ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ

Περιοδική έκδοση μαθηματικών σπουδών
Τεύχη 4-5
1993

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Τ.Ε.Ι. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ

ΤΑΧΥΔΡ. Δ/ΝΣΗ:	ΣΤΑΥΡΩΜΕΝΟΣ, Τ.Κ. 71500
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ:	ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ:	Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΤΗΛΕΦΩΝΑ:	(081) 254 475
	(081) 254 103 - ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ 215

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:	Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ:	ΜΗΤΣΟΤΑΚΗ 4
	ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ Τ.Κ. 71202
ΤΗΛΕΦΩΝΑ:	(081) 282 040, (081) 254 475
ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ D.T.P.:	SILKSPOT
ΤΗΛΕΦΩΝΑ:	(081) 211 720
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ:	ΒΑΪΑ ΣΤΥΛΟΠΟΥΛΟΥ
ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ - ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ - ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΚΕΙΜΕΝΩΝ:	ΣΤΕΛΛΑ Μ. ΚΟΥΤΡΑΚΗ

Αν έχω δει λίγο μακρύτερα από άλλους, είναι γιατί στάθηκα πάνω σε ώμους γιγάντων.

Isaac Newton

Πρέπει να πήρε πολλούς αιώνες να ανακαλύψουμε ότι ένα ζευγάρι φασιανών και δύο μέρες ήταν περιπτώσεις του αριθμού δύο.

Bertrand Russel

Τα Μαθηματικά έχουν ένα δικό τους φως και μια δική τους σοφία, πάνω και πέρα από κάθε πιθανή εφαρμογή τους στην επιστήμη· και θα είναι πλούσια η ανταμοιβή κάθε ευφυούς ανθρώπου που θα συλλάβει κάτι από το εσωτερικό τους νόημα.

E.T. Bell

Από τα απλούστερα στοιχεία καθαρής αίσθησης μέχρι τις υψηλότερες προσπάθειες σχεδιασμού, κάθε σημείο στη διαδικασία της τέχνης συνοδεύεται αναπόφευκτα από ευχαρίστηση: δεν μπορεί να προχωρήσει χωρίς αυτή... Είναι επίσης αληθές ότι η αναγνώριση του αναπόφευκτου στη σκέψη συνοδεύεται κανονικά με ευχάριστα αισθήματα και ότι η επιθυμία αυτής της διανοητικής ευχαρίστησης είναι η κινητήρια δύναμη, η οποία ωθεί στη διαμόρφωση μιας επιστημονικής θεωρίας. Στην επιστήμη το αναπόφευκτο των σχέσεων παραμένει εξίσου ορισμένο και παρουσιάσιμο, ανεξάρτητα από το αίσθημα που το συνοδεύει, ενώ στην τέχνη μια αισθητική αρμονία απλά δεν υπάρχει χωρίς μια αισθηματική κατάσταση. Η αρμονία στην τέχνη δεν είναι αληθής, αν δεν γίνεται αισθητή με συγκίνηση — ίσως αυτό θα έπρεπε να το θεωρήσουμε περίεργα παρόμοιο με εκείνες τις περιπτώσεις των μαθηματικών ιδιοφυϊών, που έχουν άμεση διαίσθηση μαθηματικών σχέσεων, οι οποίες είναι πέρα από τις αποδεικτικές τους δυνατότητες.

Roger Fry

...έγινε πλέον φανερό σ' εμένα τι ακριβώς έπρεπε να αντικαταστήσει τις κβαντικές συνθήκες των Bohr - Sommerfeld σε μια ατομική φυσική που θα εργαζόταν μόνο με παρατηρήσιμα μεγέθη. Μου ήταν επίσης φανερό ότι με αυτή την πρόσθετη παραδοχή είχα εισαγάγει έναν κρίσιμο περιορισμό στη θεωρία. Τότε παρατήρησα ότι δεν υπήρχε καμία εγγύηση ότι... η αρχή της διατήρησης της ενέργειας θα ίσχυε... Έτσι συγκέντρωσα τις προσπάθειές μου στο να δείξω ότι ο νόμος της διατήρησης ίσχυε. Κι ένα βράδυ έφτασα στο σημείο όπου ήμουν έτοιμος να προσδιορίσω έναν - έναν τους όρους στον πίνακα ενεργειών (μήτρα ενεργειών), μ' έναν τρόπο που θα θεωρείτο σήμερα ως μια εξαιρετικά αδέξια σειρά υπολογισμών. Όταν οι πρώτοι όροι φάνηκαν να συμφωνούν με την αρχή της ενέργειας, ταράχτηκα μάλλον και άρχισα να κάνω αμέτρητα αριθμητικά σφάλματα. Το αποτέλεσμα ήταν να φτάσει σχεδόν τρεις η ώρα το πρωί πριν να έχω τα τελικά συμπεράσματα των υπολογισμών μπροστά μου. Η αρχή της ενέργειας ίσχυε για όλους τους όρους και δεν μπορούσα πια να αμφισβητώ τη μαθηματική συνέπεια και συμφωνία του είδους της κβαντικής μηχανικής στην οποία οι υπολογισμοί με οδηγούσαν. Στην αρχή ξαφνιάστηκα πάρα πολύ. Είχα την αίσθηση ότι, μέσα από την επιφάνεια των ατομικών φαινομένων, έβλεπα ένα παράξενα όμορφο εσωτερικό και αισθάνθηκα σχεδόν ζαλισμένος με τη σκέψη ότι έπρεπε τώρα να ερευνήσω τον πλούτο αυτής της μαθηματικής δομής, την οποία η φύση τόσο γενναιόδωρα είχε απλώσει μπροστά μου. Ήμουν πάρα πολύ αναστατωμένος για να κοιμηθώ, κι έτσι, καθώς μια νέα μέρα ανέτειλε, ξεκίνησα για το νότιο άκρο του νησιού, όπου ήθελα από καιρό να σκαρφαλώσω σ' ένα βράχο, που προεξείχε μέσα στη θάλασσα. Έτσι έκανα τώρα χωρίς μεγάλη προσπάθεια και περίμενα τον Ήλιο να ανατείλλει.

Heisenberg

ΑΓΑΘΟΝ ΤΟ ΕΞΟΜΟΛΟΓΕΙΣΘΑΙ

Με πραγματική χαρά και εξαιρετική ικανοποίηση εμπιστεύομαι το τεύχος 4-5 του περιοδικού «Θεαίτητος» στο μαθηματικό αναγνωστικό κοινό και την σπουδάζουσα νεότητα της χώρας μας.

Είμαι βέβαιος ότι και το παρόν διπλό τεύχος 4-5 στο οποίο αφιέρωσα πολλή και επίπονη προσπάθεια, παρακινημένος από προσωπικό μεράκι, θα τύχει ανάλογης υποδοχής και αγάπης.

Θέλω ακόμη να πιστεύω ότι και το τεύχος αυτό, μπορεί να αποτελέσει ένα επαρκές και αποτελεσματικό μέσο για κείνους που έχουν αυξημένα μαθηματικά ενδιαφέροντα και επιθυμούν να θεμελιώσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις και να διευρύνουν τον μαθηματικό τους ορίζοντα.

Πρέπει να τονιστεί ιδιαιτέρως ότι και αυτό το τεύχος, δεν περιέχει ύλη «προς εκμάθησιν». Προτείνει απλώς ένα δρόμο κατανόησης των στοιχειωδών μαθηματικών. Η χρήση δηλαδή του τεύχους αυτού έχει νόημα ως έναυσμα για σκέψη, ως αφετηρία σπουδής και όχι βέβαια ως ολοκλήρωση.

Το Συμβούλιο του Τ.Ε.Ι., που υιοθέτησε την έκδοση του τεύχους 4-5 του περιοδικού «Θεαίτητος» και το συμπεριέλαβε στη σειρά των εκδόσεών του, ευχαριστώ θερμότατα.

Χρωστώ επίσης να ευχαριστήσω δημόσια και από τούτη τη θέση, τους διακεκριμένους συνεργάτες και εκλεκτούς φίλους μου και όλους εκείνους που συνέβαλαν πρόθυμα και ουσιαστικά στην ολοκλήρωση τούτης της έκδοσης.

Ακόμη, ευχαριστώ εγκάρδια εκείνους που συνεισέφεραν στην έκδοση του τεύχους αυτού και που δεινοπάθησαν για να ικανοποιήσουν τις εξαντλητικές απαιτήσεις μου. Χάρις στη βοήθειά τους, αισθάνομαι ασφαλέστερη την αντοχή του τεύχους αυτού.

Είναι αυτονόητο ότι κάθε τυπογραφικό ή επιστημονικό λάθος ή έστω απλή παράλειψη βαρύνει αποκλειστικά εμένα. Γι' αυτό κάθε υπόδειξη για διόρθωση λαθών ή για την καλύτερη οργάνωση της ύλης του περιοδικού θα είναι ανυπόκριτα ευπρόσδεκτη. Ακόμη, με ευγνωμοσύνη θα δεχθώ τις παρατηρήσεις και τις συνεργασίες των αγαπητών μου συναδέλφων.

Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ

Ηράκλειο Κρήτης
Χειμώνας 1992-93

Τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά είναι αιώνια, με μια έννοια που δεν ισχύει ούτε καν για την Αρχαία Ελληνική Λογοτεχνία. Τον Αρχιμήδη θα τον θυμούνται όταν ο Αισχύλος θα 'χει ξεχαστεί, γιατί οι γλώσσες πεθαίνουν, ενώ οι μαθηματικές αλήθειες είναι παντοτινές. Η *αθανασία* ίσως να είναι μια λέξη ανόητη, αλλά αν *σημαίνει* κάτι, αυτό το διεκδικεί ο μαθηματικός πολύ περισσότερο, παρά ο οιοσδήποτε άλλος άνθρωπος.

G.H. HARDY

Η απολογία ενός μαθηματικού

H.G. HARDY

Χρειάζεται να γεράσει κανείς για να καταλάβει ότι η ζωή είναι άδικη. Πρέπει απλώς να κάνεις ό,τι καλύτερο μπορείς στην κατάσταση που βρίσκεσαι.

STEPHEN HAWKING

Το να γράφει ένας κατ' επάγγελμα μαθηματικός για τα Μαθηματικά αποτελεί μια μελαγχολική εμπειρία. Το λειτούργημα του μαθηματικού είναι να πράττει κάτι, να αποδεικνύει καινούργια θεωρήματα, να προσθέτει στα Μαθηματικά και όχι να μιλάει γι' αυτό που ο ίδιος ή άλλοι μαθηματικοί έχουν κάνει.

Οι πολιτικοί περιφρονούν τους πολιτικούς αρθογράφους, οι ζωγράφοι περιφρονούν τους τεχνοκριτικούς, και οι φυσιολόγοι, οι φυσικοί και οι μαθηματικοί έχουν συνήθως παρόμοια συναισθήματα· δεν υπάρχει καταφρόνια μεγαλύτερη ή γενικά πιο δικαιολογημένη, από εκείνην των ανθρώπων που απευθύνονται σε ανθρώπους, των οποίων το έργο είναι να εξηγούν. Η περιγραφή, η κριτική και η αξιολόγηση είναι έργα για μυαλά δεύτερης κατηγορίας.

Για να υποστηρίξω αυτή την άποψη μπορώ εδώ να θυμηθώ μια από τις λίγες σοβαρές συζητήσεις που κάποτε είχα με τον Housman. Ο Housman, στη διάλεξή του για τον Leslie Stephen με θέμα «Το όνομα και η φύση της ποίησης», είχε αρνηθεί με μεγάλη έμφαση ότι ο ίδιος ήταν ένας *κριτικός*· αλλά το είχε αρνηθεί αυτό με έναν τρόπο ιδιαίτερα κατά τη γνώμη μου διεστραμμένο και είχε εκφράσει παράλληλα τον θαυμασμό του για την λογοτεχνική κριτική που εμένα και με τρόμαζε και με σκανδάλιζε.

Άρχισε με ένα απόσπασμα από την εναρκτήρια διάλεξή του, που είχε κάνει πριν από εικοσιδύο χρόνια:

«Αν το χάρισμα της λογοτεχνικής κριτικής είναι το άριστο δώρο που ο Θεός έχει στο θησαυροφυλάκιό του, αυτό δεν μπορώ να το πω· ωστόσο, ο Θεός μάλλον έτσι σκέφτεται ότι είναι, γιατί ασφαλώς αυτό είναι το δώρο που προσφέρει με τη μεγαλύτερη τσιγκουνιά. Οι ρήτορες και οι ποιητές..., αν και σπάνιοι σε σύγκριση με τις βατομουριές, είναι πιο συνηθισμένοι από τις εμφανίσεις του κομήτη του Haley· οι κριτικοί της λογοτεχνίας είναι ακόμη πιο σπάνιοι...»

Και είχε συνεχίσει:

«Στη διάρκεια αυτών των εικοσιδύο χρόνων έχω βελτιωθεί από ορισμένες απόψεις και έχω χειροτερέψει από άλλες, αλλά δεν έχω βελτιωθεί τόσο πολύ, ώστε να καταστώ κριτικός της λογοτεχνίας, ούτε έχω χειροτερέψει τόσο πολύ ώστε να φαντάζομαι απλώς πως έχω γίνει τέτοιος».

Μου φάνηκε αξιοθρήνητο το γεγονός ότι ένας μεγάλος λόγιος και λεπταίσθητος ποιητής θάγραφε πράγματα σαν κι αυτά, και, όταν τον συνάντησα στο Hall λίγες βδομάδες αργότερα, πήρα τη μεγάλη απόφαση και του το είπα. Πραγματικά εννοεί ότι αυτά που ο ίδιος είπε θα πρέπει να ληφθούν στα σοβαρά; Είναι δυνατόν η ζωή των καλυτέρων από τους κριτικούς πραγματικά να του φαίνεται πως μπορεί να συγκριθεί με εκείνη ενός λογίου ή ενός ποιητή; Συζητήσαμε αυτά τα ερωτήματα σε όλη τη διάρκεια του δείπνου και νομίζω πως τελικά συμφώνησε μαζί μου. Ωστόσο, δεν μου φαίνεται πως είναι σωστό να διεκδικήσω ένα διαλεκτικό θρίαμβο πάνω σ' έναν άνθρωπο που δεν μπορεί πια να με αντικρούσει· όμως ένα «ίσως όχι εντελώς» ήταν, στο τέλος, η απάντησή του στο πρώτο ερώτημα, και ένα «πιθανώς όχι» η απάντησή του στο δεύτερο.

Μπορεί κανείς να έχει κάποια αμφιβολία για τα αισθήματα του Housman, και οπωσδήποτε δεν επιθυμώ να ισχυριστώ εγώ κάτι γι' αυτό· αλλά δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία για τα αισθήματα των ανθρώπων της επιστήμης, και εγώ συμμερίζομαι αυτά τα αισθήματα απόλυτα. Αν λοιπόν εγώ ο ίδιος γράφω, όχι για τα Μαθηματικά αλλά «γύρω» από τα Μαθηματικά, αυτό αποτελεί μια ομολογία αδυναμίας, για την οποία ενδέχεται να προκαλέσω δίκαια την περιφρόνηση ή την λύπη των νεοτέρων και αυστηροτέρων μαθηματικών. Γράφω για τα Μαθηματικά επειδή, όπως ο οποιοσδήποτε άλλος μαθηματικός που έχει υπερβεί την ηλικία των εξήντα ετών, δεν έχω πια την φρεσκάδα του πνεύματος, την ενεργητικότητα, ή την υπομονή να συνεχίσω αποτελεσματικά το οικείο και κατάλληλο σε μένα έργο μου.

G. HARDY

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ

Περιοδική έκδοση μαθηματικών σπουδών

ΤΕΥΧΗ 4-5

1993

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΥΛΟΣ ΦΙΛΙΠΠΟΥ

1. Μερικές βασικές προτάσεις για τη σύγκλιση ακολουθιών.

Στη μικρή αυτή μονογραφία θα γίνει, με τρόπο απλό και ομοιόμορφο, η απόδειξη ορισμένων βασικών προτάσεων που αναφέρονται κυρίως (όχι αποκλειστικά) στη σύγκλιση υπακολουθιών και υπερακολουθιών.

Η απόδειξη των προτάσεων αυτών (εκτός του θεωρήματος της επιλογής) θα βασισθεί στο ακόλουθο:

Θεμελιώδες θεώρημα 1.

Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$, τότε έξω από κάθε περιοχή του ℓ θα υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους όροι της· και αντιστρόφως.

Απόδειξη

Το ευθύ είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του ορίου ακολουθίας.

Το αντίστροφο. **α)** $\ell \in R$. Έστω ε τυχαίος θετικός αριθμός· κατά την υπόθεση έξω από το διάστημα $(\ell-\varepsilon,\ \ell+\varepsilon)$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν)· έστω α_κ ο τελευταίος από αυτούς. Τότε θα είναι:

$$\ell-\varepsilon<\alpha_\nu<\ell+\varepsilon \quad \forall \nu>\kappa\cdot \quad \text{άρα } \lim\alpha_\nu=\ell.$$

Σ.τ. Εκδότη: Με πολλή χαρά και συγκίνηση δημοσιεύουμε την εργασία, του διακεκριμένου μαθηματικού ΠΑΥΛΟΥ ΦΙΛΙΠΠΟΥ , που είχε την καλοσύνη να μας στείλει. Ο σεμνός και ακούραστος εργάτης της μαθηματικής επιστήμης, ΠΑΥΛΟΣ ΦΙΛΙΠΠΟΥ , συνεχίζει πάντοτε ήσυχα και δημιουργικά τη ζωή του.

Δίδαξε πολλά σε πολλούς και συνεχίζει να μας παρέχει «επιστήμην» και «τρόπους επιστήμης». Ξύπνησε το ενδιαφέρον πολλών, άνοιξε σε χιλιάδες νέους το δρόμο στην επιστήμη και τους έμαθε να σκέπτονται ακριβά και όχι εύκολα. Και μέχρι σήμερα, σε πιο προχωρημένη ηλικία από άλλους, που άκριτα κατακρίνουν και ομιλούν σχεδόν επί παντός επιστητού, διδάσκει με κιμωλία στο χέρι τα Ελληνόπουλα ακριβώς πώς να σκέπτονται.

Γι' αρκετούς από μας ο ΠΑΥΛΟΣ ΦΙΛΙΠΠΟΥ ήταν και παραμένει σταθερός δάσκαλος και φίλος των δύσκολων ημερών. Και από τούτη εδώ τη θέση τον ευχαριστούμε θερμότατα.

β) $\ell=+\infty$. Έστω Μ τυχαίος αριθμός· κατά την υπόθεση έξω από το διάστημα $(M,+\infty)$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν)· έστω α_κ ο τελευταίος από αυτούς. Τότε θα είναι:

$$\alpha_\nu > M \quad \forall \nu>\kappa \cdot \quad \text{άρα } \lim\alpha_\nu = +\infty = \ell.$$

γ) $\ell=-\infty$. Έστω Μ τυχαίος θετικός αριθμός· κατά την υπόθεση έξω από το διάστημα $(-\infty,M)$ θα υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν)· έστω α_κ ο τελευταίος από αυτούς. Τότε θα είναι:

$$\alpha_\nu < M \quad \forall \nu>\kappa \cdot \quad \text{άρα } \lim\alpha_\nu = -\infty = \ell.$$

Θεώρημα 2

Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$, τότε κάθε υπακολουθία της (β_ν) θα έχει όριο και μάλιστα το ℓ.

Απόδειξη

α) $\ell \in R$. $\forall \varepsilon>0$ έξω από το διάστημα $(\ell-\varepsilon,\ \ell+\varepsilon)$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) και επομένως και της (β_ν)· άρα $\lim\beta_\nu=\ell$.

β) $\ell=+\infty$. $\forall M \in R_+^*$ έξω από το διάστημα $(M,+\infty)$ θα υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) και επομένως και της (β_ν)· άρα $\lim\beta_\nu=+\infty=\ell$.

γ) $\ell=-\infty$. $\forall M \in R_+^*$ έξω από το διάστημα $(-\infty,M)$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) και επομένως και της (β_ν)· άρα:
$\lim\beta_\nu=-\infty=\ell$.

Πόρισμα

Δίνεται μια ακολουθία (α_ν) και μια υπακολουθία της (β_ν). Τότε α) αν η (β_ν) δεν έχει όριο, ούτε και η (α_ν) θα έχει, β) αν η (β_ν) έχει όριο $\ell \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$, τότε αν η (α_ν) έχει όριο, όριό της θα είναι το ℓ. Ειδικά, αν η (α_ν) είναι μονότονη και η (β_ν) έχει όριο $\ell \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$, η (α_ν) θα έχει όριο το ℓ.

Θεώρημα 3.

Αν μια ακολουθία (α_ν) μπορεί να χωρισθεί σε δύο υπακολουθίες (β_ν) και (γ_ν) που έχουν κοινό όριο $\ell \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$, τότε η (α_ν) θα έχει όριο και μάλιστα το ℓ.

Απόδειξη

α) $\ell \in R$. $\forall \varepsilon > 0$ θα υπάρχουν έξω από το διάστημα (ℓ-ε, ℓ+ε) πεπερασμένου πλήθους όροι των (β_ν) και (γ_ν) και επομένως και της (α_ν)· άρα $\lim\alpha_\nu = \ell$.

β) $\ell = +\infty$. $\forall M \in R_+^*$ θα υπάρχουν έξω από το διάστημα $(M, +\infty)$ πεπερασμένου πλήθους όροι των (β_ν) και (γ_ν) και επομένως και της (α_ν)· άρα $\lim\alpha_\nu = +\infty = \ell$.

γ) $\ell = -\infty$. $\forall M \in R_+^*$ θα υπάρχουν έξω από το διάστημα $(-\infty, -M)$ πεπερασμένου πλήθους όροι των (β_ν) και (γ_ν) και επομένως και της (α_ν)· άρα $\lim\alpha_\nu = -\infty = \ell$.

Παρατήρηση

Η πρόταση ισχύει και αν η (α_ν) χωρίζεται σε περισσότερες (πεπερασμένου πλήθους) ακολουθίες με κοινό όριο $\ell \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ και η απόδειξη γίνεται με όμοιο τρόπο.

Πόρισμα

Αν μια ακολουθία (α_ν) περιλαμβάνει δύο (ή περισσότερες) άλλες που δεν έχουν όλες το ίδιο όριο, η (α_ν) δεν θα έχει όριο.

Ορισμός. Ο συμβολισμός $T(\alpha_\nu)$. Δίνεται μια ακολουθία (α_ν)· θα παριστάνουμε με την $T(\alpha_\nu)$ κάθε ακολουθία που προκύπτει από την (α_ν) είτε με αναδιάταξη των όρων της, είτε με επανάληψη όρων της (πεπερασμένες φορές τον καθένα), είτε και με παράλειψη όρων της· π.χ. είναι ακολουθία $T(\alpha_\nu)$ η ακολουθία $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7, \alpha_5, \alpha_5, \alpha_8, \alpha_5, \ldots$.

Θεώρημα 4

Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε κάθε ακολουθία $T(\alpha_\nu)$ θα έχει όριο και μάλιστα το ℓ.

Απόδειξη

α) $\ell \in R$. $\forall \varepsilon > 0$ θα υπάρχουν έξω από το διάστημα (ℓ-ε, ℓ+ε) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) και επομένως και της $T(\alpha_\nu)$· άρα $\lim T(\alpha_\nu) = \ell$.

β) $\ell = +\infty$. $\forall M \in R_+^*$ θα υπάρχουν έξω από το διάστημα $(M, +\infty)$ πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) και επομένως και της $T(\alpha_\nu)$· άρα $\lim T(\alpha_\nu) = +\infty = \ell$.

γ) $\ell = -\infty$. $\forall M \in R_+^*$ θα υπάρχουν έξω από το διάστημα $(-\infty, -M)$ πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) κι επομένως και της $T(\alpha_\nu)$· άρα: $\lim T(\alpha_\nu) = -\infty = \ell$.

Θεώρημα 5. (Βασική ακολουθία).

Μια ακολουθία (α_ν) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ℓ τότε και μόνο τότε, αν

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_o \in \mathbb{N}: \ |\alpha_\kappa - \alpha_\lambda| < \varepsilon$$
$$\forall \kappa > \nu_o, \ \forall \lambda > \nu_o \ \ (\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*)$$

Απόδειξη

Ευθύ. Έστω $\lim \alpha_\nu = \ell$· τότε $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_o \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_\kappa - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall \kappa > \nu_o \ \ \text{και} \ \ |\alpha_\lambda - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall \lambda > \nu_o.$$

Έτσι έχουμε:

$$|\alpha_\kappa - \alpha_\lambda| = |(\alpha_\kappa - \ell) - (\alpha_\lambda - \ell)| \le |\alpha_\kappa - \ell| + |\alpha_\lambda - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall \nu > \nu_o.$$

Αντίστροφο: Θα αποδείξουμε πρώτα ότι η (α_ν) είναι φραγμένη. Έστω $\varepsilon_o > 0$· υπάρχει $\nu_o \in \mathbb{N}$: $\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει:

$$|\alpha_\kappa - \alpha_\lambda| < \varepsilon_o \quad \forall \kappa, \lambda > \nu_o \quad \Rightarrow \quad |\alpha_\nu - \alpha_{\nu_o+1}| < \varepsilon_o \quad \forall \nu > \nu_o \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\varepsilon_o < \alpha_\nu - \alpha_{\nu_o+1} < \varepsilon_o \ \ \text{και τέλος}$$
$$\alpha_{\nu_o+1} - \varepsilon_o < \alpha_\nu < \alpha_{\nu_o+1} + \varepsilon \quad \forall \nu > \nu_o.$$

Ώστε η (α_ν) είναι τελικά φραγμένη, άρα και φραγμένη. Έστω Ε το σύνολο των πραγματικών αριθμών που είναι μικρότεροι από απείρους όρους της (α_ν). Επειδή η (α_ν) είναι φραγμένη άνω και το Ε θα είναι φραγμένο άνω· έστω ℓ το άνω πέρας του Ε. Θα αποδείξουμε ότι $\lim \alpha_\nu = \ell$· αρκεί προς τούτο να αποδείξουμε ότι έξω από κάθε περιοχή του ℓ βρίσκονται πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν).

