde  $X$  es un factor de ponderación, con valores comprendidos entre 0 y 0,5, en función de la forma de almacenamiento en cuña. Cuando  $X = 0$ , no existe cuña, no hay curva de remanso y el almacenamiento en el cauce será tipo embalse:  $S = KQ$ . En este caso se produciría la máxima atenuación posible. Cuando  $X = 0,5$ , se dice que la cuña está completamente desarrollada y no existiría atenuación alguna del pico. En cauces naturales muy caudalosos y de baja pendiente,  $X$  suele ser próximo a 0 y será más cercano a 0,5 cuanto mayor sea la pendiente y menor sea el caudal del cauce. En ríos españoles, en general poco caudalosos, se puede tomar como media un valor de 0,3 a 0,35.

El almacenamiento total en el tramo de cauce considerado sería entonces:

$$S = KQ + KX(I - Q)$$

Que puede reordenarse como:

$$S = K[XI + (1 - X)Q]$$

Esta ecuación representa el modelo lineal de almacenamiento para la propagación de avenidas en cauces por el método de Muskingum. Si analizamos el volumen de almacenamiento en dos instantes, 1 y 2, al comienzo y al final de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , éstos pueden determinarse como:

$$S_1 = K[XI_1 + (1 - X)Q_1]$$

$$S_2 = K[XI_2 + (1 - X)Q_2]$$

La variación en el almacenamiento a través del tramo sería la diferencia entre ambos almacenamientos:

$$S_2 - S_1 = K\{[XI_2 + (1 - X)Q_2] - [XI_1 + (1 - X)Q_1]\}$$

Utilizando la ecuación de continuidad, la variación en el almacenamiento es igual a:

$$S_2 - S_1 = \frac{I_1 + I_2}{2} \Delta t - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \Delta t$$

Sustituyendo obtenemos:

$$K[X(I_2 - I_1) + (1 - X)(Q_2 - Q_1)] = \frac{I_1 + I_2}{2} \Delta t - \frac{Q_1 + Q_2}{2} \Delta t$$

y despejando  $Q_2$  nos quedaría:

$$Q_2 = \frac{KX + \frac{\Delta t}{2}}{K(1 - X) + \frac{\Delta t}{2}} I_1 + \frac{-KX + \frac{\Delta t}{2}}{K(1 - X) + \frac{\Delta t}{2}} I_2 + \frac{K(1 - X) - \frac{\Delta t}{2}}{K(1 - X) + \frac{\Delta t}{2}} Q_1$$

o bien:

$$Q_2 = C_1 I_1 + C_2 I_2 + C_3 Q_1$$

donde:

$$C_1 = \frac{KX + \frac{\Delta t}{2}}{K(1 - X) + \frac{\Delta t}{2}}; \quad C_2 = \frac{-KX + \frac{\Delta t}{2}}{K(1 - X) + \frac{\Delta t}{2}}; \quad C_3 = \frac{K(1 - X) - \frac{\Delta t}{2}}{K(1 - X) + \frac{\Delta t}{2}}$$

Se verifica que la suma de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  debe ser igual que 1.

### **Obtención de K y X a partir de información de campo**

Si se encuentran disponibles los hidrogramas de entrada y salida para un tramo de un río, pueden determinarse los valores de  $K$  y  $X$  utilizando la siguiente metodología:

- 1) Asumiendo varios valores de  $X$
- 2) Utilizando la información de los caudales de entrada y de salida se calculan los valores del numerador y del denominador de la siguiente expresión de  $K$ , deducida de una ecuación anterior:

$$K = \frac{\frac{\Delta t}{2} [(I_2 + I_1) - (Q_2 + Q_1)]}{X(I_2 - I_1) + (1 - X)(Q_2 - Q_1)}$$

3) Los valores calculados del numerador y denominador se colocan en un gráfico como ordenadas y abscisas, respectivamente, lo que producirá una curva en forma de lazo. El valor de  $X$  que produzca un lazo lo más parecido posible a una recta única se utiliza para calcular el valor de  $K$ , que es la pendiente de dicha recta.

#### 5.4.1.3. Modelo de embalse lineal

Un embalse lineal es aquel en el cual el almacenamiento está linealmente relacionado con su caudal de salida mediante una constante de almacenamiento  $k$ , la cual tiene dimensiones de tiempo:

$$S = kQ$$

El concepto de embalse lineal fue introducido por primera vez por Zoch en 1934 en un análisis de la relación entre lluvia y escorrentía. Un embalse lineal único es equivalente a considerar el modelo de Muskingum con  $X = 0$ .

El comportamiento de una cuenca puede representarse por medio de una serie de  $n$  embalses lineales idénticos, cada uno de ellos con una misma constante de almacenamiento  $k$  (Nash 1957). Transitando un flujo de entrada de volumen unitario a través de los  $n$  embalses lineales, puede deducirse un modelo matemático para el hidrograma unitario instantáneo de la serie. La integral de convolución en forma continua puede expresarse como:

$$Q(t) = \int_0^t I(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

La función impulso-respuesta para un embalse lineal fue deducida como:

$$u(t - \tau) = \frac{1}{k} e^{-\left(\frac{t-\tau}{k}\right)}$$

por lo que el caudal de salida del primer embalse lineal, considerando una entrada  $I(\tau) = 1$  y un caudal inicial  $Q_0 = 0$ , estará determinado por:

$$Q_1(t) = \int_0^t \frac{1}{k} e^{-\left(\frac{t-\tau}{k}\right)} d\tau$$

Si este caudal se usa como entrada para el segundo embalse lineal, su caudal de salida puede obtenerse como:

$$Q_2(t) = \int_0^t \frac{1}{k} e^{-\frac{t}{k}} \frac{1}{k} e^{-\frac{t-\tau}{k}} d\tau = \frac{1}{k^2} e^{-\frac{t}{k}}$$

