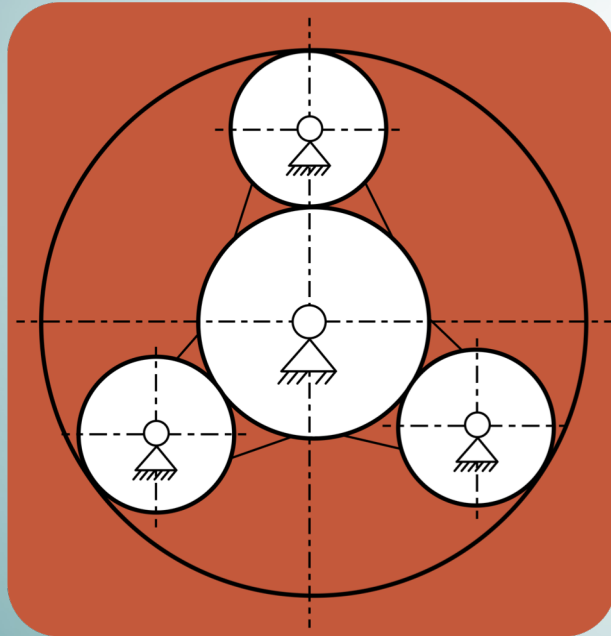


# Máquinas y Mecanismos

## 4. Teoría de la curvatura



**Alfonso Fernández del Rincón**  
**Pablo García Fernández**

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL Y MECÁNICA

Este material se publica bajo licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)



## Epígrafes del tema

- 6.1 Aceleración del punto del plano móvil que coincide con el CIR.
- 6.2 Teorema de Hartmann.
- 6.3 Fórmula de Euler-Savary: Circunferencia de inflexiones. Construcciones gráficas.
- 6.5 Teorema de Bobillier.
- 6.6 Circunferencia de Bresse: Polo de aceleraciones.
- 6.7 Perfiles conjugados: generalización de la fórmula de Euler-Savary.
- 6.8 Aplicaciones de la fórmula de Euler-Savary

## Duración estimada

5 horas

## Modalidades organizativas

- Clases teóricas: 1 hora
- Prácticas de aula: 4 horas
- Prácticas de laboratorio: 2 horas

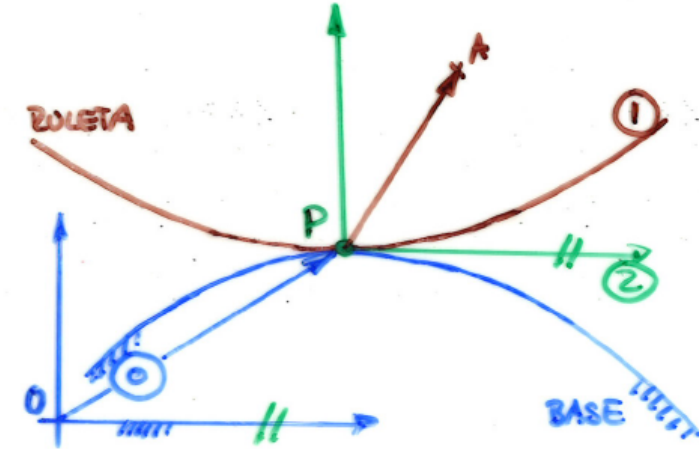
En cualquier instante, un punto A perteneciente al sistema ② tiene una velocidad:

$$\mathbf{v}_{A1/0} = \mathbf{v}_{P1/0} + \boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \mathbf{PA} = \{ \mathbf{v}_{P1/0} = 0, polo \} \Rightarrow \mathbf{v}_{A1/0} = \boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \mathbf{PA}$$

Derivando, se obtiene la aceleración:

$$\mathbf{a}_{A1/0} = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{1/0}}{dt} \times \mathbf{PA} + \boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \frac{d\mathbf{PA}}{dt} \quad (*)$$

Considerando el sistema ②, ligado al punto matemático P, que se mueve sobre las curvas polares:



$$\mathbf{v}_{A1/0} = \mathbf{v}_{A1/2} + \mathbf{v}_{A2/0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_{A1/2} = \frac{d\mathbf{PA}}{dt} \\ \mathbf{v}_{A2/0} = \mathbf{v}_{P2/0} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{2/0}}_{\{ \boldsymbol{\omega}_{2/0} = 0, 2 \parallel 0 \}} \times \mathbf{PA} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d\mathbf{PA}}{dt} = \mathbf{v}_{A1/0} - \mathbf{v}_{P2/0}$$

que se sustituye en el ecuación de aceleración y haciendo  $A \rightarrow P$

$$\mathbf{a}_{P1/0} = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{1/0}}{dt} \times \underbrace{\mathbf{PP}}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \left( \underbrace{\boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \mathbf{PP}}_{\mathbf{0}} - \mathbf{v}_{P2/0} \right) = \boxed{\mathbf{a}_{P1/0} = -\boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \mathbf{v}_{P2/0}}$$

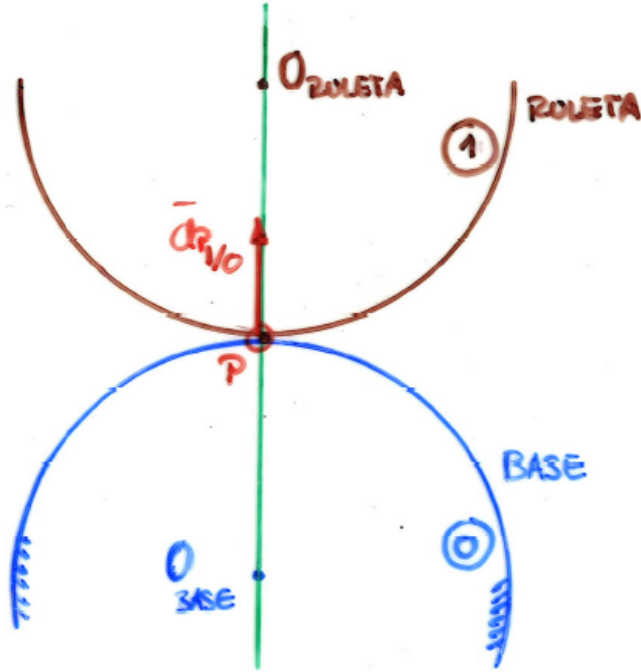
Siendo  $\mathbf{v}_{P2/0}$  la velocidad de cambio de polo, también denominada  $\mathbf{u}$ .

# 6.1 Aceleración del punto del plano móvil que coincide con el CIR

Por lo tanto, la aceleración del punto del plano móvil que coincide con el CIR es un vector:  $\mathbf{a}_{P1/0} = -\boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \mathbf{u}$

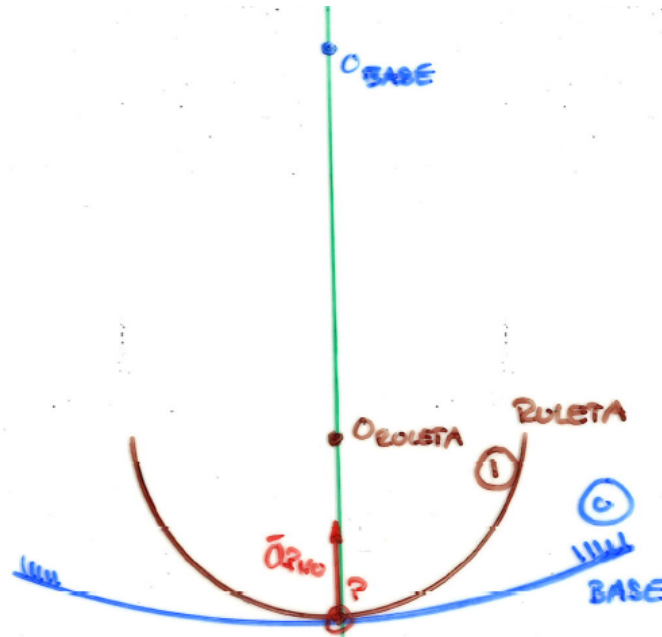
- Módulo:  $a_{P1/0} = \omega_{1/0} u$
- Dirección:  $\perp \mathbf{u}$
- Sentido: El que hace que se separen la base y la ruleta, siempre de la base a la ruleta.

Casos particulares:



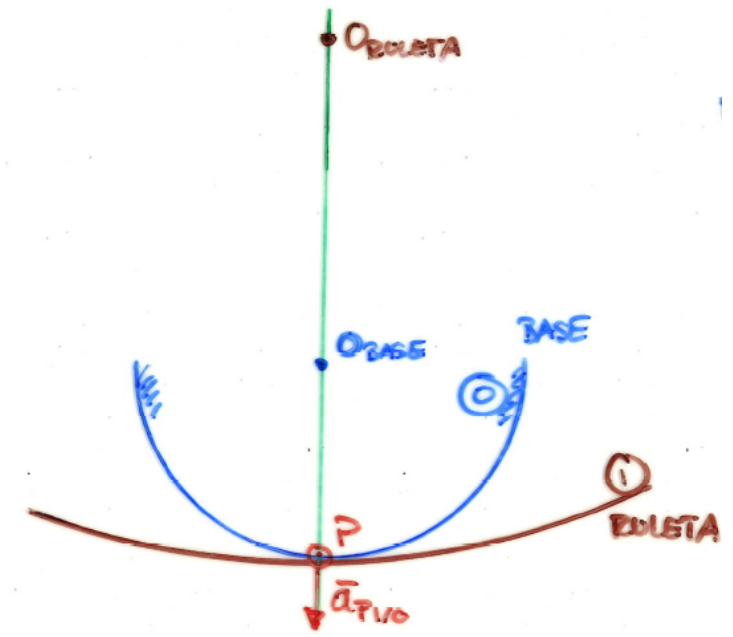
Contacto

Convexo-convexo



Contacto

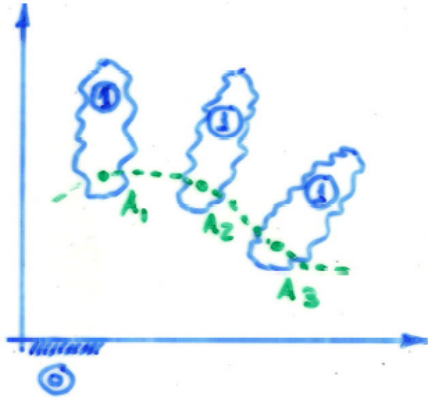
Convexo-concavo



Contacto

Convexo-concavo

## Introducción:



Se definen tres planos:

- ① Plano fijo.
- ① Plano móvil, contiene al punto A de trayectoria conocida.
- ② Plano móvil con tg y normal a la trayectoria del punto A.

El punto A pertenece tanto a ① como a ②  $\Rightarrow \mathbf{v}_{A1/0} = \mathbf{v}_{A2/0} \Rightarrow \{\mathbf{v}_{A2/1} = 0\}$ ,

entonces  $A \equiv P_{12}$

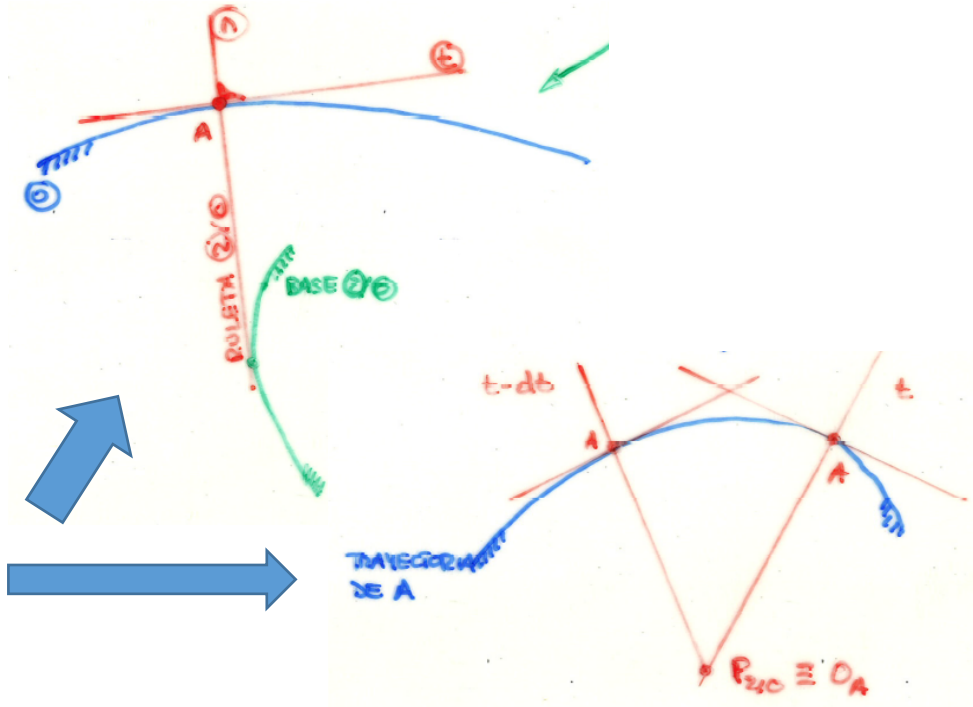
$P_{10} \in n$  debido a:

- $\mathbf{v}_{A1/0}$  es tangente a la trayectoria de A.
- $P_{10}$  debe ser  $\perp \mathbf{v}_{A1/0}$ , que es la normal.