Έστω ε τυχαίος θετικός αριθμός· σύμφωνα με τον ορισμό του συνόλου Ε θα υπάρχουν άπειροι όροι της (α_ν) μεγαλύτεροι του $\ell - \varepsilon$*, ενώ θα υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους όροι (ή και κανένας) μεγαλύτεροι ή ίσοι του $\ell + \varepsilon$.

*** Διότι, σύμφωνα με τον ορισμό του άνω πέρατος, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του Ε μεγαλύτερο του $\ell - \varepsilon$.**

Ώστε σε κάθε περιοχή του ℓ θα υπάρχουν άπειροι όροι της (α_ν), ενώ δεξιά από κάθε περιοχή του ℓ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της. Θα αποδείξουμε ότι και αριστερά από κάθε περιοχή του ℓ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν).

Έστω ότι υπήρχε $\varepsilon_0>0$, ώστε άπειροι όροι της (α_ν) να είναι μικρότεροι ή ίσοι του $\ell-\varepsilon_0$· αλλά υπάρχουν άπειροι όροι της (α_ν) μεγαλύτεροι του $\ell-\frac{\varepsilon_0}{2}$ και επομένως, αν κ είναι τυχαίος ακέραιος θετικός, θα υπήρχαν μ, $\nu\in N^*$ μεγαλύτεροι του κ, ώστε να ισχύει:

$$|\alpha_\nu-\alpha_\mu|>\left(\ell-\frac{\varepsilon_0}{2}\right)-\left(\ell-\varepsilon_0\right) \Rightarrow |\alpha_\nu-\alpha_\mu|>\frac{\varepsilon_0}{2},$$

που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα πράγματι έξω από κάθε περιοχή του ℓ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν) και επομένως $\lim\alpha_\nu=\ell$.

Θεώρημα 6

α) Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\sigma\in R\cup\{+\infty\}$ και όλοι οι όροι της είναι μικρότεροι του σ, μπορούν να αναδιαταχθούν, ώστε να σχηματισθεί (από όλους τους όρους της (α_ν)) μια νέα ακολουθία (β_ν) αύξουσα, που μάλιστα θα έχει όριο επίσης το σ.

β) Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\sigma\in R\cup\{-\infty\}$ και όλοι οι όροι της είναι μεγαλύτεροι του σ, μπορούν να αναδιαταχθούν, ώστε να σχηματισθεί (από όλους τους όρους της (α_ν)) μια νέα ακολουθία (β_ν) φθίνουσα, που μάλιστα θα έχει όριο επίσης το σ.

γ) Αν μια ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\sigma\in R$, κανένας όρος της δεν είναι ίσος με σ και άπειροι όροι της είναι μικρότεροι του σ και άπειροι μεγαλύτεροι του σ, μπορεί να χωρισθεί σε δύο υπακολουθίες, μια αύξουσα (β_ν) και μια φθίνουσα (β'_ν), που μάλιστα θα έχουν όριο το σ.

Απόδειξη

α) i) Έστω $\lim\alpha_\nu=\sigma^-\in R$· αριστερά του σ-1 θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν), οι οποίοι επομένως θα μπορούν να διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους· στο εσωτερικό του διαστήματος $\left[\sigma-1,\ \sigma-\frac{1}{2}\right)$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν), οι οποίοι επομένως θα μπορούν να διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους και γενικώς στο εσωτερικό του διαστήματος $\left[\sigma-\frac{1}{\nu},\ \sigma-\frac{1}{\nu+1}\right)^{*}$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν), οι οποίοι επομένως θα μπορούν να διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους κ.ο.κ.· έτσι **όλοι** οι όροι της (α_ν) θα έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα τάξη μεγέθους και θα αποτελούν μια ακολουθία (β_ν), η οποία θα έχει όριο το σ.

ii) Έστω $\lim \alpha_\nu = +\infty$· αριστερά του 1 θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν), οι οποίοι επομένως θα μπορούν να διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους· στο εσωτερικό του διαστήματος $[1,2)$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν), οι οποίοι επομένως θα μπορούν να διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους και γενικώς στο εσωτερικό του διάστημας $[\nu,\ \nu+1)^{*}$ θα υπάρχουν (αν υπάρχουν) πεπερασμένου πλήθους όροι της (α_ν), οι οποίοι επομένως θα μπορούν να διαταχθούν κατά αύξουσα τάξη μεγέθους κ.ο.κ.· έτσι όλοι οι όροι της (α_ν) θα έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα τάξη μεγέθους και θα αποτελούν μια ακολουθία (β_ν), η οποία θα έχει όριο το $+\infty$.

β) Η απόδειξη είναι όμοια με εκείνη της (α).

γ) Η ακολουθία (α_ν) μπορεί να χωρισθεί σε δύο υπακολουθίες με απείρους όρους η καθεμιά και που οι όροι της μιας θα είναι μικρότεροι του σ, ενώ οι όροι της άλλης θα είναι μεγαλύτεροι του σ και που (σύμφωνα με τις περιπτώσεις (α) και (β)) οι όροι τους θα μπορούν να αναδιαταχθούν, ώστε οι όροι της πρώτης να βαίνουν αυξανόμενοι, οι όροι της δευτέρας να βαίνουν ελαττούμενοι και οι δύο ακολουθίες να έχουν όριο το σ.

Θεώρημα 7

Αν η συνάρτηση φ είναι ορισμένη στο $(\alpha,\ +\infty)$ και υπάρχουν δύο συναρτήσεις f και g τέτοιες ώστε $f([x]) \le \varphi(x) \le g([x])$ $\forall x \in (\alpha,+\infty)$, τότε, αν είναι $\lim f(\nu) = \lim g(\nu) = \sigma$, θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \sigma$.

$^{*}\ \nu \in N^{*}$

Απόδειξη

Έστω (x_ν) τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών από το $(\alpha, +\infty)$ με $\lim x_\nu = +\infty$. Η ακολουθία $\left([x_\nu]\right)$ θα αποτελείται από ακεραίους αριθμούς και οι μη θετικοί όροι της (αν υπάρχουν) θα είναι πεπερασμένου πλήθους και επομένως η ακολουθία $f\left([x_\nu]\right)$ θα είναι ακολουθία $T\left(f(\nu)\right)$ και επειδή $\lim f(\nu) = \sigma$, θα είναι $\lim f\left([x_\nu]\right) = \sigma$. Για όμοιο λόγο θα είναι και $\lim g\left([x_\nu]\right) = \sigma$ και επομένως από τις σχέσεις $f\left([x]\right) \le \varphi(x) \le g\left([x]\right)$, που για τις ακολουθίες γίνεται $f\left([x_\nu]\right) \le \varphi(x_\nu) \le g\left([x_\nu]\right)$, έπεται ότι $\lim \varphi(x_\nu) = \sigma$ για κάθε ακολουθία (x_ν) από το $(\alpha, +\infty)$ με $\lim x_\nu = +\infty$ και επομένως $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \sigma$.

Παρατήρηση. Αν $\lim f(\nu) = +\infty$, για να ισχύει και $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, αρκεί η σχέση $f\left([x]\right) \le \varphi(x)$, ενώ αν $\lim g(\nu) = -\infty$, για να ισχύει και $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$, αρκεί η σχέση $\varphi(x) \le g\left([x]\right)$ $\left(\forall x \in (\alpha, +\infty)\right)$.

Θεώρημα 8 (της επιλογής).

Αν σ είναι σημείο συσσωρεύσεως συνόλου Α, μπορούμε να επιλέξουμε από το Α άπειρες ακολουθίες (x_ν), ώστε $\lim x_\nu = \sigma$.

Απόδειξη

Έστω $\sigma \in \mathbb{R}$· $\forall \nu \in \mathbb{N}^*$ υπάρχουν στο διάστημα $\left(\sigma - \frac{1}{\nu}, \sigma + \frac{1}{\nu}\right)$ άπειρα στοιχεία του Α· έστω x_ν τυχαίο από αυτά· από τις σχέσεις $\sigma - \frac{1}{\nu} < x_\nu < \sigma + \frac{1}{\nu}$ έπεται $\lim x_\nu = \sigma$.

Αν $\sigma = +\infty$, θεωρούμε το διάστημα $(\nu, +\infty)$ και εργαζόμαστε ομοίως.

Αν $\sigma = -\infty$, θεωρούμε το διάστημα $(-\infty, -\nu)$ και εργαζόμαστε ομοίως.

Εφαρμογές

I. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Απόδειξη

Για $x \ge 1$ θέτουμε $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x$ και $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$, οπότε:

$$f([x])=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}=g([x]) \quad (1).$$

Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_ν) με $\lim x_\nu=+\infty$ και $x_\nu \geq 1$ $\forall \nu \in N^*$. Από τις σχέσεις (1) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$f([x_\nu]) < \left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu} < g([x_\nu]) \quad (2).$$

Αν οι ακολουθίες $(f(\nu))$ και $(g(\nu))$ έχουν όριο, τότε (σύμφωνα με το Θ.4) και οι ακολουθίες $(f([x_\nu]))$ και $(g([x_\nu]))$ θα έχουν όριο και θα είναι : $\lim f([x_\nu])=\lim f(\nu)$ και $\lim g([x_\nu])=\lim g(\nu)$. Αλλά

$$\lim f(\nu)=\lim\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu} = \lim\left\{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{-1}\right\}=e\cdot 1^{-1}=e \text{ και}$$

$$\lim g(\nu)=\lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} = \lim\left\{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)\right\}=e\cdot 1=e \text{ και επομένως από}$$

τις σχέσεις (2) έπεται: $\lim\left(1+\frac{1}{x_\nu}\right)^{x_\nu}=e$, άρα τελικά $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

II. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ $(a>0)$.

Απόδειξη

(i) Έστω $a>1$. Θέτουμε $x=\frac{1}{t}$ και με $t\geq 1$ θα ζητήσουμε το $\lim\limits_{t\to+\infty} a^{\frac{1}{t}}$.

Θέτουμε $f(t)=a^{\frac{1}{t+1}}$ και $g(t)=a^{\frac{1}{t}}$, οπότε:

$$f([t])=a^{\frac{1}{[t]+1}} < a^{\frac{1}{t}} \leq a^{\frac{1}{[t]}}=g([t]) \quad (1).$$

Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (t_ν) με $\lim t_\nu=+\infty$ και $t_\nu\geq 1$ $\forall \nu \in N^*$. Από τις σχέσεις (1) προκύπτουν οι σχέσεις $f([t_\nu]) < a^{\frac{1}{t_\nu}} \leq g([t_\nu])$ (2).

Αν οι ακολουθίες $\left(f(v)\right)$ και $\left(g(v)\right)$ έχουν όριο, τότε (σύμφωνα με το Θ.4) και οι ακολουθίες $\left(f([t_v])\right)$ και $\left(g([t_v])\right)$ θα έχουν όριο και θα είναι $\lim f\left([t_v]\right)=\lim f(v)$ και $\lim g\left([t_v]\right)=\lim g(v)$. Αλλά $\lim f(v)=\lim a^{\frac{1}{v+1}}=1$ και $\lim g(v)=\lim a^{\frac{1}{v}}=1$ και επομένως από τις σχέσεις (2) έπεται $\lim a^{\frac{1}{t_v}}=1$· άρα $\lim\limits_{t\to+\infty} a^{\frac{1}{t}}=1$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1$.

(ii) Έστω $0<a<1$. Θέτουμε $a=\dfrac{1}{\beta}$, οπότε $\beta>1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\beta^x}=\dfrac{1}{1}=1$.

Έστω $a=1$· τότε $a^x=1\ \ \forall x\in R^*$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1$.

Ώστε για $a>0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1$.

Θα ζητήσουμε το $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x$. Θέτουμε $x=-\omega$, οπότε :

$$\lim_{x\to 0^-} a^x=\lim_{\omega\to 0^+} a^{-\omega}=\lim_{\omega\to 0^+}\frac{1}{a^{\omega}}=\frac{1}{1}=1,$$

Ώστε τελικά $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$.

III. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$.

Απόδειξη

Για $x\geq 1$ θέτουμε $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}$ και $g(x)=(2x)^{\frac{1}{x}}$, οπότε :

$$f\left([x]\right)=[x]^{\frac{1}{2[x]}}\ <\ x^{\frac{1}{x}}\ <\ \left(2[x]\right)^{\frac{1}{[x]}}=g\left([x]\right)\quad (1).$$

Θεωρούμε τυχούσα ακολουθία (x_v) με $\lim x_v=+\infty$ και $x_v\geq 1\ \ \forall v\in N^*$. Από τις σχέσεις (1) προκύπτουν οι σχέσεις $f\left([x_v]\right)\ <\ x_v^{\frac{1}{x_v}}\ <\ g\left([x_v]\right)$ (2).

Αν οι ακολουθίες $\left(f(v)\right)$ και $\left(g(v)\right)$ έχουν όριο, τότε (σύμφωνα με το Θ.4) και οι ακολουθίες $\left(f([x_v])\right)$ και $\left(g([x_v])\right)$ θα έχουν όριο και θα είναι :
$\lim f\left([x_v]\right)=\lim f(v)$ και $\lim g\left([x_v]\right)=\lim g(v)$. Αλλά :

$\lim f(\nu)=\lim \nu^{\frac{1}{2\nu}}=\lim\left(\sqrt[\nu]{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$ και $\lim g(\nu)=\lim(2\nu)^{\frac{1}{\nu}}=\lim\left(\sqrt[\nu]{2}\cdot\sqrt[\nu]{\nu}\right)=1\cdot 1=1$

και επομένως από τις σχέσεις (2) έπεται $\lim x_\nu^{\frac{1}{x_\nu}}=1$· άρα τελικά $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$.

2. Μονοτονία και σύγκλιση συναρτήσεως.

Στη σύντομη αυτή εργασία περιλαμβάνονται κυρίως οι ακόλουθες προτάσεις για τις μονότονες συναρτήσεις:

α) Η μονοτονία μιας συναρτήσεως f σ' ένα διάστημα Α αποτελεί ικανή συνθήκη (όχι και αναγκαία) για τη σύγκλιση της f από αριστερά και από δεξιά $\forall x_0 \in A$.

β) Η μονοτονία μιας συναρτήσεως f σ' ένα διάστημα Α αποτελεί ικανή συνθήκη (όχι και αναγκαία) για τη συνέχεια της f $\forall x_0 \in A$, εφόσον και το πεδίο της f είναι διάστημα.

γ) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού διάστημα Α και πεδίο τιμών διάστημα Β είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο Α, η αντίστροφή της f^{-1} θα είναι συνεχής στο $\Delta(f^{-1})=R(f)=B$.

Θεώρημα Ι (Μονοτονία και σύγκλιση συναρτήσεως).

Δίνεται συνάρτηση f μονότονη σε διάστημα Α· τότε:

α) Αν $x_0 \in A$ (χωρίς το x_0 να είναι κάτω πέρας του Α), θα υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\le f(x_0)$, αν η f είναι αύξουσα, ενώ θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\ge f(x_0)$, αν η f είναι φθίνουσα.

Αν $x_0 \in A$ (χωρίς το x_0 να είναι άνω πέρας του Α), θα υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\ge f(x_0)$, αν η f είναι αύξουσα, ενώ θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\le f(x_0)$, αν η f είναι φθίνουσα.

Σ.τ.Εκδότη: Δεν είναι άγνωστα τα παρακάτω: 1. Αν σε μια ακολουθία (α_ν) παραλείψουμε πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος όρων (ώστε όμως να απομείνει άπειρο πλήθος όρων), οι όροι που απομένουν (χωρίς να αλλάξουμε τη σχετική τους θέση) αποτελούν μια νέα ακολουθία (β_ν) που λέγεται υπακολουθία της αρχικής.

2. Αν σε μια ακολουθία (α_ν) παρεμβάλουμε ανάμεσα στους όρους της, πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος όρων (χωρίς να αλλάξουμε τη σχετική θέση των όρων της δεδομένης ακολουθίας), η ακολουθία (β_ν) που προκύπτει λέγεται υπερακολουθία της αρχικής.

β) Αν $x_o \notin A$, είναι όμως το x_o άνω πέρας του Α, θα υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x)$.

Αν $x_o \notin A$, είναι όμως το x_o κάτω πέρας του Α, θα υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x)$.

Οι οριακές τιμές θα είναι πεπερασμένες ή μη. (Υπετέθη ότι το σύνολο Α είναι πεπερασμένο).

γ) Αν το σύνολο Α είναι απεριόριστο (τουλάχιστον) δεξιά, θα υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Αν το σύνολο Α είναι απεριόριστο (τουλάχιστον) αριστερά θα υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Οι οριακές τιμές θα είναι πεπερασμένες ή μη.

Η απόδειξη θα γίνει για την ύπαρξη της από αριστερά οριακής τιμής και μάλιστα μόνο στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα· στις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη γίνεται με ανάλογο τρόπο.

Απόδειξη

α) Έστω $a \in A$, $a < x_o$· η f θα είναι άνω φραγμένη στο (a, x_o) (με ένα άνω φράγμα της το $f(x_o)$)· ας είναι s το άνω πέρας των τιμών της f στο (a, x_o)· $\forall \varepsilon > 0$ θα υπάρχει σημείο $x' \in (a, x_o): s - \varepsilon < f(x') \leq s$ και επομένως (επειδή η f είναι αύξουσα) $\forall x \in (x', x_o)$ θα ισχύει $s - \varepsilon < f(x) \leq s$· άρα $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = s$.

β) Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη στο Α και ας είναι s το άνω πέρας των τιμών της· $\forall \varepsilon > 0$ θα υπάρχει σημείο $x' \in A: s - \varepsilon < f(x') \leq s$ και επομένως (επειδή η f είναι αύξουσα) $\forall x \in (x', x_o)$ θα ισχύει $s - \varepsilon < f(x) \leq s$ άρα $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = s$.

Έστω ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη στο Α· $\forall M > 0$ θα υπάρχει $x' \in A: f(x') > M$ και επομένως (επειδή η f είναι αύξουσα) $\forall x \in (x', x_o)$ θα ισχύει $f(x) > M$· άρα $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.

γ) Έστω ότι η f είναι άνω φραγμένη στο Α και ας είναι s το άνω πέρας των τιμών της· $\forall \varepsilon > 0$ θα υπάρχει σημείο $x' \in A: s - \varepsilon < f(x') \leq s$ και επομένως (επειδή η f είναι αύξουσα) $\forall x > x'$ θα ισχύει $s - \varepsilon < f(x) \leq s$· άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = s$.

Έστω ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη στο Α· $\forall M > 0$ θα υπάρχει σημείο $x' \in A: f(x') > M$ και επομένως (επειδή η f είναι αύξουσα) $\forall x > x'$ θα ισχύει $f(x) > M$· άρα $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Παρατήρηση. Όταν μια συνάρτηση f είναι μονότονη σ' ένα διάστημα, για την αναζήτηση των οριακών $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ μπορούμε να χρησιμοποιούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_ν) με όριο το x_0^-, το x_0^+, το $+\infty$, το $-\infty$, αντίστοιχα.

Πόρισμα. Αν μια συνάρτηση f είναι μονότονη σ' ένα διάστημα A, για να είναι συνεχής στην εσωτερική θέση x_0 του A, πρέπει και αρκεί να ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

Απόδειξη

Το αναγκαίο είναι προφανές.

Το ικανό: Αν η f είναι αύξουσα, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και αν η f είναι φθίνουσα, θα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \le f(x_0) \le \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και επειδή από υπόθεση ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, έπεται ότι και στις δύο περιπτώσεις θα είναι :

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ και επομένως η f είναι συνεχης στη θέση x_0.

Θεώρημα

Αν η μονότονη συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού **διάστημα A** και πεδίο τιμών **διάστημα B,** η f θα είναι συνεχής στο A.

Απόδειξη

Έστω x_0 ***εσωτερικό*** σημείο του A· υπάρχει η οριακή τιμή $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ και θα είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \le f(x_0)$, αν η f είναι αύξουσα. Έστω ότι είναι $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) < f(x_0)$· τότε το πεδίο τιμών της f θα παρουσίαζε κενό στο διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x),\ f(x_0)\right)$, που είναι άτοπο, διότι το σύνολο τιμών B της f είναι διάστημα· άρα η f είναι συνεχής στη θέση x_0 από αριστερά. Όμοια αποδεικνύεται ότι η f είναι συνεχής στη θέση x_0 από δεξιά· άρα η f είναι συνεχής στη θέση x_0. Όμοια τέλος αποδεικνύεται ότι η f είναι συνεχής στη θέση x_0 και όταν η f είναι φθίνουσα. Αν το διάστημα A έχει ακραία στοιχεία t (minimum) ή s (maximum), η f θα είναι βέβαια συνεχής στη θέση t (από δεξιά) ή στη θέση s (από αριστερά).

Εφαρμογή. Οι συναρτήσεις ημ. και συν. είναι (γνήσια) μονότονες στα **διαστήματα** $\left[-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi, \frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right]$ και $[\kappa\pi, \pi+\kappa\pi]$ αντίστοιχα $\forall \kappa \in Z$ και έχουν πεδίο τιμών το **διάστημα** $[-1,1]$· επομένως είναι συνεχείς στα διαστήματα αυτά και συνεπώς είναι συνεχείς στο R.

Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού διάστημα Α και πεδίο τιμών διάστημα Β είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο Α, η αντίστροφή της f^{-1} θα είναι συνεχής στο $\Delta(f^{-1}) = R(f) = B$.

Απόδειξη

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Α και έχει πεδίο τιμών το Β, θα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} με πεδίο ορισμού το Β και πεδίο τιμών το Α και θα είναι και η f^{-1} γνησίως μονότονη και μάλιστα του ίδιου είδους μονοτονίας με την f.

α) Η f γνησίως αύξουσα στο Α.

Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του $\Delta(f^{-1}) = R(f) = B$· επειδή το σημείο x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Β και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό, η τιμή $f^{-1}(x_0)$ δεν αποτελεί ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο της f^{-1}.

Έστω ε τυχαίος θετικός αριθμός, ώστε $f^{-1}(x_0) - \varepsilon$, $f^{-1}(x_0) + \varepsilon \in R(f^{-1}) = A$· ας είναι $x_1, x_2 : f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_0) - \varepsilon$, $f^{-1}(x_2) = f^{-1}(x_0) + \varepsilon$· θα ισχύει $x_1 < x_0 < x_2$ (επειδή η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα) και επομένως

$f^{-1}(x_0) - \varepsilon < f^{-1}(x) < f^{-1}(x_0) + \varepsilon \quad \forall\, x \in (x_1, x_2)$· άρα η f^{-1} θα είναι συνεχής στη θέση x_0.

Αν το x_0 είναι δεξιό ή αριστερό άκρο του $\Delta(f^{-1})$, όμοια φαίνεται ότι η f είναι συνεχής στη θέση x_0 από αριστερά ή από δεξιά αντιστοίχως.

β) Η f γνησίως φθίνουσα στο Α. Θεωρούμε την -f, η οποία θα είναι γνησίως αύξουσα στο Α και επομένως (κατά την περίπτωση α)) η $-f^{-1}$ (άρα και η f^{-1}) θα είναι συνεχής στο Α.

3. Οι περιοδικές συναρτήσεις σε συσχετισμό με το ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού.

Είναι γνωστό ότι αν μιας περιοδικής συναρτήσεως F δίνεται ο τύπος του περιορισμού της f σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου (έστω και αν η f δεν παρέχεται από ενιαίο τύπο), η F με ορισμένες προϋποθέσεις, εκφράζεται (και μάλιστα με ενιαίο τύπο) υπό τη μορφή κατάλληλης τριγωνομετρικής σειράς (σειρά Fourier).

Στη μονογραφία που ακολουθεί θα επιχειρηθεί η λύση του προηγουμένου προβλήματος με τη χρησιμοποίηση του ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού, χωρίς όμως να βρίσκεται πάντοτε ενιαίος τύπος για την F· εννοείται όμως ότι **επ' ουδενί λόγω** η σχετική θεωρία υποκαθιστά την έκφραση των περιοδικών συναρτήσεων με τριγωνομετρικές σειρές.

Βοηθητική πρόταση

Η συνάρτηση σ με τύπο $\sigma(x) = x - \tau\left[\dfrac{x-\alpha}{\tau}\right]$ ($\alpha \in R$, $\tau \in R_+^*$) και πεδίο ορισμού το R

α) είναι περιοδική με περίοδο τ

β) στο διάστημα [α, α+τ) συμπίπτει με την ταυτοτική συνάρτηση

γ) έχει πεδίο τιμών το διάστημα [α, α+τ).

Απόδειξη

α) $\sigma(x+\tau) = x+\tau-\tau\left[\dfrac{x+\tau-\alpha}{\tau}\right] = x+\tau-\tau\left[\dfrac{x-\alpha}{\tau}+1\right] =$

$$= x+\tau-\tau\left(\left[\dfrac{x-\alpha}{\tau}\right]+1\right) = x+\tau-\tau\left[\dfrac{x-\alpha}{\tau}\right]-\tau = x-\tau\left[\dfrac{x-\alpha}{\tau}\right] = \sigma(x).$$

β) Αν $\alpha \leq x < \alpha+\tau \;\Rightarrow\; 0 \leq x-\alpha < \tau \;\Rightarrow\; 0 \leq \dfrac{x-\alpha}{\tau} < 1 \;\Rightarrow$

$$\left[\dfrac{x-\alpha}{\tau}\right] = 0 \;\Rightarrow\; \sigma(x) = x-\tau\cdot 0 \;\Rightarrow\; \sigma(x) = x.$$

γ) Επειδή στο διάστημα [α, α+τ) η σ συμπίπτει με την ταυτοτική συνάρτηση, έπεται ότι στο διάστημα αυτό το πεδίο τιμών της συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της [α, α+τ) και επειδή η σ είναι περιοδική με περίοδο τ, έπεται ότι το πεδίο τιμών της σ και σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της (που είναι το R) είναι επίσης το [α, α+τ).

