

SISTEMAS DE COMUNICACIONES DIGITALES

POP en Tecnologías Electrónicas y
de las Comunicaciones

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

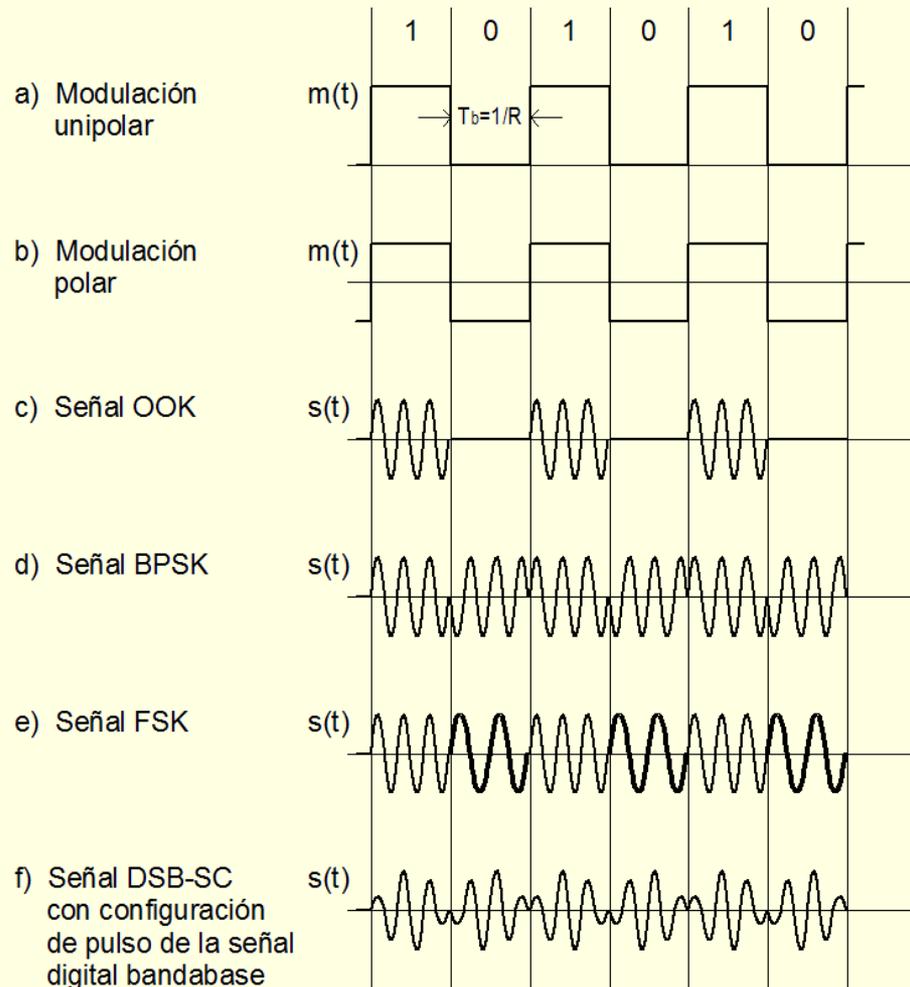
■ Señalización pasabanda de modulación binaria

Las técnicas más comunes de señalización pasabanda de modulación binaria son:

- *Transmisión (modulación) de encendido-apagado (OOK, on-off keying)*, también denominada *transmisión (modulación) por desplazamiento de amplitud (ASK, amplitude shift keying)*, la cual consiste en activar o desactivar una portadora senoidal con una señal binaria unipolar. Es equivalente a una señal DSB-SC, donde la moduladora es una señal binaria unipolar.
- *Transmisión por desplazamiento de fase binaria (BPSK, binary phase shift keying)*, la cual consiste en desplazar la fase de una portadora senoidal 0° o 180° con una señal binaria unipolar. Es equivalente a una modulación PM con una señal digital unipolar o a modular una señal DSB-SC con una forma de onda digital polar.
- *Transmisión por desplazamiento de frecuencia (FSK, frequency shift keying)*, la cual consiste en desplazar la frecuencia de una portadora senoidal desde una frecuencia de marca (correspondiente al envío de un 1 binario) hasta una frecuencia de espacio (correspondiente al envío de un 0 binario) de acuerdo con la señal de bandabase digital. Es idéntica a modular un portadora de FM con una señal digital binaria.

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Señalización pasabanda de modulación binaria



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de amplitud (ASK)

- La señal OOK está dada por:

$$s(t) = A_c m(t) \cos \omega_c t$$

- La envolvente compleja de la señal OOK es: $g(t) = A_c m(t)$ para OOK
- La densidad espectral de potencia para dicha envolvente compleja vendría dada por:

$$\mathcal{P}_g(f) = \frac{A_c^2}{2} \left[\delta(f) + T_b \left(\frac{\text{sen } \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 \right] \text{ para OOK}$$

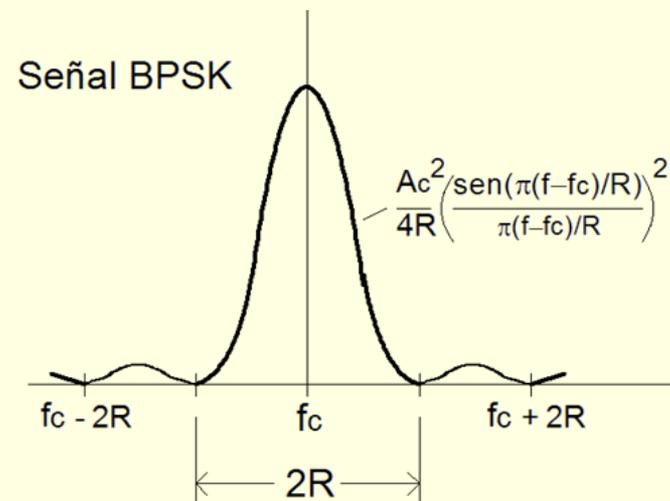
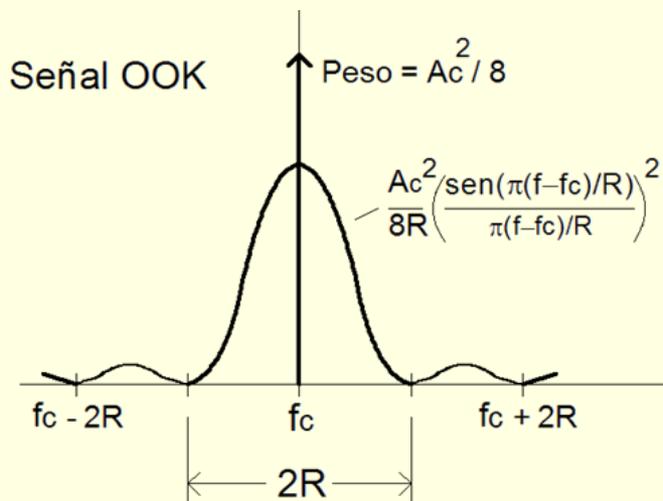
cuando $m(t)$ se selecciona con una amplitud de pico de $\sqrt{2}$, de modo que $s(t)$ tiene una potencia promedio normalizada de $A_c^2/2$. La densidad espectral de potencia de la señal pasabanda se obtiene sin más que desplazar el espectro de la envolvente compleja a las frecuencias f_c y $-f_c$, además de multiplicarlo por un factor de escala de $1/4$.

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de amplitud (ASK)

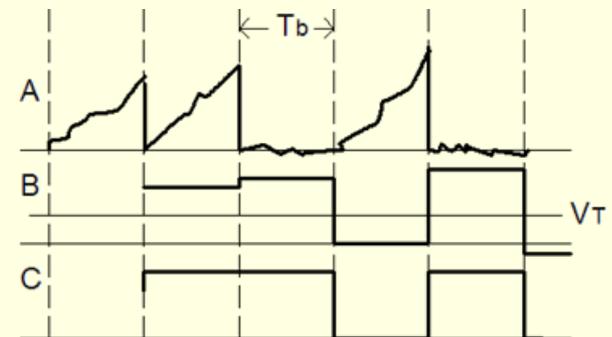
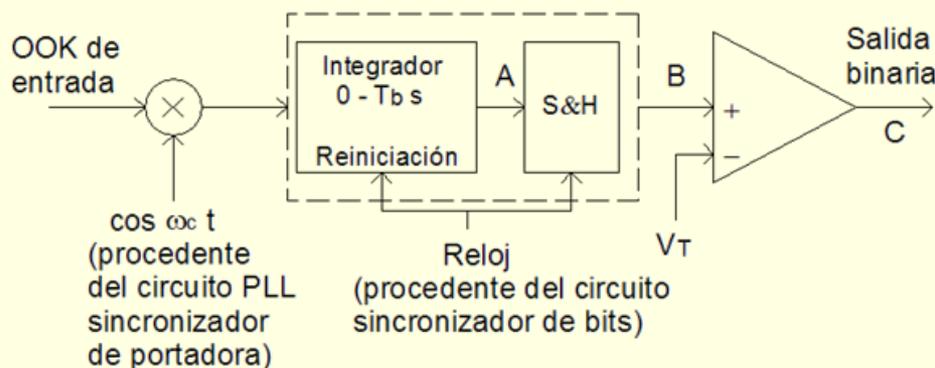
- Cuando $R = 1/T_b$ es la tasa de bits, el ancho de banda nulo a nulo de la señal OOK es $2R$, es decir, justamente el doble del de la señal bandabase ($B_T = 2B$).
- Si se utiliza un filtro de coseno alzado, para el caso de señalización binaria ($D = R$) se tiene que

$$B = \frac{1}{2}(1+r)D = \frac{1}{2}(1+r)R \Rightarrow B_T = (1+r)R$$



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Transmisión por desplazamiento de amplitud (ASK)
 - Una señal OOK puede recuperarse con un detector de envolvente (detección no coherente) o con un detector de producto (detección coherente), puesto que se trata de una señal de AM. Sin embargo, para *detección óptima* de señal OOK dañada por ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN, *Additive white Gaussian noise*) se requiere detección de producto con procesamiento de filtro de sincronización.



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de fase binaria (BPSK)

- La señal BPSK está dada por

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + D_p m(t)]$$

donde $m(t)$ es una señal de datos de bandabase polar. Si expandimos la expresión anterior vemos que también se trata de una señal de AM

$$s(t) = A_c \cos(D_p m(t)) \cos \omega_c t - A_c \sin(D_p m(t)) \sin \omega_c t$$

- Si suponemos que $m(t)$ tiene valores de ± 1 , y que $\cos(x)$ y $\sin(x)$ son funciones par e impar de x , la representación de la señal BPSK se reduce a

$$s(t) = \underbrace{(A_c \cos D_p)}_{\text{término de portador piloto}} \cos \omega_c t - \underbrace{(A_c m(t) \sin D_p)}_{\text{término de datos}} \sin \omega_c t$$

- La desviación pico $D_p = \Delta\theta$ establece el valor del término de la portadora piloto. El *índice de modulación digital*, h , se define como

$$h = \frac{2\Delta\theta}{\pi}$$

donde $2\Delta\theta$ es la desviación de fase máxima (radianes) pico a pico durante el tiempo necesario para enviar un símbolo (en el caso de señales binarias, un bit).⁷

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de fase binaria (BPSK)

- Queda claro que cuanto menor es D_p más potencia se desperdicia en la portadora piloto. La eficiencia de la modulación se puede aumentar al máximo haciendo $D_p = \Delta\theta = \pi/2$ ($h = 1$). En ese caso, la señal BPSK se transforma en

$$s(t) = -A_c m(t) \text{sen } \omega_c t$$

- Por tanto, BPSK en este caso óptimo es equivalente a una señal DSB-SC con una forma de onda bandabase polar. La envolvente compleja de esta señal es

$$g(t) = jA_c m(t) \text{ para BPSK}$$

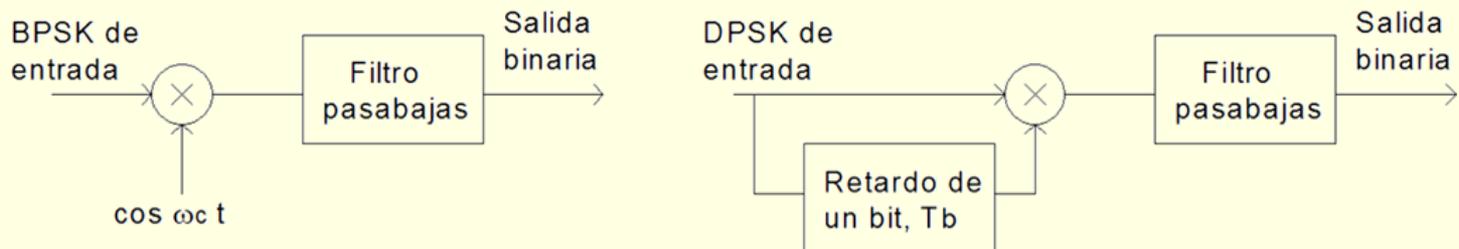
y su densidad espectral de potencia

$$\mathcal{P}_g(f) = A_c^2 T_b \left(\frac{\text{sen } \pi f T_b}{\pi f T_b} \right)^2 \text{ para BPSK}$$

donde $m(t)$ tiene valores de ± 1 , de modo que $s(t)$ tiene una potencia promedio normalizada de $A_c^2/2$. El espectro de la señal BPSK se puede obtener fácilmente del de la envolvente compleja como se hizo anteriormente. La señal BPSK tiene un ancho de banda de nulo a nulo de $2R$, al igual que la señal OOK.