$P_{20} \in n$  debido a que tanto  $P_{12}$  como  $P_{10} \in n$  (Teorema Aronhold-Kennedy).

Como  $P_{20} \in n$  significa que  $P_{20}$  es la ruleta del movimiento de ② sobre ①.

El  $P_{20}$  así obtenido es también el centro de curvatura de la trayectoria de A, es decir, como la intersección de normales infinitamente próximas.



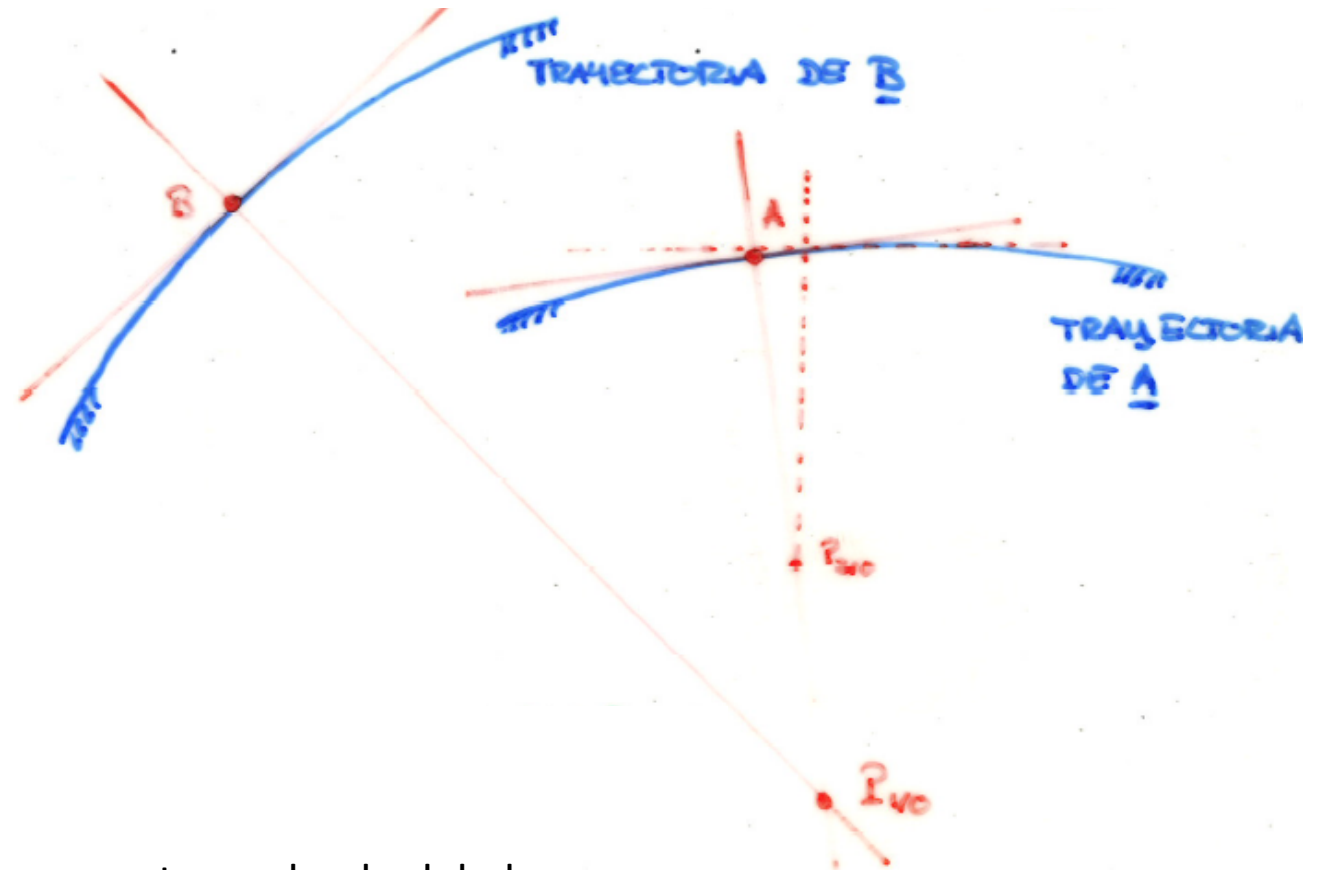
### Introducción:

$P_{10}$  se obtiene conociendo la trayectoria de otro punto B en el mismo instante.

Como  $P_{20}$  es el centro de curvatura de la trayectoria de A y además el polo del movimiento de ② sobre ①, la base del movimiento de ② sobre ① es también la evoluta de la trayectoria del punto A.

**Evoluta** (de una curva): Lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva.

Conclusión: El centro de curvatura de la trayectoria de un punto es el polo del plano asociado a la normal a la trayectoria, que se mueve con ese punto.

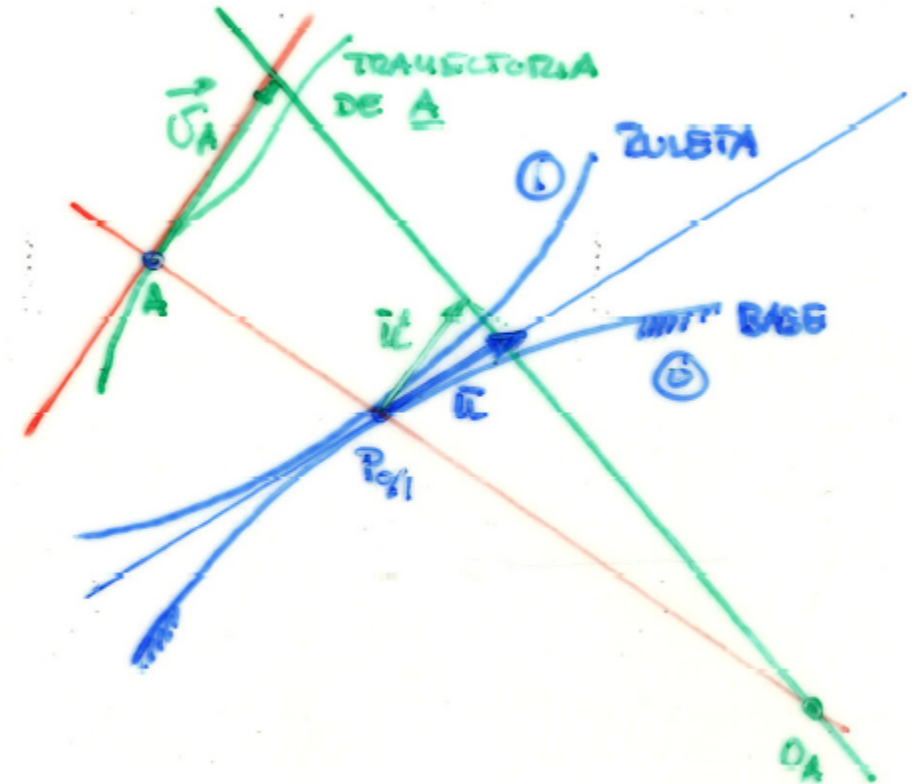


Enunciado: Los siguientes puntos están alineados:

- El extremo del vector **velocidad** de un punto.
- El **centro de curvatura** de la trayectoria de ese punto.
- El extremo de la componente paralela a la velocidad del punto del vector **velocidad de cambio de polo**.

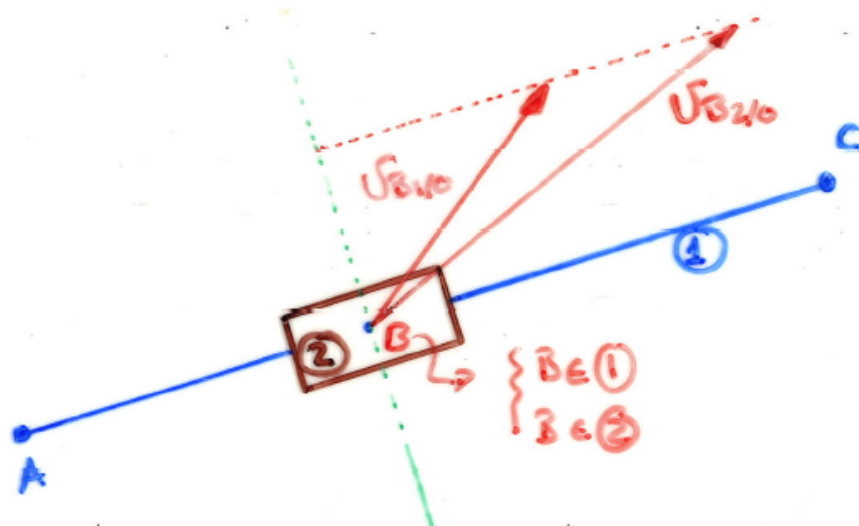
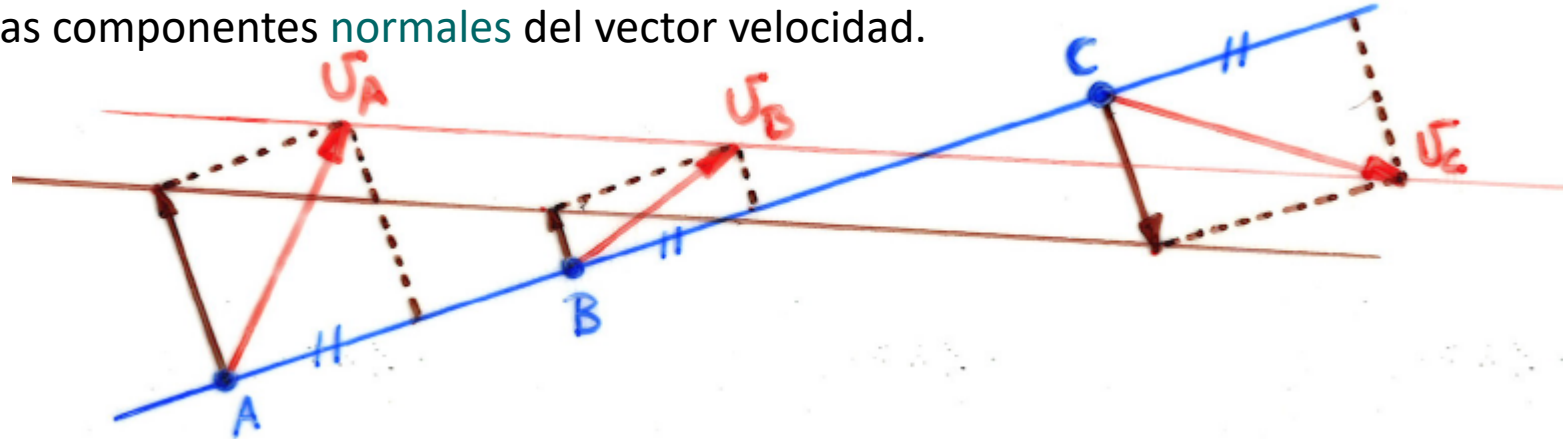
Aplicación: conocida la velocidad de un punto, el polo del movimiento y la velocidad de cambio de polo, se puede obtener el **centro de curvatura** de la trayectoria del punto.

A continuación se va a demostrar este teorema de dos maneras diferentes.



Enunciado: El centro de curvatura  $P_{20}$ , el polo  $P_{10}$  y el punto  $A$  pertenecen a la recta normal.

Demostración: Se aplica una extensión del Teorema de Burmester: Si tres puntos pertenecientes a un mismo sistema de referencia están alineados, los extremos de sus vectores velocidad también lo están. Así mismo, también están alineados los extremos de las componentes normales del vector velocidad.