Si este caudal se usa como entrada para el tercer embalse lineal, y así sucesivamente para  $n$  embalses lineales, el caudal de salida del embalse  $n$  será:

$$Q_n(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{k}}$$

Siendo  $t(n) = (n - 1)!$  Cuando  $n$  no es un número entero, el valor de  $t$  puede obtenerse de tablas de la función gamma (Abramowitz y Stegun 1965). La ecuación obtenida de  $Q_n(t)$  puede considerarse como el hidrograma unitario instantáneo de la serie de  $n$  embalses lineales, también conocida como la función de probabilidad gamma. Puede comprobarse que la integral de esta ecuación para  $t$  desde 0 hasta infinito es igual a 1.

También puede demostrarse que el primer y segundo momento del Hidrograma Unitario Instantáneo (HUI), alrededor del origen  $t = 0$ , son:

$$M_1 = nk \quad \text{y} \quad M_2 = n(n + 1)k^2$$

$$M1 = nk \quad \text{y} \quad M2 = n(n + 1)k^2$$

El primer momento ( $M1$ ) es el tiempo de retardo del centroide del HUI y debe ser equivalente a la diferencia de tiempo entre los centroides de las áreas del hietograma de lluvia neta y el hidrograma de escorrentía directa (Chow 1994).

Utilizando los conceptos anteriores, teniendo como datos el hietograma de lluvia neta y su correspondiente hidrograma de escorrentía directa de una cuenca, se podría calcular los parámetros  $n$  y  $k$  correspondientes a dicha cuenca, a partir de los cuales puede obtenerse su HUI.

El cálculo de  $n$  y  $k$  se realiza a través de la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$M_{Q1} - M_{I1} = nk$$

$$M_{Q2} - M_{I2} = n(n + 1)k^2 + 2nkM_{I1}$$

Donde  $M1$  y  $M2$  son el primer y segundo momento, respectivamente, del hietograma de precipitación neta dividido por la lluvia efectiva total, mientras que  $MQ1$  y  $MQ2$  son el primer y segundo momento, respectivamente, del hidrograma de escorrentía directa dividido por la escorrentía directa total.

## 5.4.2. Propagación de sistemas distribuidos o propagación hidráulica

### 5.4.2.1. Modelo de onda dinámica

Los métodos hidráulicos de propagación se basan en la resolución de las ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento para un flujo no permanente unidimensional, también conocidas como *ecuaciones de Saint-Venant*. La ecuación de conservación de la masa o de continuidad está dada, en su forma no conservativa, es decir, para un ancho unitario de flujo, por:

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

y la ecuación que expresa la conservación de la cantidad de movimiento, también en forma no conservativa, es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0$$

En ambas ecuaciones,  $V$  es la velocidad media del flujo en una sección transversal,  $y$  es el calado o nivel de agua en dicha sección,  $g$  es la aceleración gravitatoria,  $S_0$  es la pendiente de fondo del tramo de cauce considerado,  $S_f$  es la pendiente de fricción de dicho tramo de cauce y  $x$  y  $t$  son las variables independientes, el espacio y el tiempo, respectivamente.

Las hipótesis que se tienen en cuenta para la validez de las ecuaciones de Saint-Venant son las siguientes:

1. El flujo es unidimensional: el calado y la velocidad varían sólo en la dirección longitudinal; la velocidad es constante y la superficie del agua horizontal en cualquier sección transversal perpendicular al eje del cauce también se considera constante.
2. El flujo varía gradualmente a lo largo del canal, lo que implica que la distribución de presiones es hidrostática y que las aceleraciones verticales son despreciables.
3. El eje del cauce es una línea recta.
4. La pendiente del fondo es pequeña y el lecho es fijo, lo que implica que no hay erosión ni sedimentación.

5. Los coeficientes de resistencia para flujo uniforme permanente turbulento son aplicables, por ejemplo, se utiliza la ecuación de Manning para describir el efecto de la resistencia.

6. El fluido es incompresible y de densidad constante.

Cada uno de los términos con los que cuenta la ecuación de cantidad de movimiento considera alguno de los procesos físicos que gobiernan el movimiento del fluido:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \rho \frac{\partial y}{\partial x} - \rho g S_0 + \rho g S_f = 0$$

Aceleración local	Aceleración convectiva	Fuerza de presión	Fuerza de gravedad	Fuerza de fricción	= 0
----------------------	---------------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------	-----

- *Aceleración local*: variación de cantidad de movimiento debido al cambio de velocidad con el tiempo.
- *Aceleración convectiva*: variación de cantidad de movimiento debido al cambio de velocidad a lo largo del canal.
- *Fuerza de presión*: variación en la presión producida por un cambio en la profundidad del agua.
- *Fuerza de gravedad*: fuerza que mueve al fluido, proporcional a su peso y a la pendiente del lecho.
- *Fuerza de fricción*: resistencia a la fricción ocasionada por las paredes del cauce.

