

DI: 220251

DI: 220251

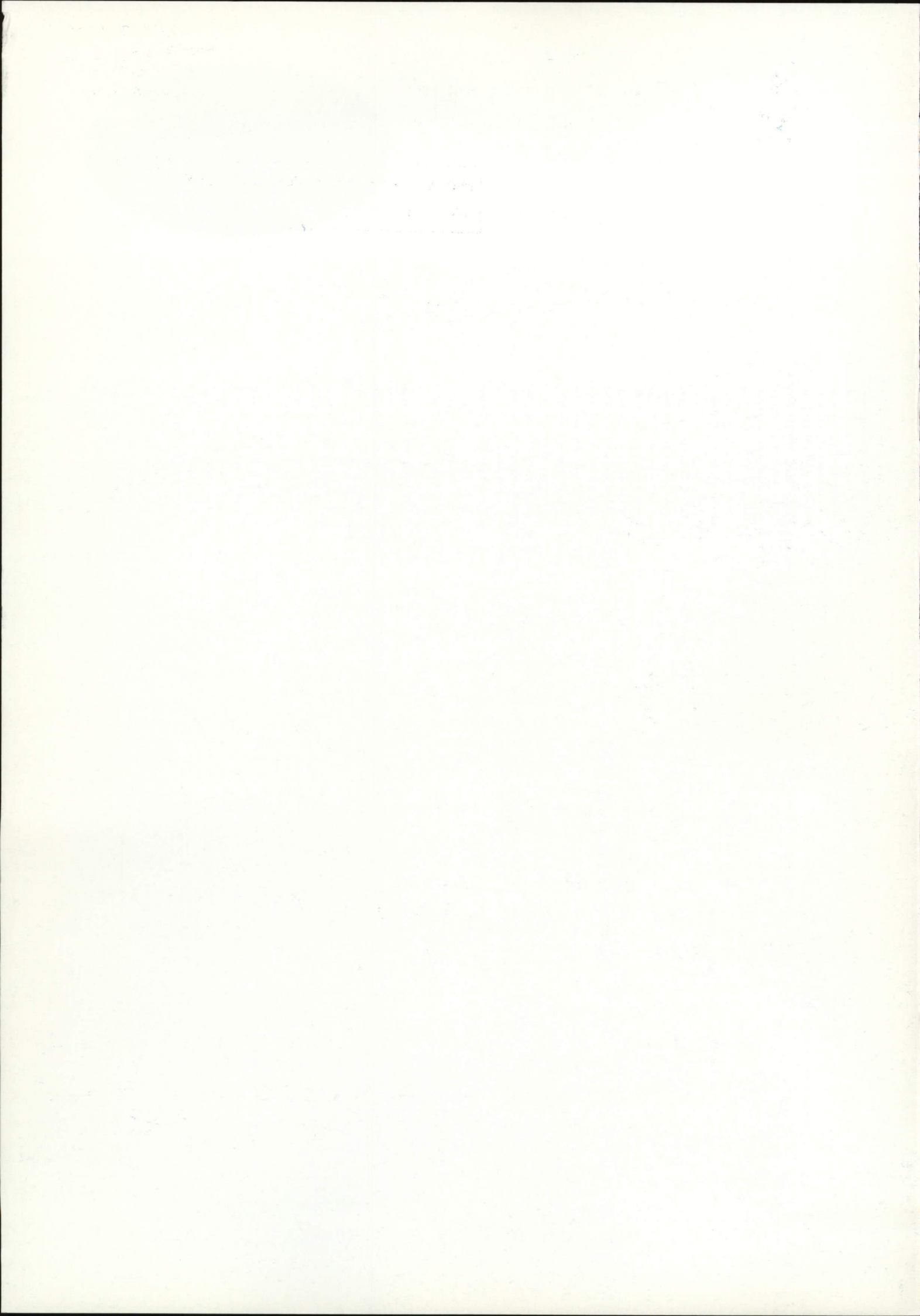


Ministerie van Verkeer en Waterstaat
Directoraat-Generaal Rijkswaterstaat
Bouwdienst Rijkswaterstaat

Beschrijving van het gekoppeld u-p-T model

Mathematische en numerieke
modellering

6 januari 2004





BIBLIOTHEEK BOUWDIENST RIJKSWATERSTAAT
NR. C9812 BDU

Beschrijving van het gekoppeld u-p-T model

Mathematische en numerieke
modellering

6 januari 2004



Beschrijving van het gekoppeld u-p-T model

**Mathematische en numerieke
modellering**

6 januari 2004

.....

Colofon

Uitgegeven door: Afdeling Tunnelbouw Bouwdienst Utrecht

Informatie: Afdeling Tunnelbouw (DIU)

Telefoon: 030 – 285 77 77

Fax: 030 – 289 74 18

Uitgevoerd door: J. P. B. N. Derks

Opmaak: -

Datum: 6 januari 2004

Status: Definitief

Versienummer: 1a

Inhoudsopgave

.....

1.	Inleiding	6
2.	Mathematisch modellering	9
3.	Numerieke formulering	15
4.	Numerieke Resultaten	25
5.	Conclusies en aanbevelingen	35
6.	Literatuurlijst	36

1. Inleiding

De ontwikkeling van numerieke methodieken is momenteel dusdanig ver gevorderd dat toepassing hiervan in de tunnelbouw praktijk op zijn plaats is.

Een aantal voorbeelden hiervan zijn de numerieke simulatie van grondbevriezing, de numerieke modellering van het afsputten van beton veroorzaakt door brand en de idealisatie van materiaal aantasting processen.

Daarnaast kan gedacht worden aan de numerieke schematisatie van het tunnelbouw proces en het computer gestuurd ontwerpen van een tunnelboormachine.

De reken capaciteit van de hedendaagse computers is voldoende om de opgenoemde processen accuraat te simuleren.

Voordelen van een dergelijke aanpak zijn onder meer een reductie van het aantal (kostbare) experimenten in situ en/of laboratorium en dus een significante kostenbesparing. Bovendien zijn aanpassingen relatief eenvoudig door te voeren waardoor het ontwerp proces effectiever kan verlopen.

Een aantal nadelen zijn hieraan verbonden, namelijk de toepassing van de numerieke methodieken vereist een grondige kennis en inzicht van de achterliggende theorie en de tunnelbouw praktijkoplossingen.

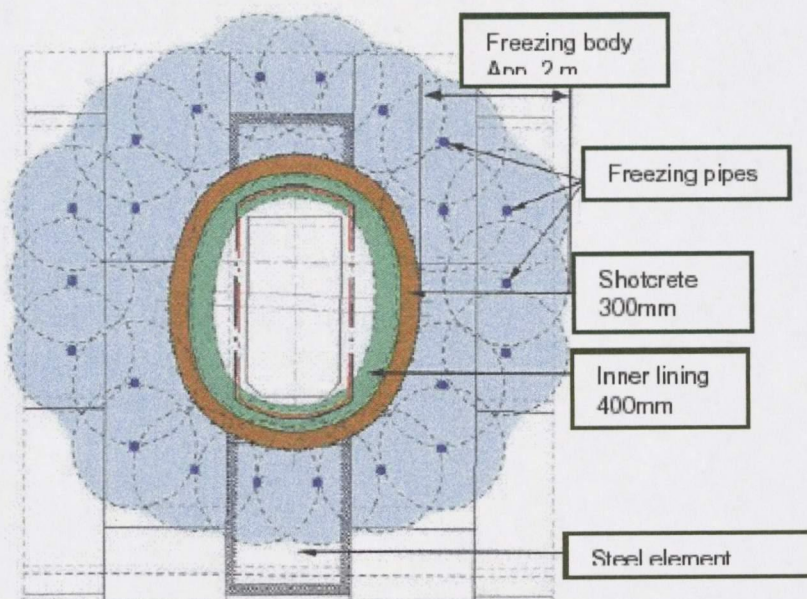
De vaardigheid met het omgaan van de software is van secundair belang, immers iedereen kan inmiddels wel getallen invoeren en resultaten verkrijgen. De vraag blijft of deze wel correct en realistisch zijn, kortom alleen deskundigen zijn in staat om hiermee adequaat om te gaan en hiervoor geschikte oplossingen te genereren.