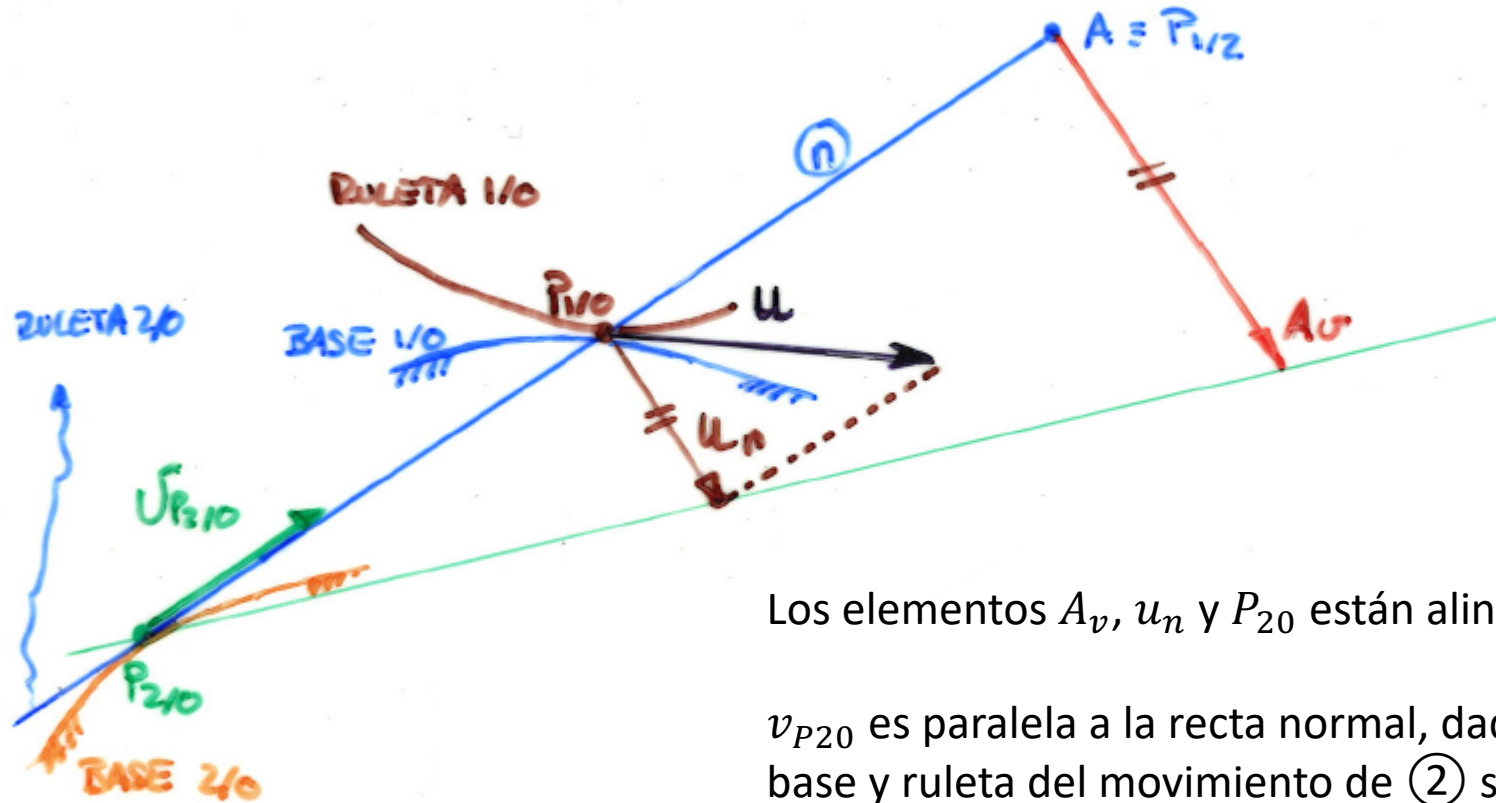
Esto es una consecuencia de que todos los puntos posean la misma proyección sobre la recta que los une. Además, esto se sigue cumpliendo aunque los puntos no pertenezcan al mismo sistema de referencia y exista la posibilidad de movimiento relativo. Es suficiente con que se encuentren alineados.

$$\mathbf{v}_{B2/0} = \mathbf{v}_{B2/1} + \mathbf{v}_{B1/0}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\parallel AC}$

Por lo tanto,  $\mathbf{v}_{B2/1}$  no introduce componente normal y se cumplirá el Teorema: Los extremos de las componentes  $\perp$  a la línea  $\overline{ABC}$  de las velocidades  $\mathbf{v}_A$ ,  $\mathbf{v}_B$  y  $\mathbf{v}_C$  están alineados.



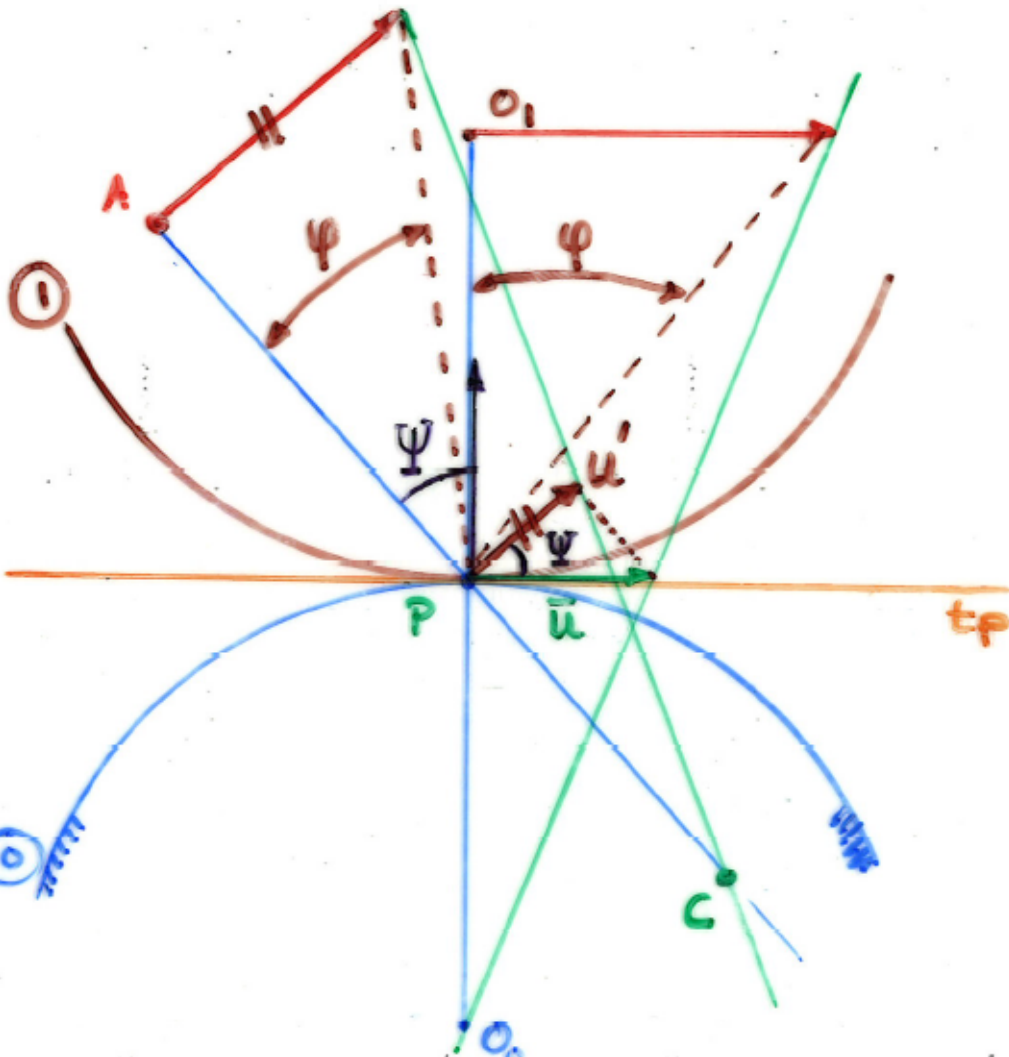


Los elementos  $A_v$ ,  $u_n$  y  $P_{20}$  están alineados.

$v_{P_{20}}$  es paralela a la recta normal, dado que tiene que ser tangente a la base y ruleta del movimiento de ② sobre ① y como la recta  $n$  es la ruleta, tiene que ser paralela a esta última.

Aplicando la propiedad anterior al centro de curvatura  $P_{20} \equiv O_A$ , el polo  $P_{10}$  y el punto  $A \equiv P_{12}$ . Al estar alineados, también lo estarán las componentes normales a la línea que los une de sus velocidades (la línea que los une es la recta normal a la trayectoria del punto  $A$ ).

Para esta segunda demostración se parte de la idea de que el punto  $A$  al moverse sobre su trayectoria posee una componente de aceleración paralela a la tangente y otra paralela a la normal.



Dato:  $\mathbf{v}_{A10}$

Primero se calcula la velocidad  $\mathbf{v}_{O11/0}$ , siendo  $O1$  el centro de la circunferencia osculadora correspondiente a la ruleta.

Circunferencia osculadora: Circunferencia equivalente a la base o a la ruleta en un instante. Para el análisis instantáneo de movimiento, poseen un contacto de 3er orden con las correspondientes curvas polares (coinciden hasta la 2ª derivada 3 puntos de contacto infinitamente próximos)

Ahora se calcula la velocidad de cambio de polo  $\mathbf{u}$ . Los puntos  $O1$ ,  $P$  y  $Oo$  están alineados.  $Oo$  es el centro de curvatura de  $O1$  y  $P$ .

$$\mathbf{a}_{A1/0} = \mathbf{a}_{P1/0} + \boldsymbol{\alpha}_{1/0} \times \mathbf{PA} + \boldsymbol{\omega}_{1/0} \times (\boldsymbol{\omega}_{1/0} \times \mathbf{PA}) \rightarrow \text{Proyectando } \parallel \mathbf{PA}$$

$$\rightarrow a_{A10}^{\parallel PA} = a_{P10}^{\parallel PA} + \omega_{1/0}^2 PA, \text{ sabiendo que } \mathbf{a}_{P10} \Rightarrow \begin{cases} \perp \mathbf{u} \\ = -J_p \end{cases}$$

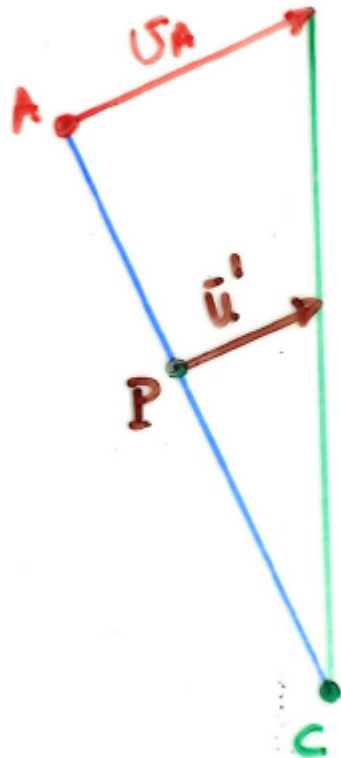
$$\rightarrow a_{A10}^{\parallel PA} = \underbrace{-J_p}_{P \rightarrow A} \cos \psi + \underbrace{\omega_{1/0}^2}_{A \rightarrow P} PA \quad (*)$$

Como  $\mathbf{PA} \perp \mathbf{v}_A \Rightarrow a_{A1/0}^{\perp PA} = a_{A1/0}^n = \frac{v_{A1/0}^2}{\rho_{A1/0}}$

Sustituyendo en la ecuación (\*):

$$\frac{v_{A1/0}^2}{\rho_{A1/0}} = -J_p \cos\psi + \omega_{1/0}^2 PA \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_p = \omega_{1/0} u \\ v_{A1/0} = \omega_{1/0} PA \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\omega_{1/0}^2 PA^2}{\rho_{A1/0}} = -\omega_{1/0} u \cos\psi + \omega_{1/0}^2 PA (**)$$

Haciendo  $u' = u \cos\psi$ , y uniendo el extremo de  $\mathbf{v}_{A1/0}$  con el de  $\mathbf{u}'$  y cortando con  $AP$  se obtiene  $C$ :



$$\frac{u'}{v_{A1/0}} = \frac{CP}{CA} \Rightarrow u' = \omega_{1/0} PA \frac{CP}{CA}$$

Sustituyendo en (\*\*):

$$\frac{\omega_{1/0} PA^2}{\rho_{A1/0}} = -\omega_{1/0} PA \frac{CP}{CA} + \omega_{1/0} PA \Rightarrow \frac{PA}{\rho_{A1/0}} = 1 - \frac{CP}{CA} = \frac{CA - CP}{CA} = \frac{PA}{CA} \Rightarrow$$