Θεώρημα

Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το διάστημα [α, α+τ) και σ η συνάρτηση που αναφέρεται στη βοηθητική πρόταση, τότε:

α) Η σύνθεση foσ είναι εφικτή και η σύνθετη συνάρτηση F=foσ έχει πεδίο ορισμού το R.

β) Η συνάρτηση F είναι περιοδική με περίοδο τ.

γ) Η F έχει στο διάστημα [α, α+τ) ως περιορισμό την f.

Απόδειξη

α) Επειδή το πεδίο τιμών της σ συμπίπτει με το πεδίο ορισμού της f, η σύνθεση foσ είναι εφικτή και το πεδίο ορισμού της F=foσ συμπίπτει με το πεδίο ορισμού R της σ.

β) $F(x+\tau)=f\big(\sigma(x+\tau)\big)=f\big(\sigma(x)\big)=F(x)$.

γ) Στο διάστημα [α, α+τ) η σ συμπίπτει με την ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή σ(x)=x (βοηθητική πρόταση β)) και επομένως $\forall x\in[\alpha,\ \alpha+\tau)$ ισχύει $F(x)=f\big(\sigma(x)\big)=f(x)$· άρα η f αποτελεί περιορισμό της F στο διάστημα $[\alpha,\ \alpha+\tau)$.

Παρατήρηση I

Είναι προφανές ότι, αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα [α, α+τ) ($\alpha\in R$, $\tau\in R_+^*$), υπάρχει μια και μοναδική επέκταση F της f, περιοδική με περίοδο τ και πεδίο ορισμού το R.

Παρατήρηση II

Αν από το πεδίο ορισμού της f αποκλείονται ορισμένα μεμονωμένα σημεία του [α, α+τ) ή και υποδιαστήματα αυτού, η πρόταση πάλι ισχύει με ανάλογο όμως περιορισμό του πεδίου ορισμού της F, όπως θα φανεί σε παραδείγματα που ακολουθούν.

Παρατήρηση III

Για να είναι η F συνεχής στις θέσεις α+κτ ($\kappa\in Z$) πρέπει και αρκεί η f να είναι συνεχής στη θέση α από δεξιά και επιπλέον να ισχύει η σχέση $\lim\limits_{x\to(\alpha+\tau)^-}f(x)=f(\alpha)$.

Πράγματι, επειδή η F είναι περιοδική με περίοδο τ, αρκεί να εξετασθεί η F ως προς τη συνέχεια στην τυχούσα από τις θέσεις α+κτ, π.χ. στη θέση α.

Το αναγκαίο· είναι $\lim\limits_{x\to\alpha^+}F(x)=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$ και $F(\alpha)=f(\alpha)$· επομένως πρέπει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)=f(\alpha)$. Επίσης $\lim\limits_{x\to\alpha^-}F(x)=\lim\limits_{x\to(\alpha+\tau)^-}F(x)=\lim\limits_{x\to(\alpha+\tau)^-}f(x)$ και $F(\alpha)=f(\alpha)$· επομένως πρέπει και $\lim\limits_{x\to(\alpha+\tau)^-}f(x)=f(\alpha)$.

Το ικανό (μετά και από τα παραπάνω) είναι προφανές.

Παραδείγματα

I. Μια συνάρτηση f ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x)=2x+3 \qquad -1\le x<4$$

Να βρεθεί η επέκταση F της f, αν η F είναι περιοδική με περίοδο 5.

Λύση

Είναι $\sigma(x)=x-5\left[\dfrac{x+1}{5}\right]$ και επομένως:

Λύση

Είναι $\sigma(x) = x - 5\left[\frac{x+1}{5}\right]$ και επομένως:

$F(x) = f(\sigma(x)) = 2\left(x - 5\left[\frac{x+1}{5}\right]\right) + 3 = 2x - 10\left[\frac{x+1}{5}\right] + 3$· πεδίο ορισμού της F είναι το R.

Είναι $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}(2x+3) = 1 = f(-1)$ και $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}(2x+3) = 11 \neq 1 = f(-1)$ και επομένως η F είναι συνεχής $\forall x \in R - \{-1+\kappa\cdot 5\}$, $(\kappa \in Z)$. Πεδίο ορισμού της F είναι το R.

II. Μια συνάρτηση f ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \qquad x \in [0,3) - \{1,2\}.$$

Να βρεθεί η επέκταση F της f, αν η F είναι περιοδική με περίοδο 3.

Λύση

Είναι $\sigma(x) = x - 3\left[\frac{x}{3}\right]$ και επομένως:

$F(x) = f(\sigma(x)) = \dfrac{1}{\left(x - 3\left[\frac{x}{3}\right] - 1\right)\left(x - 3\left[\frac{x}{3}\right] - 2\right)}$· πεδίο ορισμού της F είναι το

$R - \{1+\kappa.3, 2+\kappa.3\}$, $(\kappa \in Z)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2} = f(0)$ και

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} = f(0)$ και επομένως η F είναι συνεχής σε κάθε θέση του πεδίου ορισμού της.

III. Μια συνάρτηση f ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \qquad -2 \le x < 2.$$

Να βρεθεί η επέκταση F της f, αν η F είναι περιοδική με περίοδο 4.

Λύση

Είναι $\sigma(x) = x - 4\left[\dfrac{x+2}{4}\right]$ και επομένως:

$F(x) = f\left(\sigma(x)\right) = \sqrt{4 - \left(x - 4\left[\dfrac{x+2}{4}\right]\right)^2}$ · πεδίο ορισμού της F είναι το R.

Είναι $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 = f(-2)$ και επομένως η F είναι συνεχής σε κάθε θέση του πεδίου ορισμού της (που είναι το R).

IV. Μια συνάρτηση f ορίζεται από τον τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{για } 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{για } 1 \le x < 2. \end{cases}$$

Να βρεθεί η επέκταση F της f, αν η F είναι περιοδική με περίοδο 2.

Λύση

Είναι $\sigma(x) = x - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]$ και επομένως:

$$F(x) = f\left(\sigma(x)\right) = \left(x - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]\right)^2, \qquad 2\kappa \le x < 2\kappa+1, \quad \forall \kappa \in Z$$

$$F(x) = f\left(\sigma(x)\right) = \dfrac{1}{x - 2\left[\dfrac{x}{2}\right]}, \qquad 2\kappa+1 \le x < 2\kappa+2, \quad \forall \kappa \in Z$$

Πεδίο ορισμού της F είναι το R.

Εύκολα φαίνεται ότι η F είναι συνεχής για κάθε x ανήκον στο $R - \{2\kappa\}$, $\kappa \in Z$.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τον εκδότη του «ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ» για την τιμή που μου κάνει να δεχθεί εργασίες μου στο θαυμάσιο αυτό περιοδικό, που απευθύνεται σε τόσο ευρύ φάσμα αναγνωστών.

Παύλος Φιλίππου

ΡΗΤΟΙ, ΑΡΡΗΤΟΙ, ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ, ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΛΑΜΠΡΟΥ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος ήταν γνωστό στους αρχαίους Πυθαγορείους. Άλλωστε στον «Θεαίτητο» του Πλάτωνα, ο Θεαίτητος διηγείται στον Σωκράτη (§ 147 d) ότι ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος απέδειξε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$ είναι όλοι άρρητοι (σημειώστε ότι δεν αναφέρει για το $\sqrt{2}$, πιθανόν διότι ήταν πασίγνωστη ιδιότητα). Η απόδειξη του Θεόδωρου δεν έχει διασωθεί, αλλά το γεγονός ότι σταμάτησε στο $\sqrt{17}$ δείχνει ότι μάλλον η απόδειξή του για το άρρητο του καθενός από τους $\sqrt{3},\dots,\sqrt{17}$ ήταν διαφορετική. Αυτό μας προκαλεί μια κάποια απορία γιατί, όπως θα δούμε, η απόδειξη του ότι ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος εκτός εάν ο n είναι τέλειο τετράγωνο, είναι απλή γενίκευση της γνωστής απόδειξης του αρρήτου του $\sqrt{2}$. Απ' την άλλη, πολύ πιθανόν, ο Θεόδωρος να εννοούσε καθαρά γεωμετρική απόδειξη. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Θεαίτητος στον ίδιο διάλογο λέει «ημίν ουν εισελθέτι τοιούτον, επειδή άπειροι το πλήθος αι δυνάμεις εφαίνοντο, πειραθήναι συλλαβείν εις εν ότω πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τας δυνάμεις» (: σε μας όμως ήλθε η σκέψη, μια και που οι τετραγωνικές ρίζες φαινόντουσαν να είναι άπειρες το πλήθος, να προσπαθήσουμε να συμπεριλάβουμε σε ένα κανόνα όλες αυτές τις τετραγωνικές ρίζες).

Η γνωστή απόδειξη του αρρήτου του $\sqrt{2}$ σώζεται στα Αναλυτικά πρότερα (41 α 26-27) του Αριστοτέλους.

Σ.τ.Ε. Ο ΜΙΧΑΛΗΣ ΛΑΜΠΡΟΥ είναι αναπληρωτής καθηγητής στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Πολλοί θεωρούν την απόδειξη αυτή του αρρήτου του $\sqrt{2}$ καθώς και την απόδειξη του ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι, όπως σώζεται στον Ευκλείδη (Στοιχεία, IX, 20), σαν τις κομψότερες στα μαθηματικά.

Πράγματι και οι δύο αποδείξεις είναι πολύ σύντομες και εισάγουν μια καινούργια (και σημαντική) έννοια στα μαθηματικά. Κατά τον Hardy (A Mathematician's Apology) άλλες κομψές αποδείξεις είναι το θεώρημα του Fermat για αθροίσματα τετραγώνων (: ένας περιττός πρώτος είναι άθροισμα δύο τετραγώνων εάν και μόνον αν είναι της μορφής 4n + 1) και το θεώρημα του Cantor για την μη αριθμησιμότητα του R.

ΑΡΡΗΤΟΙ

Θεώρημα 1

Ο $\sqrt[n]{a}$ είναι άρρητος εκτός εάν $a = r^n$ για κάποιο $r \in N$. Ειδικά ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος εκτός εάν ο n είναι τέλειο τετράγωνο.

Απόδειξη

Έστω $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$ όπου $(p,q) = 1$. Τότε $aq^n = p^n \Rightarrow q / p^n$. Αλλά :

$$(q,p) = 1 \Rightarrow (q,p^n) = 1 \Rightarrow q = 1 \text{ άρα και ότι } \sqrt[n]{a} = \frac{p}{1} \Rightarrow a = p^n$$

Το προηγούμενο θεώρημα είναι ειδική περίπτωση του εξής:

Θεώρημα 2

Αν $a_1,\dots,a_n \in N^v \cup \{0\}$, τότε το πολυώνυμο $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ έχει ακέραιες ή άρρητες ρίζες (εκτός από τις μιγαδικές).

Απόδειξη

Αν $\frac{p}{q}$ ρίζα με $(p,q) = 1$ τότε :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \Rightarrow p^n + a_1p^{n-1}q + \dots + a_nq^n = 0 \Rightarrow p^n = q \cdot A$$

και συνεχίζουμε όπως στο Θεώρημα 1.

Από τα προηγούμενα θεωρήματα οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{7}$ είναι άρρητοι (π.χ. λύνουν τις εξισώσεις $x^2-2=0$, $x^3-2=0$, $x^5-7=0$ αντίστοιχα).

Μια και που αναφέρουμε αρρήτους, άλλοι γνωστοί άρρητοι είναι οι :

$$\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \log_2 5,\quad \frac{\log_2 3}{\log_4 5}.$$

Αποδείξεις

α) Αν $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q} \Rightarrow 2+2\sqrt{6}+3=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6}=$ρητός, άτοπο.

β) Αν $\log_2 5=\dfrac{p}{q} \Rightarrow 5=2^{\frac{p}{q}} \Rightarrow 5^q=5^p$ που είναι αδύνατο αφού π.χ. οι αριθμοί έχουν μοναδικό ανάπτυγμα σε πρώτους παράγοντες.

γ) Αν $\dfrac{\log_2^3}{\log_4^5}=\dfrac{p}{q}$ τότε $\log_2 3^q=\log_4 5^p$. Αν καλέσουμε λ το κάθ' ένα από αυτά, θα έχουμε $\log_2 3^q=\lambda=\log_4 5^p \Rightarrow 3^q=2^\lambda$ και $4^\lambda=5^p \Rightarrow 3^{2q}=5^p\ (=4^\lambda)$ που είναι άτοπο.

Ας έρθουμε τώρα σε μη-τετριμμένα παραδείγματα αρρήτων. Οι πιο γνωστοί άρρητοι είναι οι π και e, οι οποίοι είναι όχι μόνον άρρητοι αλλά και υπερβατικοί. Γενικά, η απόδειξη του αρρήτου ή όχι ενός αριθμού είναι δύσκολη και του υπερβατικού ή όχι, ακόμη δυσκολότερη. Είναι γνωστό ότι οι αριθμοί:

ημ1, $\log 2$, $\dfrac{\log 3}{\log 2}$, e^π, $2^{\sqrt{2}}$ (και φυσικά οι δυνάμεις τους) είναι υπερβατικοί.

Για τους αριθμούς 2^e, 2^π, π^e, γ (=σταθ. του Euler) δεν έχει εξακριβωθεί καν αν είναι άρρητοι ή όχι. Μόλις πρόσφατα (Apéry, 1980) αποδείχθηκε ότι ο $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ είναι άρρητος.

(Ο $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ ήταν γνωστό από παλιά ότι ισούται με $\dfrac{\pi^2}{6}$, οπότε είναι υπερβατικός.

Όμοια ο $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^4}{90}$).

Υπενθυμίζουμε ότι ένας αριθμός είναι ρητός εάν και μόνο εάν το (δεκαδικό του) ανάπτυγμα περαττώνεται ή είναι περιοδικό. Οπότε έχουμε το

Παράδειγμα

Οι αριθμοί α) 0,10100100010000100... (ένα μηδενικό παραπάνω κάθε φορά) και β) 0,1234567891011121314... (όλοι οι φυσικοί στη σειρά), είναι άρρητοι.

Απόδειξη

Οι αριθμοί αυτοί δεν περαττώνονται ούτε είναι περιοδικοί· (πράγματι, αν π.χ. ο α) ήταν περιοδικός, τότε θα σήμαινε ότι μετά από α θέσεις από την υποδιαστολή θα υπήρχαν β ψηφία που θα επαναλαμβανόντουσαν. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί υπάρχουν τμήματα μήκους β αποτελούμενα από μηδενικά μόνο, ενώ άλλα τμήματα μήκους β περιέχουν και μονάδες. Όμοια ο β).

Λίγο δυσκολότερο παράδειγμα αρρήτου είναι το

Παράδειγμα

Ο αριθμός 0,11101010001010001..., όπου το ψηφία της n-θέσης είναι 1 αν ο n είναι πρώτος, αλλιώς 0, είναι άρρητος.

Απόδειξη

Αν ο αριθμός αυτός ήταν ρητός, θα έπρεπε να είναι περιοδικός αφού δεν περαττώνεται (υπάρχουν άπειροι πρώτοι).

Έστω ότι έχει περίοδο α. Τότε για κάποιο $\beta \in N$, το ανάπτυγμα του δοθέντος αριθμού θα είχε μονάδα στις θέσεις β, β+α, β+2α, β+3α,... . Από τον ορισμό όμως του δοθέντος αριθμού, οι αριθμοί β, β+α, β+2α, ... έπρεπε να ήταν **όλοι** πρώτοι . Θα αποδείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατον, αποδεικνύοντας το εξής ακόμη γενικότερο λήμμα:

Λήμμα (Goldbach 1752)

Αν $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_0 > 0)$ πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές, τότε αποκλείεται **όλοι** οι αριθμοί p(1), p(2), p(3),... να είναι πρώτοι. Ειδικά αποκλείεται όλοι οι όροι μιας αριθμητικής προόδου να είναι πρώτοι.

Απόδειξη

Αφού ο πρώτος συντελεστής του p είναι θετικός, υπάρχει n_0 με $p(n)>1$ για $n \geq n_0$ (**σημ.** $p(x) \to +\infty$ καθώς $x \to +\infty$). Όμοια αφού ο $p'(x)$ έχει πρώτο συντελεστή θετικό, υπάρχει n_1 με $p'(x)>0$ για $x \geq n_1$, άρα και p(x) αύξουσα για $x \geq n_1$. Άρα υπάρχει n_2 με :

α) $p(n) > 1$ για $n \geq n_2$

β) $p(x)$ αύξουσα για $x \geq n_2$. Έτσι για $n \geq n_2$ ισχύει:

$$1 < p(n_2) < p(n_2+1) < p(n_2+2) < \ldots .$$

Εξετάζουμε τώρα τον $n = p(n_2)+n_2$ Αυτός είναι γνήσια μεγαλύτερος του n_2 $\left(\text{άρα } p(n) > p(n_2)\right)$ και

$$\begin{aligned} p(n) &= p\left(p(n_2)+n_2\right) = a_0\left(p(n_2)+n_2\right)^n + a_1\left(p(n_2)+n_2\right)^{n-1} + \ldots + a_n \\ &= a_0\left[p(n_2)^n + \ldots + n_2^n\right] + a_1\left[p(n_2)^{n-1} + \ldots + n_2^{n-1}\right] + \ldots + a_n \\ &= \lambda p(n_2) + a_0 n_2^n + a_1 n_2^{n-1} + \ldots + a_n \\ &= \lambda p(n_2) + p(n_2) = \mu\left(p(n_2)\right). \end{aligned}$$

Δηλαδή ο p (n) είναι γινόμενο δύο αριθμών που κανένας τους δεν είναι μονάδα (: $p(n_2) > 1$ και αφού $p(n) > p(n_2) \Rightarrow \mu \neq 1$). Άρα ο p (n) δεν είναι πρώτος.

Σημείωση

1. Ένα ενδιαφέρον θεώρημα του Dirichlet λέει ότι κάθε αριθμητική πρόοδος β, β+α, β+2α, β+3α,... με (α, β)=1 περιέχει απείρους πρώτους (ειδικά η 1, 2, 3, 4, ... περιέχει απείρους πρώτους!). Το προηγούμενο θεώρημα έδειξε απλώς ότι δεν μπορεί **όλοι** οι όροι μιας αριθμητικής προόδου να είναι πρώτοι.

2. Τα πολυώνυμα, αποδείξαμε, ότι δεν μπορούν να παίρνουν μόνο πρώτες τιμές. Μερικοί έχουν κατασκευάσει πολυώνυμα που παίρνουν «πολλές» πρώτες τιμές. Απ' τα πιο ενδιαφέροντα είναι το πολυώνυμο x^2+x+41 του Euler, που για x=1, 2, 3, 4,..., 38, 39 παίρνει μόνο πρώτες τιμές!

Ας έρθουμε τώρα στην απόδειξη του αρρήτου των π και e. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι ο e είναι υπερβατικός.

Ο πρώτος που απέδειξε το άρρητο των π και e ήταν ο Lambert (1728-1777). Η απόδειξή του στηριζόταν στα συνεχή κλάσματα:

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{\cfrac{2}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{14}{x} + \ddots}}}} \quad \text{και} \quad \tan x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \ddots}}}}$$

Ο Legendre απέδειξε ότι και ο π^2 είναι άρρητος. Ο Liouville (1809-1882) απέδειξε ότι οι e και e^2 δεν είναι λύσεις αλγεβρικών εξισώσεων με ακερ. συντελεστές. Η απλή απόδειξη του αρρήτου του e που ακολουθεί ανήκει στον Fourier.

Θεώρημα

Ο e είναι άρρητος.

Απόδειξη

Ξέρουμε ότι $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$ και ότι $2<e<3$, οπότε αν ο e ήταν ρητός, $\frac{m}{n}$, τότε $n \neq 1$. Εξετάζουμε τον αριθμό

$$n!\left[e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\right] = n!\frac{m}{n}-n!-\frac{n!}{1!}-\frac{n!}{2!}-\dots-\frac{n!}{n!}$$

$$= \text{άθροισμα ακεραίων} = \text{ακέραιος}$$

Από την άλλη όμως

$$n!\left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\right| = n!\left|\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\dots\right| =$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\dots$$

$$< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\dots$$

$$\overset{\text{γεωμ. προόδ.}}{=} \frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1$$

άρα $\quad 0 < n!\left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)\right| < 1$

άρα $0 <$ (φυσικός) < 1 που είναι άτοπο.

Σημείωση

Με παρόμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται ότι ο e^2 είναι άρρητος. Επίσης πολλοί προτιμούν να αποδεικνύουν το άτοπο του e, αποδεικνύοντας ότι ο

$\frac{1}{e} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots$ είναι άρρητος.

Η απόδειξη του αρρήτου του π που ακολουθεί είναι η ευκολότερη (!) γνωστή και ανήκει στον Niven (1947).

Θεώρημα

Ο π είναι άρρητος.

Απόδειξη

Έστω ότι $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$ με α, β ∈ N. Ορίζουμε τη συνάρτηση f: $f(x) = \frac{x^n(\alpha - \beta x)^n}{n!}$, όπου το n θα το διαλέξουμε παρακάτω. Προφανώς $f\left(\frac{\alpha}{\beta} - x\right) = f(x)$, δηλαδή $f(\pi - x) = f(x)$.

Ορίζουμε νέα συνάρτηση F σαν:

$$F(x) = f(x) - f^2(x) + f^4(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Το n! f(x) έχει ακέραιους συντελεστές και είναι της μορφής $A_1x^{2n} + A_2x^{2n-1} + \ldots + A_{n+1}x^n$ $(A_\kappa \in Z)$, οπότε τα $f(x)$, $f'(x)$, $f^{(2)}(x), \ldots, f^{(2n)}(x)$, είναι, για x=0, όλοι ακέραιοι αριθμοί. Όμοια, θα είναι ακέραιοι αριθμοί και για x=π, αφού $f(\pi - x) = f(x) \Rightarrow f(\pi) = f(0)$.

Μετά από απλές πράξεις, που τις παραλείπουμε, αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{d}{dx}\left(F'(x)\,\eta\mu x - F(x)\,\sigma\upsilon\nu x\right) = F''(x)\,\eta\mu x - F(x)\,\eta\mu x = f(x)\,\eta\mu x$$

άρα

$$\int_0^\pi f(x)\;\eta\mu x dx = \left[F'(x)\,\eta\mu x - F(x)\,\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi$$

$$= F(\pi) + F(0) = \text{ακέραιος} + \text{ακέραιος}$$

$$= \text{ακέραιος}.$$

Απ' την άλλη όμως για $0 < x < \frac{\alpha}{\beta}$ (=π) έχουμε :

$$0 < f(x)\eta\mu x \le \frac{x^n(\alpha-\beta x)^n}{n!} \le \frac{\pi^n \alpha^n}{n!}$$

οπότε $\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx \le \frac{\pi^n \alpha^n}{n!}\pi$.

Αφού όμως η ακολουθία $\frac{c^n}{n!}$ συγκλίνει στο 0, θα έχουμε για κατάλληλα μεγάλο

n ;

$$0 < \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx \le \frac{\pi^n \alpha^n}{n!}\pi < 1$$

$\Rightarrow$ 0 < ακεραίου < 1 που είναι άτοπο.

ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΙ

Υπενθυμίζουμε ότι ένας αριθμός λέγεται αλγεβρικός αν είναι ρίζα πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές.

Η **τάξη** ενός αλγεβρικού αριθμού λέγεται ο βαθμός του πιο χαμηλόβαθμου πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές του οποίου είναι ρίζα.

Ένας αριθμός λέγεται υπερβατικός εάν δεν είναι αλγεβρικός.

Παραδείγματα

1) Οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5-2\sqrt{3}}$ είναι αλγεβρικοί. Π.χ. ο $\sqrt[3]{5-2\sqrt{3}}$ είναι λύση της εξισώσεως:

$$x = \sqrt[3]{5-2\sqrt{3}} \Rightarrow x^3 = 5-2\sqrt{3} \Rightarrow x^3-5 = -2\sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^3-5)^2 = 4\cdot 3 \Rightarrow x^6-10x^3+13 = 0$$

που έχει ακεραίους συντελεστές.

2) Οι ρητοί αριθμοί είναι 1ης τάξης (ο 0 μηδενικής).

3) Οι $\sqrt{2}$ είναι 2ας τάξεως διότι ικανοποιεί την $x^2-2=0$ και δεν ικανοποιεί καμιά της μορφής $\alpha x+\beta=0$ $(\alpha,\beta \in Z)$ αφού είναι άρρητος.

4) Ο $\sqrt[3]{2}$ είναι 3ης τάξεως διότι πρώτον ικανοποιεί την $x^3-2=0$ και δεύτερον δεν ικανοποιεί καμιά εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha,\beta,\gamma \in Z \quad \alpha \ne 0)$.

Πράγματι, τότε θα ικανοποιούσε και την $x^2+\frac{p}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$ δηλαδή της μορφής $x^2+Ax+B=0$ με $A,B\in Q$. Άρα $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+A\sqrt[3]{2}+B=0$.

Πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt[3]{2}$ βρίσκουμε και $A\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+B\sqrt[3]{2}+2=0$. Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη με A και αφαιρέσουμε τη δεύτερη, βρίσκουμε $(A^2-B)\sqrt[3]{2}+(AB-2)=0$.

Επειδή όμως ο $\sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος, θα έχουμε ότι $A^2-B=0$ οπότε και $AB-2=0$.

Οι δύο αυτές δίνουν $\left.\begin{array}{r}A^2=B\\ AB=2\end{array}\right\} \Rightarrow B^3=2$ που είναι άτοπο αφού $B\in Q$ και $\nexists$ ρητός q με $q^3=2$.

Παρατήρηση

Αν ο ξ είναι αλγεβρικός αριθμός τάξης n και p πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές που έχει ρίζα το ξ, τότε για κάθε ρητό $\frac{\alpha}{\beta}\neq\xi$ ισχύει $p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\neq 0$.