Dit rapport is dan ook geschreven voor specialisten die zich op de hoogte willen stellen van de numerieke u-p-

T modellen¹ ter schematisatie van de voornoemde fysische processen (voorbeelden: zie figuur 1.1 en figuur 1.2) en ter kennisborging.



Figuur 1.1 Voorbeeld van het afspatten van het beton ten gevolge van brand.



¹ De karakters u, p en T representeren de vectoriële verplaatsing (u), de skalaire druk (p) en de skalaire temperatuur (T).

Figuur 1.2 Voorbeeld van grondbevriezing voor de aanleg van een dwarsverbinding tussen twee geboorde tunnelbuizen.

De vertaalslag naar de geavanceerdere modellen is neergelegd in de, door mij geschreven, rapportages vermeld in de literatuurlijst.

De rapportage heeft de volgende opzet.

Dit hoofdstuk omvat de inleiding

Hoofdstuk 2 geeft een samenvatting van de mathematische grondslag van het u-p-T model.

Hoofdstuk 3 beschrijft de numerieke modellering.

Hoofdstuk 4 presenteert de resultaten van een case history.

Hoofdstuk 5 bevat de conclusies en aanbevelingen.

Hoofdstuk 6 biedt een literatuur overzicht.

2. Mathematisch modellering

De mathematische formulering wordt bondig gepresenteerd en behelst de bespreking van de behoudswetten van massa, impuls en energie voor een tweedimensionale geometrie.

2.1 Behoudswet van massa

De behoudswet van massa luidt als volgt.

$$\frac{\partial q_{xhw}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yhw}}{\partial y} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.1)$$

Waarin:

Tabel 2.1 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
q_{xhw}	is de snelheid in de x-richting van het water [$\frac{m}{s}$]
q_{yhw}	is de snelheid in de y-richting van het water [$\frac{m}{s}$]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]
T	is de tijd [s]
u	is de verplaatsing in de x-richting [m]
v	is de verplaatsing in de y-richting [m]

De hydro-thermo-mechanische materiaal wet (Wet van Darcy-Soret/De Vries) voor de beschrijving van het watertransport in de grondformatie veroorzaakt door een hydraulische drukgradiënt en temperatuurgradiënt luidt in formule.

$$\begin{Bmatrix} q_{xhyd w} \\ q_{yhyd w} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\gamma_w} \begin{bmatrix} k_{xhyd w} & 0 \\ 0 & k_{yhyd w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} + \frac{1}{\gamma_w} \begin{bmatrix} k_{xtem w} & 0 \\ 0 & k_{ytem w} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Waarin:

Tabel 2.2 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
$q_{x\text{ hw}}$	is de snelheid in de x-richting van het water [$\frac{m}{s}$]
$q_{y\text{ hw}}$	is de snelheid in de y-richting van het water [$\frac{m}{s}$]
γ_w	is het soortelijk gewicht van het water [$\frac{N}{m^3}$]
$k_{x\text{ hyd w}}, k_{y\text{ hyd w}}$	zijn de hydraulische geleidingscoëfficiënten in de x- en y-richting van het water [$\frac{m}{s}$]
$k_{x\text{ tem w}}, k_{y\text{ tem w}}$	zijn de thermische geleidingscoëfficiënten in de x- en de y-richting van het water [$\frac{N}{ms\text{ }^\circ C}$]
p	is de druk van het water [$\frac{N}{m^2}$]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]
T	is de temperatuur [$^\circ C$]

Substitutie levert.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{k_{x\text{ hyd w}}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{k_{y\text{ hyd w}}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{k_{x\text{ tem w}}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{k_{y\text{ tem w}}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

Waarin:

Tabel 2.3 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
T	is de tijd [s]
u, v	zijn de verplaatsingscomponenten in de x- en de y-richting [m]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]
$k_{x\text{ hyd w}}, k_{y\text{ hyd w}}$	zijn de hydraulische geleidingscoëfficiënten in de x- en de y-richting van het water [$\frac{m}{s}$]
$k_{x\text{ tem w}}, k_{y\text{ tem w}}$	zijn de thermische geleidingscoëfficiënten in de x- en de y-richting van het water [$\frac{N}{ms\text{ }^\circ C}$]

p	is de waterdruk $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
T	is de temperatuur $[^{\circ}C]$

2.2 Behoudswet van impuls

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} + F_y = 0 \quad (2.4a-b)$$

Waarin:

Tabel 2.4 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
σ'_x, σ'_y	zijn de effectieve korrel-normalspanningscomponenten $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
τ_{xy}, τ_{yx}	zijn de korrelschuifspanningscomponenten $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
p	is de waterdruk $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
F_x, F_y	zijn de volumekrachten in de x- en de y-richting $\left[\frac{N}{m^3}\right]$
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]

De bijbehorende mechanische materiaalwet (Wet van Hooke) voor lineair-elastisch materiaal in een vlakke vervormingstoestand luidt.

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_x \\ \sigma'_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E'(1-\nu')}{(1+\nu')(1-2\nu')} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & 0 \\ \nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2(1-\nu')} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - (1+\nu') \begin{Bmatrix} \alpha_k \Delta T \\ \alpha_k \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (2.5a)$$

$$\sigma'_z = \nu'(\sigma'_x + \sigma'_y) \quad (2.5b)$$

Waarin:

Tabel 2.5a Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z$	zijn de effectieve korrelnormaalspanningscomponenten [$\frac{N}{m^2}$]
τ_{xy}	is de korrelschuifspanningscomponent [$\frac{N}{m^2}$]
E'	is de effectieve elasticiteitsmodulus [$\frac{N}{m^2}$]
ν'	is de effectieve Poisson constante [-]
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	zijn de korrelnormaalrekcomponenten [-]
γ_{xy}	is de korrelafschuifrekcomponent [-]
α_k	is het lineaire thermische uitzettingscoëfficiënt van de korrels [$\frac{1}{^\circ C}$]
ΔT	is het temperatuurs-increment [$^\circ C$]

De hoofdspansingen σ_I en σ_{II} luiden in formule.

$$\sigma_I = \frac{1}{2}(\sigma'_x + \sigma'_y) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.5c)$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}(\sigma'_x + \sigma'_y) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.5d)$$

Waarin:

Tabel 2.5b Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
σ'_x, σ'_y	zijn de effectieve korrelnormaalspanningscomponenten [$\frac{N}{m^2}$]
τ_{xy}	is de korrelschuifspanningscomponent [$\frac{N}{m^2}$]
σ_I, σ_{II}	zijn de hoofdspansingen [$\frac{N}{m^2}$]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Waarin:

Tabel 2.6 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	zijn de korrelnormaalrekcomponenten [-]
γ_{xy}	is de korrelafschuifrekcomponent [-]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]
u, v	zijn de verplaatsingscomponenten in de x- en de y-richting [m]

2.3 Behoudswet van energie

Er is thermisch evenwicht aangenomen tussen de vloeibare - en vaste stof fase ($T = T_w = T_k$).

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_{xtemk}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ytemk}}{\partial y} \quad (2.7)$$

Waarin:

Tabel 2.7 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
ρ	is de dichtheid van de grond [$\frac{kg}{m^3}$]
C	is de specifieke warmtecapaciteit van de grond [$\frac{J}{kg^{\circ}C}$]
T	is de temperatuur [$^{\circ}C$]
t	is de tijd [s]
q_{xtemk}	is de warmteflux [$\frac{W}{m^2}$]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]

$$\begin{Bmatrix} q_{x\text{tem}k} \\ q_{y\text{tem}k} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x\text{tem}k} & 0 \\ 0 & k_{y\text{tem}k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Waarin:

Tabel 2.8 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
$q_{x\text{tem}k}, q_{y\text{tem}k}$	zijn de warmteflux-componenten in de x- en de y-richting van de grond [$\frac{W}{m^2}$]
$k_{x\text{tem}k}, k_{y\text{tem}k}$	zijn de thermische geleidingscoëfficiënten in de x- en de y-richting van de grond [$\frac{W}{m^{\circ}C}$]
T	is de temperatuur [$^{\circ}C$]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]

Substitutie geeft:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k_{x\text{tem}k} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_{y\text{tem}k} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

Waarin:

Tabel 2.9 Grootheid, omschrijving en eenheid toegepast in formule.