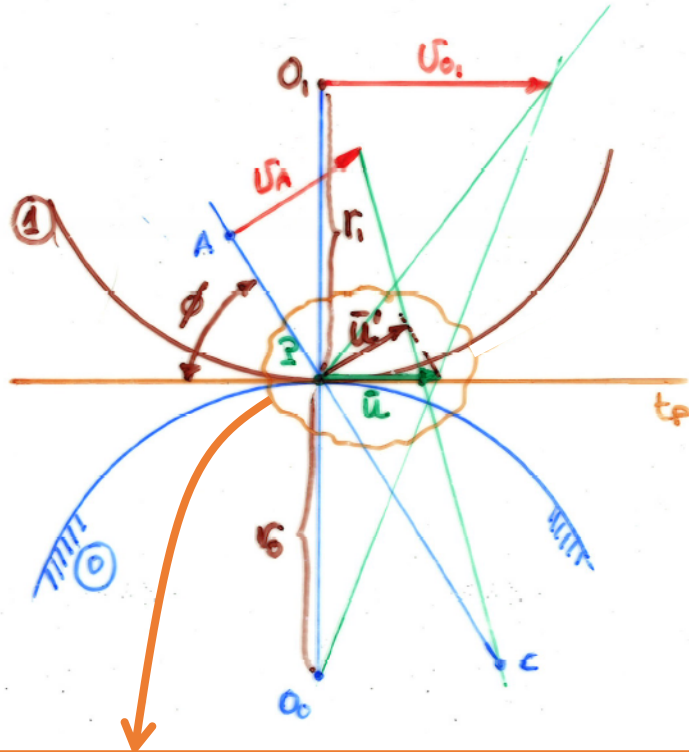
$$\Rightarrow \boxed{\rho_{A1/0} = CA}$$

Para calcular la posición del **centro de curvatura** se traza la intersección entre:

- La línea extremo de los vectores  $\mathbf{v}_{A1/0}$  y  $\mathbf{u}'$ .
- La normal a la trayectoria del punto  $A$ .

## 6.3 Fórmula de Euler-Savary

Se trata realmente de la expresión analítica del Teorema de Hartman:



La velocidad de  $O_1$  será:  $v_{O_1} = \omega_{1/0} r_1$

Además, se puede establecer la siguiente relación para la velocidad de cambio de polo:

$$\frac{u}{r_0} = \frac{v_{O_1}}{r_0 + r_1}$$

Sustituyendo  $v_{O_1}$  y despejando  $u$  se obtiene:

$$u = \omega_{1/0} r_1 r_0 \frac{1}{r_0 + r_1} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{1/0}}{u} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} (*)}$$

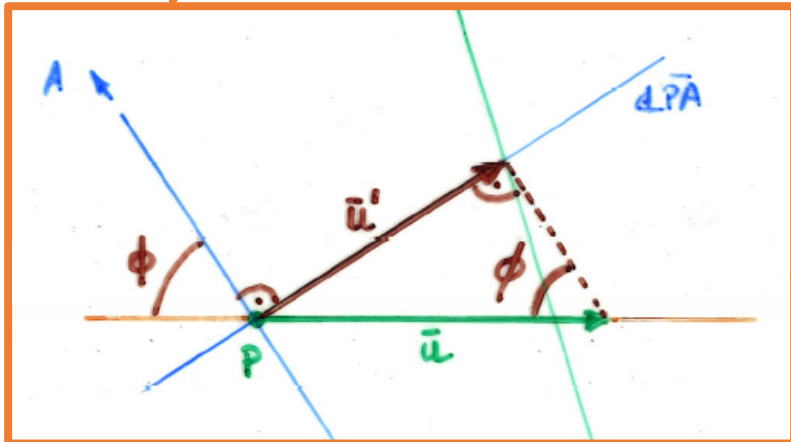
Considerando ahora el punto  $A \Rightarrow \begin{cases} v_{A1/0} = \omega_{1/0} PA \\ u' = u \sin \phi \end{cases}$

Por semejanza de triángulos se obtiene una expresión válida para  $\forall A \in \textcircled{1}/\textcircled{0}$ :

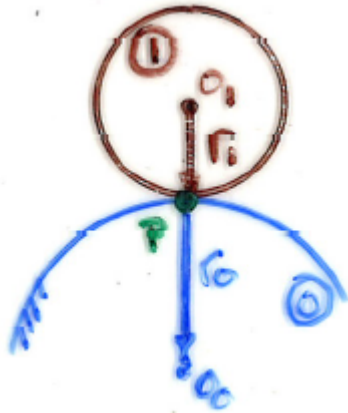
$$\begin{aligned} \frac{u'}{CP} &= \frac{v_{A1/0}}{CA} \Rightarrow \frac{u \sin \phi}{CP} = \frac{\omega_{1/0} PA}{CA} \rightarrow \{CA = CP + PA\} \rightarrow \frac{u \sin \phi}{CP} = \frac{\omega_{1/0} PA}{CP + PA} \Rightarrow \frac{\omega_{1/0}}{u} \\ &= \frac{CP + PA}{CP PA} \sin \phi \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{1/0}}{u} = \left( \frac{1}{CP} + \frac{1}{PA} \right) \sin \phi (**)} \end{aligned}$$

Iguando  $(*) \equiv (**)$ , se obtiene la fórmula de Euler-Savary:

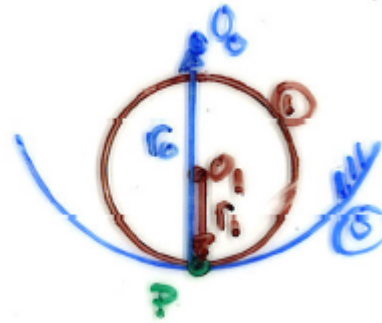
$$\boxed{\left( \frac{1}{CP} + \frac{1}{PA} \right) \sin \phi = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}}$$



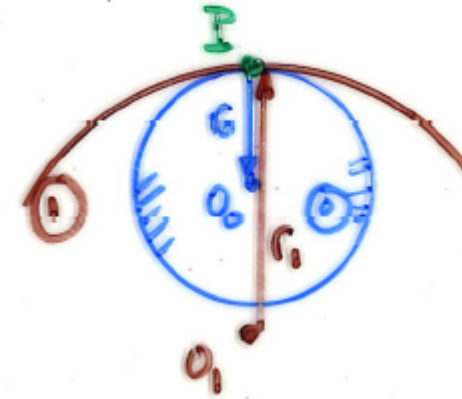




① rueda por el exterior de ②  
 $r_0 > 0$   
 $r_1 > 0$

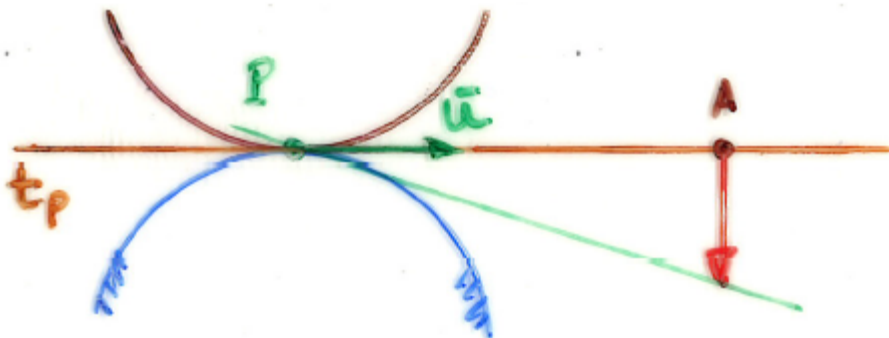


① rueda por el interior de ②  
 $r_0 < 0$   
 $r_1 > 0$



① rueda por el exterior de ②  
 $r_0 > 0$   
 $r_1 < 0$

Comentario: Todos los puntos pertenecientes a la tangente en el polo a las poloidas ( $t_p$ ) tienen en P el centro de curvatura de su trayectoria, es decir,  $\mathbf{u}$  no tiene componente  $\perp$  a  $t_p$ .

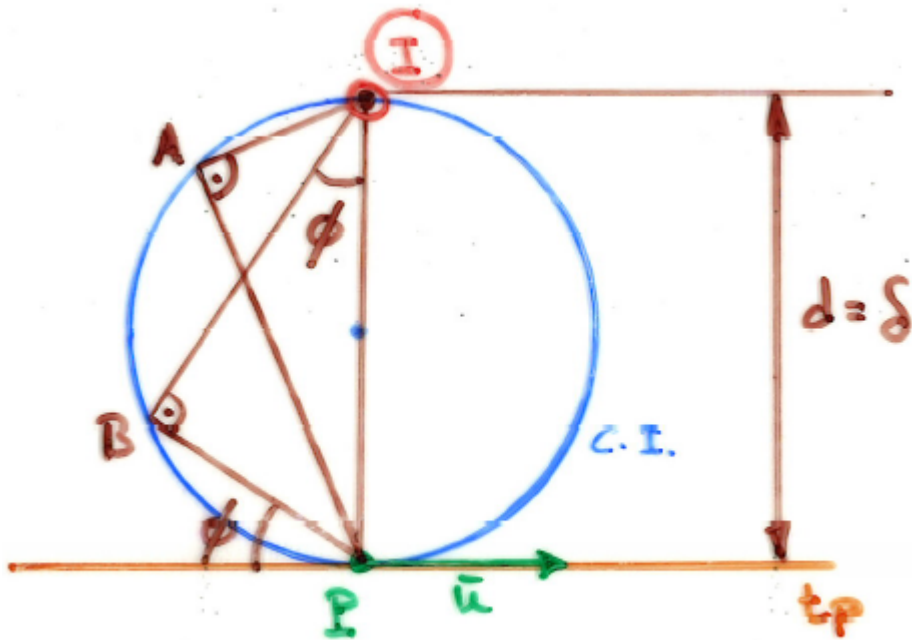


Se buscan los puntos pertenecientes al plano móvil ① cuya **aceleración normal es nula** por encontrarse en el instante considerado en un punto de **inflexión** de su trayectoria, es decir, en un punto de **radio de curvatura infinito**.

Por tanto, haciendo  $CP = \infty$  y llamando  $r = PA$  se sustituye en la expresión de Euler-Savary:

$$\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r}\right) \sin \phi = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{\omega}{u} = cte = \frac{1}{\delta} \Rightarrow \boxed{r = \delta \sin \phi}$$

Circunferencia de inflexiones: Es una circunferencia de diámetro  $\delta = \frac{u}{\omega}$  tangente a la velocidad de cambio de polo.



Los puntos pertenecientes a esta circunferencia únicamente poseen aceleración tangencial y por lo tanto, la velocidad y aceleración de los mismos es  $\perp$  a la línea que los une con el polo y por tanto en la dirección de la línea que los une con el punto I (Arco capaz de  $90^\circ$ ).

El polo o centro de inflexiones es el punto I, cuya velocidad será:

$$v_{I1/0} = \omega_{1/0} \delta \rightarrow \left\{ \delta = \frac{u}{\omega} \right\} \rightarrow v_{I1/0} = u$$

Es decir, que coincide con la velocidad de cambio de polo.

La inversión del movimiento (fijando la ruleta y moviendo la base), implica que la base gire con una velocidad  $-\omega_{1/0}$  para que la velocidad de cambio de polo mantenga el sentido. De esta manera la nueva circunferencia de inflexiones es la simétrica a la antigua respecto de  $u$ .

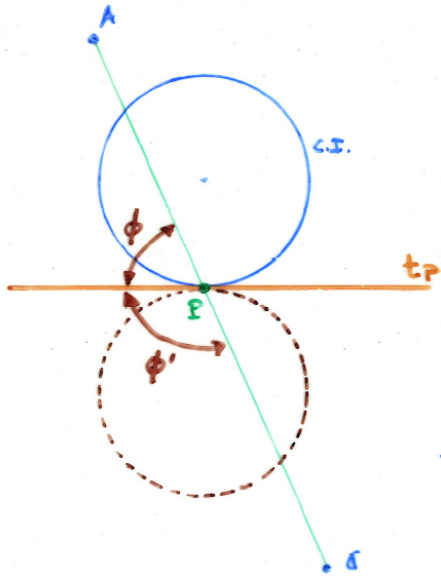
## 6.3 Fórmula de Euler-Savary. Circunferencia de inflexiones.

