3. Parametroen estimazioa

1. ARIKETA

Tratamendu planta batean 10 egunetan, uretako fluor mailak neurtu dira. Neurketa horietako emaitzak mg/l –tan ondorengoak dira:

0.9, 0.8, 1.1, 0.7, 1.1, 0.9, 0.7, 1.0, 0.9, 0.9

Demagun fluor mailak banaketa normala duela.

a) Kalkulatu fluor mailaren batezbestekoaren eta desbiderazio tipikoaren puntu estimazioa.

b) Lortu %95eko konfiantza mailaz, fluor mailaren batezbestekorako konfiantza-tartea.

c) Lortu %99ko konfiantza mailaz, fluor mailaren batezbestekorako konfiantza-tartea.

d) Lortu %95eko konfiantza mailaz, fluor mailaren bariantzarako konfiantza-tartea.

e) Lortu %99ko konfiantza mailaz, fluor mailaren bariantzarako konfiantza-tartea.

Ebazpena :

Zorizko aldagaia definituko da.

X: “Uraren fluor maila mg/l –tan”. Zorizko aldagai honek banaketa normal bat jarraitzen du:

$$X \sim N(\mu,\sigma) \text{ non } \mu \text{ eta } \sigma \text{ ezezaguna diren.}$$

10 neurketa hartu dira, hau da, laginaren tamaina, $n = 10$ da

```
>fluormaila<-c(0.9,0.8,1.1,0.7,1.1,0.9,0.7,1.0,0.9,0.9)
```

a)

Batezbestekoaren estimazio puntuala lagineko batezbestekoa da

```
>mean(fluormaila)
[1] 0.9
```

Bariantzaren estimazio puntuala lagineko kuasibariantza da

```
>var(fluormaila)#Bariantzaren estimazio puntuala
[1] 0.02
```

Ondorioz, desbiderazioaren estimazio puntuala:

```
>sd(fluormaila)
[1] 0.1414214
```

b)

```
>t.test(fluormaila)$conf
[1] 0.7988333 1.0011667
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Hortaz, fluor mailaren batezbestekorako %95eko konfiantza-tartea:

$$I_{\mu}^{0.95} = \left[0.798833,\ \ 1.0011667\right]$$

c)

```
>t.test(fluormaila,conf.level=0.99)$conf
[1] 0.7546629 1.0453371
attr(,"conf.level")
[1] 0.99
```

Ondorioz, fluor mailaren batezbestekorako %99ko konfiantza-tartea:

$$I_{\mu}^{0.99} = \left[0.7546629, 1.0453371\right]$$

d)

R-ko ez duenez populazio bakarreko bariantzarako konfiantza-tartea sortzeko sententziarik, espresio osoa R-n idatzi behar da. Kasu honetan, populazioko batezbestekoa ezezaguna denez erabili beharreko adierazpena honako hau da:

$$I_{\sigma^2}^{1-\alpha} = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\,\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}}\right]$$

```
>KTsigma95<-
c(9*var(fluormaila)/qchisq(0.975,9),9*var(fluormaila)/
qchisq(0.025,9))
>KTsigma95
[1] 0.009462345 0.066657051
```

Beraz, eskatutako konfiantza-tartea:

$$I_{\sigma^2}^{0.95} = [0.009462345,\ 0.066657051]$$

e)

Fluor mailaren bariantzarako %99ko konfiantza-maila duen konfiantza-tarterako berdina egiten:

```
>KTsigma99<-c(9*var(fluormaila)/qchisq(0.995,9),
              9*var(fluormaila)/qchisq(0.005,9))
>KTsigma99
[1] 0.007630562 0.103750410
```

Kasu honetan, konfiantza-tartea hurrengoa da:

$$I_{\sigma^2}^{0.99} = [0.007630562,\ 0.103750410]$$

2. ARIKETA

Hipermerkatu-kate handia batek jaso duen elikagai ontziratu zehatz bateko lote bateko ontzi akastunen proportzioa estimatu nahi du. Horretarako zoriz lote horretako 250 ontzi hartu dira eta horietatik 20 akastunak direla ikusi da.

a) Kalkulatu ontzi akastunen proportziorako puntu-estimazioa
b) Lortu ontzi akastunen proportziorako %95eko konfiantza mailako konfiantza-tartea.
c) Lortu ontzi akastunen proportziorako %98ko konfiantza mailako konfiantza-tartea.

Ebazpena :

Zorizko aldagaia definituko da.

X: “Ontzi akastunen proportzioa”.

Zorizko aldagai honek banaketa binomiala bat jarraitzen du.

$$X \sim Bin(n, p) \text{ den.}$$

250 ontzi hartu direnez, $n = 250$ da.

a)

Kasu honetan, $n = 250 \geq 100$ denez, populazioko proportzioaren puntu-estimazioa lagineko proportzioa da:

$$\hat{p} = \frac{20}{250}$$

b)

Ontzi akastunen proportziorako %95eko konfiantza mailako konfiantza-tartea modu honetan kalkulatuko da.

```
>prop.test(20,250)$conf
[1] 0.05078401 0.12266504
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Hortaz, eskatutako konfiantza-tartea hurrengoa da:

$$I_p^{0.95} = [0.05078401, 0.12266504]$$

c)

Ontzi akastunen proportziorako %98ko konfiantza mailako konfiantza-tartea modu honetan kalkulatuko da.

```
>prop.test(20,250,conf.level=0.98)$conf
[1] 0.04689456 0.13176491
attr(,"conf.level")
[1] 0.98
```

Kasu honetan zehaztu beharreko konfiantza-tartea:

$$I_p^{0.98} = [0.04689456, 0.13176491]$$

3. ARIKETA

Laborategi bat bio-iragazki berri bat ikertzen ari da, Bidasoa ibaiaren ertzean dagoen enpresa bateko isurketetan Fe kontzentrazioa murrizteko asmoz. Bio-iragazki horien eraginkortasuna egiaztatzeko, hauek erabili aurretik eta ondoren Fe ($\mu g / L$) kontzentrazioak neurtu dira isurketetan. Datu horiek Bioiragazkiak.txt fitxategian daude. Kontuan izan Fe kontzentrazioak banaketa normala jarraitzen duela.

a) Bioiragazkiak.txt fitxategia irakurri eta datuak eskuragarri jarri.

b) %90eko konfiantza mailaz, bio-iragazkiak erabili ondoren Fe kontzentrazioa murriztu dela onartu daiteke?

c) Eta konfiantza-maila altuagoa balitz, bio-iragazkiak erabili ondoren Fe kontzentrazioa murriztu dela onartuko liteke?

d) Bio-iragazkiak erabili ondoren, Fe kontzentrazioari buruzko datuak okerrak dira eta hauek %5ean murriztu behar dira. Zuzenketa hori egin ondoren eta %90eko konfiantza mailaz, bio-iragazkiak erabili ondoren Fe kontzentrazioa murriztu dela onartu daiteke?

Ebazpena :

Zorizko aldagaiak definituko dira.

X_1: “Bio-iragazkia erabili aurretik, burdin kontzentrazioa (µg/L)”.

X_2: “Bio-iragazkia erabili ondoren, burdin kontzentrazioa (µg/L)”.

a)

Datuak irakurri eta eskuragarri izateko read.table() eta attach() instrukzioak erabiliko dira:

```
>kontzentrazioa<-read.table("Bioiragazkiak.txt",header=T)
>attach(kontzentrazioa)
```

b)

Kasu honetan, parekatutako datuak dira, hau da ez-independenteak. Beraz, bio-iragazkiaren eraginkortasuna egiaztatzeko aldagai berri bat definitu behar da, X_1 eta X_2 aldagaien arteko diferentzia.