Grootheid	Omschrijving [eenheid]
ρ	is de dichtheid van de grond [$\frac{kg}{m^3}$]
c	is de specifieke warmtecapaciteit van de grond [$\frac{J}{kg^{\circ}C}$]
T	is de temperatuur [$^{\circ}C$]
t	is de tijd [s]
$k_{x\text{tem}k}, k_{y\text{tem}k}$	zijn de thermische geleidingscoëfficiënten in de x- en de y-richting van de grond [$\frac{W}{m^{\circ}C}$]
x, y	zijn de Cartesische coördinaten [m]

3. Numerieke formulering

3.1 Discretisatie van het plaatsdomein

De gediscretiseerde vergelijkingen op het element niveau luiden.

$$\underline{KM} \underline{u} + \underline{C} \underline{p} - \underline{KT}_k \underline{T} = \underline{F}$$

$$\underline{C}^T \frac{d\underline{u}}{dt} - \underline{KP}_{hyd w} \underline{p} - \underline{KP}_{tem w} \underline{T} = \underline{0}$$

$$\underline{PM} \frac{d\underline{T}}{dt} + \underline{KP}_{tem k} \underline{T} = \underline{0} \quad (3.1a-c)$$

Geschreven in matrix-vector notatie.

$$\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{C}^T & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\underline{u}}{dt} \\ \frac{d\underline{p}}{dt} \\ \frac{d\underline{T}}{dt} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{KM} & \underline{C} & -\underline{KT}_k \\ \underline{0} & -\underline{KP}_{hyd w} & -\underline{KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{KP}_{tem k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{p} \\ \underline{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

3.2 Discretisatie van het tijdsdomein

Een lineair twee knoops tijd eindig element is gekozen. De gediscretiseerde vergelijkingen zijn².

$$\theta \underline{KM} \underline{u}_1 + \theta \underline{C} \underline{p}_1 - \theta \underline{KT}_k \underline{T}_1 = (\theta - 1) \underline{KM} \underline{u}_0 + (\theta - 1) \underline{C} \underline{p}_0 + (1 - \theta) \underline{KT}_k \underline{T}_0 + \underline{F}$$

$$\underline{C}^T \underline{u}_1 - \theta^2 \Delta t \underline{KP}_{hyd w} \underline{p}_1 - \theta^2 \Delta t \underline{KP}_{tem w} \underline{T}_1 =$$

$$\underline{C}^T \underline{u}_0 - \theta(\theta - 1) \Delta t \underline{KP}_{hyd w} \underline{p}_0 - \theta(\theta - 1) \Delta t \underline{KP}_{tem w} \underline{T}_0$$

$$(\underline{PM} + \theta \Delta t \underline{KP}_{tem k}) \underline{T}_1 = (\underline{PM} - (1 - \theta) \Delta t \underline{KP}_{tem k}) \underline{T}_0 \quad (3.3a-c)$$

² Delen door θ is toegestaan in het linker- en rechterlid van de betrekking (3.3b).

De notatie in matrix-vector vorm levert.

$$\begin{bmatrix} \underline{\theta KM} & \underline{\theta C} & -\underline{\theta KT}_k \\ \underline{\theta C}^T & -\underline{\theta^2 \Delta t KP}_{hyd w} & -\underline{\theta^2 \Delta t KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} + \underline{\theta \Delta t KP}_{tem k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{p}_1 \\ \underline{T}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{\theta-1})\underline{KM} & (\underline{\theta-1})\underline{C} & (1-\underline{\theta})\underline{KT}_k \\ \underline{\theta C}^T & -\underline{\theta(\theta-1)\Delta t KP}_{hyd w} & -\underline{\theta(\theta-1)\Delta t KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} - (1-\underline{\theta})\underline{\Delta t KP}_{tem k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{p}_0 \\ \underline{T}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

De Galerkin tijdsdiscretisatie methode ($\theta = \frac{2}{3}$) is geselecteerd vanwege de gunstige stabiliteits-eigenschappen. Invullen geeft.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\underline{KM} & \frac{2}{3}\underline{C} & -\frac{2}{3}\underline{KT}_k \\ \frac{2}{3}\underline{C}^T & -\frac{4}{9}\underline{\Delta t KP}_{hyd w} & -\frac{4}{9}\underline{\Delta t KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} + \frac{2}{3}\underline{\Delta t KP}_{tem k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{p}_1 \\ \underline{T}_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\underline{KM} & -\frac{1}{3}\underline{C} & \frac{1}{3}\underline{KT}_k \\ \frac{2}{3}\underline{C}^T & \frac{2}{9}\underline{\Delta t KP}_{hyd w} & \frac{2}{9}\underline{\Delta t KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} - \frac{1}{3}\underline{\Delta t KP}_{tem k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{p}_0 \\ \underline{T}_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Met.

$$\underline{KE} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\underline{KM} & \frac{2}{3}\underline{C} & -\frac{2}{3}\underline{KT}_k \\ \frac{2}{3}\underline{C}^T & -\frac{4}{9}\underline{\Delta t KP}_{hyd w} & -\frac{4}{9}\underline{\Delta t KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} + \frac{2}{3}\underline{\Delta t KP}_{tem k} \end{bmatrix} \quad (3.6a)$$

$$\underline{KD} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\underline{KM} & -\frac{1}{3}\underline{C} & \frac{1}{3}\underline{KT}_k \\ \frac{2}{3}\underline{C}^T & \frac{2}{9}\underline{\Delta t KP}_{hyd w} & \frac{2}{9}\underline{\Delta t KP}_{tem w} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{PM} - \frac{1}{3}\underline{\Delta t KP}_{tem k} \end{bmatrix} \quad (3.6b)$$

$$\underline{\delta}_1 = \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{p}_1 \\ \underline{T}_1 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\delta}_0 = \begin{Bmatrix} \underline{u}_0 \\ \underline{p}_0 \\ \underline{T}_0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\mathfrak{S}} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.7a-c)$$

De gekozen 2D eindige elementen voor de idealisatie van het ruimtelijk domein zijn alle vierknoops (lineaire) rechthoekige eindige elementen ($k = 1, 2, 3, 4$). Bij de verplaatsingsberekening zijn er twee vrijheidsgraden per knoop (u_k, v_k), bij de drukberekening is er één vrijheidsgraad per knoop (p_k), bij de temperatuurberekening is er één vrijheidsgraad per knoop (T_k). Het tijdsdomein is gemodelleerd met tweeknoops (lineair) eindige elementen.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \underline{KM}_{[8 \times 8]} & \frac{2}{3} \underline{C}_{[8 \times 4]} & -\frac{2}{3} \underline{KT}_k [8 \times 4] \\ \frac{2}{3} \underline{C}^T_{[4 \times 8]} & -\frac{4}{9} \Delta t \underline{KP}_{hyd w [4 \times 4]} & -\frac{4}{9} \Delta t \underline{KP}_{tem w [4 \times 4]} \\ \underline{0}_{[4 \times 8]} & \underline{0}_{[4 \times 4]} & \underline{PM}_{[4 \times 4]} + \frac{2}{3} \Delta t \underline{KP}_{tem k [4 \times 4]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_{1\{8 \times 1\}} \\ \underline{p}_{1\{4 \times 1\}} \\ \underline{T}_{1\{4 \times 1\}} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \underline{KM}_{[8 \times 8]} & -\frac{1}{3} \underline{C}_{[8 \times 4]} & \frac{1}{3} \underline{KT}_k [8 \times 4] \\ \frac{2}{3} \underline{C}^T_{[4 \times 8]} & \frac{2}{9} \Delta t \underline{KP}_{hyd w [4 \times 4]} & \frac{2}{9} \Delta t \underline{KP}_{tem w [4 \times 4]} \\ \underline{0}_{[4 \times 8]} & \underline{0}_{[4 \times 4]} & \underline{PM}_{[4 \times 4]} - \frac{1}{3} \Delta t \underline{KP}_{tem k [4 \times 4]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_{0\{8 \times 1\}} \\ \underline{p}_{0\{4 \times 1\}} \\ \underline{T}_{0\{4 \times 1\}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{F}_{\{8 \times 1\}} \\ \underline{0}_{\{4 \times 1\}} \\ \underline{0}_{\{4 \times 1\}} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