Los puntos  $A$  y  $C$  relacionados mediante Euler-Savary se denominan **puntos conjugados**. Cada uno de ellos es el centro de curvatura del otro en el correspondiente movimiento relativo:

$$\left(\frac{1}{\mathbf{CP}} + \frac{1}{\mathbf{PA}}\right) \sin \phi = \frac{1}{\delta}$$

$$\left(\frac{1}{\mathbf{AP}} + \frac{1}{\mathbf{PC}}\right) \sin \phi' = \frac{1}{\delta}$$

Como  $\sin \phi' = \sin(180 - \phi) = \sin \phi$ ,  $C$  es el centro de curvatura del punto  $A$  y viceversa para el movimiento invertido.



Ahora se determinarán cuáles son los puntos conjugados de una circunferencia tangente a las poloidas, que vendrá representada mediante la expresión  $\mathbf{PA} = d_0 \sin \phi$ . Sustituyendo en la expresión de Euler-Savary:

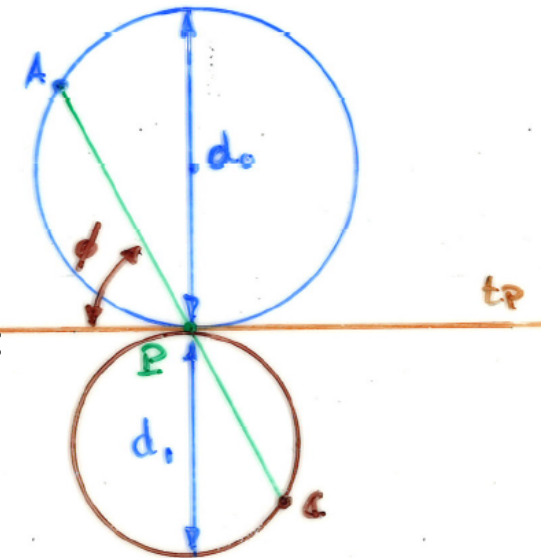
$$\left(\frac{1}{\mathbf{CP}} + \frac{1}{d_0 \sin \phi}\right) \sin \phi = \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{\mathbf{CP}} \sin \phi = \frac{1}{\delta} - \frac{1}{d_0} = \frac{1}{d_1} \Rightarrow \mathbf{CP} = d_1 \sin \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{PC} = -d_1 \sin \phi = d_1 \sin(\pi + \phi)$$

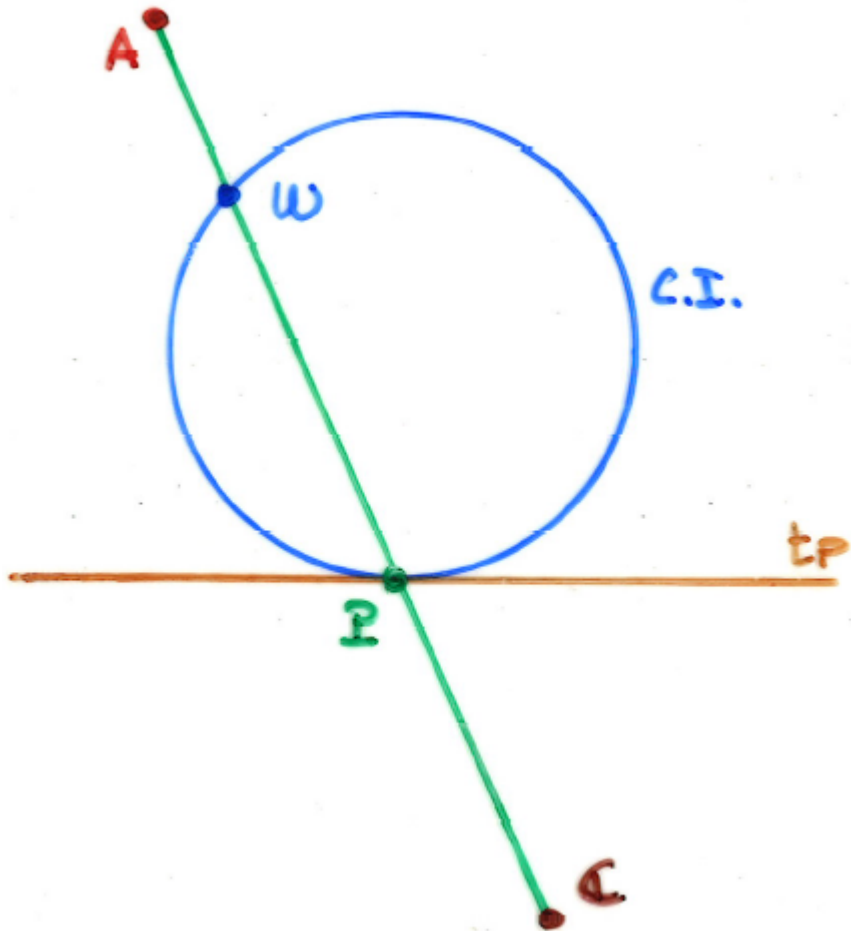
Que es otra circunferencia, pero invertida, cuya relación de diámetros entre ésta y la anterior es:

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{\delta}$$

Si se trata de la circunferencia de inflexiones, entonces  $d_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{d_0} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{d_0} = \frac{1}{\delta}$







**A**: punto perteneciente al plano móvil.

**W**: Intersección entre la circunferencia de inflexiones y **AP**.

**P**: Polo del movimiento.

**C**: Centro de curvatura de la trayectoria del punto **A**.

Se puede plantear:

$$\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{CP}\right) \sin \phi = \left(\frac{1}{PW} + \frac{1}{\infty}\right) \sin \phi$$

Dado que:

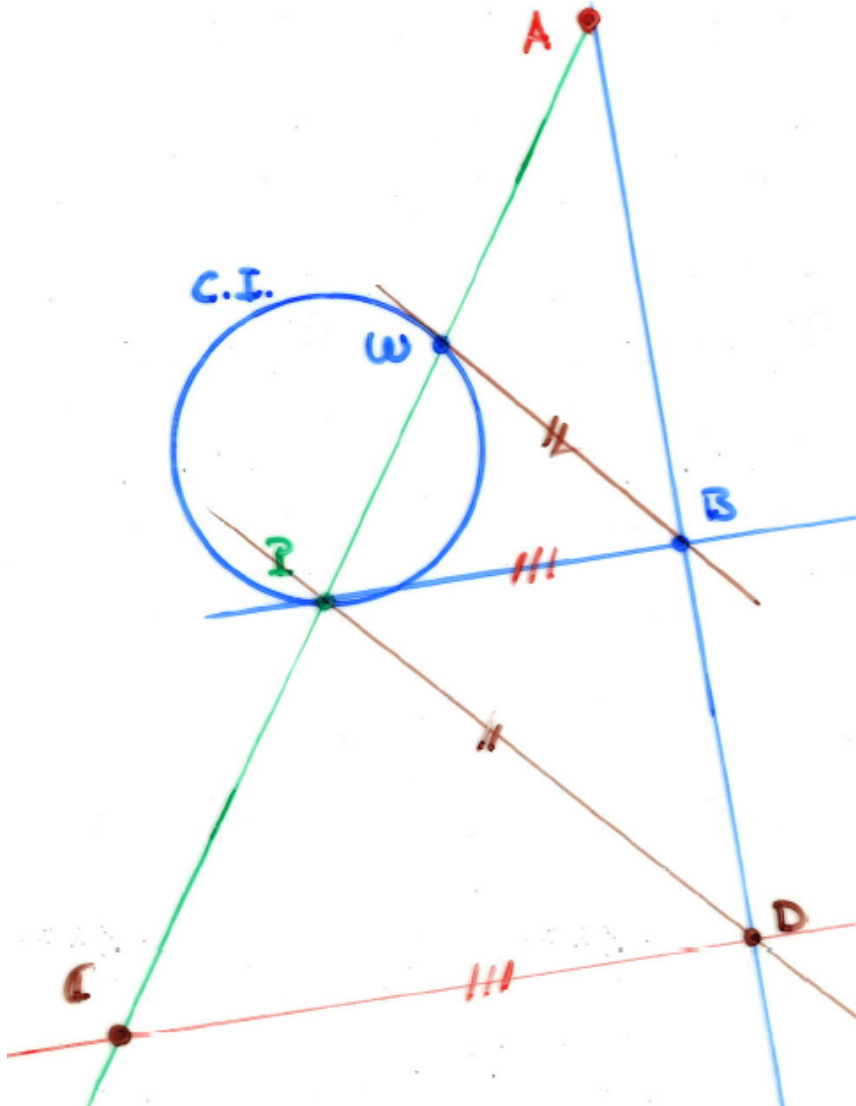
$$\left. \begin{array}{l} CP = CA - PA \\ PW = PA - WA \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{PA} + \frac{1}{CA - PA} = \frac{1}{PA - WA}$$

Operando:

$$\begin{aligned} (CA - PA)(PA - WA) + PA(PA - WA) &= PA(CA - PA) \Rightarrow \\ \Rightarrow CA PA - CA WA - PA^2 + PA WA + PA^2 - PA WA &= PA CA - PA^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{CA WA = PA^2} \end{aligned}$$

Como **PA** > 0 siempre  $\Rightarrow$  **C** y **W** (centro de curvatura y punto de corte con la circunferencia de inflexiones), siempre se encuentran al mismo lado del punto.

Dada la circunferencia de inflexiones, hallar el centro de curvatura de un punto.



Datos: C.I.; A; P

Pasos:

1.  $AP \cap C.I. \rightarrow W$
2. Dos rectas cualesquiera por A y P  $\rightarrow r_A \cap r_P \rightarrow B$ .
3. Recta **WB**.
4. Por P  $\parallel WB \cap AB \rightarrow D$ .
5. Por  $D \parallel PB \cap PA \rightarrow C$ .

Como

$$\left. \begin{array}{l} APD \sim AWD \\ APB \sim ACD \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{PA}{WA} = \frac{DA}{BA} \\ \frac{CA}{PA} = \frac{DA}{BA} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{PA}{WA} = \frac{CA}{PA} \Rightarrow CA \cdot WA = PA^2$$

Que es la fórmula de Euler-Savary.

También se podría partir del centro de curvatura y obtener W, trazando rectas arbitrarias **CD** y **AD** realizando el resto de la construcción.

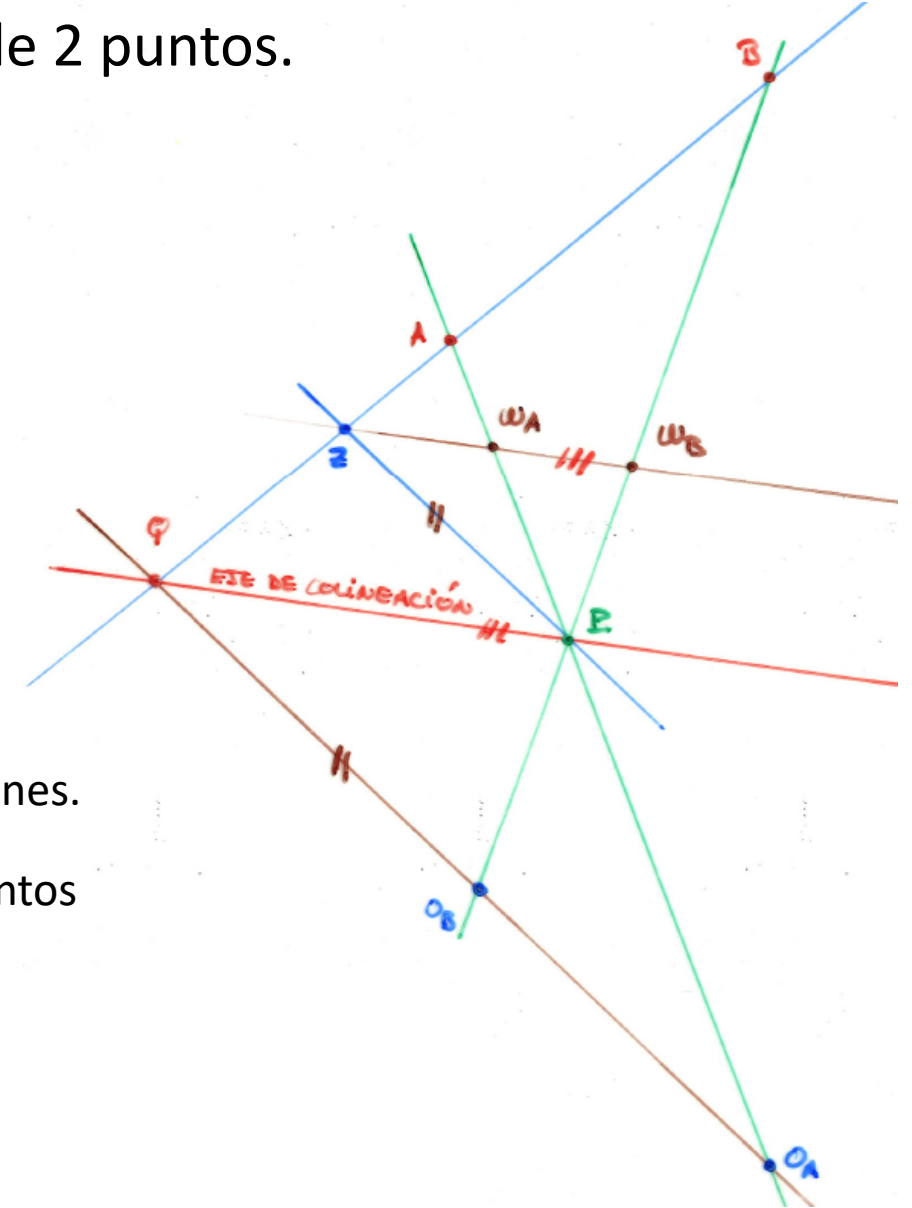
Hallar 3 puntos  $\in$  C.I. dados los centros de curvatura de 2 puntos.