Πράγματι, αν $p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=0$ τότε $p(x)=\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)q(x)$ όπου q πολυώνυμο βαθμού n-1 και $0=p(\xi)=\left(\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right)q(\xi) \Rightarrow q(\xi)=0$, που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η τάξη του ξ είναι n.

Αναφέραμε ήδη ότι για να αποδείξουμε ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι υπερβατικός ή όχι είναι πρόβλημα δύσκολο. Μέχρι τώρα δεν έχουμε δει κανέναν υπερβατικό αριθμό. Ο πρώτος υπερβατικός αριθμός που βρέθηκε ήταν το 1851 από τον Liouville, πολύ πριν από την απόδειξη υπερβατικότητας του e (Hermite 1873) και του π (Lindemann 1882).

Αργότερα θα αποδείξουμε (από τη θεωρία του Cantor για πληθαρίθμους) ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί είναι «λίγοι» σε σύγκριση με τους υπερβατικούς. (Ωστόσο η θεωρία του Cantor δεν θα μας δίνει τρόπο να αποδεικνύουμε το υπερβατικό ή όχι συγκεκριμένων αριθμών).

Ας έρθουμε στο περίφημο θεώρημα του Liouville που χαρακτηρίζει τους αλγεβρικούς αριθμούς τάξης n. Από αυτό το θεώρημα θα βρούμε τον πρώτο υπερβατικό αριθμό που κατασκευάστηκε ποτέ.

Θεώρημα

Αν ξ αλγεβρικός αριθμός τάξης n τότε υπάρχει σταθερά M (που εξαρτάται μόνο από τον ξ) τέτοια ώστε για κάθε ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha \in Z,\ \beta \in N)$ ισχύει:

$$\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}$$

Απόδειξη

Έστω ότι ο ξ ικανοποιεί την πολυωνυμική εξίσωση $p(x)=0$, όπου p n-βαθμού με ακεραίους συντελεστές: $p(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_0$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha \in Z,\ \beta \in N)$.

α' περίπτωση: $\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| > 1$. Τότε για οποιοδήποτε $M>1$ ισχύει ακόμη περισσότερο ότι $\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}$ και δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε.

β' περίπτωση: $\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| \leq 1$. Τότε $\frac{\alpha}{\beta} \in [\xi - 1,\ \xi + 1]$. Στο διάστημα αυτό το $p'(x)\left(= \frac{d}{dx}\, p(x)\right)$ είναι φραγμένο (σαν πολυώνυμο).

Οπότε $\exists$ M με $|p'(x)| \leq M$ $(\xi - 1 \leq x \leq \xi + 1)$.

Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $y \in [\xi - 1, \xi + 1]$ τέτοιο ώστε:

$$\left|p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| = \left|p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - p(\xi)\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - \xi\right| \cdot |p'(y)| \leq \left|\frac{\alpha}{\beta} - \xi\right| \cdot M$$

$$\Rightarrow \left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M}\left|p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| = \frac{1}{M\beta^n}\left|\beta^n p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| \quad (*)$$

Η εξίσωση όμως p(x)=0 δεν έχει ρίζα το $\frac{\alpha}{\beta}$ (δέστε την παρατήρηση στην προπροηγούμενη σελίδα). Επίσης, επειδή οι συντελεστές του p είναι ακέραιοι, θα έχουμε:

$$\beta^n p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\beta^n\left(a_n\frac{\alpha^n}{\beta^n}+\ldots+a_0\right)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}\beta+\ldots+a_0\beta^n=\text{ακέραιος}$$

Αφού λοιπόν το $\beta^n p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι ακέραιος και μάλιστα $\neq 0$, θα ικανοποιεί

$$\left|\beta^n p\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| \geq 1.$$

Η (*) τότε γίνεται $\quad \left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}.$

Οι δύο περιπτώσεις μαζί αποδεικνύουν το θεώρημα.

Πόρισμα

Ο αριθμός $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{10^{\kappa!}}$ $\left(=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^{24}}+\ldots\ =0{,}11000100\ldots 0\underset{\underset{24}{\uparrow}}{1}00\ldots\right)$ είναι υπερβατικός.

Απόδειξη

Έστω ότι ο αριθμός αυτός ξ ήταν αλγεβρικός και έστω ότι η τάξη του ήταν n.

Από το προηγούμενο θεώρημα ∃ Μ με $\left|\xi-\frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}$ $(\alpha\in Z,\ \beta\in N)$.

Εξετάζουμε τον ρητό $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2!}}+\ldots+\frac{1}{10^{m!}}=\frac{a_m}{10^{m!}}$ με $a_m\in N$.

Γι' αυτόν θα ισχύει $\left|\xi-\frac{a_m}{10^{m!}}\right| \geq \frac{1}{M10^{m!n}}$

Απ' την άλλη ισχύει :

$$\left|\xi-\frac{a_m}{10^{m!}}\right|=\left|\frac{1}{10^{(m+1)!}}+\frac{1}{10^{(m+2)!}}+\ldots\right| \leq \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\right) < \frac{2}{10^{(m+1)!}}=\frac{2}{10^{m!(m+1)}}.$$

Έτσι για κάθε $m \in N$ θα είχαμε:

$$\frac{1}{M10^{m!n}} \leq \left|\xi - \frac{a_m}{10^{m!}}\right| < \frac{2}{10^{m!(m+1)}} \Rightarrow 2 \geq \frac{1}{M}10^{m!(m+1-n)},$$ που είναι άτοπο,

διότι $10^{m!(m+1-n)} \to +\infty$ καθώς $m \to +\infty$

Όμοια αποδεικνύεται ότι αν $n \in N$, $n \neq 1$ τότε ο $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\kappa!}}$ είναι υπερβατικός.

Γενικότερα, αν $a_\kappa \in \{1,2,3,...,9\}$ $(\kappa \in N)$ τότε ο $\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{a_\kappa}{n^{\kappa!}}$ είναι υπερβατικός.

Ακολουθεί το κλασικό θεώρημα του Hermite για την υπερβατικότητα του e. Η απόδειξη που παραθέτουμε δεν είναι η αρχική, αλλά οφείλεται στον Hurwitz.

Θεώρημα (Hermite, 1873)
Ο e είναι υπερβατικός.

Απόδειξη. (Hurwitz, 1893) (μόνο τα ουσιαστικά βήματα).
Έστω, αντίθετα, ότι ο e ήταν ρίζα του p(x), όπου $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$ με $a_\kappa \in Z$, $a_n = 0$. Ορίζουμε:

$$f(x) = \frac{x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p...(x-n)^p}{(p-1)!}$$

όπου p περιττός πρώτος που θα τον διαλέξουμε αργότερα.
Ορίζουμε:

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f^{(2)}(x) + ... + f^{(np+p-1)}(x) \qquad (1)$$

οπότε

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}f(x)$$

άρα

$$\sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa e^\kappa\left(\int_0^\kappa e^{-x}f(x)dx\right) = \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa e^\kappa\left(e^{-0}F(0) - e^{-\kappa}F(\kappa)\right) =$$

$$= F(0)\sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa e^\kappa - \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa\ F(\kappa) \qquad (2)$$

Αλλά $\sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa e^\kappa = p(e) = 0$ (διότι το e είναι ρίζα του p).

Αντικαθιστώντας την F στην (2) από την (1) βρίσκουμε:

$$\sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa e^\kappa \left(\int_0^\kappa e^{-x} f(x)\,dx \right) = -\sum_{\kappa=0}^{n} \sum_{i=0}^{np+p-1} a_\kappa f^{(i)}(\kappa) \qquad (3)$$

Με απλές πράξεις αποδεικνύεται ότι για $\begin{cases} 0 \le \kappa \le n \\ 0 \le i \le np+p-1 \end{cases}$

ο αριθμός $f^{(i)}(\kappa)$ είναι ακέραιος. Ακόμη περισσότερο αποδεικνύεται ότι για τα (i, κ) αυτά, οι αριθμοί $f^{(i)}(\kappa)$ είναι πολλαπλάσια του p εκτός ίσως από την περίπτωση (i, κ)=(p-1, 0). Για i=p-1, κ=0 έχουμε :

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p (-2)^p \dots (-n)^p \implies p \nmid f^{(p-1)}(0) \quad \text{αν } p > n.$$

Διαλέγοντας το p κατάλληλα μεγάλο $\left(p > |a_0| \neq 0\right)$ βλέπουμε ότι το δεξί μέλος της (3) είναι $\neq 0$ (σαν άθροισμα πολλαπλασίου του p και του $-a_0 f^{(p-1)}(0)$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του p).

Το άτοπο θα προκύψει αποδεικνύοντας ότι το αριστερό μέλος της (3) είναι κατά απόλυτο τιμή αριθμός μεταξύ 0 και 1, ενώ συγχρόνως είναι ακέραιος.

Για $0 < x < n$ έχουμε:

$$f(x) < \frac{n^{p-1} \cdot n^p \cdot \ldots \cdot n^p}{(p-1)!} = \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!}$$

$$\implies \left| \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa e^\kappa \left(\int_0^\kappa e^{-x} f(x)\,dx \right) \right| \le \sum_{\kappa=0}^{n} |a_\kappa| e^\kappa \cdot \kappa \cdot 1 \cdot \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!}$$

$$\le \left(\sum_{\kappa=0}^{n} |a_\kappa| \right) e^n \frac{n^{(n+1)p}}{(p-1)!} = c \cdot \frac{d^p}{(p-1)!}$$

όπου c,d σταθερές. Αλλά για κατάλληλα μεγάλο p έχουμε $0 < c\dfrac{d^p}{(p-1)!} < 1$ $\left(\text{διότι } \dfrac{d^p}{(p-1)!} \to 0 \right)$, άτοπο.

ΣΤΗΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΛΥΜΠΙΑΔΩΝ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ

Η ύλη της στήλης του παρόντος τεύχους διακρίνεται στις εξής δύο θεματικές ενότητες:

Α. «Η αρχή του Dirichlet» ή «Η αρχή των θυρίδων (κουτιών)» – 2ο Μέρος

Β. «Λύσεις και σχόλια πάνω σ' ενδιαφέροντα Ολυμπιακά θέματα».

Α. «Η αρχή του Dirichlet» ή «Η αρχή των θυρίδων (κουτιών)» (pigeonhole or box principle) – 2ο Μέρος

Στο προηγούμενο διπλό (2ο-3ο) τεύχος του «Θεαίτητου» δημοσιεύθηκε το 1ο Μέρος του παρόντος άρθρου.

Σκοπός μας ήταν και είναι να δείξουμε το πόσο χρήσιμη είναι η εφαρμογή της **«αρχής του Dirichlet»** στην επίλυση διαφόρων φαινομενικά ή πραγματικά δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων, όπως αυτά που προτείνονται σε Μαθηματικές Ολυμπιάδες, εθνικές και διεθνείς.

Το 1ο Μέρος του άρθρου άρχισε με την **απλούστατη** απόδειξη της **«αρχής του Dirichlet»** κι ακολούθησαν 6 προβλήματα με τις λύσεις τους.

Τώρα θα συνεχίσουμε τη συζήτηση ενδιαφερόντων προβλημάτων, αφού επαναλάβουμε την εν λόγω αρχή:

«Αν $\kappa\nu+1$ αντικείμενα ($\kappa \geq 1$) τοποθετηθούν σε κ θυρίδες, τότε μία τουλάχιστον απ' αυτές περιέχει τουλάχιστον $\kappa+1$ αντικείμενα».

Αρχίζοντας την παρουσίαση και μελέτη των προβλημάτων, θ' άξιζε ν' αναφέρουμε και τ' ακόλουθα:

Σ.τ.Ε.: Ο ΓΙΩΡΓΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ είναι τελειόφοιτος της Νομικής Σχολής του Πανεπιστήμιου Αθηνών.

Το πρόβλημα Νο 6 του 1ου Μέρους (βλ. το προηγούμενο τεύχος) είχε ως εξής: **«Δίνονται δεκατρείς διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί. Δείξτε ότι ανάμεσά τους υπάρχουν τουλάχιστον δύο, έστω οι x και y, οι οποίοι ικανοποιούν την ανισότητα:**

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ ».}$$

Τότε, στην Σημείωση Νο 2 της σελ. 428 έγραψα:

«Το Πρόβλημα Νο 6 είναι όμοιο με το Πρόβλημα Νο 5 της 16ης Καναδικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (στην εκφώνηση του προκειμένου προβλήματος αντί για 13 δίνονται 7 πραγματικοί αριθμοί)».

Στο διάστημα που μεσολάβησε από την έκδοση και κυκλοφορία του προηγουμένου «Θεαίτητου», θέματα διαφόρων μαθηματικών διαγωνισμών από κάθε γωνιά της γης, είδαν το φως της δημοσιότητας στις στήλες γνωστών ξενόγλωσσων μαθηματικών περιοδικών. Ένα απ' αυτά, το «Crux Mathematicorum», που εκδίδεται από την «Μαθηματική Εταιρεία του Καναδά» («Canadian Mathematical Society»), έχει ως μόνιμη στήλη κάθε τεύχους του την «Ολυμπιακή Γωνιά» («The Olympiad Corner»).

Απ' αυτή τη «Γωνιά», το τεύχος του Μαρτίου 1991 του «Crux» πρότεινε στους λύτες-αναγνώστες του τα θέματα του «Interschool Mathematical Competition 1989», ενός διαγωνισμού που οργανώνεται και διεξάγεται από την «Μαθηματική Εταιρεία της Σιγκαπούρης» («Singapore Mathematical Society»).

Το Πρόβλημα Νο 3 του διαγωνισμού είναι το ακόλουθο:

« (α) Δείξτε ότι

$$\text{εφ}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

(β) Δοθέντων δεκατριών διαφορετικών πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι ανάμεσά τους υπάρχουν τουλάχιστον δύο, έστω οι x και y, οι οποίοι ικανοποιούν την ανισότητα:

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \text{ ».}$$

Το ίδιο (!) λοιπόν πρόβλημα προτείνεται σ' έναν ακόμα μαθηματικό διαγωνισμό, με τη διαφορά ότι αυτή τη φορά η εκφώνηση περιλαμβάνει δύο ερωτήματα με στόχο αφενός μεν να βοηθήσει τον διαγωνιζόμενο να κερδίσει κάποιους βαθμούς (αφού η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι εύκολη), αφετέρου δε να τον οδηγήσει να σκεφθεί την **«αρχή του Dirichlet»** σαν μέθοδο απόδειξης της ανισότητας, που περιγράφεται στο δεύτερο ερώτημα!

Συμπεράσματα:

(i) Τα προβλήματα που η λύση τους στηρίζεται στην εφαρμογή της «αρχής των θυρίδων» κατέχουν μια σημαντική και σταθερή θέση στη θεματογραφία των Μαθηματικών Ολυμπιάδων, εθνικών και διεθνών.

(ii) Η επανάληψη προβλημάτων που έχουν ήδη προταθεί σε προηγούμενους μαθηματικούς διαγωνισμούς έχει γίνει ένα συχνό, όσο κι ανησυχητικό φαινόμενο. Αυτή τη στιγμή γίνονται πολλοί μαθηματικοί διαγωνισμοί σ' όλη την υφήλιο, ενώ πολλά είναι τα βιβλία και τα περιοδικά, που δημοσιεύουν θέματα μαθηματικών διαγωνισμών και δύσκολα εν γένει μαθηματικά προβλήματα. Ο καθηγητής M.S. Klamkin στο θαυμάσιο άρθρο του, «Problem Proposing and Mathematical Creativity» (βλ. «Crux Mathematicorum», στήλη: «The Olympiad Corner», December 1986, σελ. 264-281), αναφέρει τα εξής:

«Ο μόνος ασφαλής τρόπος για την εξάλειψη του φαινομένου είναι τα θέματα που προτείνονται είτε νάναι εντελώς νέα, είτε να στηρίζονται σε κάποια ωραία συμπεράσματα όχι πρόσφατων μαθηματικών εργασιών».

Αλλά ας προχωρήσουμε επιτέλους (!) στα νέα μας προβλήματα:

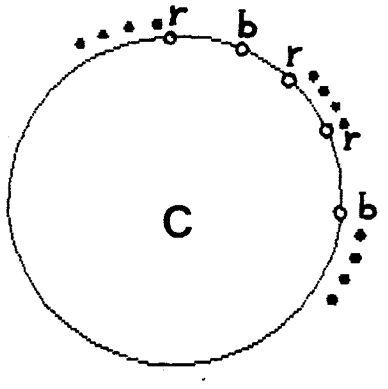
Πρόβλημα Νο 1

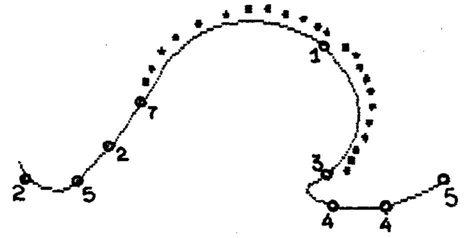
α) Η «ιστορία » του προβλήματος.

Το ακόλουθο πρόβλημα είναι το Νο 817 της στήλης «Problems», του «Crux Mathematicorum», 1984, σελ. 157. Προτάθηκε από τον Stanley Rabinowitz και λύθηκε από τους καθηγητές M.S. Klamkin και A. Meir, του Πανεπιστημίου της Alberta,του Καναδά. Αναδημοσιεύθηκε στο εξαίρετο βιβλίο του Ross Honsberger, «More Mathematical Morsels», Dolciani Mathematical Exprositions - No 10, MAA, 1991.

Το επέλεξα γιατί, πέρα από την εφαρμογή της «αρχής του Dirichlet», που απαιτείται για την απάντηση του πρώτου ερωτήματος, η απάντηση του δευτέρου ερωτήματος καθίσταται δυνατή χάρη στην εφαρμογή ενός θεωρήματος του διάσημου μαθηματικού Van der Waerden, που θάταν χρήσιμο να διδαχθούν οι αναγνώστες του «Θεαίτητου».

(β) Η εκφώνηση του προβλήματος.

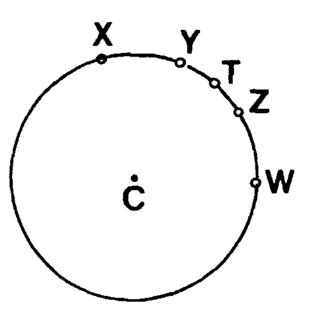




« (i) Ας υποθέσουμε ότι κάθε σημείο της περιφερείας ενός κύκλου C χρωματίζεται με κόκκινο ή μπλε. Αποδείξτε ότι, ανεξαρτήτως της διατάξεως των χρωμάτων, υπάρχουν 3 σημεία, τα οποία, «ισαποστασιακά» διατεταγμένα κατά μήκος της περιφερείας (δηλ. έτσι ώστε το πρώτο ν' απέχει από το δεύτερο, όσο και το δεύτερο από το τρίτο), είναι ομοιόχρωμα (δηλ. έχουν όλα τους το ίδιο χρώμα).

(ii) Πιο γενικά, ας υποθέσουμε ότι κάθε σημείο μιας εχούσης μήκος καμπύλης (τα διαστήματα κατά μήκος της καμπύλης είναι ορισμένα) χρωματίζεται μ' ένα από τα κ διαφορετικά χρώματα 1, 2, ..., κ, όπου κ είναι ακέραιος > 1. Τότε για κάθε ακέραιο r >2, αποδείξτε ότι r σημεία, «ισαποστασιακά» διατεταγμένα κατά μήκος της καμπύλης, είναι ομοιόχρωμα».

(γ) Η λύση του προβλήματος.



(i) Βάσει της «αρχής του Dirichlet» κάθε σύνολο 3 σημείων της περιφερείας πρέπει να περιέχει 2 σημεία του ιδίου χρώματος. Τότε από ένα σύνολο τριών σημείων, τα οποία βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο, μπορούμε να πάρουμε 2 σημεία

(Σ.τ.Ε.) Αναγνωρίζω θετική τη βοήθεια του Γιάννη Πλακίδα - Προϊσταμένου του τμήματος Δομικών - σε ό,τι αφορά το θέμα των σχημάτων.

του ιδίου χρώματος, τα οποία βρίσκονται τόσο κοντά το ένα στο άλλο, όσο επιθυμούμε.

Επομένως, έστωσαν Y και Z τα 2 σημεία του ιδίου χρώματος, τα οποία είναι αρκετά κοντά το ένα στο άλλο, έτσι ώστε να υπάρχει χώρος (τόξο) πάνω στην περιφέρεια, που να επιτρέπει την διάταξη της τετράδας των «ισαποστασιακά» διατεταγμένων σημείων (X, Y, Z, W).

Τότε, εάν οποιοδήποτε από τα X, T ή W είναι επίσης κόκκινο, έχουμε ήδη προσδιορίσει μια τριάδα «ισαποστασιακά» διατεταγμένων κόκκινων σημείων· διαφορετικά, το (X, T, W) είναι μια τριάδα «ισαποστασιακά» διατεταγμένων μπλε σημείων.

(ii) Ο χρωματισμός των σημείων της καμπύλης C με κ χρώματα είναι απλώς ένας ειδικός τρόπος της διαμερίσεως των σημείων της C σε κ τάξεις (κλάσεις) — όπου η τάξη i αποτελείται απ' όλα τα σημεία, που χρωματίζονται με i. Πρέπει ν' αναφέρουμε στο σημείο αυτό ένα περίφημο θέωρημα του Van der Waerden, που αφορά τις διαμερίσεις.

Το θεώρημα αυτό αναφέρει ότι, δοθέντων των θετικών ακεραίων κ και r, υπάρχει ως άνω φράγμα, ως άνω όριο, ως μεγαλύτερος αριθμός ένας αριθμός n, που εξαρτάται από τους κ και r, έτσι ώστε, ανεξαρτήτως του πώς διαμερίζονται οι αριθμοί 1, 2, ...,n σε κ τάξεις, τουλάχιστον μια απ' αυτές θα περιέχει μια αριθμητική πρόοδο, που θάχει τουλάχιστον r όρους. Δεν υπάρχει τύπος για τον υπολογισμό του n από τους κ και r · πάντως και μόνη η ύπαρξη ενός τέτοιου αριθμού είναι αρκετή για τον επιδιωκόμενο σκοπό.

Όσο μεγάλος κι αν χρειάζεται νάναι ο n, ώστε να μπορεί να «προσαρμοσθεί» στους δοθέντες κ και r, μπορούμε να επιχειρήσουμε κατά μήκος της καμπύλης C **τόσες** μικρές «αυξήσεις», **όσες** απαιτούνται για να ορίζεται ένα σύνολο n «ισαποστασιακά» διατεταγμένων σημείων P_1, P_2,..., P_n πάνω σ' αυτήν. Τα κ χρώματα διαμερίζουν αυτά τα n σημεία σε κ τάξεις, μια από τις οποίες, σύμφωνα με το θεώρημα του Van der Waerden, περιέρχει r σημεία, διατεταγμένα κατ' αριθμητική πρόοδο:

$$S = \left\{P_a,\ P_{a+d},\dots,P_{a+(r-1)d}\right\}.$$

Επειδή όλα τα σημεία του συνόλου $\{P_i\}$ είναι «ισαποστασιακά» (δηλαδή τα σημεία βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις το καθένα από το αμέσως επόμενο) διατεταγμένα κατά μήκος της C, τα σημεία του υποσυνόλου S θα είναι επίσης «ισαποστασιακά» διατεταγμένα και ανήκοντας στην ίδια τάξη (κλάση), θάχουν όλα τους το ίδιο χρώμα.

Πρόβλημα Νο 2

(α) Η «ιστορία» του προβλήματος.

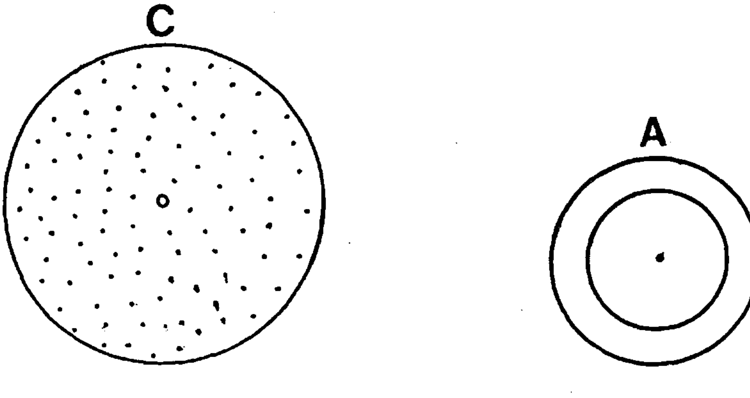
Το παρόν πρόβλημα πρωτοδημοσιεύθηκε στο εξαίρετο σοβιετικό περιοδικό «KVANT» (1977, Νο 8, 46, Μ 419). Ο Viktors Linis του Πανεπιστημίου της Ottawa «ανακάλυψε» το πρόβλημα και το πρότεινε στο περιοδικό «Crux Mathematicorum», όπου και δημοσιεύθηκε ως Νο 45 Πρόβλημα της ομώνυμης στήλης «Problems». Τέλος, το πρόβλημα περιλαμβάνεται στο βιβλίο του Ross Honsberger, «More Mathematical Morsels», Dolciani Mathematical Expositions - No 10, MAA, 1991.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λύση του προβλήματος, που πρωτοδημοσίευσε το «KVANT», ανήκει στην I. Klimova.

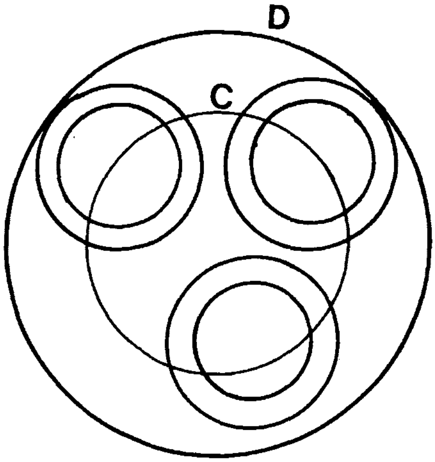
(β) Η εκφώνηση του προβλήματος.