De betrekking luidt in systeem element matrix notatie.

$$\underline{KE}_{[16 \times 16]} \underline{\delta}_{1\{16 \times 1\}} = \underline{KD}_{[16 \times 16]} \underline{\delta}_{0\{16 \times 1\}} + \underline{S}_{\{16 \times 1\}} \quad (3.9)$$

De component matrices zijn als volgt.

$$\underline{KP}_{hyd w [4 \times 4]} = \iint \underline{T}^T \underline{K}_{hyd w} \underline{T} dx dy \quad (3.10)$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\underline{K}_{hyd w} = \begin{bmatrix} k_{xhyd w} & 0 \\ 0 & k_{yhyd w} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\underline{KP}_{tem w [4 \times 4]} = \iint \underline{T}^T \underline{K}_{tem w} \underline{T} dx dy \quad (3.13)$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\underline{\underline{K}}_{temw} = \begin{bmatrix} k_{xtemw} & 0 \\ 0 & k_{ytemw} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$\underline{\underline{KP}}_{temk[4x4]} = \iint \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}}_{temk} \underline{\underline{T}} dx dy \quad (3.16)$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\underline{\underline{K}}_{temk} = \begin{bmatrix} k_{xtemk} & 0 \\ 0 & k_{ytemk} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\underline{\underline{KM}}_{[8x8]} = \iint \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dx dy \quad (3.19)$$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{E'(1-\nu')}{(1+\nu')(1-2\nu')} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu'}{1-\nu'} & 0 \\ \frac{\nu'}{1-\nu'} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2(1-\nu')} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\underline{\underline{PM}}_{[4x4]} = \iint \rho c \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} dx dy \quad (3.22)$$

$$\underline{\underline{N}} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \quad (3.23)$$

$$\underline{C}_{[8 \times 4]} = \iint \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix} \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} dx dy \quad (3.24)$$

$$\underline{KT}_{k[8 \times 4]} = \iint \underline{B}^T \underline{Dm}(1 + \nu') \alpha_k \underline{N} dx dy \quad (3.25)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\underline{D} = \frac{E'(1-\nu')}{(1+\nu')(1-2\nu')} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu'}{1-\nu'} & 0 \\ \frac{\nu'}{1-\nu'} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu'}{2(1-\nu')} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\underline{m} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\underline{N} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_{1\{8x1\}} &= \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_1 ; \underline{p}_{1\{4x1\}} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}_1 ; \underline{T}_{1\{4x1\}} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}_1 ; \underline{u}_{0\{8x1\}} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}_0 ; \\
 \underline{p}_{0\{4x1\}} &= \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}_0 ; \\
 \underline{T}_{0\{4x1\}} &= \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}_0 ; \underline{F}_{\{8x1\}} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.30a-g}$$

De relatie tussen het globale (x,y) coördinatensysteem en lokale (ξ,η)coördinatensysteem wordt gegeven door de volgende afbeeldingsbetrekkingen.

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{u}_{[4x1]}
 \tag{3.31}$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{v}_{[4x1]}
 \tag{3.32}$$

$$p = N_1 p_1 + N_2 p_2 + N_3 p_3 + N_4 p_4 = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \underline{N} p_{[4 \times 1]} \quad (3.33)$$

$$T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4 = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \underline{N} T_{[4 \times 1]} \quad (3.34)$$

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \underline{N} x_{[4 \times 1]} \quad (3.35)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \underline{N} y_{[4 \times 1]} \quad (3.36)$$

De vormfuncties luiden.

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \end{aligned} \quad (3.37)$$

De lokale afgeleiden hiervan zijn.

$$\frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta); \quad \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta); \quad \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$\frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta); \quad \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)$$

$$\frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta); \quad \frac{\partial N_4(\xi, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi)$$

(3.38a-h)

De lokale afgeleiden worden als volgt getransformeerd.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

(3.39)

De inverse afbeelding luidt dan.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

(3.40)

De volgende betrekkingen die de relaties geven tussen de globale - en lokale afgeleiden van de vormfuncties (N_1, N_2, N_3, N_4) zijn dan geldig.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix} =$$

(3.41)

$$\frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \\ \frac{1}{\det J} &\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \\ \frac{1}{\det J} &\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \\ \frac{1}{\det J} &\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 = \\ &\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 =$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 =$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 =$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.45a-d)$$

De domein integraal transformatie betrekking is als volgt.

$$\iint dx dy = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} \det \underline{\underline{J}} d\xi d\eta \quad (3.46)$$

De functie domein integraal transformatie vergelijking is.

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_{\xi=-1}^{\xi=+1} \int_{\eta=-1}^{\eta=+1} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det \underline{\underline{J}} d\xi d\eta \quad (3.47)$$

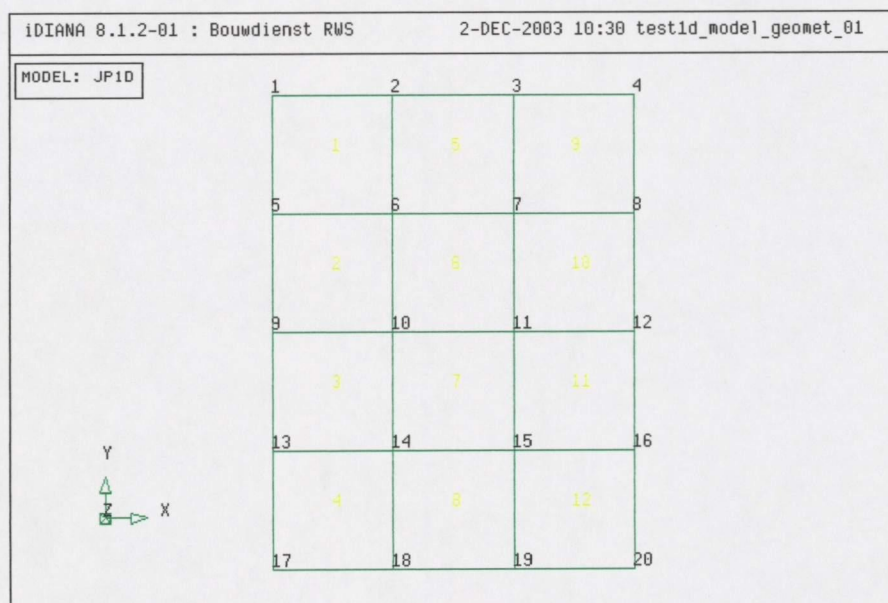
4. Numerieke Resultaten

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk volgen de numerieke resultaten van een u-p-T model test berekening.

4.2 Modelling

Het tweedimensionaal domein in vlakke vervormingstoestand is geïdealiseerd met lineaire rechthoekige mixture (u-p-T) eindige elementen.



Figuur 4.1 Model JP1D test1d geometrie.

4.3 Invoerdata

Randvoorwaarden

Verplaatsing (u,v)	u = 0 m	linker model rand;
	v = 0 m	linker model rand;
	u = 0 m	onder model rand;
	v = 0 m	onder model rand;

Druk (p) $p = 0 \text{ N/m}^2$ boven model rand;
 $p = 0 \text{ N/m}^2$ rechter model rand;

Temperatuur (T) $T = -13 \text{ }^\circ\text{C}$ boven model rand;
 $T = -13 \text{ }^\circ\text{C}$ rechter model rand.