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Transmisión por desplazamiento de fase diferencial (DPSK)
 - Para detectar señales BPSK se requiere detección síncrona. Sin embargo, aunque una señal BPSK no puede recuperarse incoherentemente, si ésta es codificada diferencialmente antes de la transmisión, la señal de datos se recuperará con el decodificador diferencial mostrado en la figura. La señal BPSK diferencialmente codificada se conoce como DPSK. Para la detección óptima se debe sustituir el filtro pasabajos por un filtro de sincronización de integración y descarga, y la señal de entrada DPSK se debe prefiltrar con un filtro pasabanda con respuesta al impulso $h(t)=\Pi[(t-0.5T_b)/T_b]\cos(\omega_c t)$. En la práctica, lo normal es trabajar con DPSK pues no se requiere de un circuito recuperador de portadora.



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- Se puede distinguir entre dos tipos de señal FSK, la *FSK de fase discontinua* y la *FSK de fase continua*. En la primera de ellas simplemente se dispone de algún dispositivo que conmuta entre dos osciladores a diferentes frecuencia en función del valor de la señal binaria de bandabase. Por ese motivo, la fase de dicha señal suele ser discontinua. La señal FSK de fase discontinua viene dada por

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(\omega_1 t + \theta_1), & \text{cuando se envía un 1 binario} \\ A_c \cos(\omega_2 t + \theta_2), & \text{cuando se envía un 0 binario} \end{cases}$$

donde f_1 es la frecuencia de *marca* y f_2 la frecuencia de *espacio*. Las señales FSK de fase continua se generan alimentando la señal de datos a un modulador de frecuencia. Esta señal FSK de fase continua viene dada por

$$s(t) = A_c \cos \left[\omega_c t + D_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \right] \quad \text{para FSK}$$

$$s(t) = \operatorname{Re} \left\{ g(t) e^{j\omega_c t} \right\}, \quad g(t) = A_c e^{j\theta(t)}, \quad \theta(t) = D_f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda$$

donde $m(t)$ es la señal bandabase. Aunque $m(t)$ es discontinua en el momento de conmutación, $\theta(t)$ no lo es porque es proporcional a la integral de $m(t)$. Si la señal moduladora es binaria se habla de *FSK binaria*.

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- Los espectros de FSK, al igual que los de FM, son difíciles de evaluar, puesto que $g(t)$ es una función no lineal de $m(t)$. Sin embargo, vamos a suponer que queremos modular una señal de bandabase binaria correspondiente a una onda cuadrada cuyo periodo es $T_0 = 2T_b$, siendo la tasa de bits $R = 1/T_b$. La desviación pico de frecuencia es $\Delta F = \max[(1/2\pi)d\theta(t)/dt] = D_f/2\pi$ cuando $m(t)$ tiene valores de ± 1 . A partir de la onda cuadrada de entrada obtendremos una función de fase triangular, y el índice de modulación digital es

$$h \equiv \frac{2\Delta\theta}{\pi} = \Delta FT_0 = \frac{2\Delta F}{R} = \frac{\Delta F}{1/T_0} = \frac{\Delta F}{B} \equiv \beta_f \longleftarrow \text{Índice de modulación de frecuencia (FM)}$$

donde la igualdad con el índice de modulación de FM sólo se cumple si se toma como ancho de banda $B = 1/T_0$. La serie de Fourier de la envolvente compleja es

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad c_n = \frac{A_c}{2} \left[\left(\frac{\text{sen} [(\pi/2)(h-n)]}{(\pi/2)(h-n)} \right) + (-1)^n \left(\frac{\text{sen} [(\pi/2)(h+n)]}{(\pi/2)(h+n)} \right) \right]$$

donde $f_0 = 1/T_0 = R/2$ y $\Delta\omega = 2\pi\Delta F = 2\pi h/T_0$.

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de frecuencia (FSK)

- El espectro de la envolvente es

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(f - nf_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(f - \frac{nR}{2}\right)$$

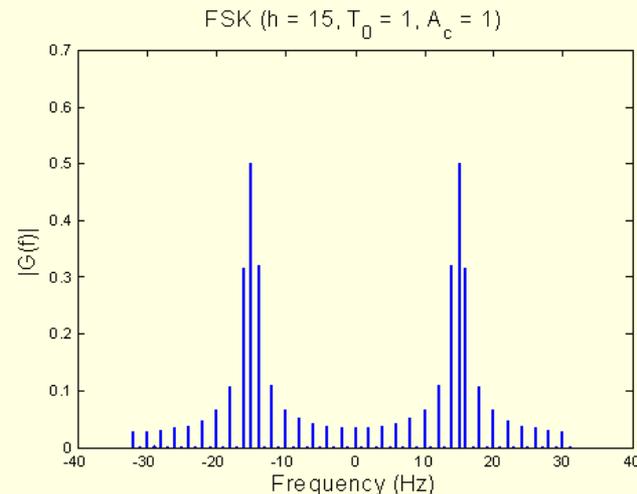
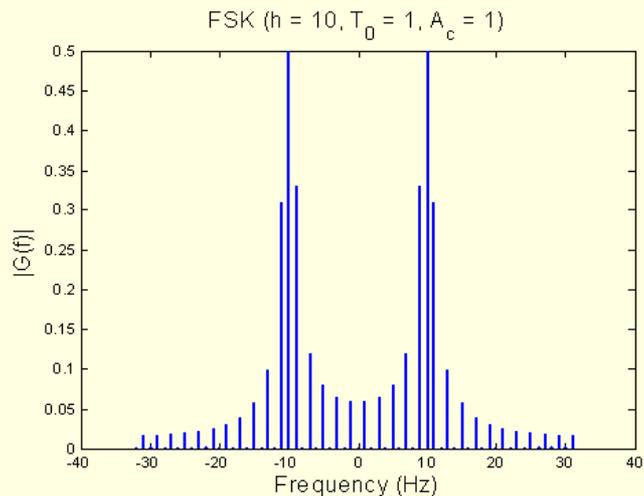
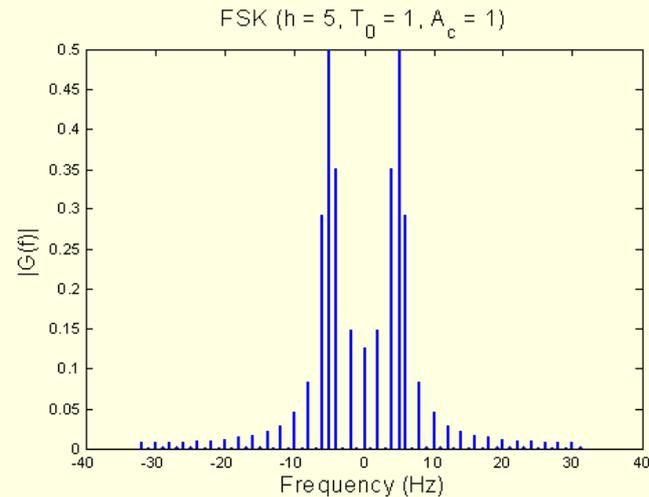
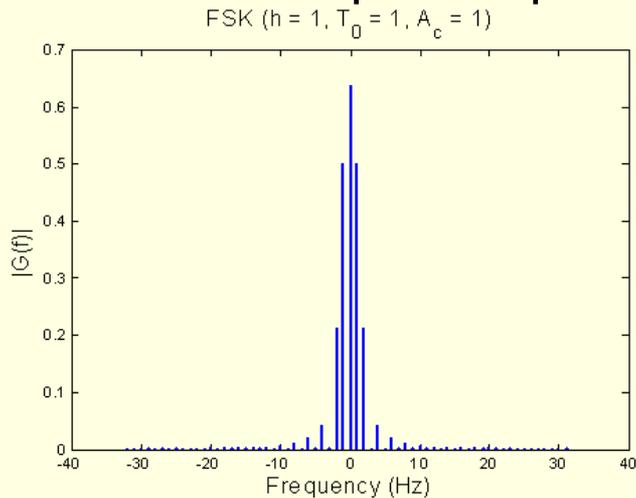
- A partir de aquí se puede deducir fácilmente el espectro de la señal FSK. Es de reseñar que estará constituido por una serie de funciones delta separadas una distancia $R/2$ y aglomeradas en torno a las frecuencias de marca y espacio. El ancho de banda de una señal FSK está dado por la regla de Carson: $B_T = 2(\beta + 1)B$, donde $\beta = \Delta F/B$. Por lo tanto, si consideramos $B = R$ (ancho de banda de primer nulo)

$$B_T = 2\Delta F + 2B = 2(\Delta F + R)$$

- La FSK puede detectarse con un detector de frecuencia (no coherente) o con un detector de producto (detección coherente). En este segundo caso, se dispone de dos detectores de producto a las frecuencias de marca y espacio, seguidos de sendos filtros pasabajo. Las señales de salida de los filtros se restan en un sumador lineal para obtener la salida binaria demodulada. Para detección óptima ante AWGN se requiere detección coherente con procesamiento con filtro de sincronización y un dispositivo de umbral (comparador).

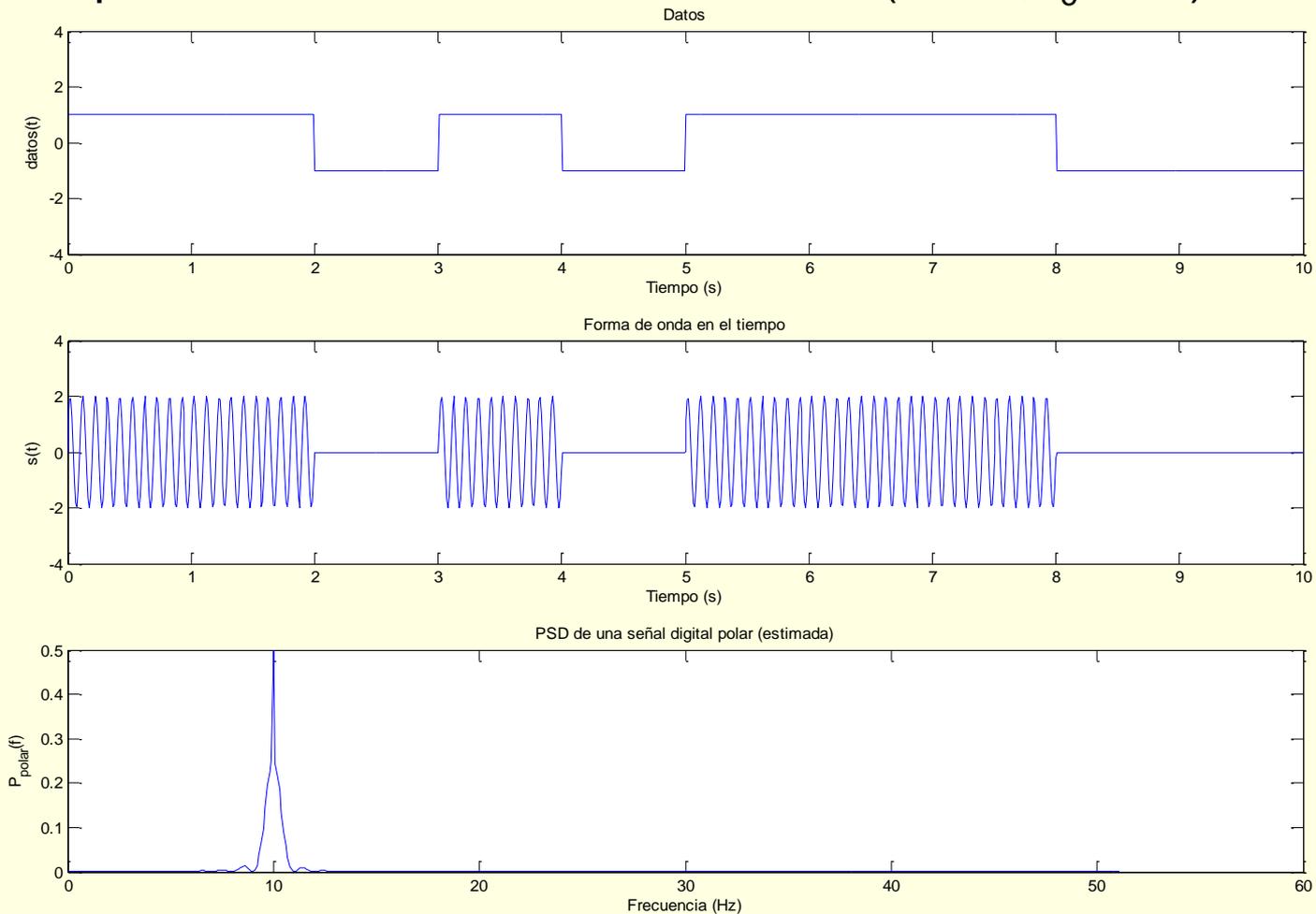
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento de frecuencia (FSK)