Los dos términos de aceleración representan el efecto de las fuerzas de inercia en el flujo. Los efectos de remanso pueden incorporarse en la propagación distribuida a través de los tres primeros términos de la ecuación de la cantidad de movimiento.

Los métodos hidrológicos no poseen mecanismos hidráulicos para describir la propagación aguas arriba de los cambios de flujo de cantidad de movimiento porque están basados sólo en la ecuación de continuidad.

La clasificación de los modelos de propagación distribuida se realiza en función del número de términos de la ecuación de la cantidad de movimiento que se utilizan para el cálculo.

El modelo de la onda cinemática desprecia los términos de aceleración y el de presión, por lo que la ecuación de la cantidad de movimiento quedaría como:

$$S_0 = S_f$$

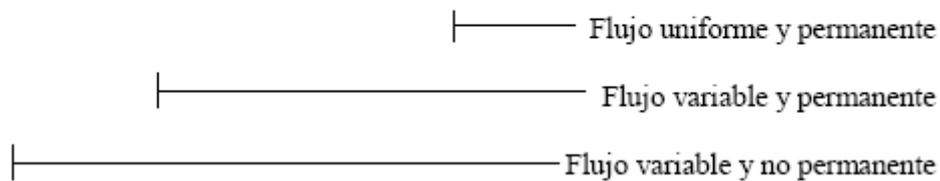
El modelo de la onda difusiva desprecia los términos de aceleración, de manera que la ecuación de la cantidad de movimiento quedaría:

$$\frac{\partial y}{\partial x} - S_0 + S_f = 0$$

Finalmente, el modelo de la onda dinámica considera todos los términos de la ecuación.

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento puede escribirse considerando el flujo permanente o no permanente y uniforme o variable (Figura 5.22).

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} + S_0 = S_f$$



**Figura 5.22.** Propagación mediante el modelo de la onda dinámica.

Como se vio anteriormente, en el modelo de la onda cinemática, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento queda expresada como:

$$S_0 = S_f$$

Donde  $S_0$  es la pendiente del fondo del cauce en el tramo considerado, calculable a partir de información topográfica o batimétrica y  $S_f$  es la pendiente de fricción o de la línea de energía del flujo, calculable a partir de alguna fórmula de resistencia, como por ejemplo la de Manning.

Si expresamos la velocidad media del flujo a través de la ecuación de Manning, el caudal sería igual a:

$$Q = AV = A \frac{R_h^{2/3} S_0^{1/2}}{n} = A^{5/3} \frac{S_0^{1/2}}{nP^{2/3}}$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal y  $P$  es el perímetro mojado. Despejando  $A$ , tenemos:

$$A = \left( \frac{nP^{2/3}}{S_0^{1/2}} \right)^{3/5} Q^{3/5} = \alpha Q^\beta$$

Donde hemos llamado  $\alpha = [nP^{2/3}/S_0^{1/2}]^{3/5}$  y  $\beta = 3/5 = 0,6$ . Si derivamos  $A$  con respecto al tiempo, nos queda:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha\beta Q^{\beta-1} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

que sustituyendo en la ecuación de la continuidad en forma conservativa:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

nos da:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Las ondas cinemáticas son resultado de cambios en el caudal,  $Q$ . La derivada total del caudal con respecto al espacio,  $x$ , es igual a:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{dt}{dx}$$

Comparando esta ecuación con la de la continuidad en su forma conservativa, vemos que son idénticas si:

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}}$$

con lo que queda demostrado que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dQ}{dA} = c_k$$

Esto significa que un observador moviéndose a una velocidad  $ck$ , vería que  $dQ/dx = 0$ , es decir, que el caudal es constante. Estas dos últimas ecuaciones son las ecuaciones características para una onda cinemática, es decir, dos ecuaciones diferenciales ordinarias que son matemáticamente equivalentes a las ecuaciones de la continuidad y de la cantidad de movimiento.

Si derivamos el caudal,  $Q$ , con respecto al área,  $A$ , utilizando la ecuación de Manning, considerando  $n$ ,  $S_0$  y  $P$  constantes, lo que se puede considerar como cierto cuando se trata de cauces mucho más anchos que profundos, podemos encontrar que la celeridad,  $ck$  es igual a:

$$c_k = \frac{dQ}{dA} = \frac{5}{3} \left( \frac{S_0^{1/2}}{nP^{2/3}} \right) A^{2/3} \frac{A}{A} = \frac{5}{3} \left( \frac{S_0^{1/2}}{nP^{2/3}} \right) \frac{A^{5/3}}{A} = \frac{5}{3} \frac{Q}{A} = \frac{5}{3} V$$

Es decir, que la celeridad de la onda cinemática es superior a la velocidad media del flujo y, utilizando la ecuación de Manning, igual a 5/3 la velocidad media del flujo.