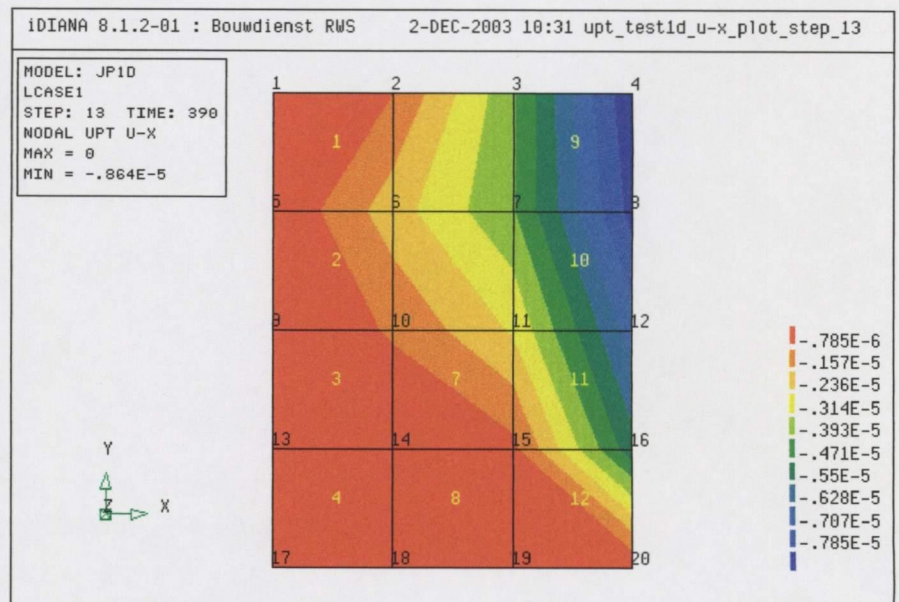
Beginvoorwaarden

Druk (p) $p = 0 \text{ N/m}^2$ model domein;

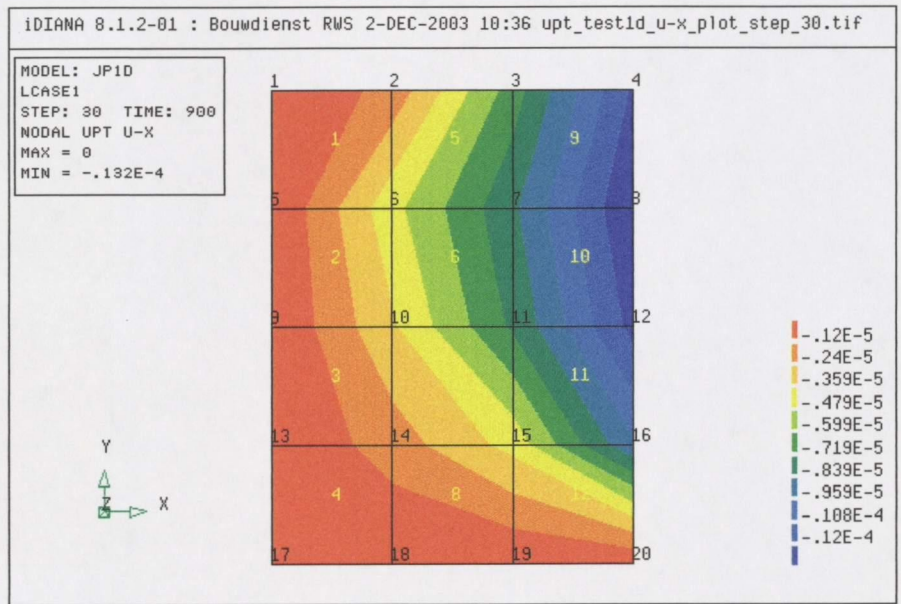
Temperatuur (T) $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ model domein.

4.4 Resultaten

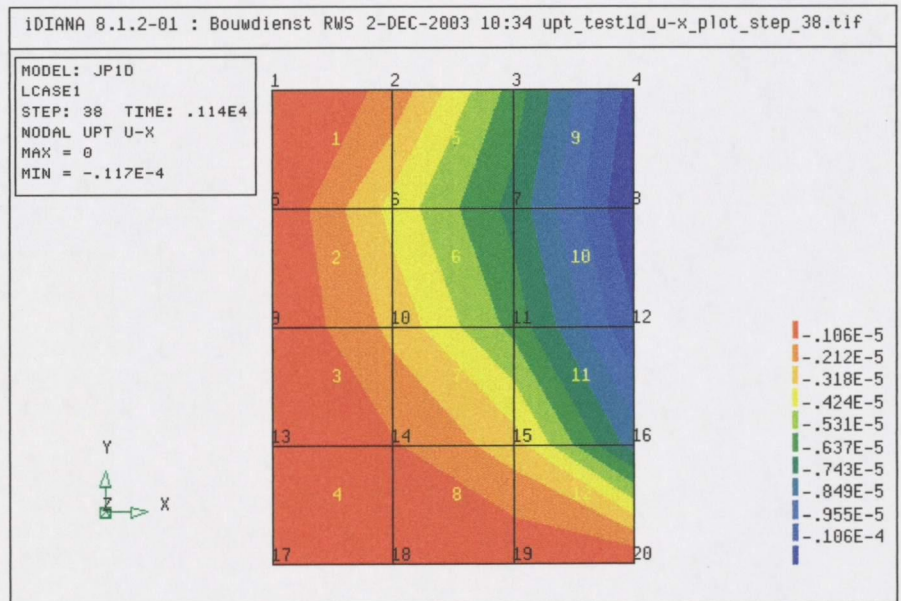
Set 1a. Kleuren plots verplaatsing (U-X)



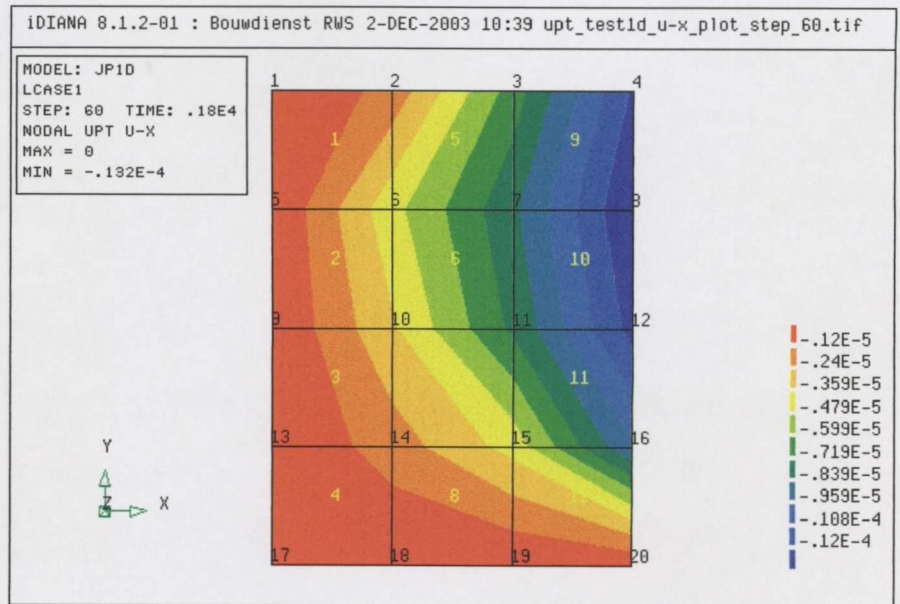
Figuur 4.2 Model JP1D test1d U-X step 13.



Figuur 4.3 Model JP1D test1d U-X step 30.