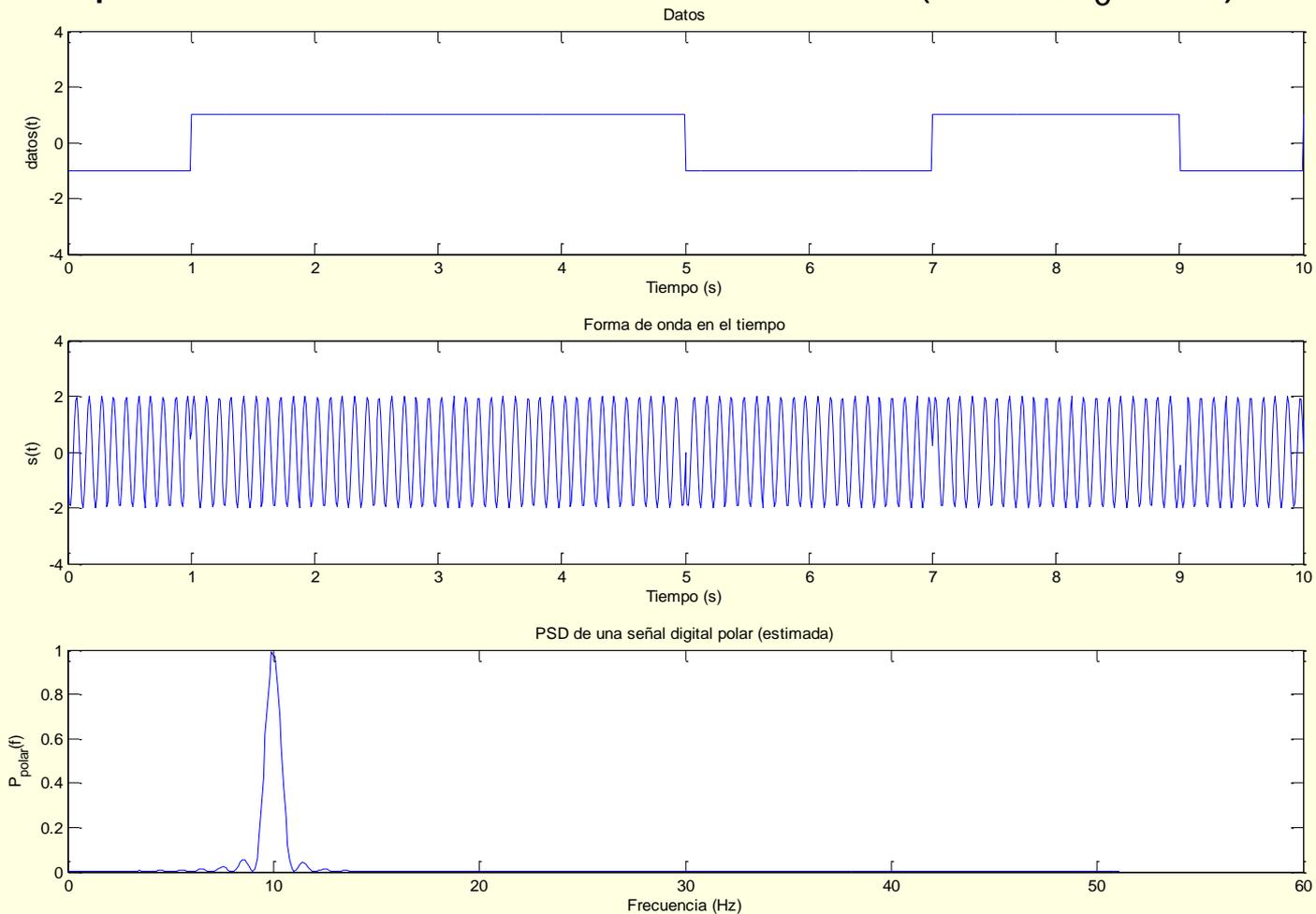
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Espectro estimado de una señal ASK ($R = 1$, $f_c = 10$)



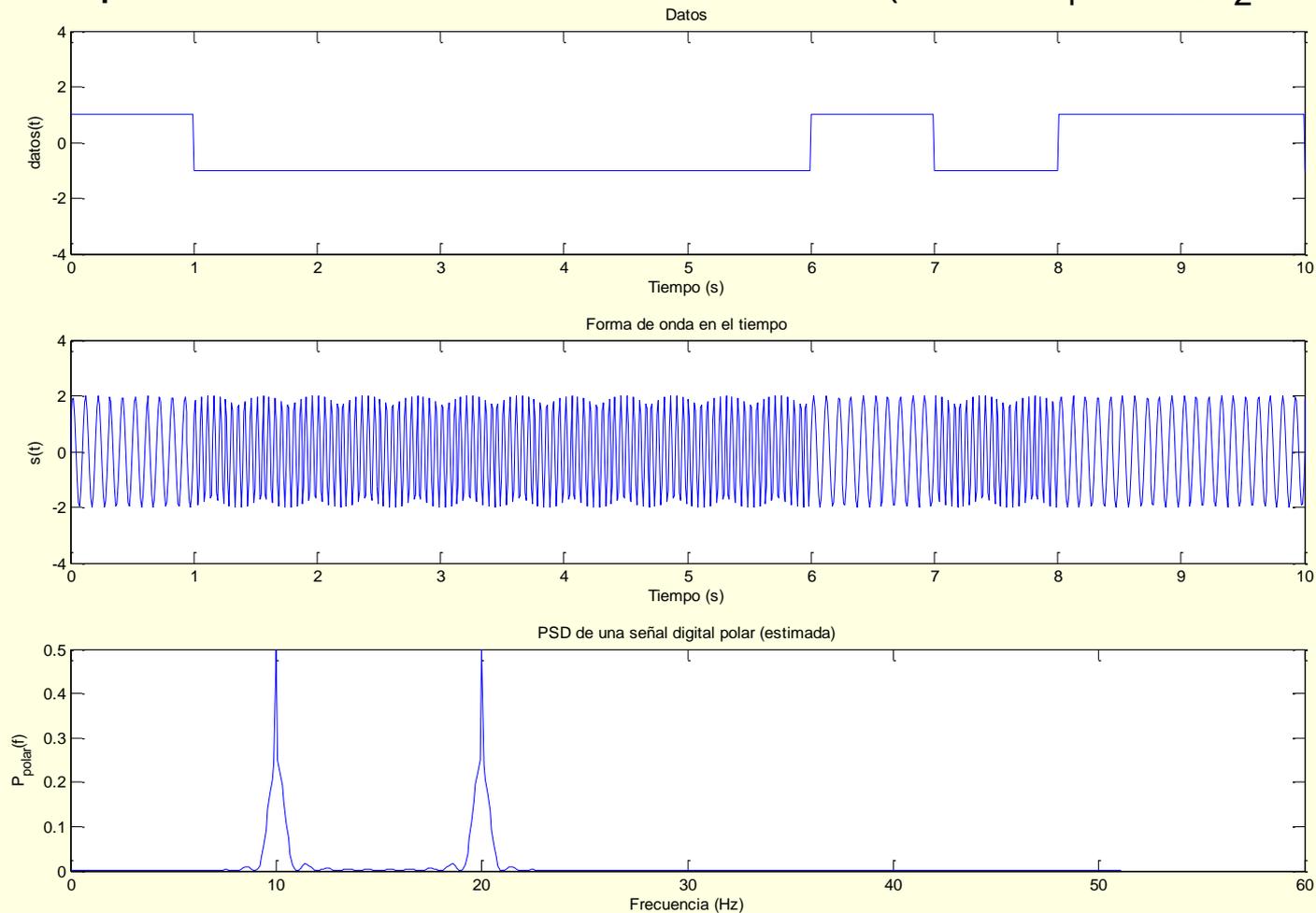
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Espectro estimado de una señal BPSK ($R = 1$, $f_c = 10$)



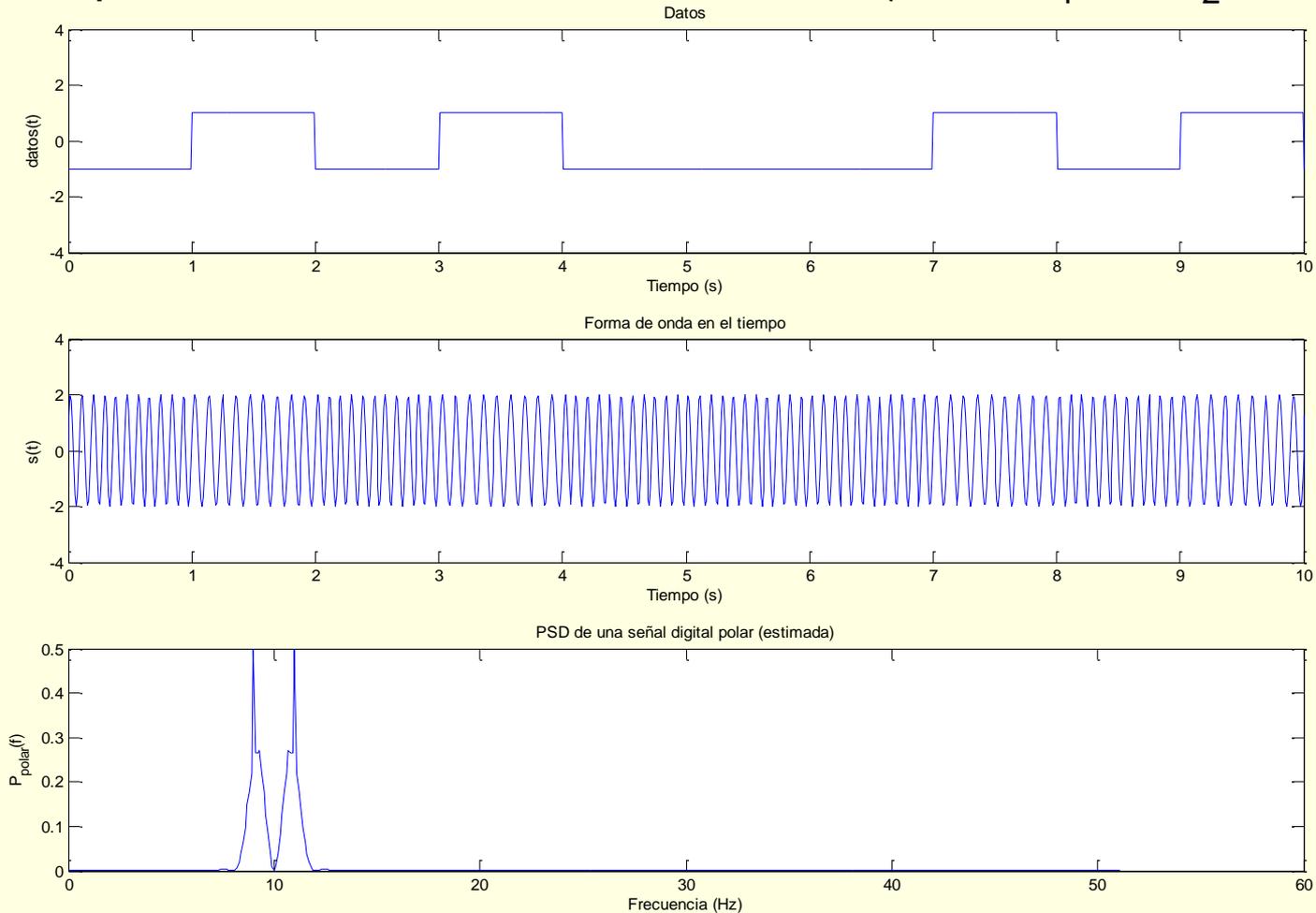
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Espectro estimado de una señal FSK ($R = 1$, $f_1 = 10$, $f_2 = 20$)