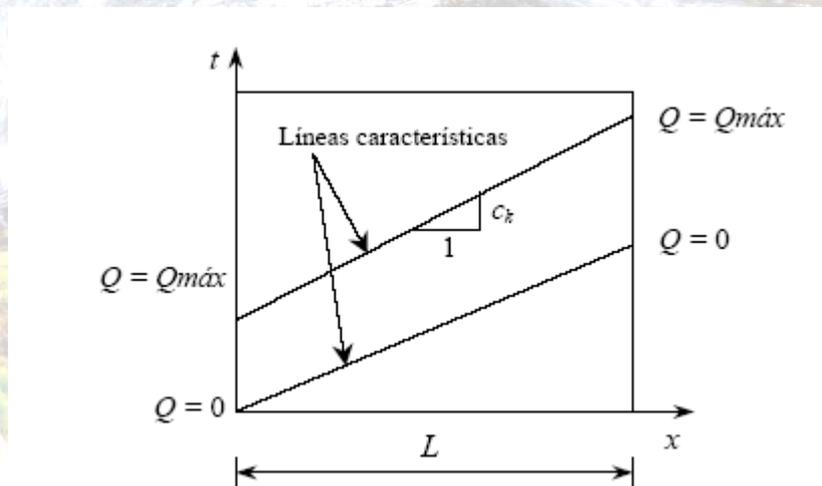
### Solución analítica de la onda cinemática

Para resolver el valor de  $Q$  en función del tiempo, a una distancia  $L$  del extremo aguas arriba del cauce, es necesario conocer las condiciones iniciales: el valor de  $Q$  en todo punto del espacio para  $t = 0$  y las condiciones de contorno, así como el valor de  $Q$  en todo instante de tiempo para  $x = 0$ . Las condiciones iniciales podrían ser las de un caudal base uniforme a lo largo de todo el cauce analizado en el instante  $t = 0$  y las condiciones de contorno podrían ser las de un hidrograma de entrada en el extremo aguas arriba del cauce, en el punto  $x = 0$ .

Las ecuaciones características nos dicen que  $dQ/dx = 0$ , es decir, que el caudal es constante si nos movemos a una velocidad igual a la celeridad de la onda:

$$c_k = \frac{dx}{dt}$$

Lo que se intenta esquematizar en la Figura 5.23.



**Figura 5.23.** Tránsito de una onda cinemática a lo largo de un cauce de longitud  $L$ .

Esto significa que en el modelo de la onda cinemática el caudal no se atenúa nunca. Si integramos la ecuación de la celeridad a todo lo largo del cauce, nos queda:

$$\int_0^L dx = \int_{t_0}^t c_k dt \Rightarrow L = c_k (t - t_0)$$

El tiempo en el cual un caudal  $Q$  transitará desde el extremo aguas arriba del cauce hasta el extremo aguas abajo será:

$$t = t_0 + \frac{L}{c_k}$$

En este caso particular, las líneas características son rectas porque hemos considerado que el caudal no varía a lo largo del tramo del cauce, pero si existiera un caudal lateral de entrada o salida, estas líneas serían curvas.

**Solución numérica lineal para la onda cinemática**

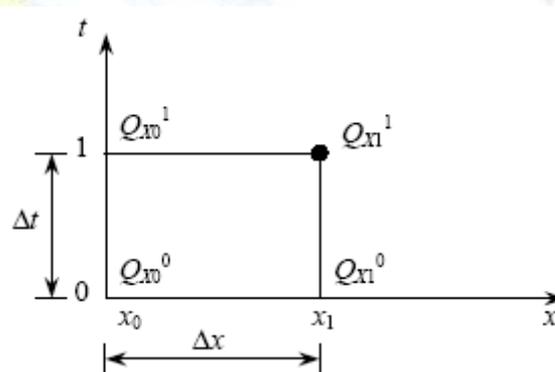
La solución numérica para la onda cinemática consiste en resolver numéricamente, en cada uno de los puntos de una malla x-t, la ecuación:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

Para unos parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  dados de un canal y unas determinadas condiciones iniciales y de contorno. Utilizando aproximaciones por diferencias finitas, para resolver el flujo en una malla x-t tal como la mostrada en la Figura 50, la ecuación anterior quedaría:

$$\frac{Q_{x1}^1 - Q_{x0}^1}{\Delta x} + \alpha\beta \left( \frac{Q_{x0}^1 + Q_{x1}^0}{2} \right)^{\beta-1} \left( \frac{Q_{x1}^1 - Q_{x1}^0}{\Delta t} \right) = 0$$

En la cual se resolvería el valor de  $Q_{x1}^1$  en función de los valores conocidos, bien de las condiciones iniciales y de contorno o bien de los valores obtenidos en instantes de tiempo y espacio anteriores,  $Q_{x1}^0$  y  $Q_{x0}^1$



**Figura 50.** Esquema en diferencias finitas para resolver la ecuación de la onda cinemática.

Este esquema de diferencias finitas mostrado es el llamado de diferencias finitas hacia atrás y necesita para ser resuelto sólo valores de aguas arriba. Por este motivo, el modelo es insensible a la influencia del flujo aguas abajo. Este esquema también se

llama explícito, porque cada valor de la incógnita  $Q_{X1}^1$  se calcula uno a uno en cada punto de la malla, y cuyo valor quedaría dado por:

$$Q_{X1}^1 = \frac{\left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{X0}^1 + \alpha \beta Q_{X1}^0 \left( \frac{Q_{X0}^1 + Q_{X1}^0}{2} \right)^{\beta-1} \right]}{\left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha \beta \left( \frac{Q_{X0}^1 + Q_{X1}^0}{2} \right)^{\beta-1} \right]}$$

Para que un esquema explícito sea estable, el tamaño de la malla de cálculo debe cumplir en todo momento con la condición de Courant-Friedrichs, que es necesaria pero no suficiente y está dada por:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_k}$$