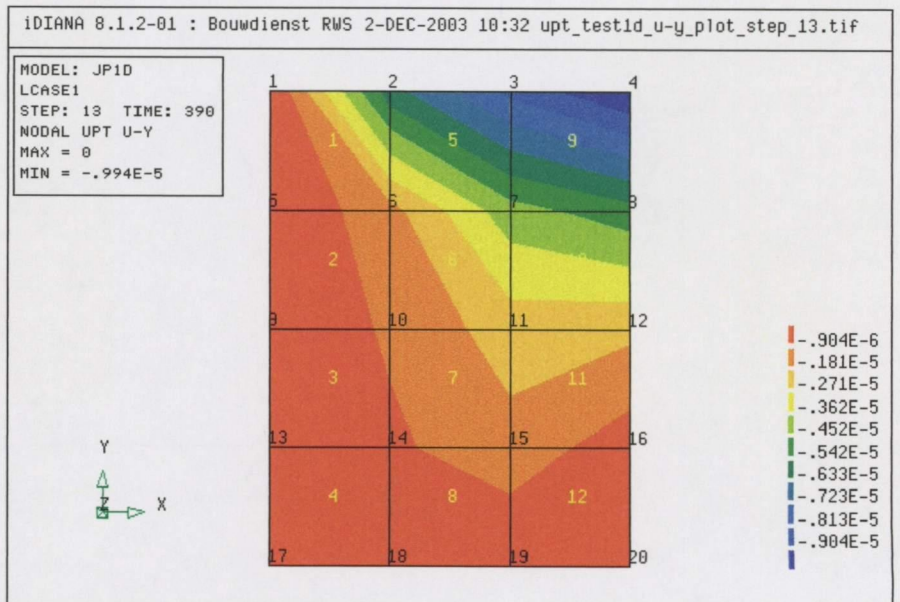


Figuur 4.4 Model JP1D test1d U-X step 38.

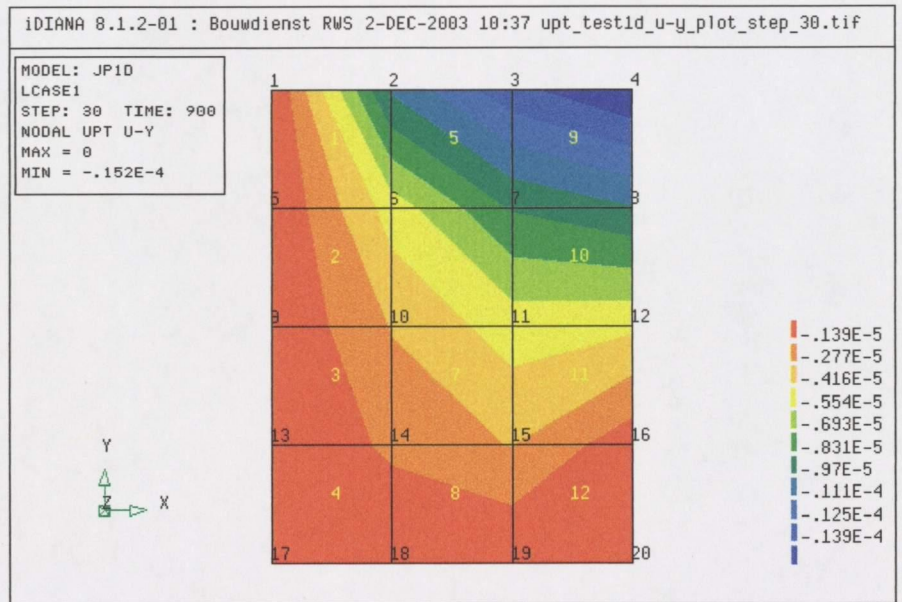


Figuur 4.5 Model JP1D test1d U-X step 60.

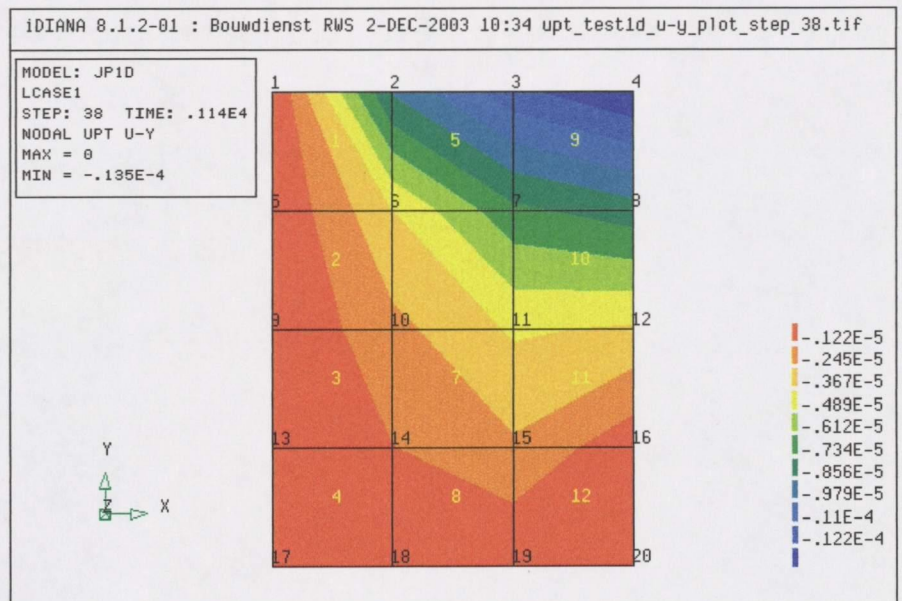
Set 1b. Kleuren plots verplaatsing (U-Y)



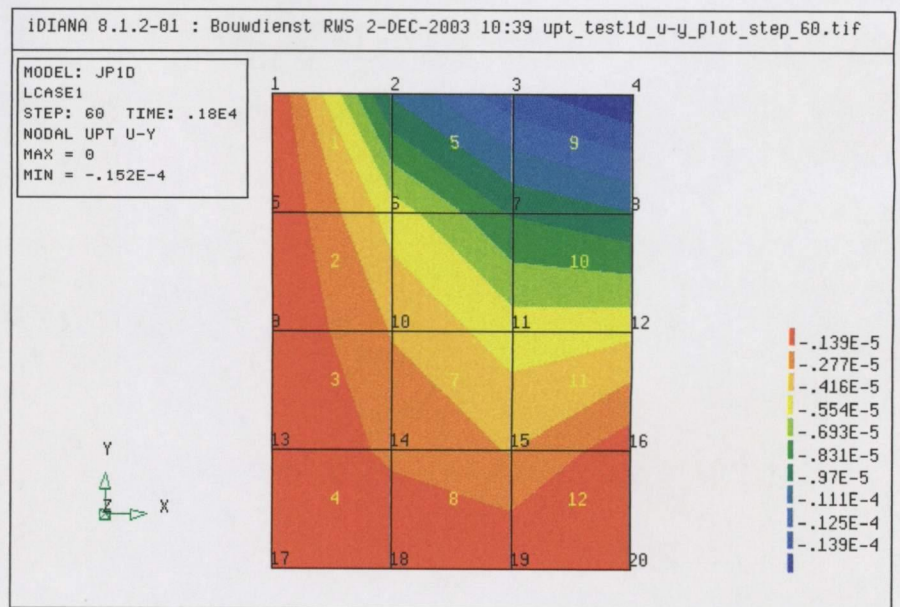
Figuur 4.6 Model JP1D test1d U-Y step 13.



Figuur 4.7 Model JP1D test1d U-Y step 30.

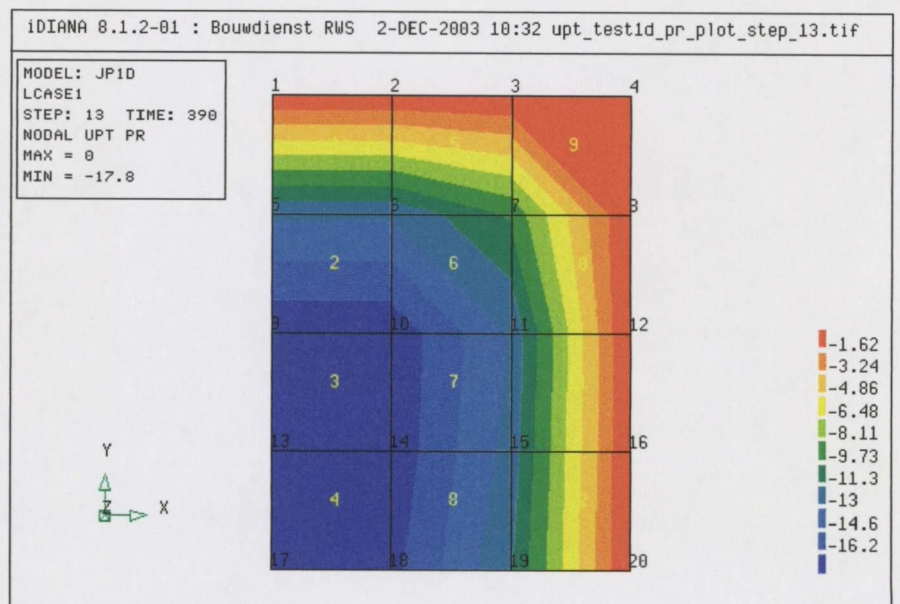


Figuur 4.8 Model JP1D test1d U-Y step 38.