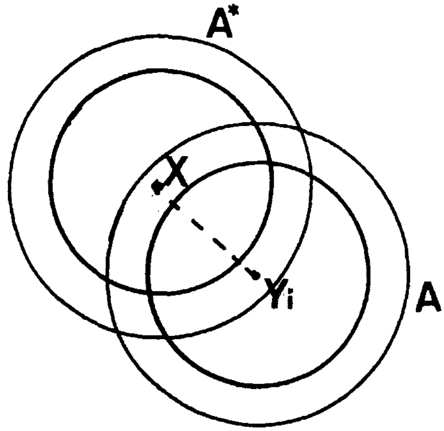
«Έχουμε έναν κύκλο C ακτίνας 16 κι έναν δακτύλιο Α εσωτερικής ακτίνας 2 κι εξωτερικής ακτίνας 3. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ένα σύνολο 650 σημείων έχει συγκεντρωθεί στο εσωτερικό του C.

Αποδείξτε ότι, ανεξαρτήτως του τρόπου με τον οποίο τα σημεία του συνόλου S διασκορπίζονται πάνω στον κύκλο C, ο δακτύλιος Α μπορεί να τοποθετηθεί έτσι, ώστε να καλύπτει τουλάχιστον 10 από τα σημεία του S».



(γ) Η λύση του προβλήματος.





Ας υποθέσουμε ότι καθένα από τα 650 σημεία γίνεται κέντρο αντιστοίχου δακτυλίου, αντιγράφου του A. Σ' ένα σημείο κοντά στην άκρη, ο δακτύλιος βγαίνει έξω από την περιφέρεια του κύκλου C. Πάντως, αφού το κέντρο του πρέπει νάναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C, θα εκτείνεται πέραν του κύκλου κατά διάστημα μικρότερο της εσωτερικής του ακτίνας 3 κι επομένως ένας ομόκεντρος κύκλος D ακτίνας 19 θα περιέχει σίγουρα και τους 650 δακτυλίους - αντίγραφα του A στο εσωτερικό του.

Το εμβαδόν του A είναι:

$$\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 2^2 = 5\pi .$$

Άρα τα 650 αντίγραφα του A καλύπτουν τον κύκλο C κατά μια συνολική επιφάνεια:

$$650(5\pi) = 3250\,\pi .$$

Τώρα, εάν κανένα σημείο του D δεν σκεπάζεται κάτω από περισσότερα από 9 αντίγραφα του A, τότε η συνολική επιφάνεια που καλύπτει τον D δεν μπορεί ν' ανέρχεται σε περισσότερες από 9 φορές την επιφάνειά του, που σημαίνει, συνολικά:

$$9(\pi \cdot 19^2) = 9(361\pi) = 3249\,\pi .$$

Τότε μια επιφάνεια 3250π πρέπει να «συσσωρεύει» («στοιβάζει») τουλάχιστον 10 αντίγραφα του δακτυλίου A σε κάποιο σημείο X του D. (Πρόκειται για μια συνέπεια της αρχής του Dirichlet).

Εάν Y_i είναι το κέντρο του δακτυλίου ο οποίος καλύπτει ένα τέτοιο σημείο X, τότε η απόσταση XY_i πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς 2 και 3.

Συνεπώς, εάν κάνουμε κέντρο ενός αντιγράφου του Α, έστω του δακτυλίου Α*, το Χ αντί για το Y_i, τότε ο Α* θα καλύπτει το Y_i.

Αφού υπάρχουν τουλάχιστον 10 δακτύλιοι που καλύπτουν το Χ, τότε ο ειδικός δακτύλιος Α*, με κέντρο το Χ, καλύπτει τα 10 ή περισσότερα κέντρα τους, $Y_1, Y_2, \ldots$, έκαστο των οποίων ανήκει στο δοθέν σύνολο S.

Πρόβλημα Νο 3

(α) Η «ιστορία» του προβλήματος.

Το πρόβλημα αυτό προτάθηκε από το Ισραήλ στη «Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα» του 1985, αλλά δεν χρησιμοποιήθηκε από την επιτροπή θεμάτων σαν πρόβλημα του διαγωνισμού.

Αναδημοσιεύθηκε στο βιβλίο του Ross Honsberger, «More Mathematical Morsels», Dolciani Mathematical Expositions - No 10, MAA, 1991.

(β) Η εκφώνηση του προβλήματος.

«Στην τύχη επιλέγονται 1985 σημεία στο εσωτερικό ενός κύβου ακμής μήκους1. Δείξτε ότι είναι πάντοτε δυνατόν να επιλέξει κανείς 32 από τ' ανωτέρω σημεία, έτσι ώστε, ανεξαρτήτως της σειράς επιλογής των, η περίμετρος του 32-γωνου, το οποίο ορίζουν, νάναι μικρότερη από $8\sqrt{3}$».

(γ) Η λύση του προβλήματος.

Από την αρχή υποψιάζεται κανείς, πως «η αρχή του Dirichlet» βρίσκεται στην καρδιά της λύσης του προβλήματος. Όμως τα πράγματα δεν είναι εντελώς ξεκάθαρα από την πρώτη κιόλας ματιά!

Αν διαιρέσουμε το 1985 δια του 31 (όχι δια του 32) θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα έναν αριθμό λίγο μεγαλύτερο από το 64 (ήτοι 64,0322...).

Αυτό συνεπάγεται ότι αν, αντίστροφα, διαιρέσουμε το 1985 δια του 64, θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα έναν αριθμό λίγο μεγαλύτερο από το 31 (ήτοι 31,0156).

Επομένως, εάν ο κύβος ακμής μήκους 1 διαιρεθεί σε 64 τμήματα (κομμάτια, «διαμερίσματα») κι επιλεγούν 1985 σημεία, κάποιο τμήμα θα πρέπει να περιέχει περισσότερα από 31 σημεία, δηλαδή τουλάχιστον 32.

Η λύση πλέον προβάλλει ξεκάθαρα!

Ο προφανής τρόπος για να διαιρέσουμε τον κύβο σε 64 τμήματα είναι να τον διαιρέσουμε σε 64 μικρούς $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ κύβους.

Δύο σημεία τα οποία ανήκουν στον ίδιο μικρό κύβο δεν είναι δυνατόν ν' απέχουν μεταξύ τους περισσότερο από

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

και μόνο ένα ζεύγος διαμετρικά αντίθετων κορυφών μπορεί να βρίσκεται σ' αυτή την απόσταση.

Έτσι η περίμετρος κάθε 32-γωνου που περιέχεται σ' έναν μικρό κύβο δεν μπορεί νάναι ποτέ μεγαλύτερη από $32\left(\frac{1}{4}\sqrt{3}\right) = 8\sqrt{3}$, αφού μόνον 8 από τις κορυφές του μπορούν νάναι και κορυφές του μικρού αυτού κύβου.

Πρόβλημα Νο 4

(α) Η «ιστορία» του προβλήματος.

Το πρόβλημα αυτό είναι το Νο 5 Πρόβλημα της «Μαθηματικής Ολυμπιάδαςτων ΗΠΑ» του 1978. Περιλαμβάνεται στο βιβλίο, «USA MATHEMATICAL OLYMPIADS 1972-1986 – Compiled and with Solutions by M.S. Klamkin», The New Mathematical Library - No 33, MAA, 1988.

Σημειώνουμε προκαταβολικά ότι «η αρχή του Dirichlet» χρησιμοποιείται όχι για τη λύση του προβλήματος, **αλλά για την απόδειξη της γενίκευσής της.**

(β) Η εκφώνηση του προβλήματος.

«Εννέα μαθηματικοί συναντώνται σ' ένα διεθνές συνέδριο κι ανακαλύπτουν ότι σε κάθε τριάδα που σχηματίζουν, οι δύο τουλάχιστον απ' αυτούς μιλούν μια κοινή γλώσσα. Εάν ο καθένας από τους μαθηματικούς μιλάει το πολύ τρεις γλώσσες, αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρεις μαθηματικοί, που μιλούν την ίδια γλώσσα».

(γ) Η λύση του προβλήματος.

Η λύση μας είναι έμμεση! Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν το πολύ 2 μαθηματικοί, οι οποίοι μιλούν μια κοινή γλώσσα. Κάθε μαθηματικός μπορεί να μιλήσει το πολύ σε τρεις άλλους, σε καθέναν στην γλώσσα που αυτός ή αυτή γνωρίζει.

Ας υποθέσουμε ότι ο μαθηματικός M_1 μπορεί να μιλήσει μόνο με τους M_2, M_3 και M_4. Τώρα ο μαθηματικός M_5 μπορεί να μιλήσει με τρεις το πολύ από τους M_2, M_3 και M_4 ή τρεις το πολύ από τους M_6, M_7, M_8 και M_9.

Τότε όμως κάποιος από τους τελευταίους τέσσερις μαθηματικούς δεν θα μπορεί να μιλήσει ούτε με τον M_1, ούτε με τον M_5, πράγμα άτοπο!

(δ) Γενίκευση του προβλήματος και απόδειξή της.

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί ως εξής: «**Βρείτε τον μέγιστο ακέραιο N (t, m, p) με $t \geq 1$, $m \geq 2$, $p \geq 3$, τέτοιον ώστε να υπάρχει ένα σύνολο N ατόμων, που να ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις προϋποθέσεις:**

(i) Κάθε άτομο μιλάει το πολύ t γλώσσες.

(ii) Σε κάθε σύνολο m ατόμων, δύο άτομα μιλούν μια κοινή γλώσσα και

(iii) Δεν υπάρχουν p άτομα, τα οποία να μιλούν μια κοινή γλώσσα».

Το πρόβλημα δηλαδή μετασχηματίζεται στο ακόλουθο:

Δείξτε ότι N (3, 3, 3) < 9.

Πράγματι, N (3, 3, 3)=8. Για να το αποδείξουμε, ας πάρουμε τους M_1, M_2, M_3 και M_4 τέτοιους ώστε κάθε ζεύγος να μπορεί να επικοινωνεί σε μια κοινή γλώσσα.

Έστω επίσης ότι οι M_5, M_6, M_7, και M_8 σχηματίζουν ένα δεύτερο σύνολο με την ίδια ιδιότητα. Τότε, κάθε μαθηματικός μιλάει ακριβώς 3 γλώσσες και κάθε γλώσσα μιλιέται από 2 ακριβώς μαθηματικούς. Τελικώς, κατ' εφαρμογήν «της αρχής του Dirichlet», σε κάθε τριάδα μαθηματικών υπάρχουν 2 που ανήκουν στο ίδιο σύνολο κι έτσι μπορούν κι επικοινωνούν.

Ανάμεσα στα ευρύτερα συμπεράσματα, που προέκυψαν από μια σειρά εργασιών [1, 2, 3, 4] είναι και τ' ακόλουθα:

$N\ (1,m,p) = (m-1)\ (p-1)$

$N\ (t,m,3) = (m-1)\ (t+1)$

$N\ (2,m,p) = 3(m-1)\ (p-1)/2$, εάν $p \equiv 1 \pmod 2$

$\qquad = (m-1)\ (3p-4)/2$, εάν $p \equiv 0 \pmod 2$

$N\ (t,m,4) = (m-1)\ (2t+1)$, εάν $t \equiv 0,1 \pmod 3$

$\qquad = 2(m-1)t$, εάν $t \equiv 2 \pmod 3$

Επίσης διαφορετικά φράγματα προκύπτουν σ' άλλες περιπτώσεις.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1. H.L. Abbott, D. Hanson, A.C. Liu, An extremal problem in graph theory, Quart. J. Math. Oxford Ser. 31 (1980) pp. 1-7.

2. H.L. Abbott, M. Katchalski, A.C. Liu, An extremal problem in graph theory II, J. Austral Math. Soc. (Series A), 29 (1980) p.p. 417-424.

3. H.L. Abbott, M. Katchalski, A.C. Liu, An extremal problem in hypergraph theory, Discrete Math. Anal. and Comb. Comp., Conference proceedings, School of Computer Science, University of New Brunswick, Fredericton, 1980, p.p. 74-82.

4. H.L. Abott, D. Hanson, A.C. Liu, An extremal problem in hypergraph theory II, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 31 (1981), p.p. 129-135.

Πρόβλημα Νο 5

(α) Η «ιστορία» του προβλήματος.

Προχωρούμε τώρα σε μια παραλλαγή του προηγουμένου προβλήματος, που το καθιστά ακόμα πιο δύσκολο κι ενδιαφέρον. Το νέο μας πρόβλημα είναι το Νο 5 της 1ης «Σκανδιναβικής Ολυμπιάδας».

Στο τεύχος του Μαΐου 1990, του περιοδικού «Crux Mathematicorum», στην «Ολυμπιακή Γωνιά» («The Olympiad Corner») δημοσιεύθηκε μια λύση του προβλήματος που ανήκει στον John Morray, ενώ σε σημείωση του υπεύθυνου της στήλης αναφέρθηκε ότι λύσεις έχουν σταλεί επίσης από τον Curtis Cooper κι από τον υπογράφοντα. Εδώ θα σας εκθέσω την λύση που έδωσε ο Morray.

Αξίζει επίσης ν' αναφερθεί ότι μια ενδιαφέρουσα λύση του προβλήματος (χωρίς την χρήση «της αρχής του Dirichlet») δόθηκε από τον καθηγητή της Πολυτεχνικής Σχολής Ξάνθης, κ. Μιχάλη Κεσογλίδη και δημοσιεύθηκε στον «Ευκλείδη Β», 1988, Νο 2, σελ. 23-24.

(β) Η εκφώνηση του προβλήματος.

«Εννέα ξένοι δημοσιογράφοι συναντώνται σε μια συνέντευξη τύπου (press conference). Καθένας απ' αυτούς μιλάει το πολύ τρεις διαφορετικές γλώσσες και κάθε δύο απ' αυτούς μιλούν μια κοινή γλώσσα. Αποδείξτε ότι τουλάχιστον πέντε απ' αυτούς μιλούν την ίδια γλώσσα».

(γ) Η λύση του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι καμμιά γλώσσα δεν μιλιέται από περισσότερους από τέσσερις δημοσιογράφους. Αυτό προϋποθέτει ότι:

(i) κάθε δημοσιογράφος μιλάει ακριβώς τρεις γλώσσες (γιατί εάν κάποιος δημοσιογράφος μιλάει το πολύ δύο γλώσσες, σύμφωνα με την «αρχή του Dirichlet», τουλάχιστον τέσσερις από τους υπόλοιπους οκτώ δημοσιογράφους μιλούν μία από τις γλώσσες του) και

(ii) δεν υπάρχει γλώσσα που να μιλιέται από λιγότερους από τρεις δημοσιογράφους (γιατί εάν κάποια γλώσσα μιλιέται από δύο το πολύ δημοσιογράφους, ας πούμε τους A και B, τουλάχιστον τέσσερις από τους υπόλοιπους επτά δημοσιογράφους πρέπει να μιλούν μία από τις δύο εναπομείνουσες γλώσσες, που μιλιούνται, ας πούμε, από τον A).

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό των γλωσσών, η (i) μας δίνει ότι $3x+4y=9\cdot 3$, όπου x και y είναι ο αριθμός των γλωσσών, ενώ 3 και 4 είναι οι αριθμοί των δημοσιογράφων αντιστοίχως.

Αφού κάθε ζεύγος δημοσιογράφων μπορεί να μιλήσει μια κοινή γλώσσα, ισχύει επίσης ότι:

$$\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}y\geq\binom{9}{2}$$

ή $x+2y\geq 12$. Τότε η μόνη λύση είναι $x=1$, $y=6$.

Χωρίς ν' αποβαίνει σε βάρος της γενίκευσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ℓ_0 είναι η γλώσσα που μιλιέται από τρεις ακριβώς δημοσιογράφους και ότι οι $\ell_1,\dots,\ell_6$ είναι εκείνες οι γλώσσες που μιλιούνται από τέσσερις ακριβώς δημοσιογράφους.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι η ℓ_0 μιλιέται από καθέναν από τους j_1, j_2 και j_3 και ότι οι υπόλοιποι δημοσιογράφοι είναι οι $j_4, j_5,\dots, j_9$. Τώρα, για κάθε i=0, 1, 2, έξι δημοσιογράφοι χωρίζονται σε δύο ομάδες των τριών αναλόγως της κοινής γλώσσας που μιλούν με τον j_i, ενώ οι έξι γλώσσες $\ell_1,\dots,\ell_6$ χωρίζονται σε ομάδες των δύο ανάμεσα στους j_1, j_2 και j_3, έτσι ώστε, χωρίς κανένα πρόβλημα, να λέμε ότι ο j_1 μιλάει τις $\{\ell_0,\ell_1,\ell_2\}$, ο j_2 μιλάει τις $\{\ell_0,\ell_3,\ell_4\}$ και ο j_3 μιλάει τις $\{\ell_0,\ell_5,\ell_6\}$.

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι j_4, j_5 και j_6 μιλούν την ℓ_1 ενώ οι j_7, j_8 και j_9 μιλούν την ℓ_2. Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν οι j_4, j_5 και j_6 να μιλούν την ℓ_3, γιατί τότε οι j_7, j_8 και j_9 πρέπει να μιλούν την ℓ_4, πράγμα που θα εξανάγκαζε και τους έξι από τους $j_4,\dots, j_9$ να μιλούν την ίδια γλώσσα.

Χωρίς κανένα πρόβλημα, έχουμε ότι η ℓ_3 μιλιέται από τους j_4, j_7 και j_8 και ότι η ℓ_4 μιλιέται από τους j_5, j_6 και j_9.

Αλλά τότε οι j_5, j_6, j_8 και j_9πρέπει να μιλούν μια κοινή γλώσσα κι αυτή πρέπει νάναι μία από τις ℓ_5 και ℓ_6, οπότε μια απ' αυτές τις δύο μιλιέται τελικά από πέντε δημοσιογράφους (περιλαμβανομένου του j_3).

Β. «Λύσεις και σχόλια πάνω σ' ενδιαφέροντα Ολυμπιακά θέματα»

Συχνά κάποια από τα προβλήματα που προτείνονται σε μαθηματικούς διαγωνισμούς (τοπικούς, εθνικούς ή διεθνείς) προκαλούν ενδιαφέρουσες συζητήσεις.

Οι λόγοι γι' αυτό είναι πολλοί.

Αναφέρουμε ενδεικτικά μερικούς απ' αυτούς :

(i) Ένα πρόβλημα είναι μερική περίπτωση ενός γενικότερου προβλήματος ή συμπεράσματος, που ενδεχομένως είναι ή υπήρξε αντικείμενο ερευνητικού ενδιαφέροντος.

(ii) Ένα πρόβλημα μπορεί να ενταχθεί σε μια ευρύτερη κατηγορία προβλημάτων του αυτού ή παρεμφερούς τύπου.

(iii) Ένα πρόβλημα μπορεί να επιδέχεται περισσότερες της μίας ενδιαφέρουσες λύσεις· ίσως μάλιστα κάποιες απ' αυτές νάναι εξαιρετικά πρωτότυπες· ίσως και πιο «ευφυείς», πιο «κομψές» από εκείνη που είχε υπόψη της η επιτροπή του μαθηματικού διαγωνισμού, που το πρότεινε.

Σήμερα θα παρουσιάσουμε δύο ενδιαφέροντα προβλήματα και θα «συζητήσουμε» πάνω σ' αυτά.

(α) «Το 3ο Πρόβλημα της 27ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας (Βαρσοβία 1986)»

Εκφώνηση

«Σε κάθε κορυφή κανονικού πενταγώνου αντιστοιχούμε έναν ακέραιο αριθμό, έτσι ώστε το άθροισμα αυτών των πέντε αριθμών νάναι θετικό. Εάν σε τρεις διαδοχικές κορυφές αντιστοιχούν οι αριθμοί x, y, z και y<0, τότε επιτρέπεται η ακόλουθη «πράξη»: Οι αριθμοί x, y, z αντικαθίστανται από τους αριθμούς x+y, -y, z+y αντίστοιχα. Αυτή η «πράξη» επαναλαμβάνεται εφόσον υπάρχει έστω κι ένας αρνητικός αριθμός ανάμεσα στους πέντε. Να

διαπιστωθεί αν αυτή η διαδικασία θα τερματισθεί αναγκαστικά μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων (αντικαταστάσεων)».

1η Λύση

Κατ' αρχήν θα παρουσιάσουμε τη λύση που έδωσε ο Joseph Keane, μέλος της ομάδας των Η.Π.Α. Η λύση αυτή κέρδισε το μοναδικό «ειδικό βραβείο», που απονεμήθηκε σ' αυτή τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Ας ξεκινήσουμε ως εξής τον συλλογισμό μας. Το κλειδί για τη λύση του προβλήματος είναι να βρεθεί (επινοηθεί) μία ακεραίων τιμών, μη αρνητική συνάρτηση $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ της οποίας η τιμή φθίνει όταν εκτελείται η δοθείσα «πράξη».

Ας υποθέσουμε ότι η f εκφράζει το άθροισμα των απολύτων τιμών των πέντε αριθμών. Όταν εκτελείται η «πράξη» (δηλαδή η αντικατάσταση), η τιμή της εν λόγω συνάρτησης φθίνει (μειώνεται) κατά $|x| + |z| - |x + y| - |y + z|$. Η αλγεβρική αυτή έκφραση δεν είναι πάντοτε θετικός αριθμός και γι' αυτό θα πρέπει να τροποποιήσουμε την αρχική μας υπόθεση.

Σκεπτόμαστε ακολούθως ότι η αναζητούμενη συνάρτηση πρέπει να «εκφράζει» την απόλυτη τιμή των αθροισμάτων των «ζευγών» («ζεύγη» είναι οι αριθμοί που προκύπτουν όταν προσθέσουμε δύο από τους πέντε αριθμούς, λαμβανομένους καθ' όλους τους δυνατούς συνδυασμούς) ως κι αυτούς τους πέντε αριθμούς καθεαυτούς.

«Ελέγχοντας» τη συνάρτηση κι ακολουθώντας αυτόν τον τρόπο σκέψης και προσέγγισης του προβλήματος, ανακαλύπτουμε ότι η αναζητούμενη συνάρτηση πρέπει να «εκφράζει» τις απόλυτες τιμές των «τριάδων» (άθροισμα τριών αριθμών) και των «τετράδων» (άθροισμα τεσσάρων αριθμών).

Εν τέλει, δοθέντος ενός πενταγώνου, στις κορυφές του οποίου βρίσκονται οι αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ας ορίσουμε την συνάρτηση f ως

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i \neq j} |s(i, j)|$$

όπου $\quad s(i, j) = x_i + x_{i+1} + \ldots + x_{j-1}, \quad$ για $i \neq j$

κι όπου μέτρο ισοδυναμίας είναι ο αριθμός 5 (δηλαδή modulo 5).

Αν αντιστοιχίσουμε το y στο x_4 βρίσκουμε ότι η δοθείσα «πράξη» (δηλ. αντικατάσταση) μειώνει την τιμή της f κατά

$$|x_5 + x_1 + x_2 + x_3| - |x_5 + x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4| = |s - x_4| - |s + x_4|,$$

όπου $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Αφού $s>0$ και $x_4<0$, έχουμε ότι $|s-x_4|-|s+x_4|>0$.

Επομένως η f έχει την απαιτούμενη ιδιότητα, χάρη στην οποία αποδεικνύεται ότι η «πράξη» μπορεί να επαναληφθεί μόνο μέχρις ενός ορισμένου πεπερασμένου αριθμού βημάτων· μετά θα τερματισθεί αναγκαστικά!

2η Λύση

Το FOCUS είναι ένα διμηνιαίο ενημερωτικό δελτίο, που εκδίδεται από την MAA (Mathematical Association of America) κι αποστέλλεται δωρεάν σε όλα τα μέλη της.

Στο 5ο τεύχος του 1986 το FOCUS δημοσίευσε ένα άρθρο για την 27η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, όπου δίνοντας την εκφώνηση του 3ου προβλήματος, προσκάλεσε - προκάλεσε (!) τους αναγνώστες του να προσπαθήσουν ν' ανακαλύψουν την ευφυή λύση, που επινόησε ο Keane.

Σ' αυτή την πρόσκληση - πρόκληση ανταποκρίθηκαν οι καθηγητές του Stanford University, Robert W. Floyd, Ramsey Haddad και Donald E. Knuth. Θά άξιζε εδώ, ανοίγοντας μια παρένθεση, ν' αναφέρουμε ότι ο Knuth είναι ο συγγραφέας του κλασικού έργου, «The Art of Computer Programming», Addison Wesley (σημειώνεται ότι έχουν εκδοθεί μόνον οι τρεις από τους επτά προγραμματισθέντες τόμους). Το έργο αυτό ενέπνευσε κι εξακολουθεί να εμπνέει όλους τους ασχολουμένους σε βάθος με τον προγραμματισμό των Η.Υ.. Πρόσφατα έγραψε μαζί με τον Ronald Graham (διαπρεπή μαθηματικό των Bell Labs, παγκοσμίως γνωστό για την εργασία του πάνω στην «Ramsey theory», όπως γνωρίζουν όλοι οι ασχολούμενοι με «Combinatorics») και τον Patashnik (επίσης του Stanford University) το αξιολογότατο βιβλίο, «Concrete Mathematics», Addison Wesley· το βιβλίο αυτό συμπληρώνει την ύλη των Μαθηματικών του πρώτου (1ου) τόμου του έργου «The Art of Computer Programming» και φιλοδοξεί να «εξοπλίσει» τους προγραμματιστές με μαθηματικές μεθόδους και τεχνικές, που είναι απαραίτητες για όσους ασχολούνται με **advanced** computer programming (προγραμματισμό «προχωρημένου» επιπέδου).

Έγραψε επίσης την μαθηματική νουβέλα (!), «Surreal numbers», Addison Wesley.

Σημαντικότατη είναι όμως η συμβολή του και στην «computer typography», μέσω των ΤΕΧ και METAFONT, που ο ίδιος επινόησε κι ανέπτυξε.

Άρθρα του συναντά κανείς σε πολλά περιοδικά, ανάμεσα στα οποία και στ' ακόλουθα: «Journal of Recreational Mathematics», «American Mathematical Monthly», «Acta Arithmetica», «Acta Informatica» κ.ά.