### **Solución numérica no lineal para la onda cinemática**

En el esquema no lineal, se resuelve por diferencias finitas la ecuación:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

utilizando la aproximación  $A = \alpha Q^\beta$  para resolver  $A$ , quedando:

$$\frac{Q_{X1}^1 - Q_{X0}^1}{\Delta x} + \left( \frac{\alpha Q_{X1}^{1\beta} - \alpha Q_{X1}^{0\beta}}{\Delta t} \right) = 0$$

Reordenando de tal manera que en el lado izquierdo quede la incógnita:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{X1}^1 + \alpha Q_{X1}^{1\beta} = \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_{X0}^1 + \alpha Q_{X1}^{0\beta}$$

Que es una solución no lineal de la incógnita  $Q_{X1}^1$

#### **5.4.2.2. Método de Muskingum-Cunge**

Cunge (1969) propuso un método basado en el de Muskingum, pero que tiene en cuenta algunos conceptos tomados de la aproximación de la onda cinemática. La ecuación de Muskingum puede escribirse como:

$$Q_{X1}^1 = C_1 Q_{X0}^1 + C_2 Q_{X0}^0 + C_3 Q_{X1}^0$$

En la cual, los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  dependen de los parámetros  $K$  y  $X$ . Cunge demostró que cuando  $K$  y  $\Delta t$  se toman como constantes, siendo ésta una solución aproximada de las ecuaciones de onda cinemática, los valores de  $K$  y  $X$  son iguales a:

$$K = \frac{\Delta x}{c_k}$$

$$X = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Q}{B c_k S_0 \Delta x} \right)$$

Donde  $\Delta x$  es la longitud del tramo considerado,  $c_k$  es la celeridad de la onda de avenida correspondiente a  $Q$  y  $B$ , donde  $B$  es el ancho de la superficie de agua, y  $S_0$  la pendiente media de dicho tramo de cauce.

Este método tiene la ventaja de que la solución se obtiene a través de una ecuación algebraica lineal, lo que permite que el hidrograma pueda obtenerse sólo en las secciones requeridas, en lugar de todos los puntos de la malla como requiere el modelo de onda cinemática, lo que también producirá una menor atenuación numérica.

En España se calcula el factor  $K$  considerando válida la aproximación de la onda cinemática y la ecuación de resistencia de Manning; por lo tanto, la celeridad ( $c_k$ ) sería igual a 5/3 la velocidad de la onda de avenida. Si calculamos la velocidad de la onda como  $\Delta x/T$ , donde  $T$  es el tiempo de concentración del fluido en el tramo y utilizamos para calcularlo la fórmula de Témez, se llega a la siguiente ecuación para  $K$ :

$$K = 0,6T_c = 0,18 \left( \frac{\Delta x}{S_0^{0,25}} \right)^{0,76}$$

Donde  $\Delta x$  debe introducirse en km,  $S_0$  en m/m y  $K$  quedaría expresado en horas.

#### 5.4.2.3. Propagación mediante el método de la onda difusiva

En el modelo de la onda difusiva, la ecuación de continuidad puede escribirse:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{A}{b} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

y la ecuación de la cantidad de movimiento, despreciando los términos de inercia, sería:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - S_f$$

Combinando ambas ecuaciones se puede llegar a una ecuación diferencial única de tipo parabólico, análoga en estructura y forma a la ecuación de difusión del calor. Necesita dos condiciones de contorno, aguas arriba y aguas abajo, permite

representar la laminación y es válida para todo tipo de cauces y flujos (supercrítico y subcrítico). Es un modelo adecuado para casos en que los hidrogramas tienen subidas suaves, es decir, sin mucha inercia.

#### 5.4.2.4. Propagación mediante el método de la onda dinámica

En este caso, se usan todos los términos de la ecuación de la cantidad de movimiento y la forma de la solución cambia a tipo hiperbólico. Este modelo tiene en cuenta todas las fuerzas que actúan en el fluido. También necesita de condiciones de contorno aguas arriba y aguas abajo.

El aumento de tiempo de cálculo con respecto al modelo de la onda difusiva no es muy grande, por lo que normalmente se prefiere trabajar con las ecuaciones completas.

### 5.5. MEDIDA DE FLUJOS SUPERFICIALES

Los datos de caudales (datos hidrométricos) normalmente se obtienen de las estaciones de aforos, a partir de distintas técnicas de aforo.

Los datos hidrométricos deben ser fiables y continuos; para ello se requiere de un control y mantenimiento periódico de las estaciones, así como de un diseño previo de la red de observación que debe ser lo suficientemente densa como para evitar la pérdida de información básica pero, a su vez, no ser excesivamente densa como para representar un coste excesivo. Un aspecto interesante a destacar es que, dado precisamente el carácter estocástico del proceso, se requieren series temporales de larga duración para realizar interpretaciones del funcionamiento del sistema

Los **aforos continuos** permiten conocer las variaciones de caudal de manera continuada en el tiempo. Para conocer el caudal es más sencillo medir una variable que se relacione con éste, como es la altura de la lámina de agua. La altura de la lámina de agua puede medirse mediante: **Escala limnimétrica o limnímetro, limnógrafo o sensores de presión.**

Los **aforos directos** consisten en determinar el caudal de un curso en un momento concreto. Son de dos tipos: basados en la **velocidad del agua** (flotador y molinete) y mediante **aforos químicos** (inyección instantánea de algún elemento químico).

#### 5.5.1. Aforos continuos

Las escalas limnimétricas se emplean en las estaciones de aforo para medir el nivel de agua (altura, H), de manera que el caudal es calculado en función de la altura de la

escala limnimétrica [ $Q=f(H)$ ]. Para establecer esta relación entre  $Q$  y  $H$  es necesario que el régimen sea uniforme (régimen permanente). Esto sólo se consigue mediante la construcción de un tramo de canal artificial donde la sección y la pendiente son constantes.