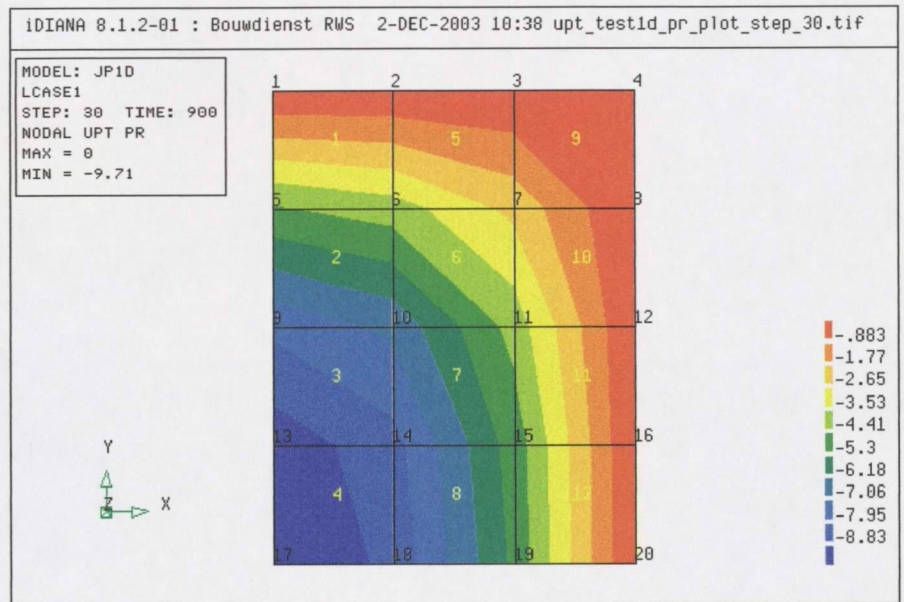


Figuur 4.9 Model JP1D test1d U-Y step 60.

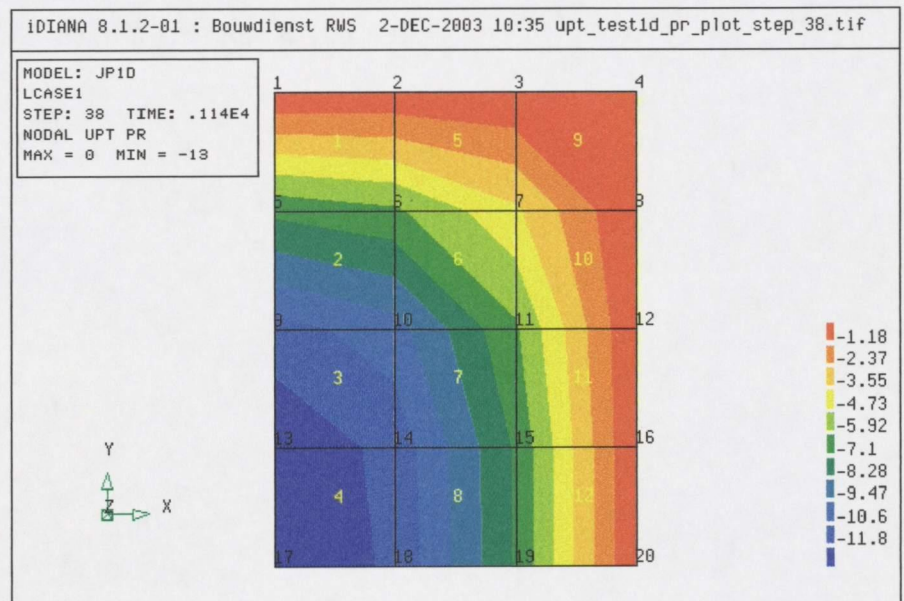
Set 1c. Kleuren plots druk (PR)



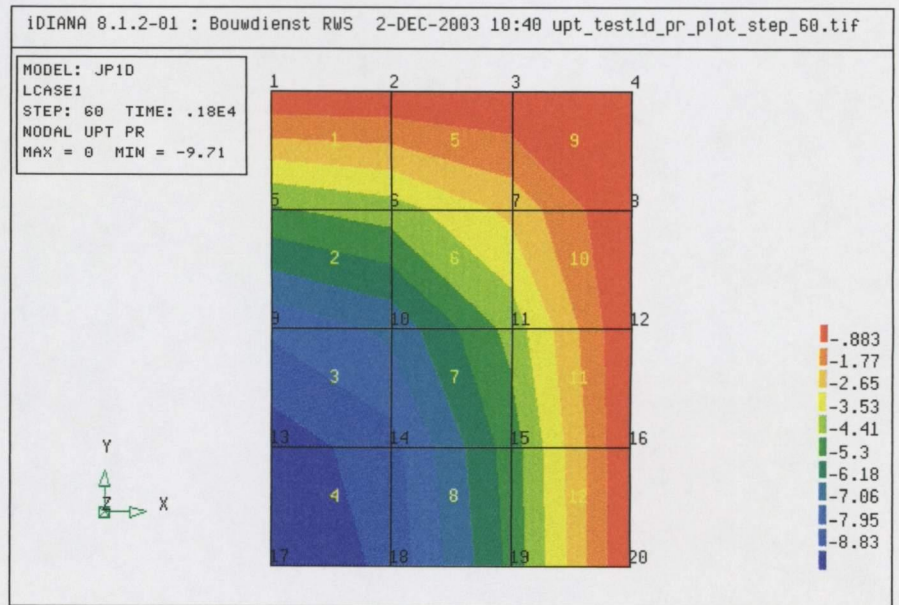
Figuur 4.10 Model JP1D test1d PR step 13.



Figuur 4.11 Model JP1D test1d PR step 30.

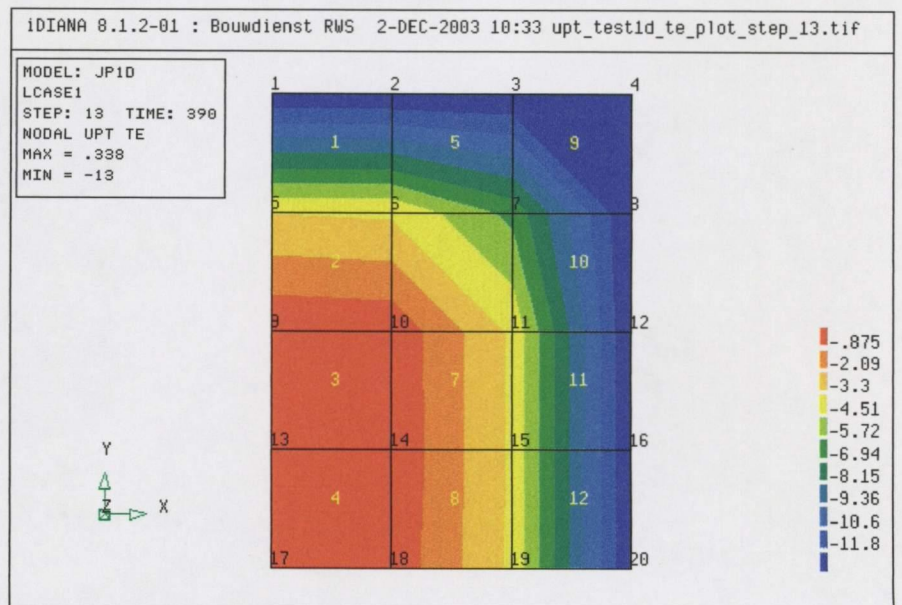


Figuur 4.12 Model JP1D test1d PR step 38.