Είναι τέλος εξαιρετικός λύτης προβλημάτων (problem - solver) και τ' όνομά του συναντιέται συχνά στις στήλες των μαθηματικών προβλημάτων γνωστών περιοδικών (π.χ. του American Mathematical Monthly», που ήδη προαναφέραμε).

Υπ' αυτή την τελευταία του ιδιότητα μας ενδιαφέρει στην προκειμένη περίπτωση. Αν μας συγχωρηθεί λοιπόν η μεγάλη αυτή παρένθεση κι ας επιστρέψουμε στο θέμα μας.

Οι τρεις προαναφερθέντες επιστήμονες του Stanford University υπέθεσαν ορθά ότι η ευφυής λύση που ζητούσε το «FOCUS» θάπρεπε να στηρίζεται στην εύρεση μιας ακεραίων τιμών, μη αρνητικής συνάρτησης, η οποία φθίνει (δηλ. λαμβάνει φθίνουσες τιμές), όταν εκτελείται η «πράξη». Μ' αυτή τη σκέψη ως αφετηρία βρήκαν την συνάρτηση, που χρησιμοποίησε ο Keane στη λύση του, αλλά και μια ακόμα επίσης!!

Αν κρατήσουμε τους συμβολισμούς της προηγούμενης λύσης, η συνάρτηση αυτή είναι η

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i \neq j} s(i, j)^2 .$$

Τότε, η εκτέλεση της πράξης μειώνει την τιμή της f κατά $4sx_4$, όπου, όπως και πριν, $y = x_4$ και $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Σχόλιο Νο 1 (προσοχή!)

Και στις δύο λύσεις, η παράμετρος «5» μπορεί ν' αντικατασταθεί από κάθε ακέραιο $v \geq 3$.

3η Λύση

Αφού παρουσιάσουμε τώρα την λύση που έδωσε η επιτροπή, θα παραθέσουμε ακολούθως ένα σχόλιο που έκανε ο Donald Knuth και που έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον!

Η λύση της επιτροπής έχει ως εξής:

Έστω $$f = \sum_{i,i=1}^{5} Q_{ij} x_i x_j ,$$

όπου $$Q_{ij} = \begin{cases} a, \text{ εάν } i = j \\ b, \text{ εάν } i \text{ και } j \text{ είναι διαδοχικοί αριθμοί} \\ c, \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση} . \end{cases}$$

Τότε, εφόσον $x_4 = y$, μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε το $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ με το $(x_1,\ x_2,\ x_3 + x_4,\ -x_4,\ x_4 + x_5)$, οπότε η f μειώνεται κατά

$$x_4\left[(c-b)(x_1+x_2)+(2b-2a-c)(x_3+x_4+x_5)\right].$$

Αφού $x_4 < 0$ και $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 0$, μπορεί κάποιος να βεβαιωθεί ότι η f έχει την επιθυμητή ιδιότητα, εάν επιλέξει ακέραιους a, b, c, τέτοιους ώστε $c - b = 2b - 2a - c \langle 0$.

Για παράδειγμα, εάν a=1, b=0 και c=-1, βρίσκουμε ότι η

$$f=\frac{1}{2}\left[(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_1)^2\right]$$

μειώνεται κατά $-sx_4$ σε κάθε βήμα.

Σχόλιο Νο 2 (προσοχή!)

Ο καθηγητής Donald Knuth, αφού «ανακάλυψε - επινόησε» και μελέτησε τις παραπάνω λύσεις, έκανε το ακόλουθο σχόλιο:

«Καμμία από τις παραπάνω μεθόδους λύσεων δεν ισχύει, δεν "λειτουργεί", εάν οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις κορυφές του πενταγώνου δεν είναι ακέραιοι. Κι όμως, αν προβούμε σ' αυτή την τροποποίηση της υπόθεσης του προβλήματος, διαπιστώνουμε ότι το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει, νάναι αληθές».

Για να το αποδείξουμε αυτό ακολουθούμε έναν «δρόμο», μια μέθοδο, που στηρίζεται σε μια ιδέα του Bernard Chazelle, του Princeton University.

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε το άπειρο σύνολο S όλων των αθροισμάτων s (i, j) [βλέπε την λύση Νο 2], όπου $1 \leq i \leq 5$ και $j > i$. Αυτό το σύνολο παραμένει σχεδόν αμετάβλητο, ανέγγιχτο από την εκτελούμενη «πράξη»· πολλά από τα αθροίσματα s (i, j) αλλάζουν αμοιβαίως θέσεις με άλλα, ενώ όλα τα υπόλοιπα, εκτός από ένα, μένουν αμετάβλητα.

Η μόνη αλλαγή στο S είναι ότι, για παράδειγμα, το $s(4,5) = x_4$ αλλάζει σε $-s(4,5)$, όταν το y αντιστοιχεί στο x_4.

Έτσι, ακριβώς ένα (δηλ. μόνο ένα) αρνητικό στοιχείο του S αλλάζει σε θετικό σε κάθε βήμα! Υπάρχουν **πεπερασμένως** πολλά αρνητικά στοιχεία, αφού $s > 0$.

Ο αριθμός των επαναλήψεων της «πράξης» μέχρι πέρατος (μέχρις ότου δηλ. η εκτέλεσή της καθίσταται πλέον αδύνατος) είναι ακριβώς ο αριθμός των αρνητικών στοιχείων του αρχικού συνόλου S, ανεξαρτήτως της σειράς με την οποία εκτελούνται οι «πράξεις».

4η Λύση

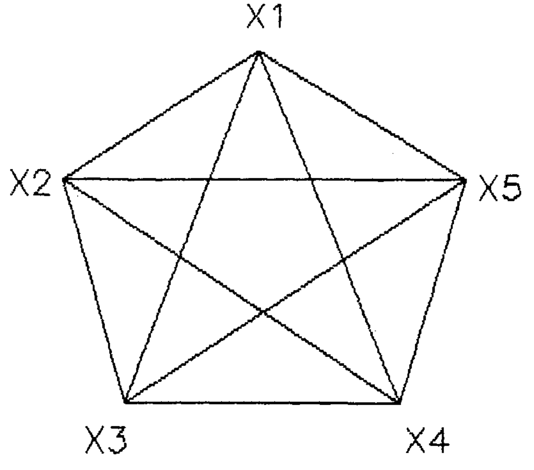
Όλη η «συζήτηση», όπως την παρουσίασα πιο πάνω, βρίσκεται στο περιοδικό της ΜΑΑ, «Mathematics Magazine», Vol. 60, No 1 - February 1987, σελ. 57-59, στην στήλη «News and letters».

Θα νόμιζε κανείς ότι το θέμα εξαντλήθηκε. Κι όμως! Στο ίδιο περιοδικό και στην ίδια στήλη, στο 4ο τεύχος της ίδιας χρονιάς, ο Balakrishnan Krishnamurthy, που εργάζεται στο Computer Research Laboratory της Tektronix, Inc. στο Baeverton του Oregon, παρουσιάζει την δική του λύση, που, κατά την ταπεινή μας γνώμη, είναι πιο «κομψή» απ' όλες τις προηγούμενες!

Και η δική του λύση στηρίχθηκε στην εύρεση μιας ακεραίων τιμών (που παίρνει δηλ. πάντα ακέραιες τιμές), μη αρνητικής συνάρτησης, της οποίας η τιμή φθίνει, όταν εκτελείται η δοθείσα «πράξη».

Η συνάρτηση την οποία χρησιμοποιεί είναι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών ανάμεσα στις πέντε διαγωνίους του πενταγώνου.

Δηλαδή:



Έστω

$$S=(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_5)^2+(x_4-x_1)^2+(x_5-x_2)^2$$

Ας υποθέσουμε ότι $x_2<0$ κι ας εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό περί το x_2:

$$x_1 \to x_1+x_2$$
$$x_2 \to -x_2$$
$$x_3 \to x_3+x_2$$
$$x_4 \to x_4$$
$$x_5 \to x_5$$

$$S \to S'=(x_1-x_3)^2+(x_2+x_4)^2+(x_3-x_5+x_2)^2+(x_4-x_1-x_2)^2+(x_5+x_2)^2$$

Τότε,

$$S-S'=-2x_2\,(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5),$$

που αμέσως φαίνεται ότι είναι θετικός αριθμός.

Έτσι ολοκληρώθηκε η λύση του προβλήματος.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

1) «Mathematics Magazine», Vol. 60, No 1 - February 1987, MAA.

2) «Mathematics Magazine», Vol. 60, No 4 - October 1987, MAA

(β) «Το 5ο Πρόβλημα της Μαθηματικής Ολυμπιάδας των Η.Π.Α. του έτους 1980»

Ξεφυλλίζοντας το διπλό (2ο-3ο) τεύχος του «Θεαίτητου» παρατήρησα πως, στο 11ο κεφάλαιό του, υπό τον τίτλο «Διαγωνισμός του περιοδικού "Θεαίτητος"» και πιο συγκεκριμένα στη σελίδα 381, ο φίλος μου, Μανόλης Μαραγκάκης, προτείνει στους μαθητές της Α' Λυκείου το ακόλουθο πρόβλημα:

«Αν οι αριθμοί a, b, $c \in [0,1]$, δείξτε ότι:

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1».$$

Το παραπάνω πρόβλημα, μου ήταν γνωστό! Από πού και πώς όμως;

Ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή.

Ο καθηγητής M.S. Klamkin του Alberta University του Καναδά είναι ένας από τους καλύτερους λύτες προβλημάτων (problem - solvers) σε διεθνές επίπεδο. Υπήρξε «προπονητής» (δηλ. υπεύθυνος για την προετοιμασία) των ομάδων που επί σειρά ετών αντιπροσώπευσαν τις Η.Π.Α. και τον Καναδά σε πολλές Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ενώ με τον θεσμό της Μαθηματικής Ολυμπιάδας των Η.Π.Α. ασχολήθηκε από την γέννηση κιόλας του τελευταίου, δηλ. από το 1972.

Τ' όνομά του το βρίσκουμε σε κάθε αγγλόφωνο μαθηματικό περιοδικό, που διαθέτει μόνιμη «Στήλη Προβλημάτων», ως επίσης και σ' άλλα ξένα αξιόλογα περιοδικά, όπως το «Elemente der Mathematik» και το «Archief voor Wiskunde».

Το 1987 του απονεμήθηκε το «Award for Distinguished Service» («Βραβείο για διακεκριμένες (εξαίρετες) υπηρεσίες») της «Mathematical Association of America» (της «Μαθηματικής Εταιρείας της Αμερικής»).

Σημειώνουμε παρεμπιπτόντως ότι οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να βρουν μια συνοπτική παρουσίαση του έργου και της προσωπικότητας του M.S. Klamkin στο περιοδικό «The American Mathematical Monthly», January 1988, MAA.

Αλλά ας επανέλθουμε στο πρόβλημά μας!

Ο Klamkin υπήρξε ο «υπεύθυνος» (πιο σωστά, ο editor) της στήλης «The Olympiad Corner» («Η Ολυμπιακή γωνιά») του καναδικού περιοδικού «Crux Mathematicorum» από το 1979 έως το 1986.

Εγκαταλείποντας την διεύθυνση της στήλης, έγραψε στο τεύχος του Δεκεμβρίου 1986 ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον άρθρο, με τίτλο «Problem Proposing and Mathematical Creativity». Στο άρθρο αυτό (σελ. 264-281) ασκεί κριτική στο είδος των θεμάτων που προτείνονται στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, που λαμβάνουν χώρα σε πολλές γωνιές της γης και προσπαθεί να «συνοψίσει» κάποιες τεχνικές χρήσιμες για την επίλυση ορισμένων τύπων προβλημάτων.

Στις σελίδες 274-275 μελετά την προς απόδειξη δοθείσα ανωτέρω αλγεβρική ανισότητα, κάνοντας το ακόλουθο σχόλιο:

«Η ανισότητα αυτή είναι μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης (ανισότητας), που η "πατρότητά" της αποδίδεται στον Andre Giroux και που αποδείχθηκε από τον ίδιο, χάρη στην χρησιμοποίηση περίτεχνων μεθόδων.

Ακολούθως, τόσο ο Giroux, όσο κι ανεξάρτητα ο A. Meir κι εγώ, επινοήσαμε απλούστερες αποδείξεις.

Εγώ πρότεινα την απόδειξη της παραπάνω ειδικής περίπτωσης σαν πρόβλημα στην Μαθηματική Ολυμπιάδα των Η.Π.Α., του έτους 1980.

Οι περισσότερες από τις αποδείξεις που δόθηκαν στην Ολυμπιάδα είχαν την μορφή μιας «ευθείας, βάρβαρης (άκομψης) προσέγγισης» του προβλήματος **και δεν οδηγούσαν εύκολα σε γενικεύσεις.**

Μια απλή απόδειξη προκύπτει αμέσως, αν παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση της αριστερής πλευράς της ανισότητας είναι κυρτή για καθεμία από τις μεταβλητές a, b και c. Έτσι η συνάρτηση παίρνει την μεγίστη τιμή της στην ακραία τιμή 0 ή 1 καθεμιάς εκ των μεταβλητών, με άλλα λόγια, σε κάποια κορυφή (a, b, c) ενός κύβου, του οποίου οι συντεταγμένες είναι 0 και 1. Αφού η τιμή της συνάρτησης σε κάθε κορυφή του κύβου ισούται με 1, τελειώσαμε!».

Θα μείνουμε όμως στην παραπάνω λύση, την οποία, τόσο συνοπτικά, αλλά και με τόση σαφήνεια παρουσίασε ο M.S. Klamkin αμέσως πριν.

Αυτή την ίδια λύση θα παρουσιάσουμε τώρα πιο αναλυτικά κι ακολούθως θα εκθέσουμε την εκ μέρους του M.S. Klamkin απόδειξη της (γενικής) ανισότητας του Giroux.

Ιδού λοιπόν:

1η Λύση (με τη βοήθεια της Ανάλυσης) - Γενίκευση

Η συνάρτηση F (a, b, c) της αριστερής πλευράς της ανισότητας είναι κυρτή σε καθεμιά από τις μεταβλητές a, b, c χωριστά.

Πράγματι, αν κρατήσουμε σταθερές τις δύο από τις τρεις μεταβλητές, έστω τις b και c, τότε καθένας από τους τέσσερις όρους της αριστερής πλευράς της ανισότητας είναι μια κυρτή συνάρτηση της εναπομείνουσας μεταβλητής a.

Δύο απ' αυτούς τους όρους είναι γραμμικοί, ενώ οι άλλοι δύο είναι της μορφής A/(B+x), με $A \geq 0$ και $B > 0$. Η γραφική παράσταση του όρου A/(B+x), για $x > -B$, είναι ο κλάδος μιας υπερβολής.

Μπορούμε ν' αποδείξουμε **αναλυτικά** την κυρτότητά της, είτε με τη βοήθεια της ανισότητας του Cauchy (ανισότητα αριθμητικού μέσου - γεωμετρικού μέσου), δηλαδή

$$(B+x)(B+y) \leq \left(B+\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{B+\frac{x+y}{2}} \leq \frac{A\left(B+\frac{x+y}{2}\right)}{(B+x)(B+y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{B+x}+\frac{A}{B+y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{B+x}+\frac{A}{B+y} \geq \frac{2A}{B+(x+y)/2},$$

είτε παρατηρώντας, ότι η δεύτερη παράγωγός της,
$2A/(B+x)^3$, είναι >0 για $x>-B$.

Γνωρίζουμε ότι μια κυρτή συνάρτηση, ορισμένη πάνω σ' ένα διάστημα, παίρνει την μεγίστη τιμή της σ' ένα ακραίο σημείο του διαστήματος. Έτσι, η μεγίστη τιμή της F (a, b, c) απαντάται σε μια από τις κορυφές ενός κύβου, που ορίζεται από τις ανισότητες $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$, σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων (a, b, c). Πράγματι, σε κάθε κορυφή, F (a, b, c) =1.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε ν' αποδείξουμε την γενικότερη ανισότητα

$$(1) \quad \sum x_i^u/(1+s-x_i)+\prod(1-x_i)^\upsilon \leq 1,$$

όπου $1 \geq x_i \geq 0$, $u,\upsilon \geq 1$ και $x_1+x_2+\ldots+x_n = s$.

Η τελευταία ανισότητα αποτελεί γενίκευση μιας άλλης, που «οφείλεται» στον André Giroux (όπως έχουμε ήδη αναφέρει) και η οποία ανιστοιχεί στην περίπτωση, κατά την οποία u=υ=1.

Τέλος, σας δίνουμε μιαν ακόμα απόδειξη της ανισότητας του Giroux· η απόδειξη αυτή ανήκει στον καθηγητή Klamkin.

Ιδού:

Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς αυτό ν' αποβαίνει σε βάρος της γενίκευσης, ότι

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1.$$

Τότε, η αριστερή πλευρά της (1) (με u=υ=1) είναι μικρότερη ή ίση με

$$\sum_1^n \frac{x_i}{1+s-x_n} + \prod_1^n (1-x_i)$$

$$= 1 + (x_n - 1)\left\{\frac{1}{1+s-x_n} - \prod_1^{n-1}(1-x_i)\right\}.$$

Θ' αποδείξουμε ότι ο δεύτερος όρος στα δεξιά είναι μη θετικός αριθμός.

Ο όρος $x_n - 1$ είναι ≤ 0, έτσι το μόνο που χρειάζεται ν' αποδείξουμε είναι ότι:

$$1 \geq (1+s-x_n)\prod_1^{n-1}(1-x_i).$$

Το τελευταίο προκύπτει ως εξής:

$$(1+s-x_n)\prod_1^{n-1}(1-x_i) \leq \prod_1^{n-1}(1+x_i)\prod_1^{n-1}(1-x_i)$$

$$= \prod_1^{n-1}(1-x_i^2) \leq 1.$$

Σχόλιο Νο 1

Προφανώς την παραπάνω λύση δεν μπορούν να την σκεφθούν μαθητές της Α' Λυκείου, αφού δεν έχουν διδαχθεί «Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης».

Μπορούν όμως, με τη βοήθεια των μέχρι τώρα γνώσεών τους, να βρουν κάποιες άλλες λύσεις, έστω και κάπως πιο πολύπλοκες και λιγότερο «κομψές» από την προηγούμενη. Π.χ. το πρόβλημα λύνεται και με αλγεβρικό ή τριγωνομετρικό τρόπο.

Θα δώσουμε μια αλγεβρική απόδειξη της ανισότητας και θα προτρέψουμε τους αναγνώστες του «Θεαίτητου» να επιχειρήσουν να την αποδείξουν τριγωνομετρικά!

2η Λύση (Αλγεβρικός τρόπος)

Με $0 \leq a,b,c \leq 1$, έχουμε ότι

$$(1+a+b)(1-a)(1-b) \leq (1+a+b+ab)(1-a)(1-b) =$$
$$(1+a)(1+b)(1-a)(1-b) = (1-a^2)(1-b^2) \leq 1,$$
$$\text{οπότε } (1+a+b)(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1-c \ .$$

Τότε,

$$(1+a+b)-(1+a+b)(1-a)(1-b)(1-c) \geq 1+a+b-1+c = a+b+c,$$

ή

$$a+b+c \leq (1+a+b)\left[1-(1-a)(1-b)(1-c)\right] = R(1+a+b),$$

όπου $R = 1-(1-a)(1-b)(1-c)$.

Έτσι

$$\frac{a+b+c}{1+b+c} \leq R, \quad \frac{a+b+c}{1+c+a} \leq R, \quad \frac{a+b+c}{1+a+b} \leq R$$

και

$$\frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{1+b+c} \leq \frac{a}{a+b+c} \cdot R \qquad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{1+c+a} \leq \frac{b}{a+b+c} \cdot R \qquad (2)$$

$$\frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{a+b+c}{1+a+b} \leq \frac{c}{a+b+c} \cdot R \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq R \ .$$

Αντικαθιστώντας το R με $1-(1-a)(1-b)(1-c)$,

έχουμε την ζητούμενη ανισότητα:

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \ .$$

Βιβλιογραφικές αναφορές

1) «Crux Mathematicorum», Vol. 12, No 10 - December 1986, The Canadian Mathematical Society.

2) «The USA Math. Olympiad for 1980», compiled by Samuel Greitzer, MAA, 1980.

3) «USA Mathematical Olympiads 1972-1986», compiled and with Solutions by M.S. Klamkin, New Mathematical Library - No 33, MAA, 1988.

Ο θαυμαστός κόσμος της παραγώγου

Δ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ

0. Εισαγωγή

Στο τεύχος 2-3 του «Θεαίτητου» είχαμε ασχοληθεί με τη σχέση που έχει η **συνέχεια** μιας συνάρτησης με την **ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής**. Είχαμε δε προαναγγείλει την απόδειξη ενός - από μόνου του αξιοθαύμαστου - γεγονότος, που αφορά τις παραγώγους: Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης (την οποία θα ορίζουμε μόνο πάνω σε διάστημα-ανοικτό ή κλειστό κατά περίπτωση) παίρνει δύο τιμές, τότε παίρνει **κάθε ενδιάμεση τιμή** μεταξύ τους.

Το αξιοθαύμαστο συνίσταται στο ότι δεν υποθέτουμε **τίποτα** για τη συνέχεια της εν λόγω παραγώγου (σαν συνάρτηση του x). Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο εντάσσεται σε ένα από τα πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα που φέρει από μόνη της η ύπαρξη παραγώγου, καταγράφεται στην βιβλιογραφία σαν **Θεώρημα του Darboux** και θα το διατυπώσουμε και θα το αποδείξουμε αυστηρά – μαζί με άλλα – μετά από μια σύντομη ανασκόπηση της θεωρίας της παραγώγου.

1. Θεμελιώδεις ιδιότητες της παραγώγου

Θεωρούμε γνωστά στον αναγνώστη τόσον τον ορισμό όσο και τη γεωμετρική και «εφαρμοσμένη» ερμηνεία της εν λόγω έννοιας. Για μια εκτεταμένη ανασκόπηση των συναφών θεωρημάτων (με τις γενικεύσεις τους ως προς τις «4 πλευρικές παραγώγους» του Dini) βλέπε [2].

Επίσης θεωρούμε δεδομένες έννοιες σαν το max, το min, την περίοδο, τη μονοτονία κ.λπ. συνάρτησης, όπως εμπεριέχονται σε οποιοδήποτε καλό βιβλίο Λογισμού. Κεντρικό άξονα της μικρής αυτής παρουσίασης θεωρούμε τα εξής αποτελέσματα που τα διατυπώνουμε ως Λήμματα (και αποτελούν και καλές επαναληπτικές ασκήσεις):

Σ.τ.Ε. Ο ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΑΚΗΣ είναι Διδάκτωρ των Μαθηματικών και εντεταλμένος επίκουρος καθηγητής στο Φυσικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Λήμμα 1: Αν η $f:(a,b) \to R$ έχει μέγιστο στο $x_0 \in (a,b)$ και υπάρχει το $f'(x_0)$, τότε $f'(x_0)=0$.

(**Σχόλιο 1:** Ανάλογη πρόταση ισχύει και για το ελάχιστο).

Λήμμα 2: Αν $f'(x_0)>0$ τότε η f είναι αύξουσα στο x_0 με την έννοια ότι υπάρχει διάστημα της μορφής (x_0-h, x_0+h) (όπου $h>0$, εξαρτώμενο από τη f) έτσι ώστε, αν x_1, x_2 ανήκουν στο εν λόγω διάστημα και $x_1<x<x_2$ τότε : $f(x_1)<f(x)<f(x_2)$.

(**Σχόλιο 2:** Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την περίπτωση $f'(x_0)<0$, οπότε η f είναι φθίνουσα στο x_0 με την προαναφερθείσα έννοια).

Κλείνουμε με ένα πασίγνωστο αποτέλεσμα το οποίο το αναφέρουμε χάριν πληρότητας.

Λήμμα 3: Αν υπάρχει το $f'(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Σχόλιο 3: Το αντίστροφο του Λημ. 3 βέβαια δεν ισχύει. Με απλούς αλγεβρικούς συνδυασμούς συναρτήσεων της μορφής $x \to |x-c|$, δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε συνεχείς συναρτήσεις που δεν έχουν παράγωγο σε κάποιο πεπερασμένο (αλλά ακόμα και αριθμήσιμο) πλήθος σημείων του πεδίου ορισμού των. Το 1872 όμως ο **Karl Weierstrass** εξέπληξε τον μαθηματικό κόσμο δίνοντας ένα **παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης σ' όλο το R που να μην έχει παράγωγο σε κανένα σημείο.**

Μια παρόμοια συνάρτηση που «αψηφά» τη γεωμετρική διαίσθηση που έχουμε για καμπύλες και εφαπτόμενές τους, ήταν φυσικό να ωθήσει σε νέες έρευνες τους αναλύστες του τότε αλλά και τους μεταγενέστερους.

Χωρίς να επεκταθούμε (όποιος ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευθεί τις θαυμάσια απλοποιημένες παρουσιάσεις των [7], [10]), απλώς αναφέρουμε σαν παράδειγμα τη συνάρτηση που ορίζεται μέσω της σειράς:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos(3^n x).$$

2. Η «στρατηγική» χρήση της παραγώγου — Τα σημαντικά θεωρήματα

Παρατηρήσαμε ήδη (Λημ. 1) ότι όταν υπάρχει η παράγωγος σε σημείο μεγίστου ή ελαχίστου στο «εσωτερικό» του πεδίου ορισμού της (χωρίς τοπολογικές επεκτάσεις αναφέρουμε ότι το εσωτερικό του διαστήματος [α,b] είναι το (α,b)) τότε η παράγωγος είναι μηδέν εκεί. Άρα, αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια παράγωγος μηδενίζεται, μπορούμε να επιδιώξουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση που παραγωγίσαμε έχει max ή min σε μη «ακραίο σημείο» του πεδίου ορισμού της. Κατά συνέπεια, αν θέλουμε να δείξουμε ότι η f' παίρνει σε σημείο του πεδίου ορισμού της την τιμή c, θεωρούμε τη νέα συνάρτηση $g(x) = f(x) - cx$ και ψάχνουμε για max ή min. Αν, από οποιοδήποτε δεδομένο μας η g έχει max ή min κάπου στο (α,b) τότε η τιμή c είναι στο **πεδίο τιμών** της f'.