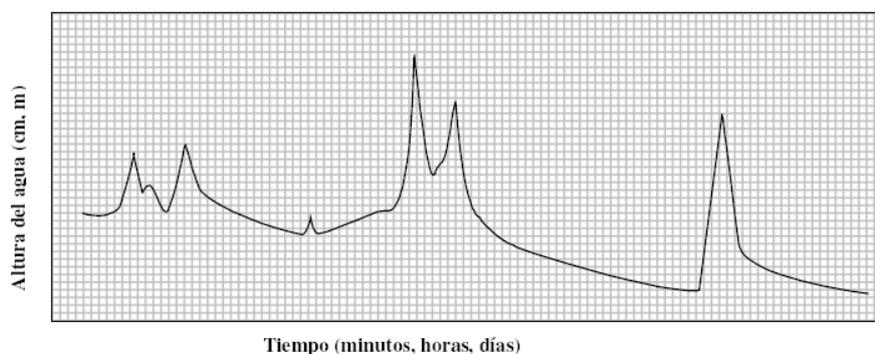
Para cauces pequeños con caudales bajos se utilizan los denominados *vertederos de pared o de lámina delgada*, que consisten en una chapa metálica de unos 5 mm de espesor. El caudal se obtiene a partir de la altura de la lámina de agua y empleando una fórmula que suele ser específica para cada tipo de vertedero, en función de las características de éste.

Para ríos con mayores caudales se usan los denominados *vertederos de pared gruesa*, que pueden ser de dos tipos: *de pantalla* y *de escalón*. Se construyen con hormigón y tienen como función laminar el caudal. Los de pantalla son semejantes a los metálicos, mientras que los de escalón presentan un escalón que rompe la lámina de agua, para evitar la acumulación de material arrastrado por el río.

En áreas donde son previsibles importantes variaciones estacionales de caudal conviene instalar un doble vertedero, uno denominado canal principal y otro denominado canal de estiaje.

La lectura diaria de la escala limnimétrica no es suficiente para medidas de  $Q$  en cuencas menores de  $3000 \text{ km}^2$ , aún cuando se trate de estudiar balances anuales. En estos casos es necesario recurrir a aparatos registradores o limnígrafos. En el estudio de avenidas, el limnígrafo es imprescindible.

Los **limnígrafos** permiten registrar en cada instante el valor del nivel o altura del río. Las medidas obtenidas quedan registradas en un limnigrama (Figura 5.24).



**Figura 5.24.** Ejemplo de limnigrama.

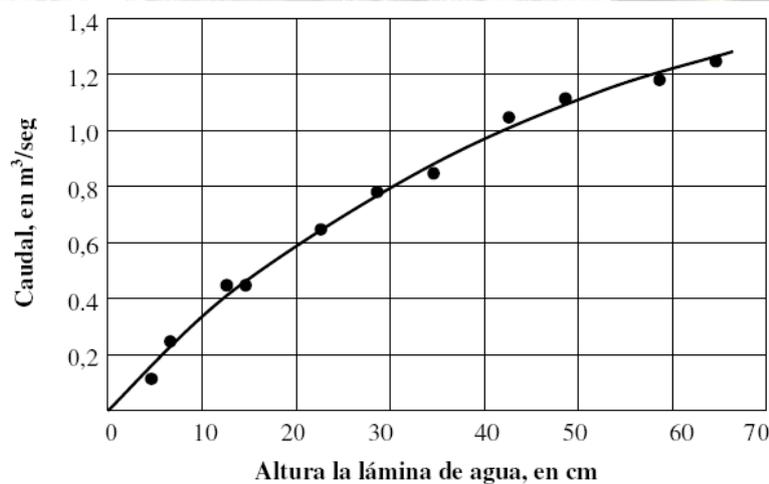
Para una sección determinada, existe una relación entre el caudal y la altura de la lámina de agua,  $Q = f(H)$ , que se denomina curva de gastos (Figura 5.24). Esta curva de gastos se obtiene a partir de numerosas medidas de la altura y el caudal en una sección del río. Utilizando esta curva, se puede obtener los caudales a partir únicamente de las medidas de la altura.

Normalmente, la curva de gastos se obtiene mediante el dibujo de una curva suave que se ajuste lo mejor posible a los puntos obtenidos por los pares de valores  $(h_i, Q_i)$ , pero también se puede hacer un ajuste estadístico para obtener la ecuación de la curva que normalmente es una parábola de segundo grado, del tipo:

$$Q = ah^2 + bh + c$$

En la que los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  se obtienen por ajuste de mínimos cuadrados.

Otros ajustes de la curva pueden ser las leyes exponenciales del tipo  $h = h_0 \cdot Q^a$  o potenciales de la forma  $Q = (h - h_0) A$ , que presentan la ventaja de que si son representadas en papel semi-logarítmico (las exponenciales) o doble-logarítmico (las potenciales), la curva de gastos obtenida tiene la forma de una recta.



**Figura 5.24.** Curva de gastos.

Los limnógrafos pueden ser fijos o móviles (verticales u horizontales) de instalación directa o adosados al río. Los principales tipos de limnógrafos son los de flotador y los neumáticos o de presión.