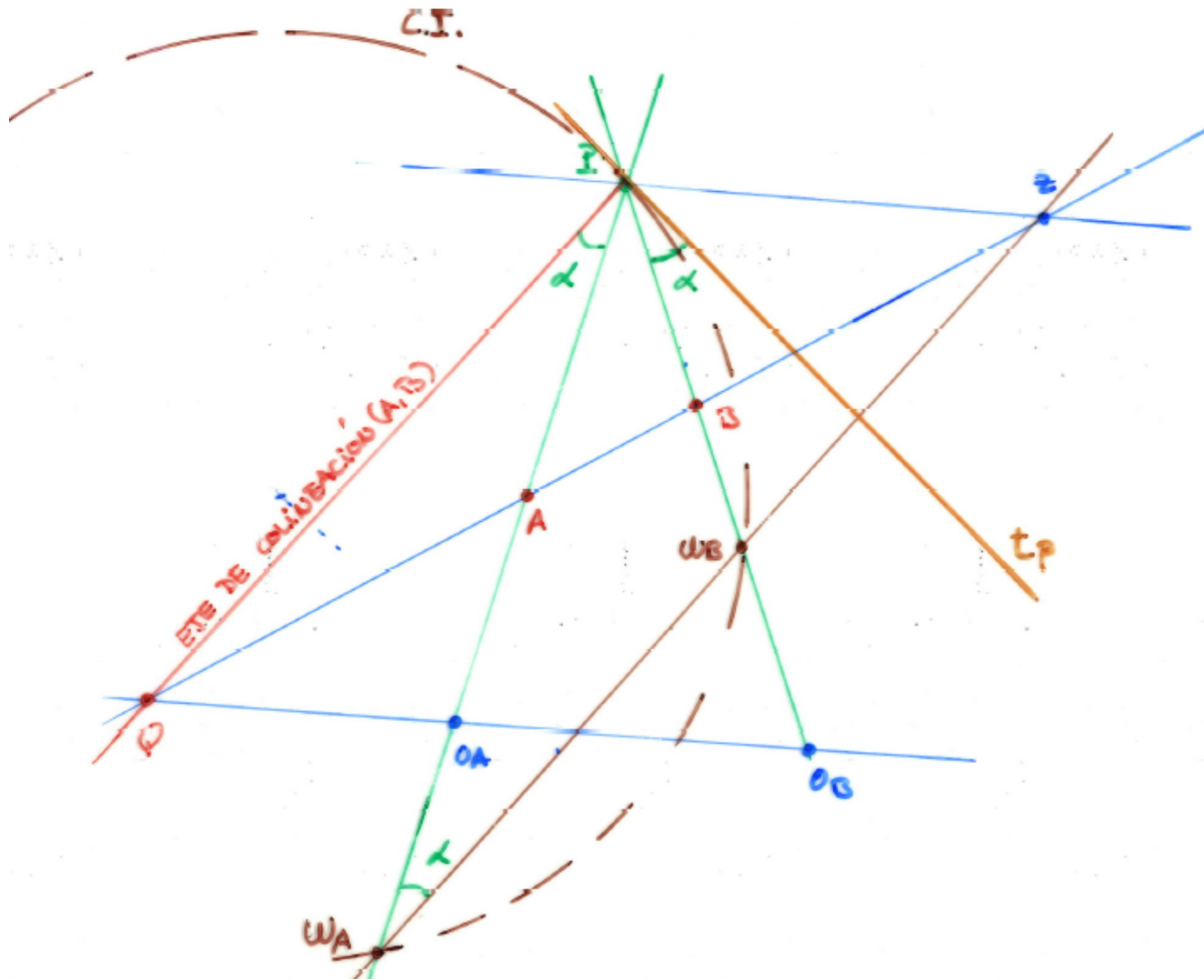
Datos:  $A, O_A, B, O_B$

Pasos:

1.  $AO_A \cap BO_B \rightarrow P$
2.  $AB \cap O_A O_B \rightarrow Q$ .
3. Recta  $QP \rightarrow$  Eje de colineación.
4. Por  $P \parallel O_A O_B \cap AB \rightarrow Z$ .
5. Por  $Z \parallel$  eje de colineación  $\left\{ \begin{array}{l} \cap AO_A \rightarrow W_A \\ \cap BO_B \rightarrow W_B \end{array} \right\} \in$  Circunferencia de inflexiones.

NOTA: El eje de colineación corresponde a los puntos  $A$  y  $B$ . Para otros puntos cualesquiera, el eje de colineación será diferente.





La bisectriz del ángulo que forman las normales a la trayectoria de dos puntos coincide con la bisectriz del ángulo que forman la dirección de la velocidad de cambio de polo (o tangente polar) y el eje de colineación.

Partiendo de la construcción anterior:

Datos:  $A, O_A, B, O_B$

Las normales a la trayectoria son  $AO_A$  y  $BO_B$ .

Pasos:

1.  $AO_A \cap BO_B \rightarrow P$
2.  $AB \cap O_A O_B \rightarrow Q$ .
3. Recta  $QP \rightarrow$  Eje de colineación.
4. Por  $P \parallel O_A O_B \cap AB \rightarrow Z$ .
5. Por  $Z \parallel$  eje de colineación  $\left\{ \begin{array}{l} \cap AO_A \rightarrow W_A \\ \cap BO_B \rightarrow W_B \end{array} \right\} \in$   
Circunferencia de inflexiones.

1

Como  $W_A$  y  $W_B \in C.I.$ , se verifica:  
 $t_P \widehat{PW_B} = t_P \widehat{W_A W_B} = \alpha$   
 $t_P$  es la tangente a C.I. en  $P$  y ambos ángulos abarcan el mismo arco  $PW_B$  de la C.I.

2

$$\widehat{QPW_A} = \widehat{PW_A W_B}$$

3

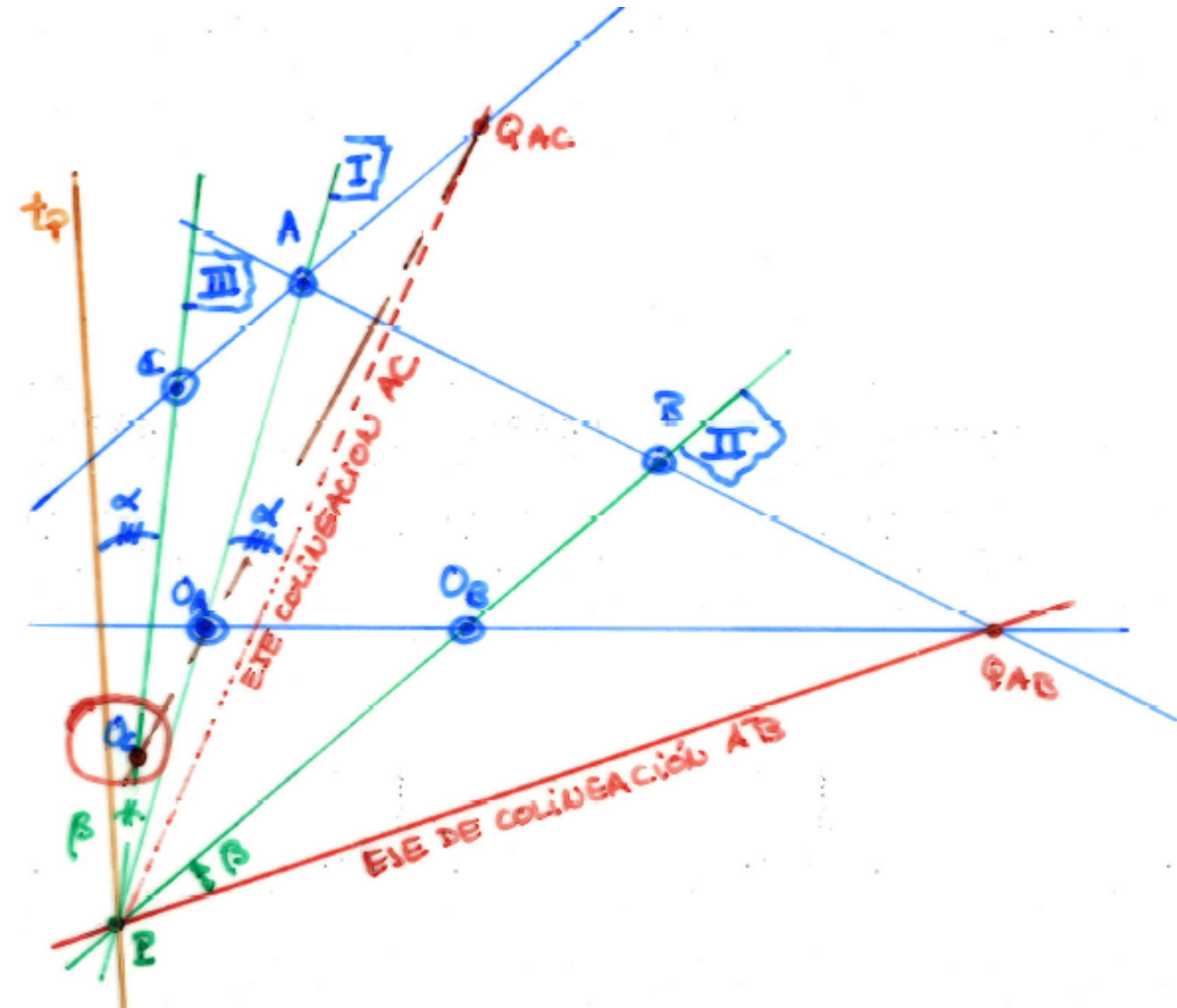
Por tanto,  $t_P \widehat{PO_B} = \widehat{QPW_A}$ .  
 Es decir, la bisectriz del ángulo  $\widehat{O_A P O_B}$  es igual que la del ángulo  $\widehat{QP t_P}$

Es una aplicación del Teorema de Bobillier: Dados dos puntos  $A$  y  $B$  y sus correspondientes centros de curvatura (puntos conjugados), determinar el centro de curvatura de otro punto  $C$ .