Ειδικότερα, για **συνεχείς συναρτήσεις** οι συνήθεις προς τούτο στρατηγικές μπορούν να συνοψισθούν στις εξής:

(I) Επιδιώκουμε να δείξουμε ότι $f'(\alpha) > 0$ και $f'(b) < 0$ (αφού τότε $g(x) > g(\alpha)$ σε μια «εκ δεξιών γειτονιά» του α και $g(x) < g(b)$ σε μια «εξ αριστερών γειτονιά» του b και άρα η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της g στο [α,b] δεν επιτυγχάνεται στα $x=\alpha$ ή $x=b$).

(II) Επιδιώκουμε να δούμε αν $g(\alpha) = g(b)$ (μια και τότε ή η g είναι σταθερή ή έχει γνήσιο max-min μεταξύ α και b).

Η μεν στρατηγική **(I)** αποτυπώνεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1, η δε **(II)** στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 (τα οποία παραθέτουμε αμέσως μετά).

Επίσης, μέσω αυτών επιλύονται και οι ασκήσεις που ολοκληρώνουν το παρόν μέρος της παρουσίασης.

Θεώρημα 1 (Darboux):

Αν η f είναι διαφορίσιμη στο [α,b] και c αριθμός μεταξύ $f'(\alpha)$ και $f'(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, b)$ έτσι ώστε $f'(x_0) = c$.

Απόδειξη: Ορίζουμε στο [α,b] την $g(x) = c(x - \alpha) - f(x)$.

Από το Λήμ. 3 έχουμε ότι η g είναι συνεχής και άρα έχει μέγιστη τιμή στο [α,b]. Επειδή $g'(\alpha) = c - f'(\alpha) > 0$ έχουμε (Λήμ. 1 και 2) ότι το εν λόγω μέγιστο δεν συμβαίνει όταν $x=\alpha$. Όμοια δεν συμβαίνει όταν $x=b$. Άρα συμβαίνει όταν $x = x_0 \in (\alpha, b)$. Συνεπώς

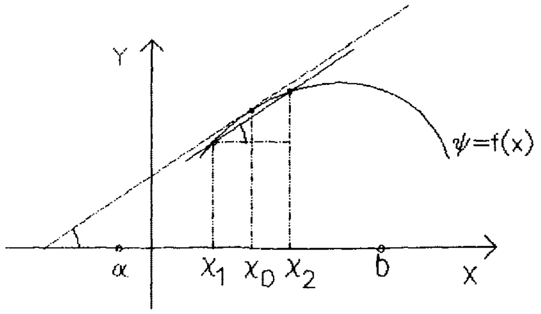
$$g'(x_0) = 0 \Rightarrow c - f'(x_0) = 0. \qquad \text{Ο.Ε.Δ.}$$

Το επόμενο θέωρημα αποκλίνει σε ασήμαντο βαθμό από τη συνήθη διατύπωση:

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Αν η f είναι συνεχής στο [α,b] και διαφορίσιμη στο (α,b) τότε **κάθε** «λόγος μεταβολών» $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ ανήκει στο **πεδίο τιμών** της f'.

Απόδειξη



Όπως το σχήμα υποδεικνύει, με εφαρμογή της στρατηγικής **(II)** βρίσκουμε ότι η $g(x)=f(x)-\left(\dfrac{x-x_1}{x_2-x}\right)\left(f(x_2)-f(x_1)\right)$, που **συμπίπτει** με την f στα άκρα του $\left[x_1,x_2\right]$, έχει μέγιστο σε κάποιο σημείο $x_0\in(x_1,x_2)$ και άρα $f'(x_0)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (αφού $g'(x_0)=0$).

Παρατηρήσεις

(1) Δεν πρέπει να δίνεται μεγάλη έμφαση στην **ύπαρξη** του x_0 που ούτως ή άλλως η ακριβής θέση του, εν γένει, παραμένει **άγνωστη**. Αυτό που πρακτικά ενδιαφέρει είναι η **«μέση μεταβολή»**, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, να βρίσκεται **μεταξύ** $\sup f'$ και $\inf f'$, αφού, στην πράξη, αυτό είναι ισοδύναμο (αν ληφθεί υπόψη το Θεώρημα 1, βλ. και [4]).

(2) Ένας άλλος τρόπος διατύπωσης του Θεωρήματος 2 είναι ο εξής: «Το πεδίο τιμών της f' είναι διάστημα που περιέχει τους λόγους των μεταβολών $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$».

(3) Το αντίστροφο του (2) και άρα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής μπορεί να μην ισχύει: Το σύνολο των λόγων των μεταβολών δεν περιέχει αναγκαστικά το πεδίο τιμών της f'.

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^3$ (ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$) η f'παίρνει την τιμή 0, ενώ **κανένας** λόγος διαφορών δεν είναι μηδέν (αφού $x_1^2+x_1x_2+x_2^2\neq 0$ όταν $x_1\neq x_2$).

4) Στο Θεώρημα Μέσης Τιμής υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σ' όλο το κλειστό [α, b]. Θα μπορούσαμε να «εξασθενήσουμε» αυτόν τον περιορισμό με το να ζητήσουμε αντί για συνέχεια στα άκρα, απλά τη συνέχεια εκ δεξιών του α και εξ αριστερών του b, οπότε θα υπήρχαν τα $f(\alpha^+)$, $f(b^-)$, αντίστοιχα.

Η «γενίκευση» αυτή είναι **απατηλή:** Αν το $f(\alpha^+)$ δεν υπάρχει και η f' υπάρχει (πεπερασμένα) «κοντά» στο α τότε η f' παίρνει κάθε (πεπερασμένη) τιμή σε κάθε «εκ δεξιών» γειτονιά του α και έτσι το $(b-\alpha)f'(x_0)$ παίρνει κάθε επιθυμητή (πεπερασμένη τιμή) κι αυτό γιατί αν c κάποια τιμή, η $f(x)-cx$ δεν έχει εκ δεξιών όριο στο α και έτσι δεν μπορεί να είναι μονότονη σε μια εκ δεξιών γειτονιά του α. Άρα έχει max-min σε κάθε τέτοια γειτονιά και η παράγωγός της είναι μηδέν σ' αυτά τα x. Επομένως $f'(x)=c$ (βλ. [8]).

(5) Ιδού τώρα μια λιγότερο συνηθισμένη απόδειξη του Θεωρήματος 2, που στηρίζεται στο **Θεώρημα των χορδών** (βλ. [9]).

Έστω ότι $g(\alpha)=g(b)=0$. Βρίσκουμε ότι υπάρχουν υποδιαστήματα (x_n, y_n) του (α, b) το καθένα το μισό σε μήκος από το αμέσως προηγούμενο, n=1,2,... με $g(x_n)=g(y_n)$. Τα διαστήματα σαν «κιβωτισμένα» (ατυχής αλλά επικρατήσας όρος) συγκλίνουν σε μονοσύνολο $\{x_0\}$ με $x_0 \in (\alpha, b)$ (αν διαλέξουμε τα δύο πρώτα διαστήματα να αποφεύγουν τα α, b). Αφού έχουμε ακολουθία οριζοντίων χορδών της g, που τα άκρα τους τείνουν στο x_0, η εφαπτόμενη στο $(x_0, f(x_0))$ (που υπάρχει από υπόθεση) είναι **οριζόντια** και άρα $g'(x_0)=0$. Ο.Ε.Δ. (βλ. και [1] για λεπτομέρειες).

(6) Τα όσα πολύ θαυμαστά συνεπάγονται από τη σημειακή ή – ακόμα καλύτερα – σε ολόκληρο διάστημα, ύπαρξη της παραγώγου, δεν πρέπει να μας παρασύρει στην εντύπωση ότι οι παράγωγοι είναι απλοϊκής δομής συναρτήσεις.

Τουναντίον, μπορεί να αποδειχθεί ότι εν γένει: **α)** οι παράγωγοι έχουν «χειρότερη συμπεριφορά» από τις συναρτήσεις από τις οποίες προήλθαν (βλ. π.χ. [12]) και **β)** το γινόμενο δύο παραγώγων δεν είναι αναγκαστικά παράγωγος κάποιας (τρίτης) συνάρτησης (βλ. π.χ. [3]).

Κλείνουμε την αναφορά μας στις παραγώγους με μερικές ασκήσεις, που σε όσες περιπτώσεις έχουν θεωρητική ή ερευνητική σημασία παραθέτουμε και μια χρήσιμη βιβλιογραφική υπόδειξη.

3. Προτεινόμενες Ασκήσεις

(1η) Αν υπάρχει η (πεπερασμένη τιμή) $f'(\alpha)$ τότε, σε κάποιο διάστημα γύρω από το α, μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x)-f(\alpha)=(x-\alpha)\left\{f'(\alpha)+\varepsilon(x)\right\} \quad \text{όπου} \quad \lim_{x\to\alpha}\varepsilon(x)=0 .$$

(2η) Ο «κανόνας της αλυσίδας» λέει ότι αν υπάρχει το $f'(\alpha)$ (πεπερασμένα) και $g(b)=\alpha$ και $g'(b)$ υπάρχει (πεπερασμένα), τότε η $\varphi=fog$ έχει παράγωγο στο b και μάλιστα $\varphi'(b)=f'(\alpha)\,g'(b)$. Βρείτε το **λάθος** στην εξής «απόδειξη»:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f\big(g(x+h)\big)-f\big(g(x)\big)}{g(x+h)-g(x)}\right)\cdot\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)=$$

$$=f'\big(g(b)\big)g'(\alpha).$$

(3η) Δώστε μια σωστή απόδειξη της **(2)** με χρήση της **(1)**.

(4η) Μια άλλη εφαρμογή της **(1)** είναι η εξής **αναγκαία και ικανή συνθήκη** για (πεπερασμένη) διαφορισιμότητα (βλ. [11]):

Αν το πεδίο ορισμού της f περιέχει ένα διάστημα και α στο εσωτερικό του, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει «γειτονιά» V_α του α, τόσο μικρή ώστε αν t_1,t_2 **εκατέρωθεν** του α στην V_α και ομοίως για u_1,u_2 (στην V_α), τότε:

$$\left|\frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2}-\frac{f(u_1)-f(u_2)}{u_1-u_2}\right| < \varepsilon . \quad \text{Αποδείξτε το!}$$

(**Σχόλιο Δ.Κ.**: Η άσκηση (4) είναι **χρήσιμη** γιατί υποδεικνύει έναν τρόπο ελέγχου της **μη διαφορισιμότητας** για (κατάλληλες) συνεχείς συναρτήσεις).

(5η) Η μόνη συνεχής συνάρτηση $f: (a,b)\to R$ για την οποία η $f(x)+\kappa x$ είναι μονότονη για κάθε $\kappa\in R$, εκτός από το πολύ μια εξαίρεση (για την τιμή του κ), είναι οι γραμμικές $px+q$, $a<x<b$.

(**Σχόλιο Δ.Κ.**: Βλέπε και [5]. Σημειώστε ότι μια συνάρτηση μπορεί να «αυξάνει στα δεξιά ενός σημείου» χωρίς αναγκαστικά να αυξάνει σε κάθε εκ δεξιών διάστημα).

(6η) Συνδυάστε το **(5)** με το εξής παράδειγμα:

Έστω $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ για $x \neq 0$ με $f(0) = 0$. Τότε η $f(x) + \kappa x$ είναι μονότονη για κάθε κ με $|\kappa| > 3$. (Γιατί;) Αντιφάσκει αυτό με την **(5)**;

(7η) Έστω f περιοδική και διαφορίσιμη. Έστω α>0. Υπάρχει, τότε, ένα x έτσι ώστε $f(x + \alpha) - f(x) = \alpha f'(x)$. (Γιατί;) Τι λέει αυτό γεωμετρικά;

(8η) Έστω f διαφορίσιμη στο [α, b] και $f'(\alpha) = f'(b)$. Τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, b)$ έτσι ώστε $\frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha} = f'(x_0)$.

(**Σχόλιο Δ.Κ.**: Η άσκηση γεωμετρικά λέει ότι αν η κλίση της f στα άκρα α, b είναι η ίδια, τότε υπάρχει σημείο $(x_0, f(x_0))$ ώστε η δι' αυτού εφαπτομένη ευθεία να διέρχεται από το «αρχικό σημείο» $(\alpha, f(\alpha))$. Βλέπε και [6]).

Βιβλιογραφία

Γενική αναφορά: R.P. Boas Jr., A Primer of Real Functions. The Carus Mathematical Monographs, #13. The M.A.A. (3d edition).

Ειδικές αναφορές:

[1] A.K. Aziz and J.B. Diaz, «On Pompeiu's proof of the mean value theorem of the differential calculus of real-valued functions», Contributions to Differential Equations, vol. 1, p.p. 467-481 (1963).

[2] A.M. Bruckner, Differentiation of Real Functions, Lecture Notes in Mathematics 659, Springer (1978).

[3] .... ,«Creating differentiability and destroying derivatives», Amer. Math. Monthly 85 (1978), p.p. 554-562.

[4] J. Dieudonné, Foundations of Modern Analysis, Academic Press (1960), p.p. 153-155.

[5] U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, (μεταφρασμένο από την Ιταλική έκδοση του 1878), Leipzig (1892), p.p. 279-280.

[6] T.M. Flett, «A mean value theorem», Math. Gaz., 42 (1958) p.p. 38-39.

[7] T.H. Hildebrandt, «A simple continuous function with a finite derivative at no point», Amer. Math. Monthly 40 (1933), p.p. 547-548.

[8] E.W. Hobson, The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, vol. 1, 3d ed., Cambridge University Press (1927), p. 363.

[9] Δ. Καραγιαννάκης, «Το θεώρημα της χορδής και άλλες εφαρμογές του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής», Θεαίτητος, τεύχος 2-3 (1990), σ. 462-466.

[10] J. McCarthy, «An everywhere continuous differentiable function», Amer. Math. Monthly 60 (1953), p. 709.

[11] M. Nikolàs, «Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables», Acta Sci. Math. Szeged 17 (1956), p.p. 49-62.

[12] L.J. Paige, «A note on indeterminate forms», Amer. Math. Monthly 61 (1954), p.p. 189-190.

Η ΚΑΘΕΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΑΘΗΣ

Στην ελληνική βιβλιογραφία η εξίσωση

$$x\,\sigma\upsilon\nu\alpha + y\,\eta\mu\alpha = p \qquad (1)$$

φέρεται με το όνομα «κανονική εξίσωση ευθείας».

Θα υποστηρίξουμε κατωτέρω ότι κακώς η (1) ονομάζεται «κανονική εξίωση» και ότι η ορθή ονομασία της πρέπει να είναι «καθετική εξίσωση»:

Στο [1] διαβάζουμε τα εξής: «Αυτή η μορφή της εξισώσεως ευθείας ονομάζεται η Normal μορφή (ενίοτε perpendicular μορφή), επειδή οι συντελεστές της περιέχουν τις παραμέτρους p και α, που σχετίζονται με την normal ή την perpendicular ΟΑ προς την ευθεία».

Αυτά γράφει ένα αγλλικό βιβλίο Αναλυτικής Γεωμετρίας· με αυτόν τον τρόπο διασαφίζεται πλήρως ότι η λέξη normal είναι συνώνυμη με την λέξη perpendicular. Ενώ όμως normal σημαίνει «κάθετος», αλλά και «κανονικός», η λέξη perpendicular σημαίνει, χωρίς αμφιβολία, «κάθετος».

Επομένως και στην έκφραση «normal μορφή εξίσωσης ευθείας», η λέξη normal σημαίνει «κάθετος».

Στο American Mathematical Monthly του έτους 1948, σελ. 155 -156 [2] η λέξη normal έχει σαφώς την σημασία της «καθέτου». Συγκεκριμένα, διαβάζουμε:

«... όπου p είναι το πάντοτε θετικό μήκος της καθέτου (Normal) από την αρχή των αξόνων προς την ευθεία...».

Στο ίδιο κείμενο χρησιμοποιείται επανειλημμένως η έκφραση «normal μορφή της εξισώσεως ευθείας».

Σ.τ.Ε. Ο ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΒΑΘΗΣ είναι Διευθυντής του Λυκείου Βασιλικού Χαλκίδας.

Γίνεται, λοιπόν, σαφές ότι «normal μορφή της εξισώσεως ευθείας» σημαίνει σαφώς «καθετική μορφή της εξισώσεως ευθείας».

Στο [3], σελ. 71, χρησιμοποιείται ο όρος «normalized μορφή» εξισώσεως κύκλου με την σημασία της «κανονικής μορφής».

Στην σελίδα 117, πάλι του [3], χρησιμοποιείται η λέξη normal με την σημασία της «κανονικής» και όχι της «καθέτου».

Συγκεκριμένα, διαβάζουμε: «Λέγοντας ότι αυτή είναι canonical (ή normal) μορφή της εξισώσεως δέσμης κύκλων...».

Είναι λοιπόν φανερό, ότι οι λέξεις normal και canonical (=κανονικός) είναι συνώνυμες.

Στην σελ. 327, πάλι του [3], χρησιμοποιούνται εναλλακτικά οι λέξεις normal , standard και canonical μορφή.

Στη σελίδα 19 του παλαιού βιβλίου Treatise on Conic Sections του G. Salmon [4] γίνεται λόγος για την εξίσωση:

$$x \text{ συνα} + y \text{ ημα} = p$$

χωρίς να δίνεται σ' αυτήν ιδιαίτερο όνομα. Στην παράγραφο αυτή ο Salmon χρησιμοποιεί τη λέξη perpendicular (=κάθετος) εκεί, όπου στο MONTHLY [2] διαβάζουμε normal. Γίνεται, λοιπόν, φανερό ότι οι λέξεις normal στο [2] και perpendicular στο [4] χρησιμοποιούνται με την ίδια σημασία.

Γενικά, στην αγγλική μαθηματική βιβλιογραφία η κάθετος σε επίπεδο ή καμπύλη ονομάζεται normal· σπανίως ονομάζεται perpendicular.

Στη σελίδα 33 του [5] διαβάζουμε τον ορισμό: «Εάν μια ευθεία είναι κάθετος (=perpendicular) σε κάθε ευθεία ενός επιπέδου, λέμε ότι είναι κάθετος (=normal) στο επίπεδο ή ότι είναι perpendicular σ' αυτό».

Γίνεται λοιπόν φανερό ότι ο συγγραφέας χρησιμοποιεί αδιακρίτως τις λέξεις normal και perpendicular, για να δηλώσει την κάθετον.

Στις σελίδες 22 και 115 του [6] γίνεται αδιακρίτως χρήση των εκφράσεων: «Η κάθετος (=perpendicular) απόσταση p από... προς...» και «Η κάθετος (=normal) απόσταση από.... προς...».

Και εδώ, λοιπόν, είναι φανερό ότι χρησιμοποιούνται ως συνώνυμες της λέξεως «ΚΑΘΕΤΟΣ» οι λέξεις normal και perpendicular.

Σ' αυτό το άρθρο μας προσπαθήσαμε να πείσουμε τους αναγνώστες του «ΘΕΑΙΤΗΤΟΥ» ότι από κακή μετάφραση ονομάζουμε «κανονική» την εξίσωση x συνα + y ημα=p μιας ευθείας, ενώ θα έπρεπε να ονομάζεται ΚΑΘΕΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ.

Τούτο φαίνεται σαφώς, κυρίως, στην Αναλυτική Γεωμετρία του C.O. OAKLEY [1].

Δεν ισχυριστήκαμε ότι η λέξη normal, στα Αγγλικά, δεν σημαίνει «κανονικός»· αντιθέτως, μάλιστα, παραπέμψαμε και στην Γεωμετρία του D. Pedoe, όπου η λέξη normal χρησιμοποιείται με την σημασία της λέξης «κανονικός».

Άλλωστε η αγγλική μαθηματική βιβλιογραφία είναι γεμάτη από την λέξη normal με τη σημασία της λέξης «κανονικός»:

Normal μορφή πίνακα.

Canonical μορφή πίνακα.

Normal αριθμός.

Normal υπο-ομάδα.

Normal διαιρέτης.

Normal βάση.

Normal τοπολογικός χώρος, αλλά και Regular τοπολογικός χώρος· εδώ οι λέξεις normal και regular δεν είναι συνώνυμες.

ΙΣΧΥΡΙΣΤΗΚΑΜΕ ΜΟΝΟΝ ΟΤΙ, ΕΙΔΙΚΑ, ΓΙΑ ΤΗΝ ΛΕΞΗ NORMAL, Η ΟΠΟΙΑ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΚΦΡΑΣΗ «NORMAL μορφή της εξισώσεως ευθείας», ότι αυτή δεν σημαίνει «κανονική», αλλά «καθετική» (δηλαδή αναφερομένη στην κάθετο p).

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

[1] C.O. OAKLEY, Analytic Geometry, σελ. 49.

[2] American Math. MONTHLY, τόμος 55 (1948), σελ. 155-156.

[3] D. Pedoe, A course of Geometry.

[4] G. Salmon, Treatise on Conic Sections.

[5] L. Lines, Solid Geometry.

[6] J. Kindle, Analytic Geometry.

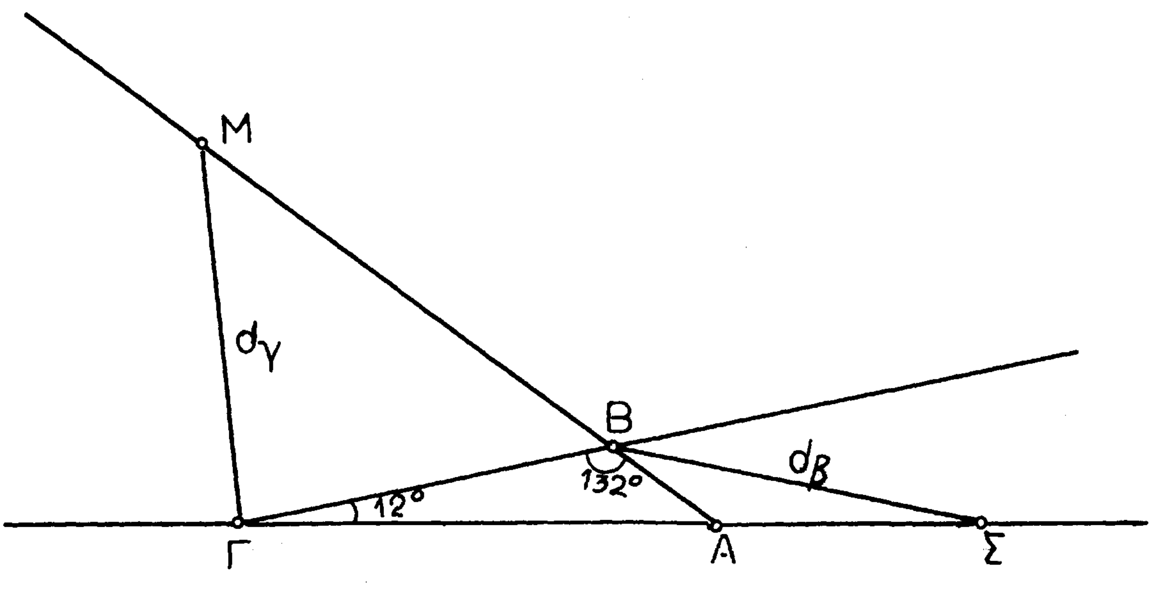
2. ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΤΟΥ Ο. BOTTEMA

$$\boxed{d_\beta = d_\gamma \not\Rightarrow \beta = \gamma}$$

Είναι γνωστό (Θεώρημα Steiner - Lehmus) ότι: «Εάν οι διχοτόμοι δ_β και δ_γ τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες, τότε είναι β=γ».
Να αποδειχθεί ότι: «Εάν οι εξωτερικές διχοτόμοι d_β και d_γ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο δεν είναι αναγκαίως ισοσκελές».

Απόδειξη

Θεωρούμε σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 132°$ και $\hat{\Gamma} = 12°$ και τις εξωτερικές διχοτόμους ΒΣ= d_β και ΓΜ = d_γ. (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Το τρίγωνο ΒΜΓ έχει $M\hat{B}\Gamma = 48°$ και $B\hat{M}\Gamma = 48°$ άρα ΓΜ=ΓΒ. (1)

Το τρίγωνο ΓΒΣ έχει $B\hat{\Gamma}\Sigma = 12°$ και $B\hat{\Sigma}\Gamma = 12°$, άρα ΒΓ=ΒΣ. (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΣ=ΓΜ.
Δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει $d_β = d_γ$, χωρίς να είναι ισοσκελές.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Η ανωτέρω πρόταση βρίσκεται στο βιβλίο Geometry Revisited των H.S.M. Coxeter και S.L. Greitzer.

Οι συγγραφείς ονομάζουν αυτό το τρίγωνο **«τρίγωνο του Bottema»**.

Το τρίγωνο του Bottema εξετάζεται και στο MATHEMATICS MAGAZINE 1974, σελ. 52.

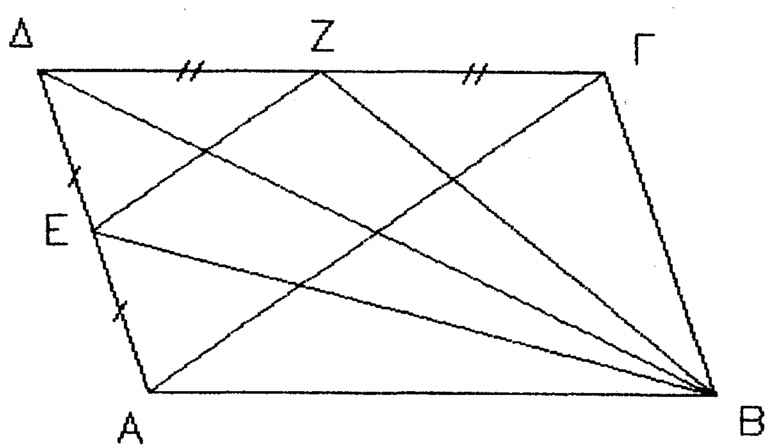
Επίσης:

Στο Crux Mathematicorum 1979 - σελ. 115, 1983 - σελ. 180, 1976 - σελ. 22, όπου ονομάζεται «Τρίγωνο του Emmerich».