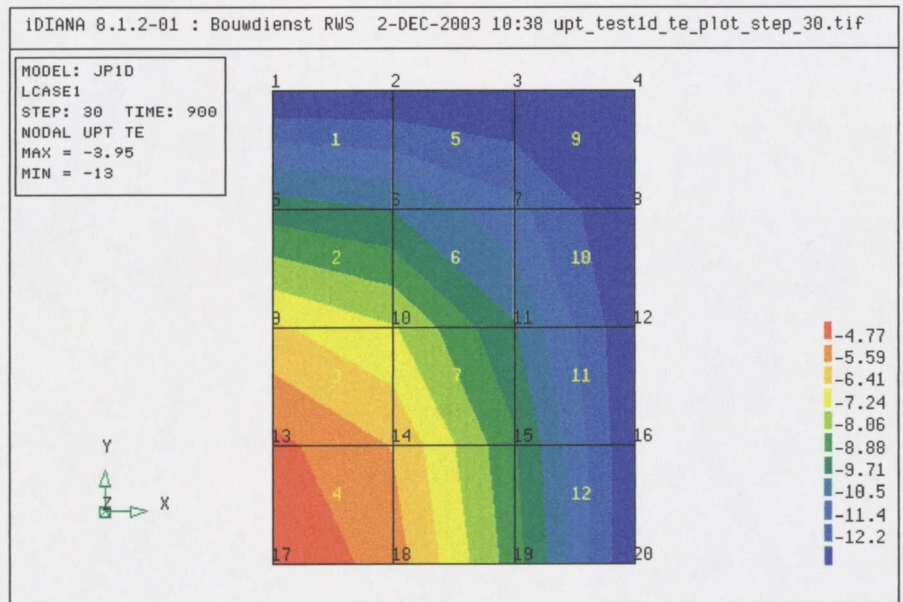


Figuur 4.13 Model JP1D test1d PR step 60.

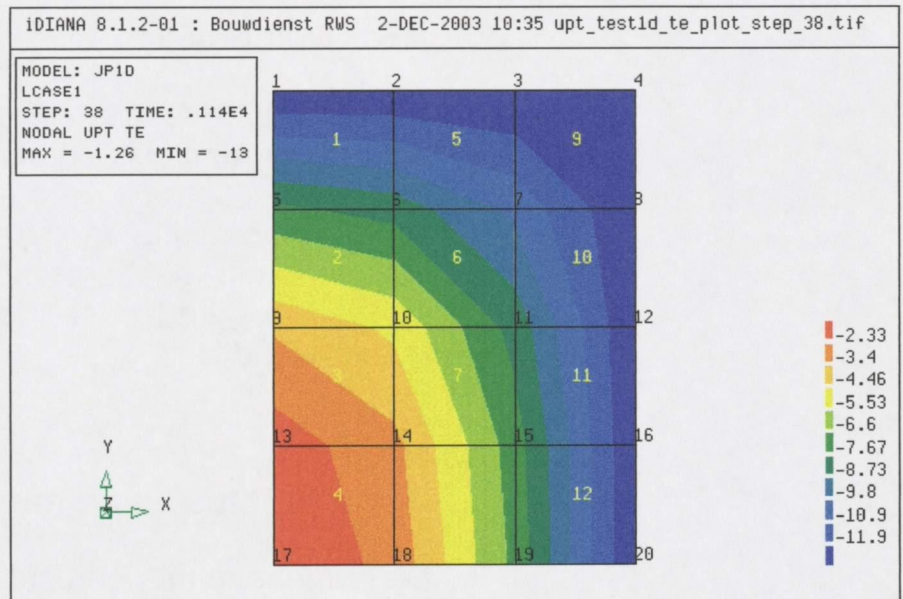
Set 1d. Kleuren plots temperatuur (TE)



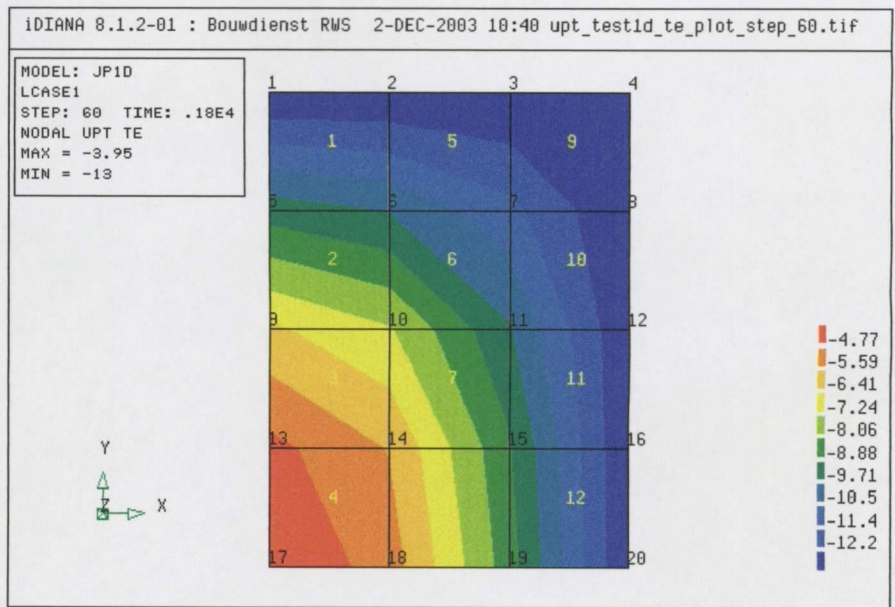
Figuur 4.14 Model JP1D test1d TE step 13.



Figuur 4.15 Model JP1D test1d TE step 30.



Figuur 4.16 Model JP1D test1d TE step 38.



Figuur 4.17 Model JP1D test1d TE step 60.

4.5 Discussie

De numerieke resultaten tonen de gelijkvormigheid tussen het ruimtelijke druk- en temperatuursverloop.

Dit is eenvoudig te verklaren door beschouwing van de hydro-thermo-mechanische materiaal wet, waarin de massa flux geïnduceerd door de temperatuurgradiënt maatgevend is.

4.6 Conclusies en aanbevelingen

De numerieke model resultaten geven een duidelijk vloeiend beeld van het verplaatsings-, druk- en temperatuurverloop. Dit impliceert dat de implementatie in essentie correct is uitgevoerd.

Het numerieke algoritme functioneert en de iDIANA filter is operationeel.

5. Conclusies en aanbevelingen

Een eenvoudig u-p-T model is zowel mathematisch als numeriek gedetailleerd beschreven in deze rapportage.

Dit model kan als voorzet dienen voor geavanceerdere u-p-T modellen, zie [1a] en [1b].

De numerieke resultaten geven aan dat de implementatie in beginsel correct is gedaan.

Het numeriek algoritme functioneert en de interface naar iDIANA werkt probleemloos.

De validatie van het model kan geschieden met de data ontleend aan grondbevrozingsexperimenten en met behulp van relevante analytische oplossingen.

6. Literatuurlijst

- [1a] DERKS, J. P. B. N.: *A Proposal for Spalling of Concrete*. DARTS-Durable and Reliable Tunnel Structures, European commission, Growths 2000, Contract G1RD-CT-2000-00467, Project GrD1-25633, 2003.
- [1b] DERKS, J. P. B. N.: *Grondbevriazing - verificatie/afleiding van het 3D u-p-T grondbevriezingsmodel*. Voorlopig rapport, Bouwdienst afdeling Tunnelbouw, Utrecht, 6 augustus, 2003.
- [1c] DERKS, J. P. B. N.: *Cold Fluid Driven Crack Propagation - Thermo-mechanical Behaviour of Rock Caverns*. Dissertation TU Delft, Delft, 1997.
- [2] SMITH, I. M.; GRIFFITHS, D. V.: *Programming the Finite Element Method*. Third Edition, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, 1998.