Datos:  $A, O_A, B, O_B, C$

Pasos:

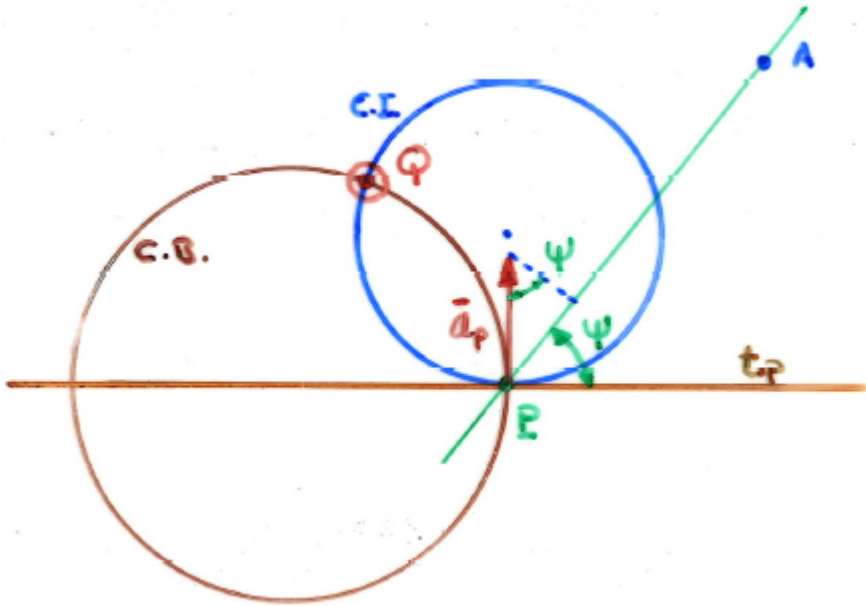
1.  $AO_A \cap BO_B \rightarrow P$
2.  $AB \cap O_A O_B \rightarrow Q_{AB}$ .
3. Recta  $QP \rightarrow$  Eje de colineación  $AB$ .
4.  $PC$  aquí estará el punto requerido  $\rightarrow O_C$
5. Teorema Bobillier  $\widehat{Q_{AB}PB} = \beta = \widehat{t_pPA} \rightarrow t_p$
6. Teorema Bobillier  $\widehat{t_pPC} = \alpha = \widehat{Q_{AC}PA} \rightarrow$  Eje de colineación  $AC$ .
7.  $AC \cap$  Eje de colineación  $AC \rightarrow Q_{AC}$ .
8.  $PC \cap O_A Q_{AC} \rightarrow O_C$











Al igual que en la circunferencia de inflexiones, que es el lugar geométrico de los puntos cuya aceleración normal es nula, se pueden buscar los puntos cuya aceleración tangencial sea nula.

La aceleración de un punto será:

$$\mathbf{a}_{A2/1} = \mathbf{a}_{P2/1} + \boldsymbol{\alpha}_{2/1} \times \mathbf{PA} + \boldsymbol{\omega}_{2/1} \times (\boldsymbol{\omega}_{2/1} \times \mathbf{PA})$$

Proyectando en la dirección perpendicular a  $\mathbf{PA}$ :

$$\mathbf{a}_{A2/1}^t = a_p \cos \psi + \alpha r. \text{ Haciendo } \mathbf{a}_{A2/1}^t = 0$$

$$\omega u \approx \omega^2 \delta$$

$$\omega^2 \delta \cos \psi + \alpha r = 0 \Rightarrow r = -\frac{\omega^2}{\alpha} \delta \cos \psi$$

Que es la ecuación de una circunferencia que pasa por  $P$  y tiene su diámetro sobre la tangente polar  $t_p$  de valor:

$$b = \frac{\omega^2}{\alpha} \delta$$

El punto Q del dibujo es la intersección entre la C.I. y la C.B., es decir, tiene aceleración nula.

Circunferencia de inflexiones ( $\mathbf{a}^n = 0$ ): Las C.I. son distintas para cada instante, pero su diámetro y orientación son independientes de la aceleración angular y del sentido de la velocidad angular.

Circunferencia de Bresse ( $\mathbf{a}^t = 0$ ): Su diámetro depende de la magnitud y orientación de la aceleración angular.

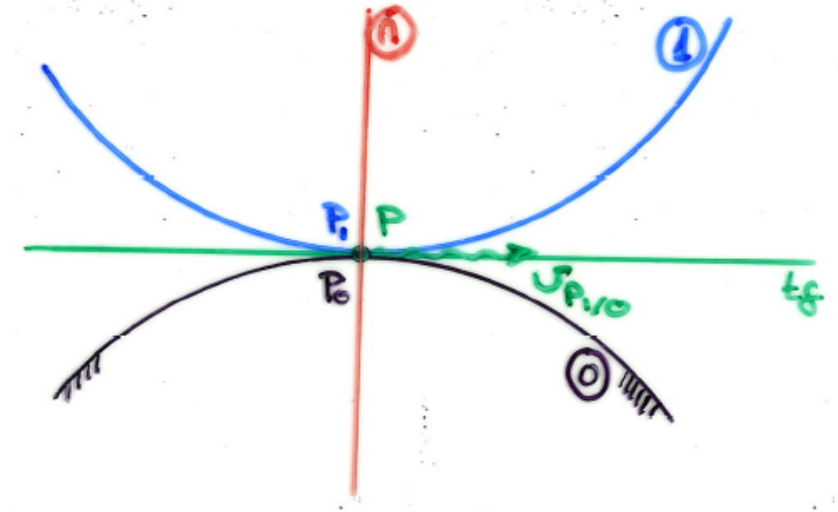
Circunferencia cuspidal (invirtiendo el movimiento): Fijando la ruleta y moviendo la base se obtiene una nueva C.I. del mismo diámetro que la anterior, que es simétrica a la C.I. respecto a la  $t_p$ .



**Velocidad de deslizamiento:** Velocidad del punto perteneciente a la curva móvil que está en contacto con la envolvente. Es distinta de la velocidad de cambio de polo.

$$\mathbf{v}_{P_1/0} \neq 0$$

Si ① es la ruleta y ② es la base:  $\mathbf{v}_{P_1/0} = 0$ , dado que  $P_1 \equiv CIR$  y  $\mathbf{v}_P = \mathbf{u}$



### Generalización de Euler-Savary:

Se va a considerar el caso general de **rodadura y deslizamiento** de dos perfiles (uno fijo y otro móvil)

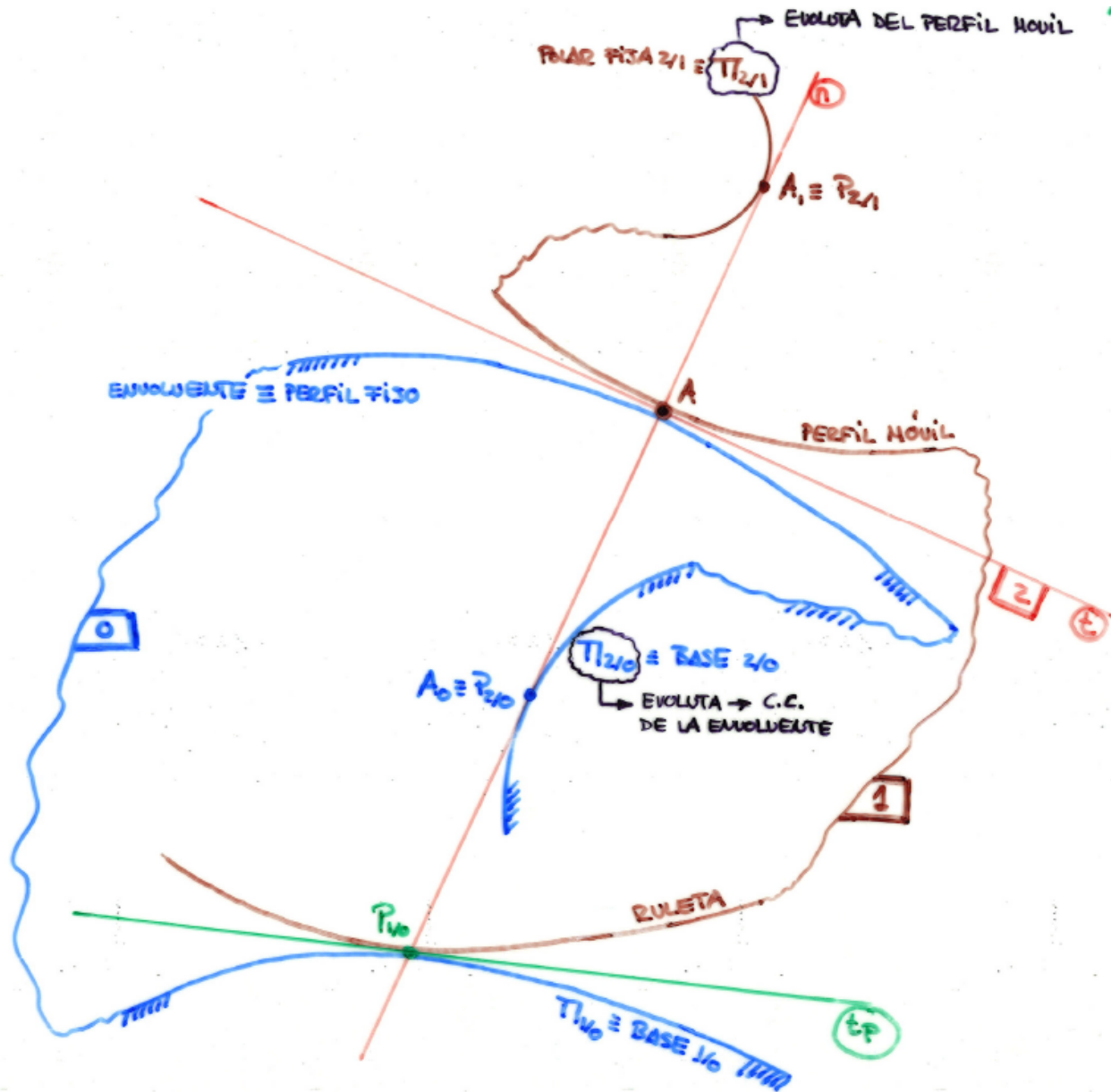
El movimiento entre estos dos perfiles también puede obtenerse mediante el movimiento de **rodadura** entre las correspondientes **base y ruleta**.

Por lo tanto, existen dos perfiles que ruedan y deslizan y sus correspondientes curvas polares que solamente ruedan.

En este caso, también se definen tres planos distintos:

- Plano ①: Plano fijo donde se encuentran la **base** y el **perfil fijo**.
- Plano ②: plano móvil, donde se encuentran la **ruleta** y el **perfil móvil**.
- Plano ③: Constituido por la **tangente** y la **normal** en el punto de **contacto** entre el perfil fijo y el móvil.

# 6.7 Perfiles conjugados: generalización de la fórmula de Euler-Savary.



Se denomina  $\Pi_{ij}$  a la curva polar fija del movimiento del plano  $i$  respecto al plano  $j$ :

$\Pi_{10}$ : Polar fija (base) del movimiento del plano ① respecto al plano ①

$\Pi_{20}$ : Polar fija (base) del movimiento del plano ② respecto al plano ①. Es el lugar geométrico de los puntos pertenecientes al plano ① que han sido CIR del plano ②. Va a coincidir con la evoluta del perfil fijo.

Para obtener  $P_{20}$  se halla la intersección de la normal en dos posiciones infinitamente próximas. Entonces,  $P_{20}$  también será el centro de curvatura de la trayectoria del punto en el plano fijo.

## 6.7 Perfiles conjugados: generalización de la fórmula de Euler-Savary.



$P_{20}$  es un punto perteneciente a ② cuya posición no varía en dos instantes distintos, por lo que es el CIR del movimiento de ② sobre ①. Además, se puede considerar como el punto de intersección de las normales al perfil fijo en dos puntos infinitamente próximos, en cuyo caso será el centro de curvatura de dicho perfil en el punto  $A$ .

A medida que se desarrolla el movimiento, el punto de contacto ( $A$ ) entre los perfiles fijo y móvil se desplaza de forma que su trayectoria en el plano fijo ① coincide con el perfil fijo.

Por lo tanto,  $\Pi_{20}$  es también la evoluta (lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva) del perfil fijo. De forma que  $P_{20}$  es el CIR y el centro de curvatura del perfil fijo (o envolvente).

$\Pi_{21}$ : Polar fija del movimiento del plano ② respecto al plano ①. Si se invierte el movimiento de los planos ① y ② (de forma que ① pasaría a ser el sistema fijo y ② el móvil), se puede aplicar un razonamiento similar al empleado con  $\Pi_{20}$ , llegando a la siguiente conclusión:  $\Pi_{21}$  es la evoluta del perfil móvil y se mueve con él.