Los limnógrafos de flotador consisten básicamente en un flotador que sube o baja según las oscilaciones del nivel del agua y que por medio de un contrapeso y una polea mueve un lápiz o una plumilla de tinta que registra las variaciones en el limnigrama.

En los limnógrafos neumáticos el lápiz se mueve por la presión o carga de agua sobre un sensor de presión que se coloca en el fondo del río, comunicando con el detector de presiones por un tubo de pequeño diámetro, flexible y resistente. El elevado coste de este sistema hace que los limnógrafos de flotador sigan siendo muy utilizados.

### 5.5.1. Aforos directos

#### Aforo por medición de la velocidad de flujo

El caudal que circula por una cierta sección puede calcularse a partir de la velocidad del agua en dicha sección, ya que se cumple que  $Q = S \cdot v$ .

La medición de la velocidad se realiza por dos procedimientos fundamentales: flotadores y molinetes.

El aforo mediante flotador es un sistema rudimentario pero rápido y muy útil para medidas puntuales. El flotador puede ser una botella lastrada o cualquier objeto que flote o preferiblemente que se hunda ligeramente en la lámina de agua, ya que la velocidad en la superficie es de alrededor de 0,80 a 0,95 la velocidad media.

En la práctica, hay que seleccionar un tramo recto y homogéneo del cauce de una longitud mínima del orden de cinco a diez metros, procurando que la sección final sea de geometría sencilla, asimilable a una sección rectangular, de manera que su medida se pueda hacer con la simple medida de la anchura del cauce y de la profundidad de la lámina de agua. El flotador debe lanzarse unos metros antes de la sección inicial del tramo seleccionado, con objeto de que la velocidad del mismo se iguale a la del agua y, sobre todo, que permita iniciar, mediante un cronómetro, la medida del tiempo que el flotador tarda en recorrer el tramo completo.

Si la anchura del cauce es grande conviene dividirlo en franjas y medir la velocidad en cada una de estas franjas y calcular luego la velocidad media para todas las franjas. También es recomendable repetir varias veces cada medida y promediar los tiempos obtenidos.

El aforo mediante molinete, es de mayor fiabilidad para las determinaciones de la velocidad del agua. El molinete consiste básicamente en una hélice sumergida que se orienta en la dirección del flujo. La hélice girará por la presión debida a la velocidad del agua. El eje de esta hélice transmite su movimiento, por medio de un sistema de engranaje, a un excéntrico que establece sucesivos contactos en un circuito eléctrico y

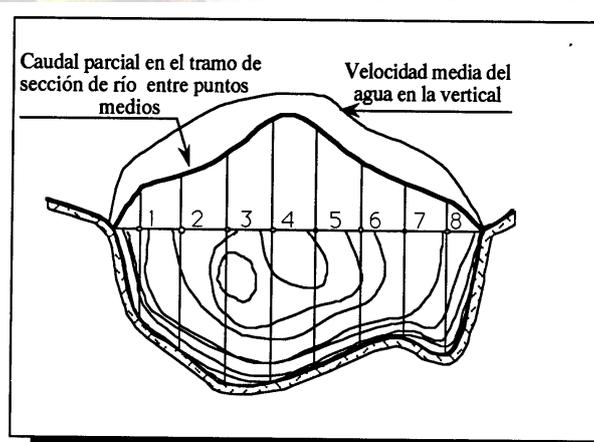
que transmite las indicaciones a un contador de vueltas, que se hacen más ostensibles intercalando un timbre o alguna otra señal visual o auditiva.

La velocidad se determina en función del número de vueltas, según las características del modelo que se utilice y con arreglo a fórmulas o parámetros determinados por la casa constructora del aparato. La velocidad vendrá dada por:  $v = an + b$ , en la que  $n$  son las revoluciones por minuto obtenidas en el contador, y  $a$  y  $b$  son coeficientes que dependen del tipo de hélice utilizada.

Si el río es vadeable, el molinete se monta en una varilla que se va apoyando en el fondo, a altura variable sobre la misma, de acuerdo con el número de observaciones que se vayan a hacer en cada perfil. El molinete debe colocarse aguas arriba del operador y a la mayor distancia posible a fin de que no influya en la medida la perturbación que pueda ocasionar el propio operador.

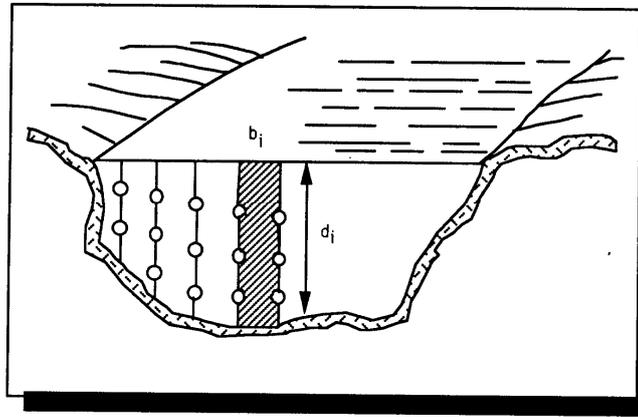
Si el río no es vadeable, se puede utilizar el sistema de cable y canastilla. Consiste en un cable tendido de una orilla a otra y anclado en ellas, con apoyo de castilletes y del que se suspende una canastilla que pueda correr a lo largo del cable y que pueda albergar a una o dos personas. Desde la canastilla se cuelga el molinete con un cable o se maneja con una varilla. Otra alternativa es realizar las medidas desde un puente con la ayuda de un torno.