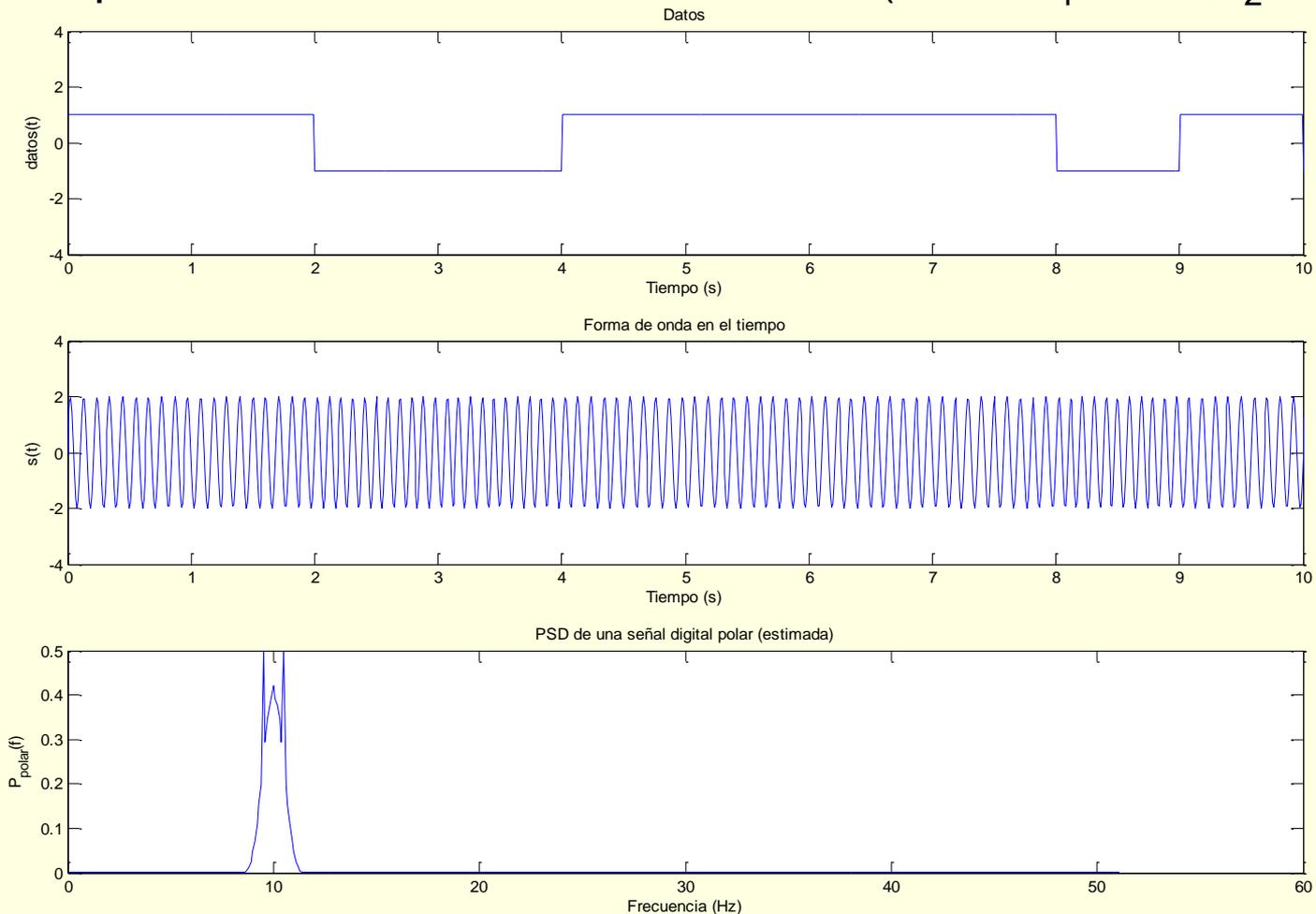
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Espectro estimado de una señal FSK ($R = 1$, $f_1 = 9$, $f_2 = 11$)



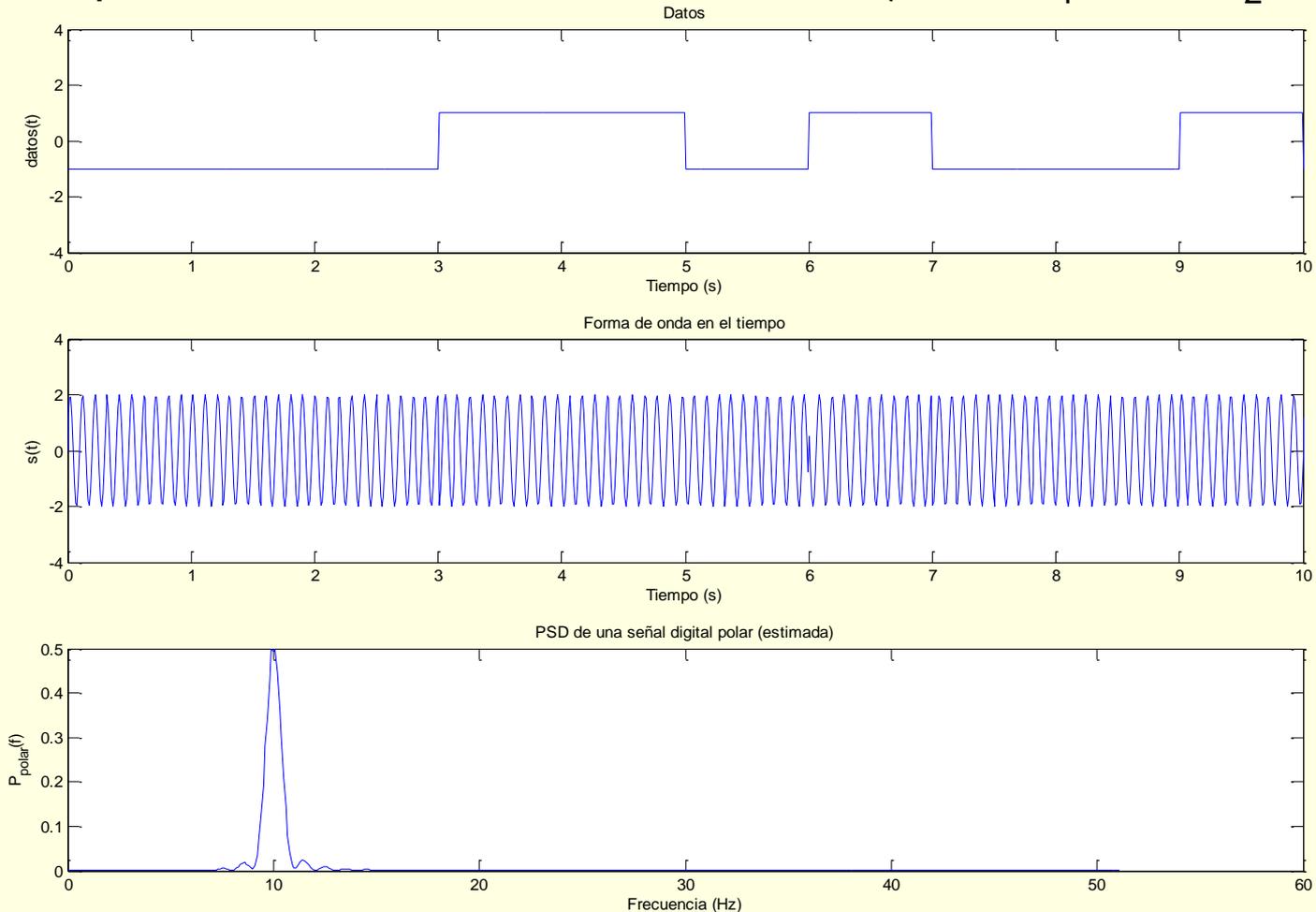
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Espectro estimado de una señal FSK ($R = 1$, $f_1 = 9,5$, $f_2 = 10,5$)



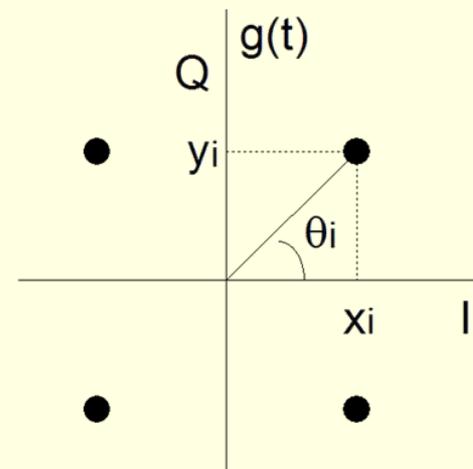
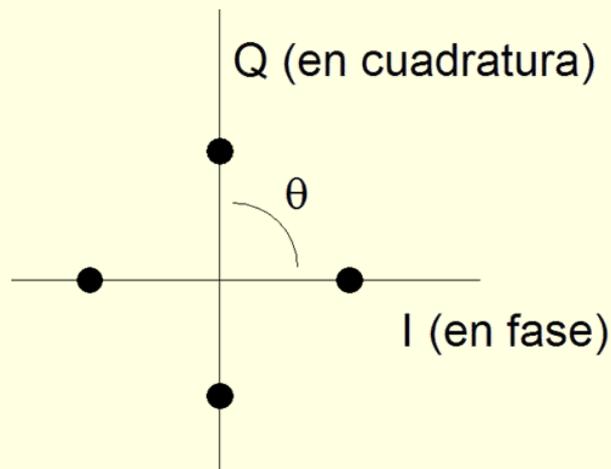
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Espectro estimado de una señal FSK ($R = 1$, $f_1 = 9,9$, $f_2 = 10,1$)



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Transmisión por desplazamiento de fase en cuadratura (QPSK) y transmisión por desplazamiento de fase M-ario (M-PSK)
- Si a través de una señal binaria, haciendo uso de una DAC, generamos una señal multinivel de M niveles y la aplicamos a un transmisor PM, tendremos una *transmisión por desplazamiento de fase M-aria* (M-PSK). El caso de M-PSK con $M = 4$ también recibe el nombre de *modulación por desplazamiento de fase en cuadratura* (QPSK). En la figura se muestran las constelaciones posibles para una señal QPSK, es decir, los valores permitidos para la envolvente compleja.



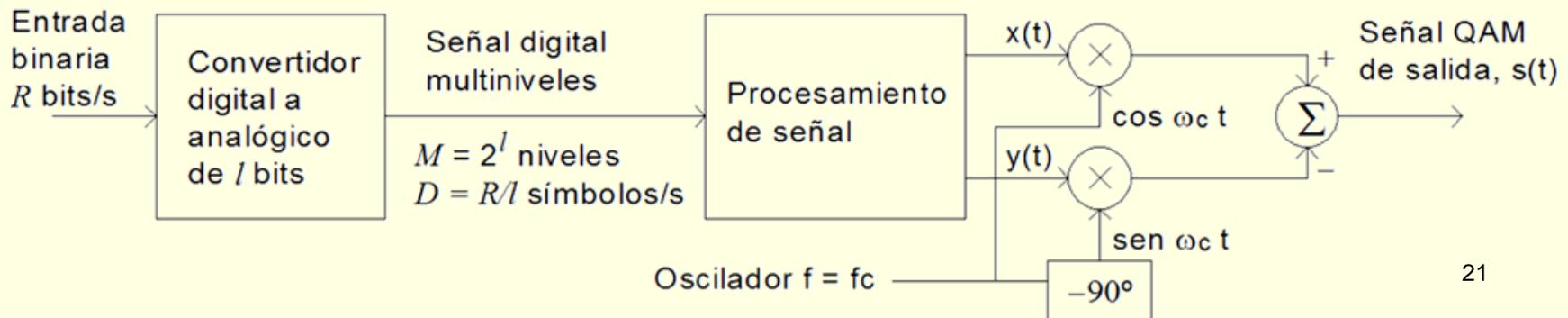
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Transmisión por desplazamiento de fase en cuadratura (QPSK) y transmisión por desplazamiento de fase M-ario (M-PSK)
- La transmisión M-PSK también puede generarse por medio de dos portadoras en cuadratura moduladas por los componentes x y y de la envolvente compleja (en lugar de utilizar un modulador de fase)

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = x(t) + jy(t)$$

donde: $x_i = A_c \cos \theta_i$
 $y_i = A_c \sin \theta_i$

siendo $i = 1, 2, \dots, M$, y θ_i son los ángulos de fase permitidos de la señal M-PSK.



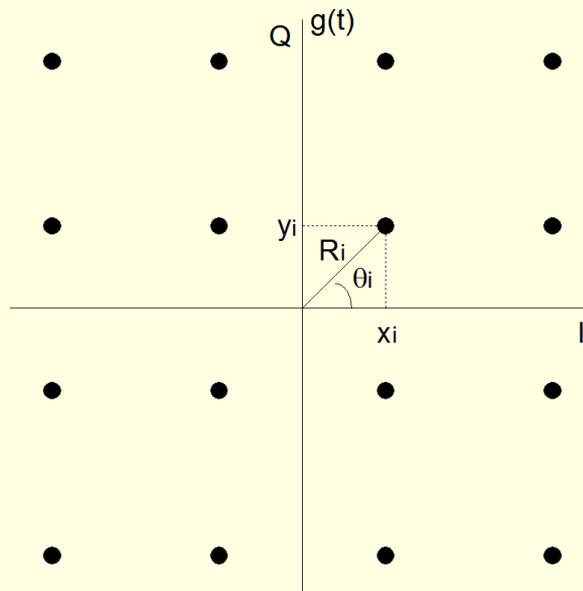
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Modulación de amplitud en cuadratura (QAM)

- La señal generada con portadora en cuadratura (ver figura anterior) se llama *modulación de amplitud en cuadratura* (QAM). La señal QAM general es

$$s(t) = x(t) \cos \omega_c t - y(t) \sin \omega_c t$$

- En la figura se muestra una constelación QAM de 16 símbolos ($M = 16$ niveles), donde la relación entre (R_i, θ_i) y (x_i, y_i) se puede evaluar con facilidad de dicha figura. En este caso se permite que x_i y y_i tengan cuatro niveles por dimensión.