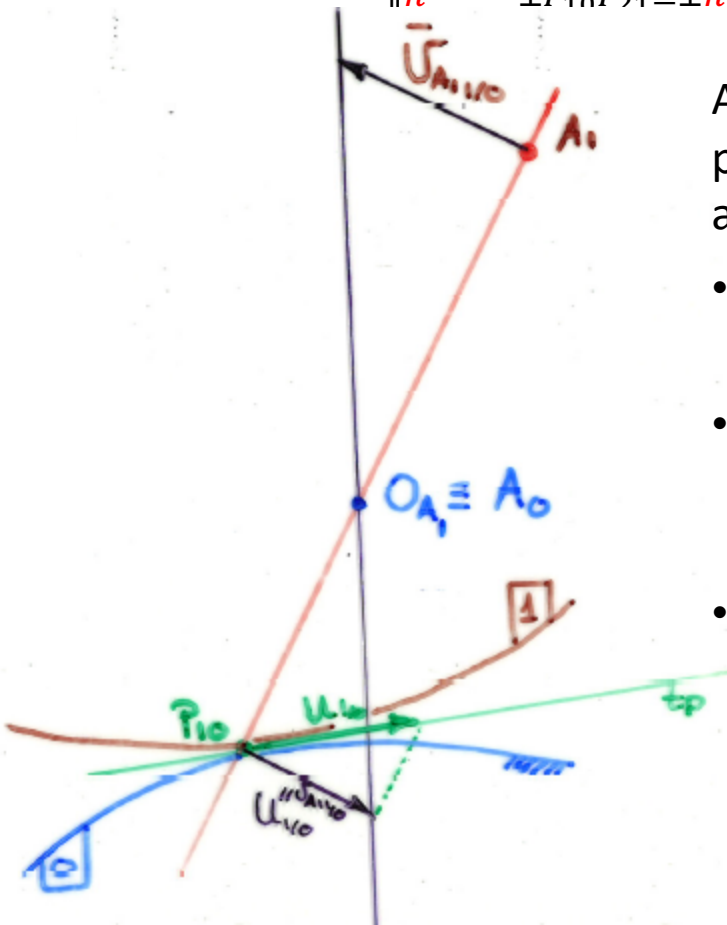
Los tres polos,  $P_{10}$ ,  $P_{20}$  y  $P_{21}$  tienen que encontrarse alineados (Teorema de Aronhold) de forma que también lo estarán los extremos de las componentes normales de sus correspondientes vectores velocidad (como puntos matemáticos).

# 6.7 Perfiles conjugados: generalización de la fórmula de Euler-Savary.

En la figura de la derecha:

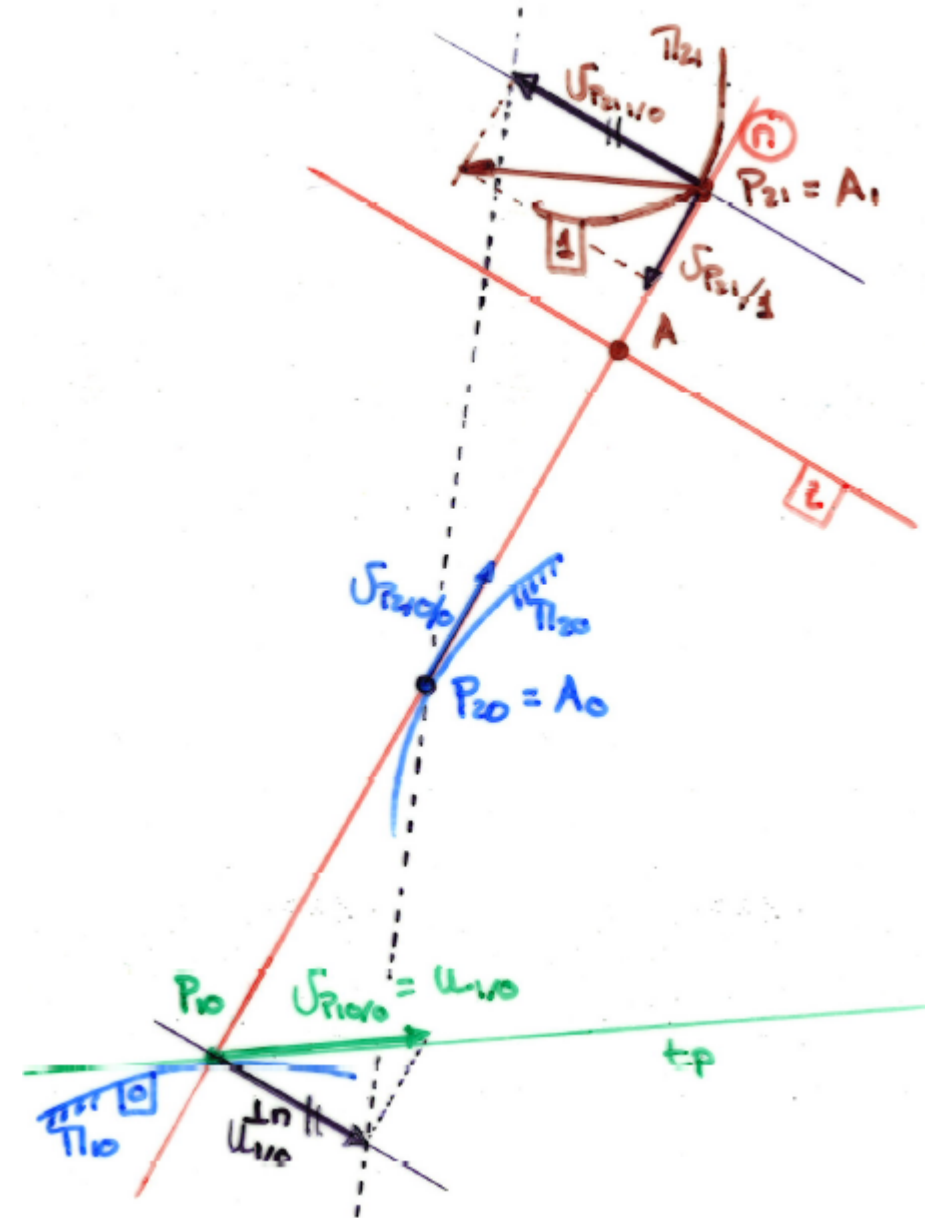
- $\mathbf{v}_{P_{20}/0}$  tiene que ser  $\parallel$  a la tangente a  $\Pi_{20}$ , por lo tanto es  $\parallel$  a  $\mathbf{n}$ .
- $\mathbf{v}_{P_{10}/0}$  en principio puede tener cualquier dirección ( $\parallel$  a  $t_p$ ).
- $\mathbf{v}_{P_{210}} = \mathbf{v}_{P_{211}} + \mathbf{v}_{P_{2110}}$

$$\overline{\parallel n} \quad \perp P_{10}P_{21} \equiv \perp n$$



Aplicando el Teorema de Hartman al punto  $A_1$ , los siguientes puntos están alineados:

- El extremo del vector velocidad de un punto:  $\mathbf{v}_{A_1 1/0} = \mathbf{v}_{P_{21} 1/0}$
- El centro de curvatura de su trayectoria (en principio desconocido).
- Y el extremo de la componente paralela a la velocidad del punto, de vector velocidad de cambio de polo ( $\mathbf{u}_{10}^{\perp n}$ ).



# 6.7 Perfiles conjugados: generalización de la fórmula de Euler-Savary.

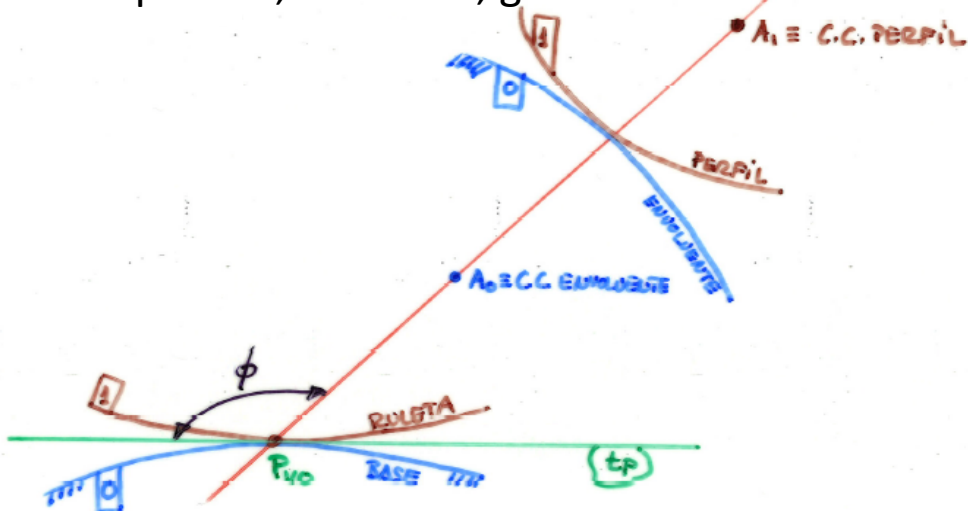
Ya se sabía que  $P_{21} \equiv A_1$ ,  $P_{20} \equiv A_0$  y  $P_{10}$  están alineados y también los extremos de sus componentes de velocidad en la dirección perpendicular a la línea que los une, por lo tanto, como la componente perpendicular correspondiente a  $P_{21}$  ( $\mathbf{v}_{ARR}$ ) es igual a  $v_{A10}$  y se sabe que está alineada con la componente perpendicular de  $u_{1/0}$ , entonces  $A_0$  es centro de curvatura de la trayectoria de  $A_1$ .

Además,  $A_0$  y  $A_1$  son los centros de curvatura de los perfiles conjugados. Si se invierte el movimiento,  $A_1$  será el centro de curvatura de la trayectoria de  $A_0$ .

Conclusión: Los centros de curvatura de los perfiles conjugados están relacionados mediante la fórmula de Euler-Savary.

NOTA: Si el radio de curvatura de la curva móvil se hace infinitamente pequeño, entonces ésta degenera en un punto, con lo que la fórmula de Euler-Savary será la estándar.

Es posible, entonces, generalizar la fórmula de Euler-Savary para cualquier plano móvil



$A_1$  es el centro de curvatura del perfil y también el centro de curvatura de la trayectoria de  $A_0$ .

$A_0$  es el centro de curvatura de la envolvente y también el centro de curvatura de la trayectoria de  $A_1$ .

$P_{10}$  es el polo del movimiento.

$$\left( \frac{1}{A_0 P_{10}} + \frac{1}{P_{10} A_1} \right) \sin \phi = cte = \frac{1}{\delta}$$

La fórmula de Euler-Savary se aplica para conocer el movimiento de un elemento concreto de un mecanismo.

Los problemas que pueden presentarse para una posición dada son los siguientes:

1. Conocidas la base y la ruleta, o bien sus correspondientes circunferencias osculadoras, calcular:

1.a. La circunferencia de inflexiones.

Si se conoce la base y la ruleta, también se conoce la  $t_p$ . Para definir la CI se debe calcular su diámetro, utilizando la fórmula de Euler-Savary generalizada:

$$\frac{1}{\mathbf{O}_f \mathbf{P}} + \frac{1}{\mathbf{P} \mathbf{O}_m} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\mathbf{O}_f \mathbf{P} \mathbf{P} \mathbf{O}_m}{\mathbf{O}_f \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{O}_m}$$

1.b. El centro de curvatura de la trayectoria de cualquier punto.

Cuando se conoce la CI se puede aplicar Euler-Savary de nuevo para calcular el centro de curvatura de la trayectoria  $\mathbf{P} \mathbf{A}^2 = \mathbf{O}_A \mathbf{A} \mathbf{W}_A \mathbf{A}$

2. Conocido únicamente el mecanismo, determinar:

2.a. El polo de velocidades de un elemento.

Hay dos opciones:

- Aplicar el Teorema de Aronhold-Kennedy y el diagrama del círculo.
- Suponer una velocidad angular de ese elemento determinando la distribución de velocidades, y, a partir de ellas, obtener el polo. Éste es el método más general.



### 2.b. La dirección de $\mathbf{u}$ (velocidad de cambio de polo) que será tangente a la base, a la ruleta y a la CI.

Para determinar la  $t_p$  existen varias alternativas:

- Conociendo el centro de curvatura de la trayectoria de dos puntos, aplicar el Teorema de Bobillier y obtener la  $t_p$ .
- Si es posible materializar el polo como intersección de dos barras, se supone una velocidad y se calcula la velocidad de cambio de polo.
- El método general consiste en suponer una velocidad del elemento de entrada y calcular la aceleración del punto perteneciente al plano móvil que coincide con el polo. La  $t_p$  será perpendicular a dicha aceleración.

### 2.c. La CI (circunferencia de inflexiones).

Partiendo de que se conoce la  $t_p$ , para calcular la CI se pueden seguir dos caminos:

- Conocido el centro de curvatura de un punto, se aplica Euler-Savary para determinar el punto que pertenece a la CI:  $\mathbf{PA}^2 = \mathbf{O}_A \mathbf{A} \mathbf{W}_A \mathbf{A}$  (conocido  $\mathbf{O}_A$  se calcula  $\mathbf{W}_A$ ).
- Suponiendo velocidades y aceleraciones, determinar la aceleración del punto perteneciente al plano móvil que coincide con el CIR ( $\mathbf{a}_p = \boldsymbol{\omega} \mathbf{u}$ ). Así se puede obtener la velocidad de cambio de polo y después determinar el polo de inflexiones (I) como punto del plano móvil cuya velocidad es precisamente  $\mathbf{u}$ .