D: “Burdin kontzentrazioaren diferentzia bio-iragazkia erabili aurretik eta ondoren“

```
>D<-Lehen-Ondoren
```

%90eko konfiantza-maila erabiliz batezbestekorako konfiantza-tartea ondorengoa da:

```
>t.test(D,conf.level=0.90)$conf
[1] -0.510225  2.990225
attr(,"conf.level")
[1] 0.9
```

Hau da, eskatutako konfiantza-tartea hurrengoa da:

$$I_{\mu_D}^{0.90} = [-0.510225,\ 2.990225]$$

Batezbestekoaren konfiantza-tartea ez denez tarte positiboa Fe kontzentrazioa, bio-iragazkiak erabili ondoren, ezin da onartu murriztu denik.

c)

Konfiantza-maila handitzen bada, konfiantza-tartea ere handitu egiten da. Beraz kasu honetan, aurreko atalean gertatzen zen bezala, konfiantza tartea ez da tarte positiboa izango. Ondorioz, Fe kontzentrazioa, bio-iragazkiak erabili ondoren, murriztu denik ezingo da onartu ezta ere.

Adibidez, konfiantza-maila %95 bada:

```
>t.test(D,conf.level=0.95)$conf
[1] -0.8515711  3.3315711
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Hau da, konfiantza-tartea: $I_{\mu_D}^{0.95} = [-0.8515711,\ 3.3315711]$

Eta %99 bada, berriz:

```
>t.test(D,conf.level=0.99)$conf
[1] -1.528505  4.008505
attr(,"conf.level")
[1] 0.99
```

Kasu honetan: $I_{\mu_D}^{0.99} = [-1.528505,\ 4.008505]$

d)

Lehenik eta behin, datuak zuzendu egin behar dira. Horretarako, "Ondoren" laginean (R-ko bektorean) %5eko zuzenketa egingo da:

```
>Ondoren.zuzendua<-Ondoren*0.95
>D.berria<-Lehen-Ondoren.zuzendua
```

Batezbestekorako konfiantza-tartea honako hau da:

```
>t.test(D.berria,conf.level=0.90)$conf
[1] 3.6449 7.0611
attr(,"conf.level")
[1] 0.9
```

$$I_{\mu_D}^{0.90} = \left[3.6449,\ 7.0611\right]$$

Kasu honetan, batezbestekorako konfiantza-tartea positiboa denez, Fe kontzentrazioa, bio-iragazkiak erabili ondoren, murriztu dela onartu daiteke.

4. ARIKETA

Andaluzian kokaturik dagoen zentro teknologiko batean ongarri berri bat garatu da, olibondoen fruituen diametroa handitu ahal izateko. Ongarri honen tratamendua jaso duten olibondoetatik zoriz 80 fruitu aukeratu dira eta tratamendua jaso ez duten olibondoetatik 75 fruitu. Fruituen diametroen datuak (cm-tan), Olibondoak.txt artxiboan aurkitzen dira. Fruituen diametroek banaketa normal bat jarraitzen dutela eta independenteak direla kontsideratu.

a) Olibondoak.txt fitxategia irakurri eta datuak eskuragarri jarri.
b) Tratamendua jaso duten eta jaso ez duten fruituen diametroen batezbestekoaren, bariantzaren eta desbiderazio tipikoaren estimazio puntuala burutu.
c) %98ko konfiantza mailaz, tratamendu jaso duten eta jaso ez duten fruituen diametroen batezbestekorako konfiantza-tarteak kalkulatu.
d) Zentro teknologikoko ikertzaileek tratamendua ondoren fruituen diametroa handitu dela diote. %95eko konfiantza mailaz, baieztapen hau onartu daiteke?

Ebazpena :

Zorizko aldagaiak definituko dira.

X_1: “Olibondoko fruituen diametroa (cm-tan) ongarria jaso aurretik”.

X_2: “Olibondoko fruituen diametroa (cm-tan) ongarria jaso ondoren”.

a)

Datuak irakurri eta eskuragarri izateko read.table() eta attach() instrukzioak erabiliko dira:

```
>datuak<-read.table("Olibondoak.txt",header=T)
>attach(datuak)
```

b)

Diametroa_Lehen aldagaian balio galduak daudenez, puntu-estimazioa egiterakoan balio galdu hauek ez dira kontuan izan behar. Horretarako, R-en “na.rm=T” instrukzioa erabili behar da. Hori kontuan izanez, eskatutako puntu-estimazioak hurrengoak dira:

Batezbestekoaren estimazio puntuala lagineko batezbestekoa da:

Ongarriarekin tratamendua jaso aurretik olibondoko fruituen diametroaren batezbestekoaren estimazio puntuala:

```
>batezbestekoa.lehen<-mean(Diametroa_Lehen,na.rm=T)
>batezbestekoa.lehen
[1] 4.529733
```

Ongarriarekin tratamendua jaso ondoren olibondoko fruituen diametroaren batezbestekoaren estimazio puntuala:

```
>batezbestekoa.ondoren<-mean(Diametroa_Ondoren)
>batezbestekoa.ondoren
[1] 6.387875
```

Bariantzaren estimazio puntuala lagineko kuasibariantza da:

Ongarriarekin tratamendua jaso aurretik olibondoko fruituen diametroaren bariantzaren estimazio puntuala:

```
>Bariantza.lehen<-var(Diametroa_Lehen,na.rm=T)
>Bariantza.lehen
[1] 0.128081
```

Ongarriarekin tratamendua jaso ondoren olibondoko fruituen diametroaren bariantzaren estimazio puntuala:

```
>Bariantza.ondoren<-var(Diametroa_Ondoren)
>Bariantza.ondoren
[1] 0.5596245
```

Bukatzeko, desbiderazio tipikoaren puntu-estimazio lagineko kuasidesbiderazioa da:

Ongarriarekin tratamendua jaso aurretik olibondoko fruituen diametroaren desbiderazio tipikoaren estimazio puntuala:

```
>Des.lehen<-sd(Diametroa_Lehen,na.rm=T)
>Des.lehen
[1] 0.3578841
```

Ongarriarekin tratamendua jaso ondoren olibondoko fruituen diametroaren desbiderazio tipikoaren estimazio puntuala:

```
>Des.ondoren<-sd(Diametroa_Ondoren)
>Des.ondoren
[1] 0.7480806
```

c)

Ongarriarekin tratamendua jaso aurretik fruituen diametroen batezbestekorako %98ko konfiantza-mailako konfiantza-tartea hurrengoa da:

```
>t.test(Diametroa_Lehen,conf.level=0.98)$conf
[1] 4.431471 4.627996
attr(,"conf.level")
[1] 0.98
```

Hau da:

$$I_{\mu_1}^{0.98} = [4.431471, 4.627996]$$

Ongarriarekin tratamendua jaso ondoren berriz, fruituen batezbestekorako %98ko konfiantza-tartea:

```
>t.test(Diametroa_Ondoren,conf.level=0.98)$conf
[1] 6.189278 6.586472
attr(,"conf.level")
[1] 0.98
```

Ondorioz, kasu honetan eskatutako tartea ondorengoa da:

$$I_{\mu_2}^{0.98} = [6.189278, 6.586472]$$

d)

Batezbestekoen diferentziarako konfiantza-tartea eraiki behar da, baieztapena onartu ala ez ondorioztatzeko.

Hau egin ahal izateko, lehenik eta behin bariantzak berdinak edo desberdinak diren ikusi behar da. Horretarako bariantzen arteko zatidurarako konfiantza-tartea erabiliko da:

```
>var.test(Diametroa_Lehen,Diametroa_Ondoren)$conf
[1] 0.1459202 0.3601851
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Bariantzen arteko zatidurarako %95eko konfiantza-mailako konfiantza tartea honako hau da:

$$I^{0.95}_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = [0.1459202\ 0.3601851]$$

$1 \notin I^{0.95}_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = [0.1459202\ 0.3601851] \Rightarrow$ %95eko konfiantza-mailaz bariantzak desberdinak direla onar dezakegu. Beraz batezbestekoen diferentziarako konfiantza-tartea egiterakoan honako hau kontuan izaten ondoren konfiantza-tartea lortzen da:

```
>t.test(Lehen,Ondoren,var.equal=F)$conf
[1] -2.042932 -1.673351
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

$$I^{0.95}_{\mu_1-\mu_2} = [-2.042932,\ -1.673351]$$

Lortutako tartea negatiboa da, beraz tratamendua jaso ondoren fruituen diametroa handitu dela onar genezake.