La medida con molinete se fundamenta en determinar mediante el mismo, la velocidad del agua en distintos puntos de la transversal de un río. Las medidas tienen que ser lo suficientemente próximas para poder dibujar en esa misma transversal las líneas isotacas (líneas que unen aquellos puntos donde la velocidad es la misma) (Figura 5.25).



**Figura 5.25.** Líneas isotacas.

Para aforar un río se divide la sección transversal de éste en franjas verticales (Figura 5.26), donde se mide la velocidad en cada una de ellas y se calcula el caudal como producto de la velocidad media por la sección. La suma de los caudales de cada sección nos dará el caudal total.



**Figura 5.26.** Transversal de un río

El aforo con molinete requiere de una cuidadosa selección del lugar del punto de medida. Es preferible seleccionar una sección de tramo recto, con régimen de agua poco turbulento, donde el lecho del río sea poco profundo y sin piedras o vegetación que alteren su régimen, la sección de aforo sea perpendicular a la corriente y que las velocidades extremas de corriente estén dentro del campo de utilización de las fórmulas de calibrado del molinete.

Los **aforos químicos** se basan en la variación de concentración que experimenta una disolución al ser vertida sobre el cauce del río en el que circula un caudal ( $Q$ ) determinado, el cual se pretende conocer. Los aforos químicos pueden ser de régimen constante y aforos integrativos.

- Aforos químicos de régimen constante.

Suponiendo que el río lleva un caudal constante desconocido  $Q_1$ , donde la concentración ( $C_0$ ) de un determinado elemento químico sea baja. En la sección  $S_1$  se vierte una disolución química con caudal constante  $q$  y con alta concentración ( $C_1$ ) de ese elemento químico presente de forma natural en el río en concentraciones bajas. Aguas abajo del punto de inyección, a suficiente distancia, en la sección  $S_2$  se puede calcular el caudal de la siguiente manera:  $Q_2 = Q_1 + q$ , de manera que la concentración  $C_2$  será menor que  $C_1$  pero mayor que  $C_0$ . Por lo que la ecuación de continuidad en ausencia de tomas, fugas, aportes o infiltración entre los puntos 1 y 2 será:

$$Q_1 C_0 + q C_1 = Q_2 C_2$$

Donde  $Q_1$  será:

$$Q_1 = \frac{q C_1 - C_2}{C_2 - C_0}$$

En la mayoría de los casos  $C_0$  es despreciable de por sí y  $C_2$  tiene poca importancia frente a  $C_1$  con lo que la fórmula a utilizar sería:

$$Q_1 = \frac{q C_1}{C_2}$$

- Aforos químicos por integración

Su fundamento radica en que se vierte repentinamente en un cauce estrecho (con caudal  $Q$ , que es el que se quiere calcular) un volumen,  $V$ , de disolución concentrada,  $C_1$ , con un peso,  $P$ , de una sustancia química disuelta ( $P=C_1V$ ). Se produce una nube expansiva que aumenta de dimensiones a medida que es transportada aguas abajo.

Al situarse en un punto  $S_2$  del río (aguas abajo), donde se recogen "p" muestras a intervalos regulares,  $\Delta t$ , en un tiempo  $T=(p-1)\Delta t$  desde que comienza el paso de la nube hasta que termina. La concentración del elemento químico sería analizada en cada una de las muestras, de manera que su concentración ( $C_2$ ) podría ser representada en un sistema cartesiano frente a los tiempos de toma de muestra en el eje de las abscisas. Esto daría lugar a una curva en forma de campana. El área de esa curva mide el peso  $P$  de la sustancia química añadida (por ejemplo, sal) al cauce en el lugar  $S_1$ . Podemos por lo tanto establecer la ecuación de continuidad como:

$$V C_1 = P = \left(Q + \frac{V}{T}\right) \int_0^T C_2 dt$$

despreciando  $V/T$  tendremos:

$$P = Q \int_0^T C_2 dt$$

La integral debe englobar todo el tiempo  $T$ , desde el principio hasta el final del paso de la nube. Si aplicamos incrementos finitos la ecuación quedaría:

$$Q = \frac{P}{\Delta t \sum C_{2i}}$$

Donde  $\Delta t$  es el intervalo constante entre cada extracción de muestras y  $\Sigma$  abarca todas las muestras.

### Tipos de trazadores

Se define trazador como elemento específico e identificable para cada tipo de agua. Los trazadores se dividen en dos grandes grupos: químicos y radioactivos.

Los **trazadores químicos** más utilizados son sulfato de manganeso, cloruro sódico, nitrito sódico, dicromato sódico, la fluoresceína, el litio y la rodamina B. Las condiciones que debe cumplir un trazador disuelto son que éste no debe ser perturbado por los materiales del lecho del río ni por las características de la corriente, que pueda efectuarse su determinación cuantitativa a bajas concentraciones con suficiente exactitud y de forma simple, que sea suficientemente soluble en agua y que tenga baja toxicidad (se requiere precaución con el dicromato potásico).

En cuanto a los trazadores radioactivos, los más utilizados son el Br-82, como BrNH<sub>4</sub> y el I-131, como NaI. Sus características deben ser las mismas que las mencionadas para los trazadores químicos pero, además, deben tener baja radiotoxicidad, corto periodo de semi-desintegración, alta actividad específica de suministro, facilidad de adquisición y precio asequible.