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Modulación de amplitud en cuadratura (QAM)
- Las formas de onda x e y están representadas por

$$x(t) = \sum_n x_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right)$$

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D}\right)$$

donde $D = R/l$ y (x_n, y_n) denota uno de los valores (x_i, y_i) permitidos durante el tiempo necesario para transmitir un símbolo que queda centrado en $t = nT_s = n/D$ (se requieren T_s s para enviar cada símbolo), $h_1(t)$ es la forma del pulso utilizado para cada símbolo. A veces la sincronización entre los componentes $x(t)$ e $y(t)$ se compensa por $T_s/2 = 1/(2D)$ s, con lo que $y(t)$ viene dado por

$$y(t) = \sum_n y_n h_1\left(t - \frac{n}{D} - \frac{1}{2D}\right)$$

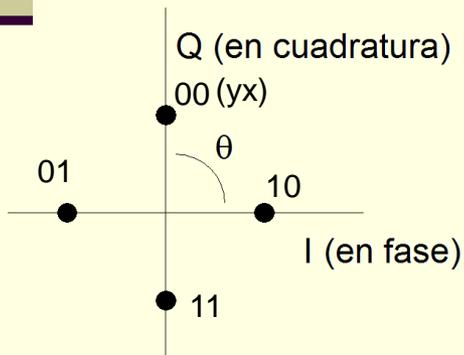
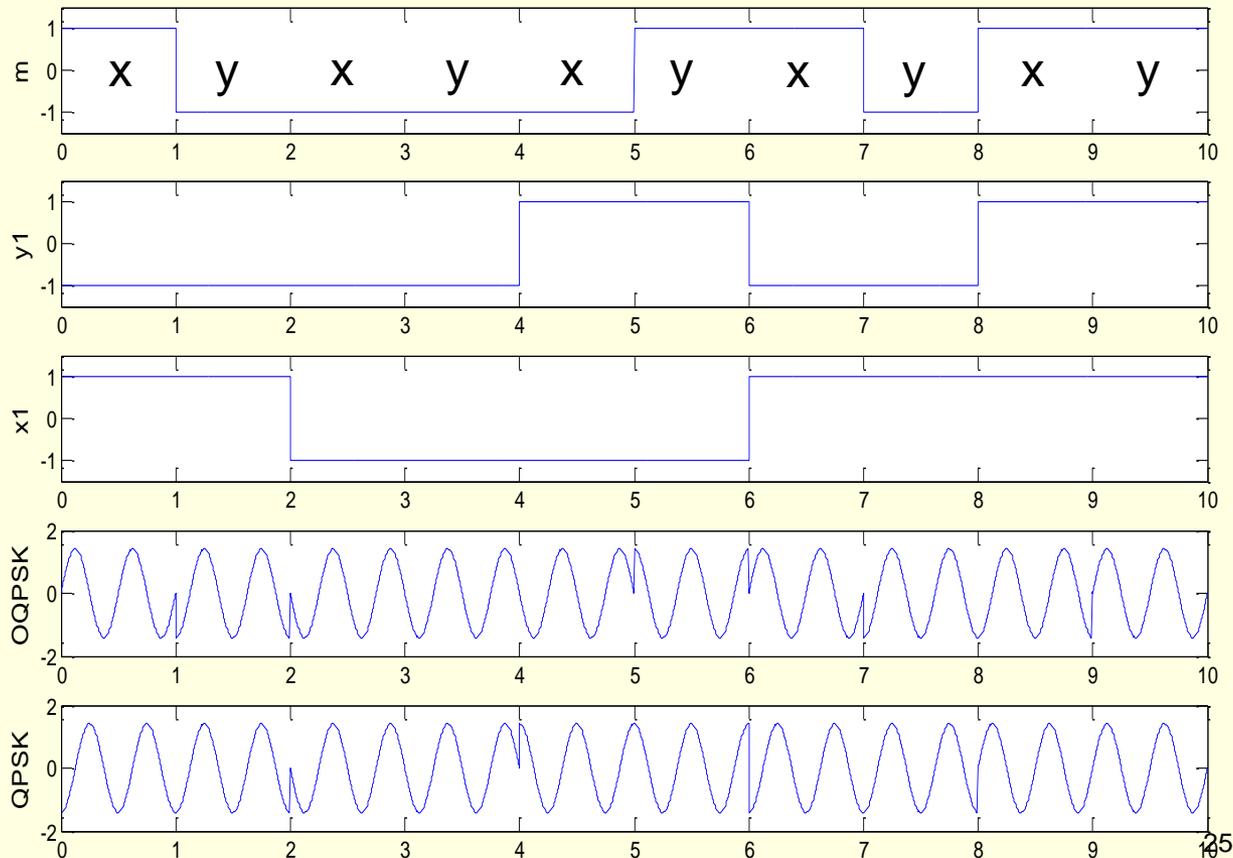
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Modulación de amplitud en cuadratura (QAM)

- Un tipo popular de modulación de compensación para el caso de QPSK (QAM donde $M = 4$) es la denominada *offset QPSK* (OQPSK), donde el flujo de datos a transmitir se divide en bits pares e impares, cada uno de los cuales es modulado por una portadora en fase y en cuadratura, respectivamente. Además, se introduce una compensación de $T_s/2$ s (T_b s) entre cada componente. De esta forma se consigue que el cambio de fase máximo de la portadora ocurrido en las transiciones de símbolos sea de 90° , frente a los 180° posibles de cambio con una QPSK normal. Los saltos de 180° en la transición puede dar lugar a un problema durante la recepción debido a los filtrados de canal, amplificación no lineal, etc. Un caso especial de OQPSK cuando $h_1(t)$ es una forma de pulso senoidal es la *transmisión por desplazamiento de fase mínimo* (MSK, *Minimum Shift Keying*).

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Modulación de amplitud en cuadratura (QAM)
- Ej. Comparación de señales QPSK y OQPSK



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Densidad espectral de potencia de MPSK y QAM

- La envolvente compleja de una señal MPSK o QAM viene dada por

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(t - nT_s)$$

- donde c_n es una variable aleatoria compleja que representa el valor multinivel durante el pulso del símbolo n -ésimo, $f(t) = \Pi(t/T_s)$ equivale al pulso de símbolo rectangular cuya duración es T_s , $D = 1/T_s$ es la tasa de símbolos (o baudios). La transformada de Fourier del pulso rectangular es

$$F(f) = T_s \left(\frac{\text{sen } \pi f T_s}{\pi f T_s} \right) = l T_b \left(\frac{\text{sen } l \pi f T_b}{l \pi f T_b} \right)$$

- donde $T_s = l T_b$ (existen l bits que representan cada valor multinivel permitido). En el caso de modulación simétrica, la densidad espectral de potencia de la envolvente compleja de señales MPSK o QAM con modulación de datos de patrón de bits rectangular es:

$$\mathcal{P}_g(f) = K \left(\frac{\text{sen } l \pi f T_b}{l \pi f T_b} \right)^2 \quad \text{para MPSK y QAM}$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

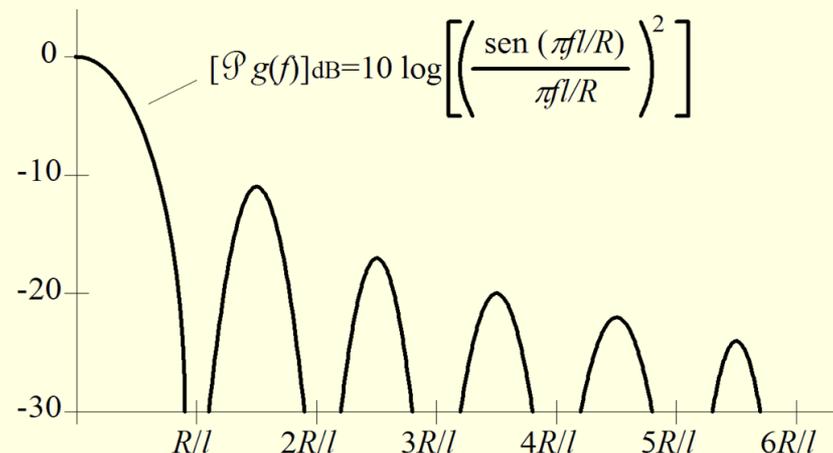
■ Densidad espectral de potencia de MPSK y QAM

- Esta densidad espectral de potencia coincide con la densidad espectral de potencia de BPSK cuando $l = 1$. El ancho de banda nulo a nulo de MPSK o QAM es:

$$B_T = 2R/l = 2D$$

- La eficiencia espectral es:

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{l \text{ bits/s}}{2 \text{ Hz}}$$



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento mínimo (MSK)

- La transmisión por desplazamiento mínimo (MSK) es otra técnica de conservación de ancho de banda, que es equivalente a OQPSK con pulso senoidal $h_1(t)$. La señal MSK es una FSK de fase continua (CPM, *continuous phase modulation*) con índice de modulación mínimo ($h = 0,5$) que produce modulación ortogonal.

- La desviación pico de frecuencia es

$$\Delta F = \frac{h}{2T_b} = \frac{1}{4T_b} = \frac{1}{4} R \quad \text{para MSK}$$

- La envolvente compleja de la señal MSK es

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{j2\pi\Delta F \int_0^t m(\lambda) d\lambda}$$

- donde $m(t) = \pm 1$, $0 < t < T_b$. Luego

$$g(t) = A_c e^{j\theta(t)} = A_c e^{\pm j\pi/(2T_b)} = x(t) + jy(t), \quad 0 < t < T_b$$

donde los signos \pm denotan los datos posibles durante el intervalo $(0, T_b)$.

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Transmisión por desplazamiento mínimo (MSK)

- Por tanto:

$$x(t) = A_c \cos\left(\pm \frac{\pi t}{2T_b}\right), \quad 0 < t < T_b$$

$$y(t) = A_c \text{sen}\left(\pm \frac{\pi t}{2T_b}\right), \quad 0 < t < T_b$$

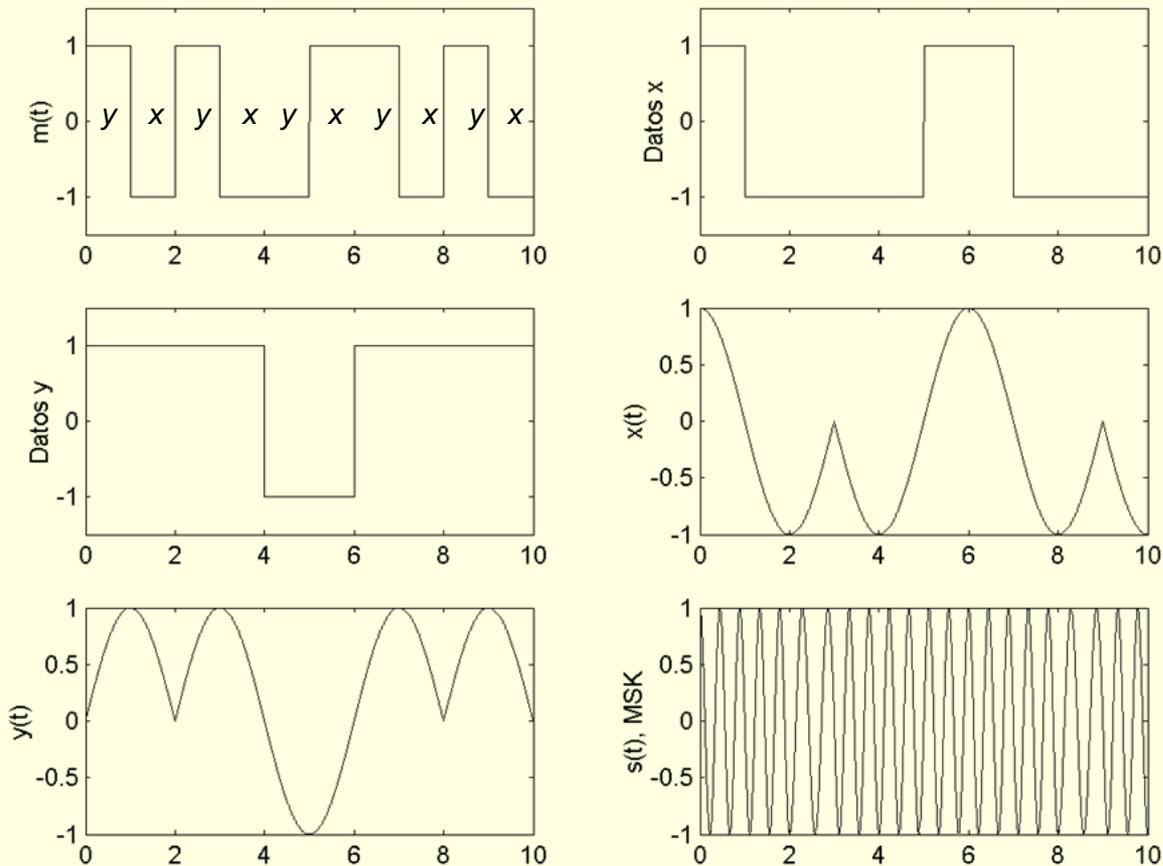
y la señal MSK es

$$s(t) = x(t) \cos \omega_c t - y(t) \text{sen} \omega_c t$$

- Se puede observar como el cambio de signo de $m(t)$ durante el intervalo $(0, T_b)$ sólo afecta a $y(t)$ y no a $x(t)$ en el intervalo de señalización $(0, 2T_b)$. Además, el pulso $\text{sen}[\pi t/(2T_b)]$ de $y(t)$ es de $2T_b$ s de ancho. Asimismo, se puede ver que el signo de $m(t)$ durante el intervalo $(T_b, 2T_b)$ afecta sólo a $x(t)$ y no a $y(t)$ en el intervalo $(T_b, 3T_b)$. Es decir, los datos modulan alternadamente los componentes $x(t)$ y $y(t)$, con lo cual MSK equivale a OQPSK con forma de pulso senoidal.

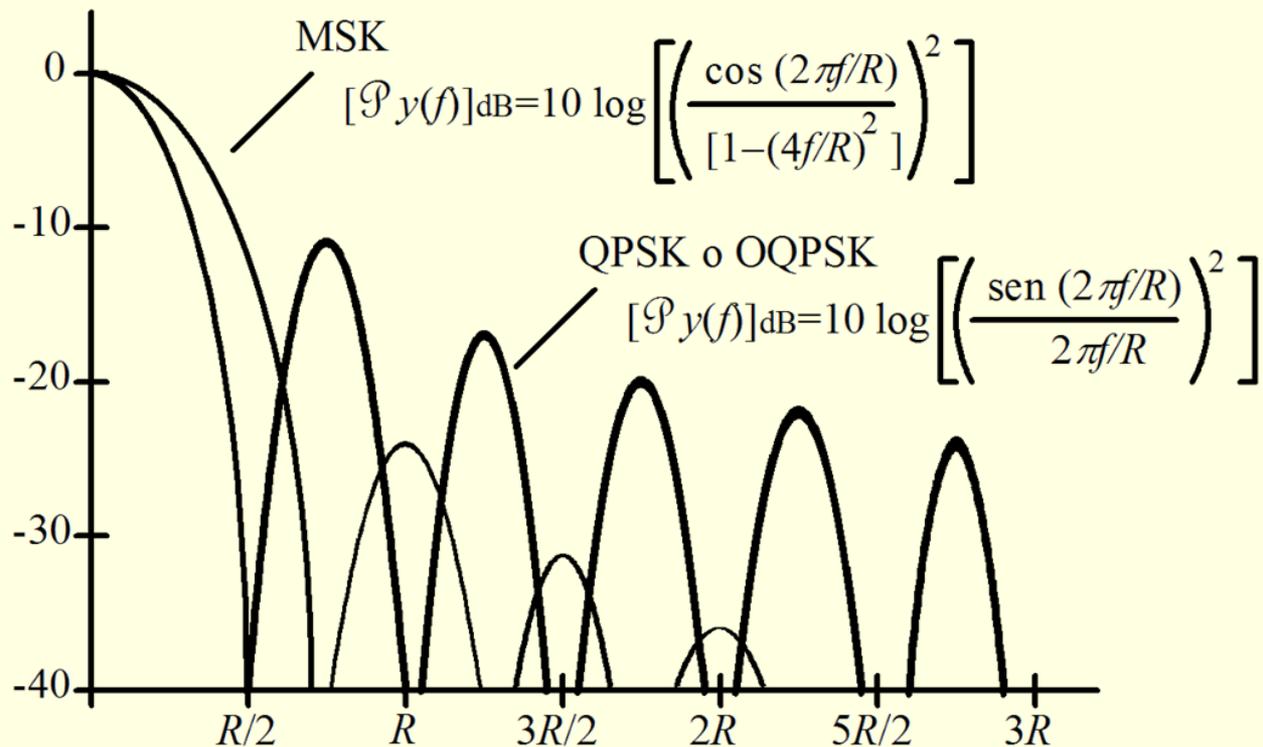
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Transmisión por desplazamiento mínimo (MSK)
- Ej. Señalización MSK



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

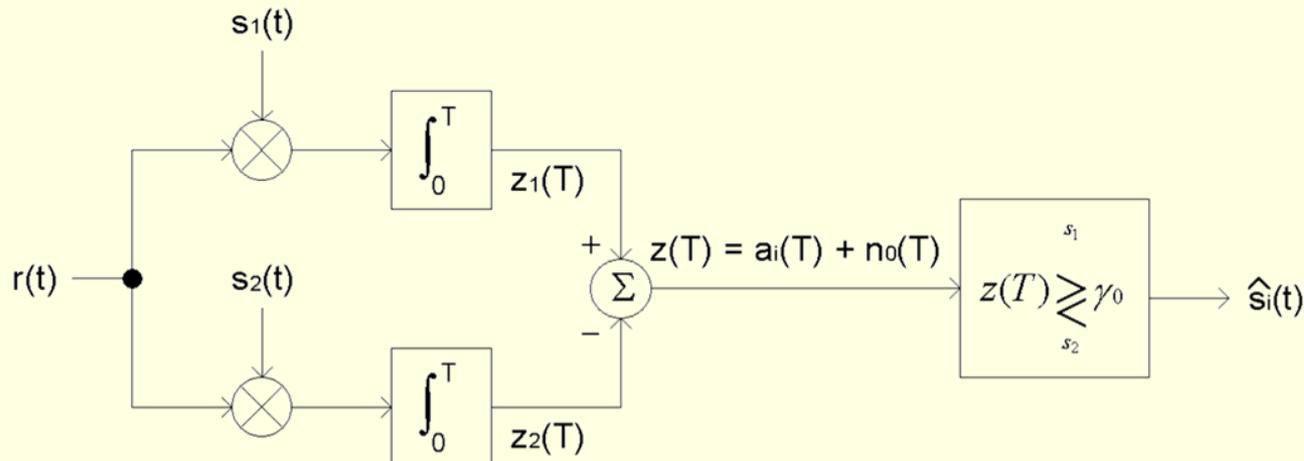
- Transmisión por desplazamiento mínimo (MSK)
 - Ej. Comparación de espectros de señales MSK, QPSK y OQPSK



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Al igual que ocurre con los sistemas de comunicación en bandabase, el detector óptimo de los sistemas de comunicación pasabanda se obtiene a través del filtro de correlación. En la figura se muestra la estructura del receptor de correlación para el caso binario utilizando dos ramas de correlación paralelas.
 - Las señales de salida de cada uno de los correladores puede ser diferenciada tal como se muestra en la figura:

$$z(T) = z_1(T) - z_2(T)$$



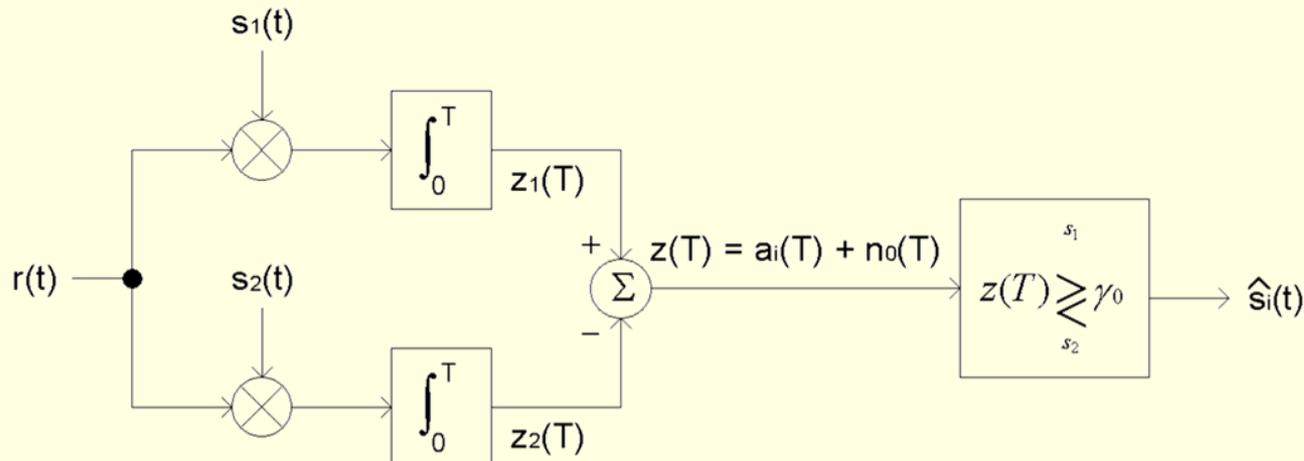
SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Ésta vendrá dada por una componente $a_i(T)$ que se corresponde con el símbolo transmitido en ese momento (para el caso binario a_1 ó a_2) más una componente de ruido $n_0(T)$:

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T)$$

- El detector decidirá entre si se ha enviado s_1 o s_2 en función de si $z(T)$ es mayor o menor de γ_0 :

$$z(T) \underset{s_2}{\overset{s_1}{\gtrless}} \frac{a_1 + a_2}{2} = \gamma_0$$



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Cualquier detector que utilice la estructura anterior para determinar cuál ha sido el símbolo enviado presentará un rendimiento óptimo bajo ruido AWGN. Supongamos, por ejemplo, el caso de una señal PSK M -aria (MPSK). En dicho caso, se tiene que $s_i(t)$ puede expresarse como:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left(\omega_0 t - \frac{2\pi i}{M}\right) \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

- El factor $\sqrt{2E/T}$ se añade para que la energía por símbolo de la señal MPSK sea E . Por otro lado, se tiene que cualquiera de las señales $s_i(t)$ anteriores puede representarse mediante el conjunto de funciones ortonormales dado por

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_0 t)$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{sen}(\omega_0 t)$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

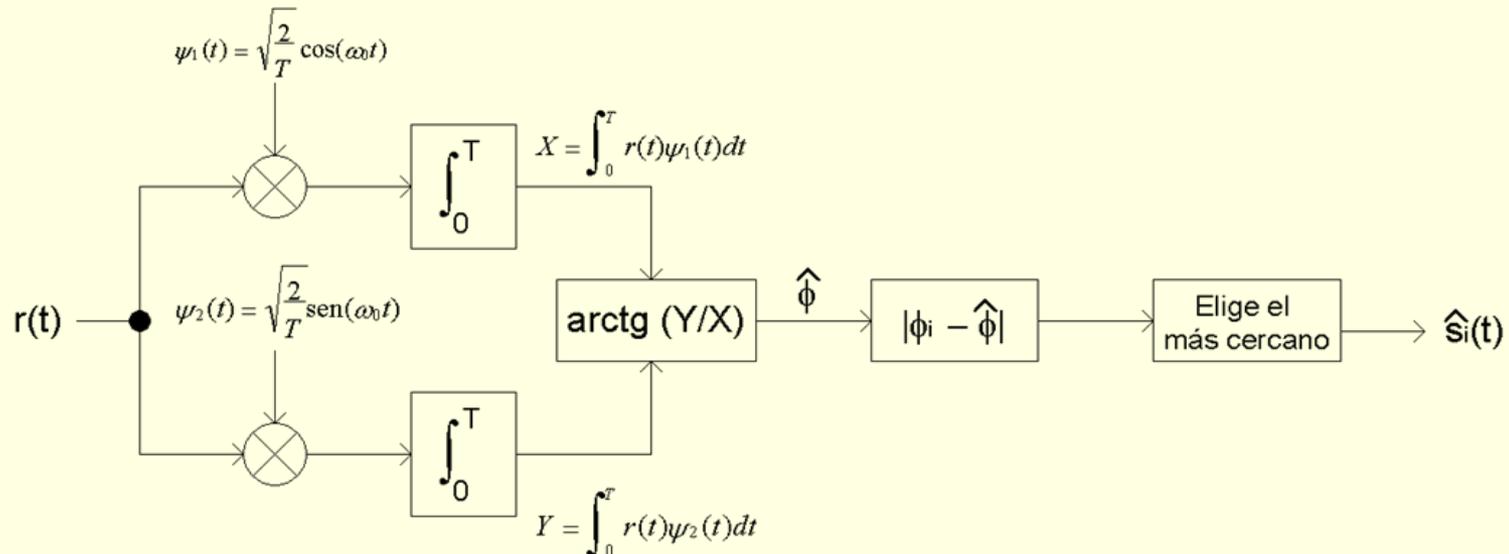
■ Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda

- Se tendrá que: $s_i(t) = a_{i1}\psi_1(t) + a_{i2}\psi_2(t)$

$$= \sqrt{E} \cos\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_1(t) + \sqrt{E} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{M}\right)\psi_2(t)$$

$$= \sqrt{E} \cos(\phi_i)\psi_1(t) + \sqrt{E} \operatorname{sen}(\phi_i)\psi_2(t) \quad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, \dots, M \end{array}$$

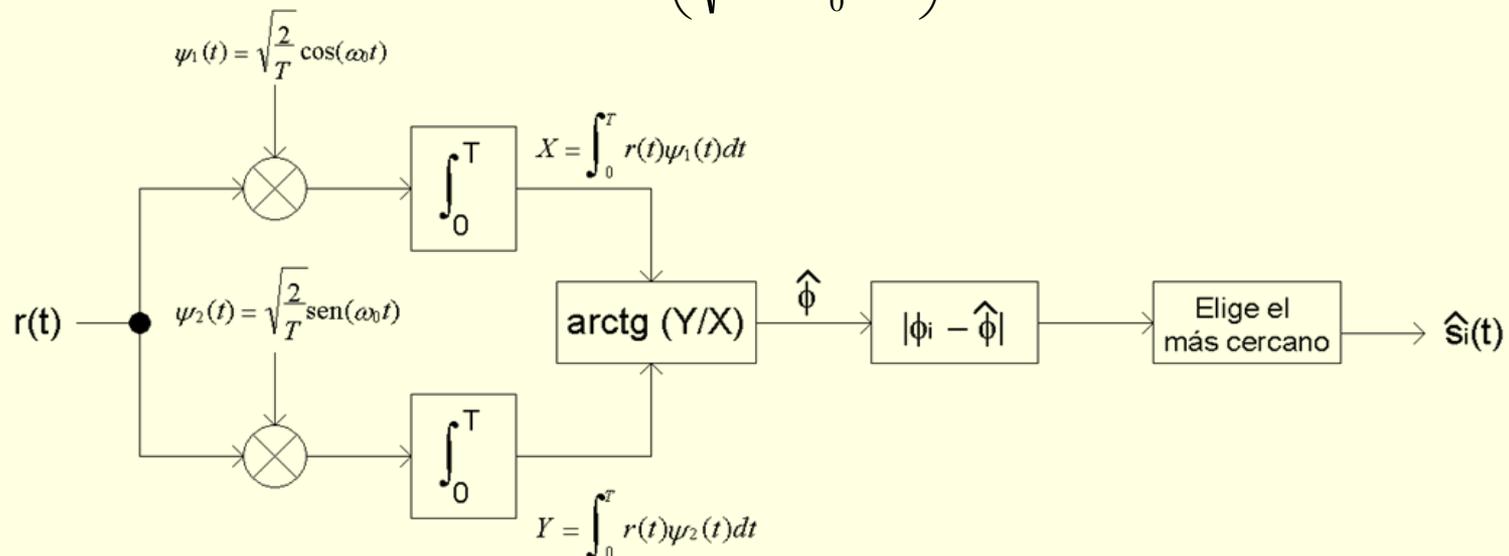
siendo $\phi_i = 2\pi i/M$ el desplazamiento angular, respecto de cero grados, del símbolo transmitido.



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Obsérvese que tras la demodulación coherente mediante las ramas inferior y superior de correlación se obtienen las componentes en bandabase X e Y de la envolvente compleja del símbolo recibido. Por tanto, no nos debería extrañar que este detector presente una probabilidad de error idéntica a la de los sistemas de comunicación en bandabase asociados. Así, para esquemas binarios se tenía que:

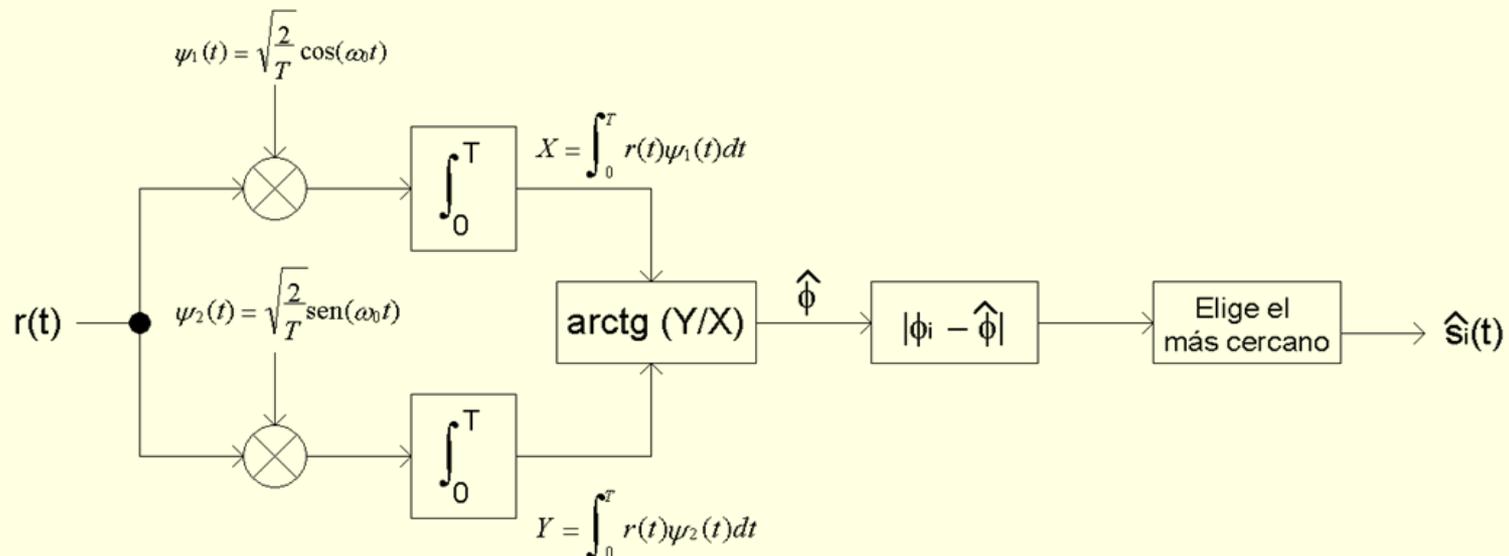
$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{N_0}}\right)$$



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - En la expresión anterior, ρ es el coeficiente de correlación cruzada entre los símbolos transmitidos, que para el caso de modulación BPSK es igual -1, ya que dichos símbolos son antipodales entre sí. Así, la probabilidad de error de bit de un sistema de comunicación BPSK es:

$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

■ Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda

- Para modulación binaria ASK u OOK, tendremos que $\rho = 0$, con lo que:

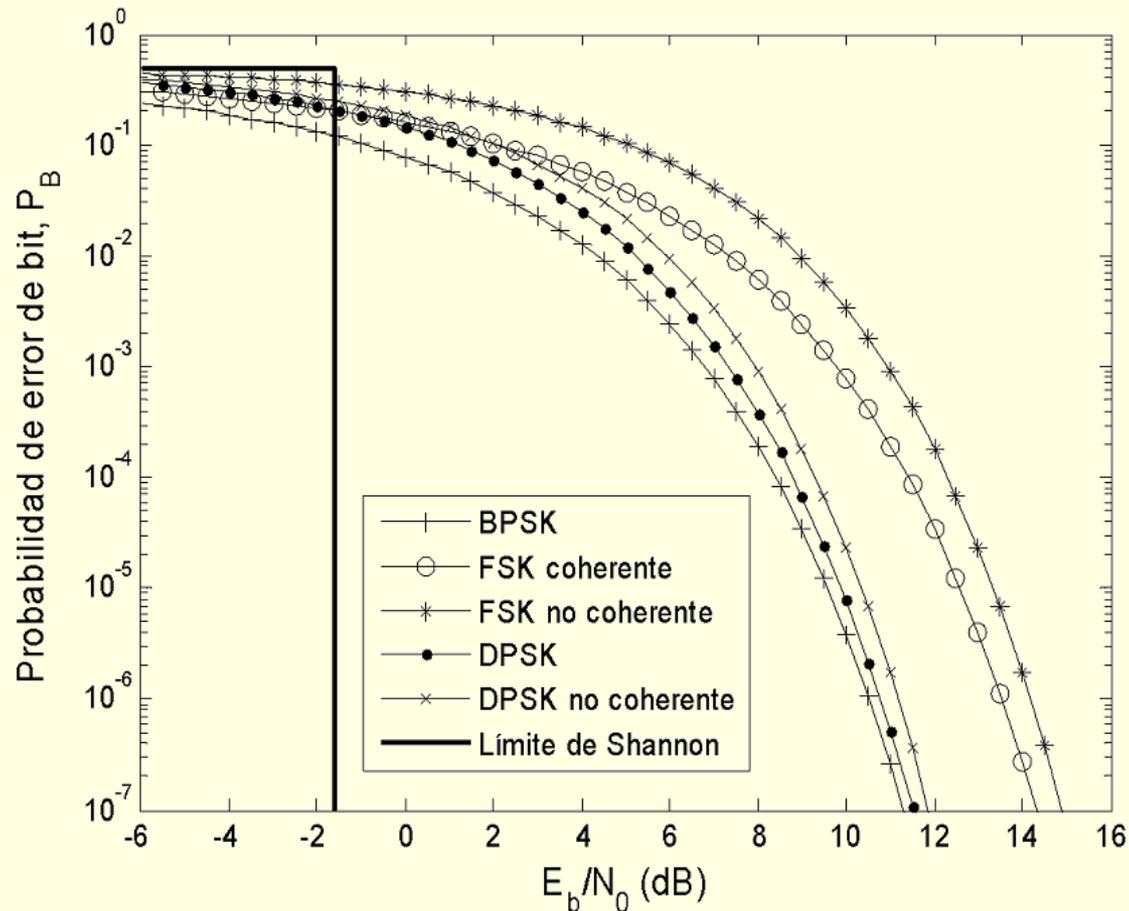
$$P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- Para modulación FSK binaria, al modularse los símbolos posibles a transmitir con funciones ortogonales, se tendrá nuevamente que $\rho = 0$ y, por tanto, la probabilidad de error de bit coincide con la obtenida en el caso de modulación OOK cuando se utiliza detección coherente. Hay que indicar que tanto ASK como FSK pueden demodularse no coherentemente utilizando detectores de envolvente y mezcladores sincronizados en frecuencia con aquéllas correspondientes a las de los símbolos transmitidos. Dichos detectores, al no requerir sincronización de fase con las portadoras de las señales recibidas, son menos complejos, pero a la vez presentan un desempeño peor que los detectores coherentes óptimos. En el mejor de los casos, la probabilidad de error de bit de un detector no coherente para señales FSK (y también para señales OOK) vendrá dada por:

$$P_B = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Cuando trabajamos con esquemas M -arios, la probabilidad de error de símbolo $P_E(M)$ en el caso de señales MPSK detectadas coherentemente, se tiene que puede aproximarse, para valores de E_b/N_0 suficientemente grandes, por

$$P_E(M) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \sin \frac{\pi}{M}\right), \quad M > 2$$

donde $E_s = E_b \cdot \log_2 M$ es la energía por símbolo y $M = 2^k$ es el tamaño del conjunto de símbolos, siendo k el número de bits contenidos por cada símbolo. La relación entre la probabilidad de error de símbolo P_E y la probabilidad de error de bit P_B , cuando se hace uso de codificación Gray y para modulación MPSK, se puede aproximar por

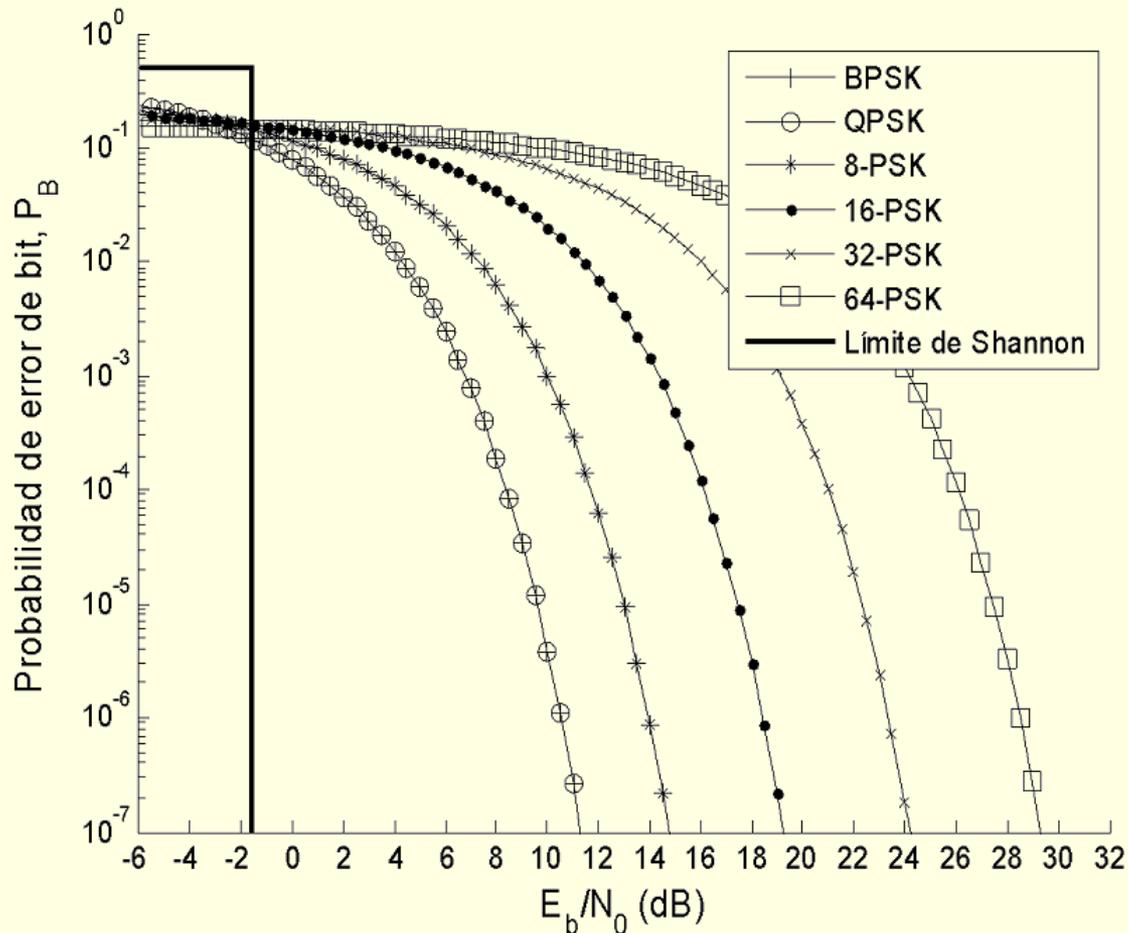
$$P_B \approx \frac{P_E}{\log_2 M} = \frac{P_E}{k} \quad (\text{para } P_E \ll 1)$$

- Por tanto, para QPSK (OQPSK y MSK) se tiene, en base a lo anterior, que:

$$P_{B,QPSK} \approx \frac{P_{E,QPSK}}{\log_2 M} = \frac{P_{E,QPSK}}{2} = \frac{2P_{B,BPSK}}{2} = P_{B,BPSK}$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
- Teniendo en cuenta que la tasa de símbolos R_s se reduce al aumentar el número de bits k representados por cada símbolo, para una tasa de bits R dada:

$$R_s = R/k$$

, en el caso de utilizar filtrado de Nyquist, el mínimo ancho de banda requerido para la transmisión a una tasa de símbolo R_s será:

$$B_T = \frac{1}{T_s} = R_s$$

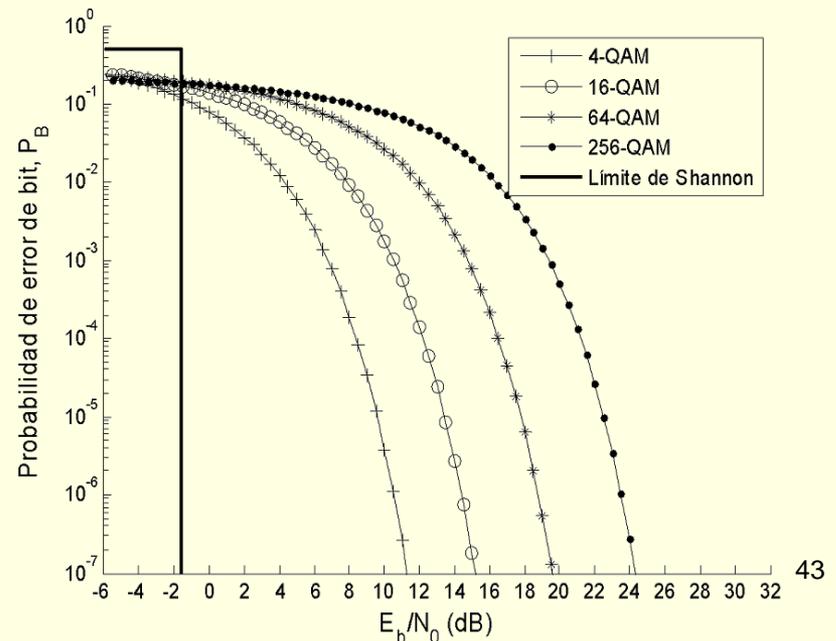
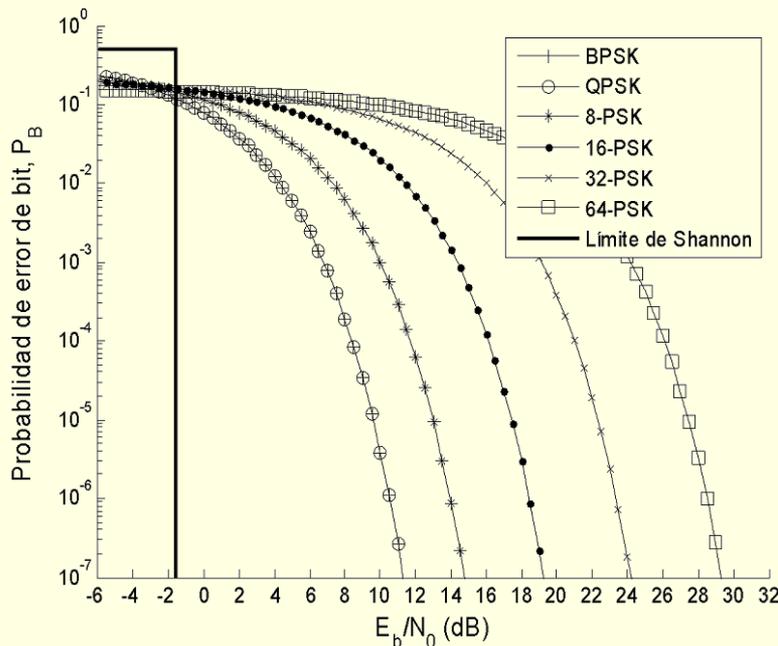
- La eficiencia espectral de los sistemas MPSK, y MQAM en general, teniendo en cuenta las relaciones anteriores, es:

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{R}{R_s} = \frac{R}{R/k} = k = \log_2 M \text{ bit/s/Hz}$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - La probabilidad de error de bit de los sistemas M -QAM, con constelación rectangular y para $M = 2^k$ con k par, cuando se hace uso de detección mediante filtros adaptados, viene dada por:

$$P_B \approx \frac{2(1-1/L)}{\log_2 L} Q \left[\sqrt{\left(\frac{3 \log_2 L}{L^2 - 1} \right) \frac{2E_b}{N_0}} \right]$$



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Para el caso de señales MFSK detectadas coherentemente, la probabilidad de error de símbolo cumple que:

$$P_E(M) \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

- Para el caso de detección no coherente de señales MFSK, se tiene que un límite superior de su probabilidad de error es el siguiente (este límite superior de P_E es, por supuesto, también válido para detección coherente):

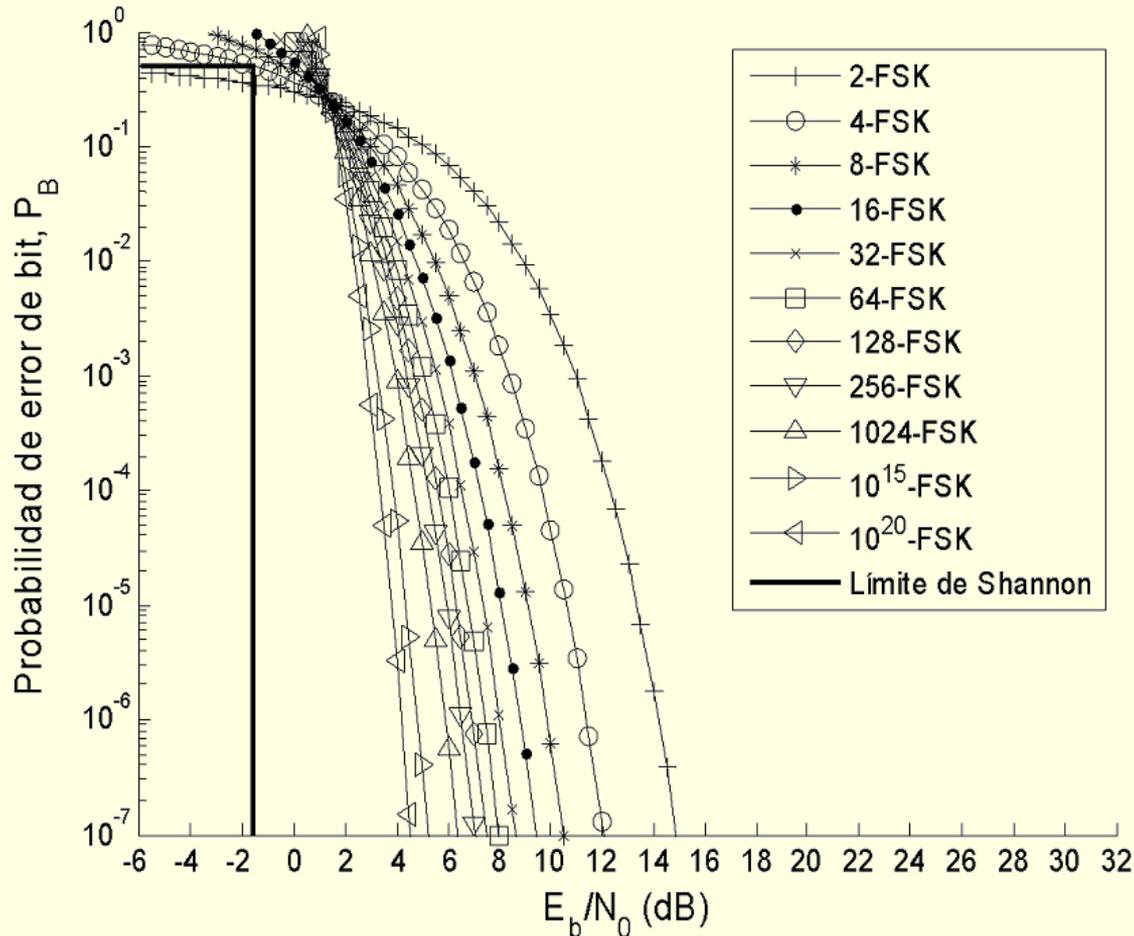
$$P_E(M) < \frac{M-1}{2} \exp\left(-\frac{E_s}{2N_0}\right)$$

- En el caso de modulación MFSK, la relación entre la probabilidad de error de símbolo P_E y la probabilidad de error de bit P_B es:

$$P_B = P_E \frac{\text{número de bits erróneos}}{\text{número de bits}} = \frac{P_E}{k} \frac{k2^{k-1}}{2^k - 1} = P_E \frac{2^{k-1}}{2^k - 1}$$
$$\Rightarrow \frac{P_B}{P_E} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} = \frac{M/2}{M-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda



SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
 - Los esquemas MFSK tienen el inconveniente, en contraposición a los esquemas MPSK y MQAM, de que el ancho de banda requerido de transmisión es cada vez mayor. Para modulación MFSK detectada de manera no coherente, la mínima separación posible entre portadoras es $R_s = 1/T_s$, siendo R_s la tasa de símbolo y T_s el tiempo de símbolo. Por tanto, si hacemos uso de M portadoras, el ancho de banda de transmisión requerido para MFSK en el mejor de los casos es:

$$B_T = \frac{M}{T_s} = MR_s = M \frac{R}{k} = \frac{MR}{\log_2 M}$$

- Por tanto, la eficiencia espectral para los esquemas MFSK es:

$$\eta = \frac{R}{B_T} = \frac{\log_2 M}{M} \text{ bit/s/Hz}$$

SISTEMAS DIGITALES DE COMUNICACIÓN PASABANDA

- Probabilidad de error de sistemas de comunicación pasabanda
- Comparación de la eficiencia espectral de los distintos esquemas de comunicación digital pasabanda