Εκεί παρατίθεται και σχετική βιβλιογραφία για το θέμα.

ΑΣΚΗΣΗ 1η

«Ν' αποδειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΖΕ είναι τα $\frac{3}{8}$ του εμβαδού του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ». (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Απόδειξη

$(\text{ΕΔΖ}) = \frac{1}{4}\,(\text{ΑΔΓ}) = \frac{1}{8}\,(\text{ΑΒΓΔ}).$

$(\text{ΑΒΕ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΑΒΔ}) = \frac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ}).$

$(\text{ΒΓΖ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΒΓΔ}) = \frac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ}).$

Άρα

$(\text{ΒΖΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) - \frac{1}{8}\,(\text{ΑΒΓΔ}) - \frac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ}) - \frac{1}{4}\,(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{3}{8}\,(\text{ΑΒΓΔ}).$

ΑΣΚΗΣΗ 2η

«Το τρίγωνο, του οποίου οι πλευρές είναι ίσες με τις διαμέσους τριγώνου, είναι τα $\frac{3}{4}$ αυτού».

Απόδειξη

Οι πλευρές του τριγώνου ΒΖΕ είναι ίσες με τις διαμέσους του τριγώνου ΑΔΒ. (Σχήμα 2).

Είναι (άσκηση 1η) $(\text{ΒΖΕ}) = \frac{3}{8}\,(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{3}{4}\,(\text{ΑΔΒ}).$

3. ΤΟ ΟΝΕΙΡΟ ΤΟΥ G. POLYA

Ο διάσημος Μαθηματικός George Pólya γεννήθηκε στη Βουδαπέστη στις 13 Δεκεμβρίου 1887 και πέθανε σε ηλικία 98 ετών τον Σεπτέμβριο του 1985.

Το 1940 εγκατεστάθη στις Η.Π.Α. Στο περιοδικό Monthly της Μαθηματικής Εταιρείας της Αμερικής, τεύχος Νοεμβρίου 1967, σελ. 1065, διαβάζουμε τα εξής ενδιαφέροντα, γραμμένα από τον J.E. Wetzel, του Πανεπιστημίου του Illinois:

Σε ένα του γράμμα προς τον συγγραφέα, με ημερομηνία 31 Ιανουαρίου 1967, ο Pólya έγραφε:

«Είχα, κυρίως στα νεανικά μου χρόνια, πολύ συχνά μαθηματικά όνειρα, αλλά, συνήθως, διαλύονταν με το ξύπνημα και τίποτε το ξεκάθαρο δεν παρέμενε. Η απόδειξη του θεωρήματος του αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου είναι, ίσως, η μοναδική απόδειξη, που είδα σε όνειρό μου (όταν ήμουν φοιτητής, ίσως 20 ετών) και η οποία διατηρήθηκε και μετά το ξύπνημα».

Ο Pólya έλεγε ότι αυτή η απόδειξη ήταν «τα καλύτερα Μαθηματικά που είχε ποτέ ονειρευτεί».

Ο Pólya δίνει μια ωραία και σύντομη απόδειξη της ανισότητας του αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου, βασιζόμενος στην ανισότητα (1) $e^x \geq 1+x$, ως εξής:

Έστω ότι $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$A=\frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa, \quad \text{και} \quad G=\left(\prod_{\kappa=1}^{\nu}\alpha_\kappa\right)^{\frac{1}{\nu}}$$

ο αριθμητικός και ο γεωμετρικός μέσος αυτών, αντιστοίχως.

Επειδή η περίπτωση A=0 είναι τετριμμένη, υποθέτουμε ότι A>0.

Από την (1) προκύπτει:

$$e^{\frac{\alpha_\kappa}{A}-1} \geq \frac{\alpha_\kappa}{A} \geq 0, \text{ για κάθε } \kappa=1,2,3,\ldots,\nu.$$

Πολλαπλασιάζουμε εκείνες τις ν ανισότητες κατά μέλη και παίρνουμε:

$$1=e^0=e^{\sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{\alpha_\kappa}{A}-1\right)}=\prod_{\kappa=1}^{\nu}e^{\frac{\alpha_\kappa}{A}-1}\geq\prod_{\kappa=1}^{\nu}\frac{\alpha_\kappa}{A}=\frac{G^\nu}{A^\nu}.$$

Άρα $A \geq G$.

Επειδη η ισότητα $e^x=1+x$ ισχύει, εάν και μόνο εάν x=0, η ισότητα A=G ισχύει, εάν και μόνο εάν $\alpha_\kappa = A$ για κάθε κ».

Η απόδειξη αυτή έχει καταγραφεί στη σελίδα 103 του κλασικού βιβλίου: Hardy - Littlewood - Pólya, ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ.

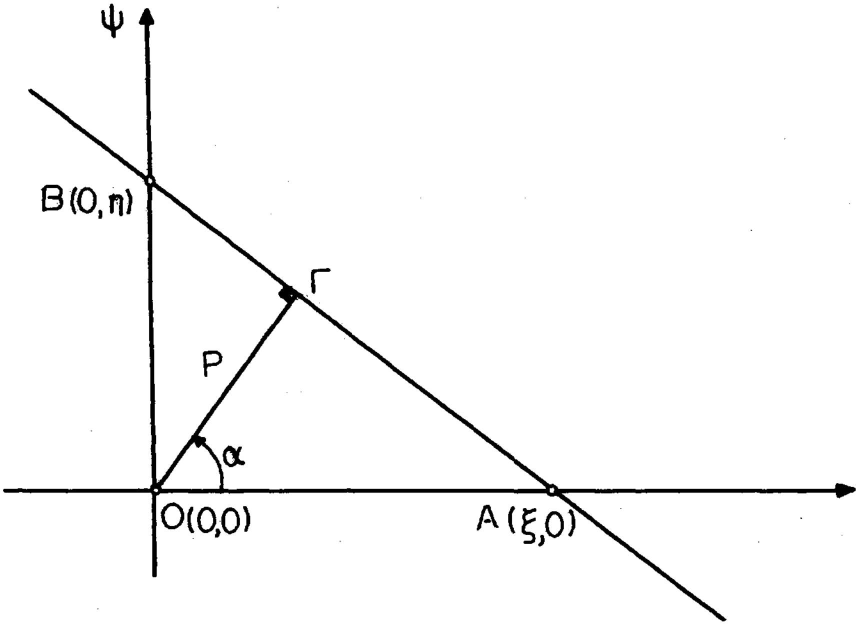
Επίσης, η απόδειξη αυτή υπάρχει και στη σελ. 60 του βιβλίου: Ross Honsberger, Mathematical Morsels.

Σχόλια του εκδότη

1. Η εξίσωση της ευθείας με τη μορφή

$$x\, συνα + y\, ημα = p\ ,$$

όπου ΟΓ=p, ΟΓ ⊥ ΑΒ και $\hat{ΓΟΑ} = α$, προκύπτει με απλό τρόπο ως εξής:



Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ με **συντεταγμένες επί την αρχή** ξ και n είναι:

$$\frac{x}{ξ} + \frac{y}{n} = 1 \quad (1)$$

όπου $ξ = p \cdot τεμ\, α$ και $n = p \cdot στεμ\, α$.

Συνεπώς, η εξίσωση (1) γράφεται:

$$\frac{x}{p \cdot τεμ\, α} + \frac{y}{p \cdot στεμ\, α} = 1 \quad ή \quad x\, συνα + y\, ημα = p\ .$$

2. Με τον όρο **καθετική** και όχι **κανονική εξίσωση ευθείας**, ο συνάδελφος **Δ. Βάθης**, θέτει ένα ζήτημα ουσίας. Πρόκειται για την απόδοση των μαθηματικών εννοιών κατά τρόπο απολύτως διαυγή και συγκεκριμένο.

Επί του θέματος έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

(α) **Ο Φίλων Βασιλείου** στο βιβλίο του: Ανώτερα μαθηματικά, τόμος πρώτος, τεύχος πρώτο, σελ. 107 § 63, **Αθήνα 1963,** χρησιμοποιεί την έκφραση **κανονική μορφή εξισώσεως ευθείας ή επιπέδου.**

(β) Ο **Σ.Γ. Κανέλλος** στο βιβλίο του: Ασκήσεις ανωτέρων μαθηματικών, τόμος πρώτος, σελ. 98 § 15, **Αθήνα 1955,** χρησιμοποιεί την έκφραση **κανονική εξίσωση ευθείας.**

(γ) Ο **Ν. Κριτικός** στο βιβλίο του: Πρόχειρες σημειώσεις ανωτέρων μαθηματικών, τόμος Ι, σελ. 136 § 109, **Αθήνα 1968,** χρησιμοποιεί την έκφραση **κανονική μορφή εξισώσεως ευθείας.**

(δ) Ο **Μαυρίκιος Μπρίκας** στο βιβλίο του: Μαθήματα αναλυτικής γεωμετρίας, σελ. 85 §1, **Αθήνα 1965,** σημειώνει: Η μορφή αυτή της εξισώσεως της ευθείας καλείται **κανονική μορφή ή μορφή του Hesse.**

(ε) Ο **Ι. Μήττας** στο βιβλίο του: Μαθήματα ανωτέρων μαθηματικών, τόμος δεύτερος, σελ. 333 §5, **Θεσσαλονίκη 1980,** χρησιμοποιεί την έκφραση **κανονικές μορφές ευθείας και επιπέδου.**

Εμείς χαιρετίζομε με ιδιαίτερη ικανοποίηση το γεγονός ότι, οι παραπάνω Πανεπιστημιακοί δάσκαλοι και συγγραφείς, ακολουθούν ενιαία ερμηνεία του όρου **Normal line.**

Άλλωστε, δεν είναι άγνωστο ότι οι λέξεις normal, perpendicular, canonical, standard αναφέρονται στα Αγγλοελληνικά λεξικά ως συνώνυμες.

Και κάτι ακόμη. Δεν είναι άγνωστο στον **Δ. Βάθη,** ότι ο καθηγητής **Συμεών Μποζαπαλίδης** στο βιβλίο του Γραμμική Άλγεβρα, μέρος Α, Ιωάννινα 1979 και στις σελίδες 11, 12 αναφέρει: Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ ονομάζεται **ένεση** (injection) εάν για κάθε $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Δηλαδή τις συναρτήσεις που ονομάζουμε **αμφιμονοσήμαντες** ή ένα προς ένα, συμβολικά 1-1, ο κ. Καθηγητής τις ονομάζει **ενέσεις.**

Και συνεχίζει: Η $f: X \to Y$ θα λέγεται **έφεση** (surjection) εάν για κάθε στοιχείο y του Y υπάρχει ένα στοιχείο x του X έτσι ώστε $f(x)=y$.

Δηλαδή για τη συνάρτηση **επί** (όταν $f(A)=B$) ο κ. Καθηγητής προτείνει τον όρο **έφεση.**

Μια συνάρτηση που είναι **1-1** και επί, ο κ. Καθηγητής την ονομάζει **αμφίεση** (bijections).

Ονομάζει δηλαδή **αμφίεση** μια συνάρτηση που είναι ταυτόχρονα **ένεση** και **έφεση.**

Νομίζω ότι δικαιούται κανείς να διερωτηθεί. Είναι δυνατόν; Στοιχειωδώς, θα μπορέσουμε κάποτε να συννενοηθούμε τουλάχιστον σε ορισμούς και σε βασικές έννοιες; Ποιος θα μας γλιτώσει απ' αυτό το δάσος των εννοιών και των ορισμών; Είναι δυνατόν να πραγματοποιηθεί κατανόηση εννοιών και ορισμών με μια τέτοια γλωσσική σύγχυση; Για το Θεό όχι! Είναι όμως απαραίτητο να επισημανθεί και κάτι ακόμη. Υποθέτουμε ότι στις εξετάσεις τίθεται το ερώτημα: **Πότε μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική;** Τι θ' απαντήσουμε σ' αυτήν την ερώτηση;

Ο Tom M. Apostol* στο βιβλίο του: Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, τόμος Ι, σελ. 83 σημειώνει: Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** με περίοδο p, όταν το πεδίο της περιέχει τον $x+p$ όταν περιέχει τον x και αν $f(x+p)=f(x)$ για κάθε x του πεδίου της f. Η μικρότερη θετική περίοδος (αν υπάρχει) ονομάζεται **πρωτεύουσα** (ή **θεμελιώδης**) περίοδος της συνάρτησης f.

Ο Michael Spivak στο βιβλίο του: Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, σελ. 63 και 251 σημειώνει: Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική,** με περίοδο α, αν $f(x+a)=f(x)$ για κάθε x.

Οι Σ. Νεγρεπόντης – Σ. Γιωτόπουλος – Ε. Γιαννακούλιας, στο βιβλίο τους: Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1987, σελ. 136, αναφέρουν: Η συνάρτηση $f:R \to R$ είναι **περιοδική** με περίοδο λ, αν υπάρχει σταθερός πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$ ώστε $f(x+\lambda)=f(x)$ για κάθε $x \in R$.

Οι συγγραφείς Άννα Φερεντίνου - Νικολακοπούλου και Βάσος Χ. Σαββαΐδης στο βιβλίο τους: Στοιχεία Μαθηματικής Αναλύσεως, Τόμος 1, σελ. 257, Αθήνα 1975 σημειώνουν:

Μια συνάρτηση $f: A \to R$ λέγεται **περιοδική,** όταν υπάρχει αριθμός $\omega \neq 0$, τέτοιος ώστε γα κάθε x του A, το $x+\omega$ ν' ανήκει επίσης στο A και να είναι $f(x+\omega)=f(x)$.

Στο βιβλίο Μαθηματικά Ι, Γ' Λυκείου, Ανάλυση, ΟΕΔΒ, Αθήνα 1991 και στη σελίδα 15, διαβάζουμε:

Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει $T \in R^*$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να είναι:

*** Ο ίδιος συγγραφέας στο βιβλίο του MATHEMATICAL ANALYSIS, σελ. 317, γράφει: Η συνάρτηση f λέμε ότι είναι περιοδική με περίοδο p $\neq 0$, αν είναι ορισμένη στο R και $f(x+p)=f(x)$ για κάθε x.**

$$x+T \in A \text{ και } f(x+T)=f(x).$$

Στο βιβλίο της Α′ Λυκείου (τεύχος Β′) ΑΛΓΕΒΡΑ, σελ. 92, διαβάζουμε:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

i) $x+T \in A$, $x-T \in A$ και

ii) $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$.

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

Μ' αυτά τα δεδομένα διερωτάται κανείς. Με ποια λογική οι συγγραφείς του βιβλίου της Α′ Λυκείου υιοθετούν τον παραπάνω ορισμό; Σε ποιους απευθύνεται αυτή η μπουκωμένη γνώση;

Δεδομένου ότι κάθε συνάρτηση $f:R \to R$ περιοδική, είναι και αμφίπλευρα περιοδική ή αμφιπεριοδική, τι χρειαζόταν ο ορισμός της αμφιπεριοδικής;

Είναι δυνατόν, τέτοιας μορφής μαθηματικά κείμενα ν' αφυπνίσουν την περιέργεια και να δημιουργήσουν κίνητρα για ενδιαφέροντα σε διάφορα προβλήματα; Υπάρχει λογική, στερεότητα της μαθηματικής γνώσης σε τέτοια κείμενα, όταν αναγνωρίζεται όλο και περισσότερο ότι ο καθένας πρέπει να ξέρει Μαθηματικά για να καταλάβει τον κόσμο μέσα στον οποίο ζει; Πώς ο αυριανός πολίτης θα εφαρμόσει τα Μαθηματικά σε πρακτικά ζητήματα και ακόμη πώς θα μπορέσει να εκτιμήσει τα μεγαλύτερα διεθνή προβλήματα, που η λύση τους εξαρτάται από τα Μαθηματικά και που είναι δεμένη με τη χρήση μαθηματικών μεθόδων;

3. Αποδεικνύεται απλά ότι για να είναι ίσες οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ, πρέπει και αρκεί ή το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με $\beta=\gamma$ ή $\beta+\gamma=\frac{3\alpha}{2}$ και $\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{3}$.

Οι σχέσεις $\beta+\gamma=\frac{3\alpha}{2}$ και $\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{3}$ σημαίνουν ότι τα β και γ είναι ρίζες της εξής εξισώσεως:

$$x^2-\frac{3\alpha}{2}x+\frac{\alpha^2}{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2-9\alpha x+2\alpha^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\alpha\cdot\frac{9\pm\sqrt{33}}{12}, \text{ οπότε}$$

$$\beta=\alpha\cdot\frac{9\pm\sqrt{33}}{12} \text{ και } \gamma=\alpha\cdot\frac{9\mp\sqrt{33}}{12}.$$

Επομένως, οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες τότε και μόνο τότε, όταν β=γ ή όταν οι πλευρές του είναι:

$$\alpha,\quad \beta = \alpha\cdot\frac{9\pm\sqrt{33}}{12} \quad \text{και} \quad \gamma = \alpha\cdot\frac{9\mp\sqrt{33}}{12}.$$

Σ' αυτή την περίπτωση με υπολογισμό παίρνουμε:

$$\Delta_\beta = \Delta_\gamma = \frac{\alpha}{2}\sqrt{2},$$

ενώ το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ισοσκελές.

Τέλος, μπορεί να αποδείξει κανείς ότι για να έχει ένα τρίγωνο δύο εξωτερικές διχοτόμους ίσες, πρέπει και αρκεί νάναι ισοσκελές ή οι γωνίες του να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\eta\mu^2\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad \text{και} \quad \hat{B} < \hat{A} < \hat{\Gamma}.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΔΗΜ. ΒΑΘΗ

1. $\boxed{f(p \cdot \alpha + q \cdot \beta) \ \langle \ pf(\alpha) + qf(\beta)}$

Τα σημεία Α, Β, Μ είναι συγγραμμικά, εάν και μόνο εάν

$$\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{AB}. \qquad (1)$$

Εάν Ο είναι η αρχή των διανυσματικών ακτίνων, τότε η (1) διαδοχικά γράφεται:

$$\vec{OM} - \vec{OA} = \lambda \cdot \left(\vec{OB} - \vec{OA} \right)$$

$$\boxed{\vec{OM} = (1-\lambda)\, \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB}}\ . \qquad (2)$$

Εάν το Μ είναι μεταξύ των Α και Β, τότε, προφανώς, $0<\lambda<1$.
Έχουμε, λοιπόν, την

Πρόταση 1η:

«Το σημείο Μ κείται μεταξύ των Α και Β, εάν και μόνο εάν είναι

$$\vec{OM} = p \cdot \vec{OA} + q \cdot \vec{OB} \qquad (3)$$

όπου $0<p<1$ και $p+q=1$».

Πρόταση 2η:

«Θεωρούμε τη συνάρτηση f/Δ με την ιδιότητα: για όλα τα α, β, $\in \Delta$ και $p,q \in [0,1]$ με $p+q=1$, ισχύει:

$$f(p \cdot \alpha + q \cdot \beta) \ \langle \ pf(\alpha) + qf(\beta)\ .$$

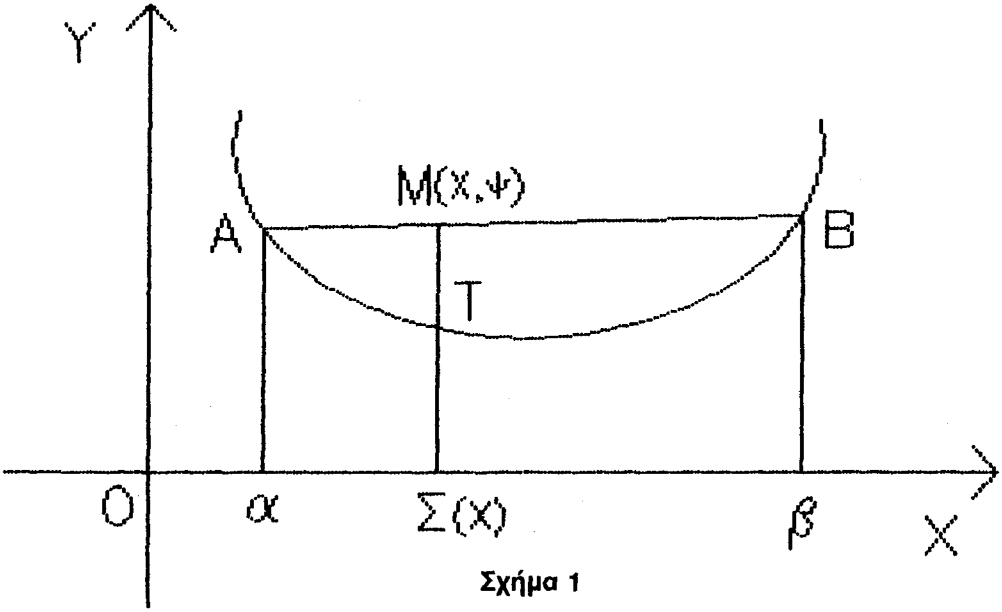
Τότε η f είναι κυρτή στο Δ».

Σ.τ.Ε. Η ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ ΔΗΜ. ΒΑΘΗ, είναι φοιτήτρια Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών.

Απόδειξη

Η f είναι κυρτή, εάν και μόνο εάν:

$$\overline{ΣT} \leq \overline{ΣM} \quad (1) \quad (Σχ. 1).$$



Σχήμα 1

Το σημείο Μ κείται μεταξύ των Α και Β· άρα (πρόταση 1η) ισχύει:

$$\vec{OM} = p \cdot \vec{OA} + q \cdot \vec{OB} \qquad (2)$$

με $0<p<1$ και $p+q=1$.

Η (2) γράφεται:

$$(x, y) = p \cdot \big(a, f(a)\big) + q \cdot \big(\beta, f(\beta)\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = pa + q\beta \\ y = p \cdot f(a) + q \cdot f(\beta). \end{cases}$$

Άρα η (2) γράφεται:

$$f(p \cdot a + q \cdot \beta) \leq p \cdot f(a) + q \cdot f(\beta). \quad (3)$$

Παρατήρηση 1η: Εάν η f είναι κοίλη (δηλαδή, στρέφει τα κοίλα κάτω), τότε παρομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$f(p\cdot a+q\cdot \beta) \geq p\cdot f(a)+q\cdot f(\beta). \qquad (4)$$

Παρατήρηση 2η: Εάν η f είναι γνησίως κοίλη ή γνησίως κυρτή, τότε στις (3) και (4) ισχύει η γνήσια ανισότητα, δηλαδή < ή >, αντιστοίχως.

$$\boxed{x^p\cdot y^q < px+qy}$$

Πρόταση 3η:
«Εάν x,y>0 και p+q=1 με 0<p<1, τότε $x^p\cdot y^q < px+qy$» .

1η Απόδειξη
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln x \quad (x>0).$$

Είναι $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$· άρα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα κάτω και είναι γνησίως αύξουσα, αφού $f'(x)=\dfrac{1}{x}>0$.

Άρα (παρατήρηση 2η)

$$\ln(px+qy)>p\ln x+q\ln y \qquad (1)$$

με 0<p<1, p+q=1 .
Η (1) γράφεται

$$\ln(px+qy)>\ln(x^p y^q)$$

$$\boxed{x^p\cdot y^q < px+qy}.$$

2η Απόδειξη
Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) για τη συνάρτηση

$$x^q\Big|\,[a,\ \beta], \quad x>0,\ 0<q<1$$

έχουμε: $\beta^q-a^q=(\beta-a)\cdot(\xi^q)'$, $(a<\xi<\beta)$

$$\beta^q-a^q=q\,(\beta-a)\,\xi^{q-1}$$

$$\beta^q-a^q<q\,(\beta-a)\,a^{q-1}$$

$$(\beta^q-a^q)\,a^{1-q}<q\,(\beta-a)$$

$$a^{1-q}\beta^{q}-a < q(\beta-a)$$

$$a^{1-q}\beta^{q} < a+q(\beta-a)$$

$$a^{1-q}\beta^{q} < (1-q)\,a+q\,\beta. \qquad (1)$$

Εάν τεθεί 1-q=p, τότε η (1) γράφεται:

$$\boxed{a^{p}\beta^{q} < pa+q\,\beta}$$

με $0<q<1$, $p+q=1$, $a, \beta>0$.

2. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Σε όλα τα σχολικά βιβλία Ανάλυσης υπάρχει το ακόλουθο κριτήριο μονοτονίας:

«Εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f'(x) \geq 0$, τότε η f είναι αύξουσα στο Δ».

Η υπόθεση $f'(x) \geq 0$ περιέχει τις ακόλουθες μερικές περιπτώσεις, οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον:

1) Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Σ' αυτήν την περίπτωση η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

2) Υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$ τέτοιο, ώστε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1$.

Σ' αυτήν την περίπτωση η f είναι σταθερή στο Δ_1.

3) Το σύνολο E των ριζών της f' είναι πυκνό μέσα σε ένα διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$.

Σ' αυτήν την περίπτωση, εάν υποθετεί ότι η f' είναι συνεχής, θα έχουμε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1$.

4) Το σύνολο E των ριζών της f' να είναι πυκνό σε ένα υποδιάστημα του Δ, αλλά η f' να μην είναι συνεχής.

5) «Ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ αλλά δεν υπάρχει διάστημα $\Delta_1 \subseteq \Delta$ τέτοιο, ώστε να είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_1$».

Σ' αυτή την περίπτωση μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Απόδειξη

Για δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$, επειδή η f είναι αύξουσα (αφού $f'(x) \geq 0$).

Εάν υποθέσουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$, επειδή η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$, η f θα είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$ και επομένως $f'(x) = 0$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$.

Αυτό, όμως, αποκλείεται από την υπόθεση. Άρα $f(x_1) < f(x_2)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Σημείωση: Προφανώς, το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που το σύνολο των ριζών της f' έχει σημείο συσσωρεύσεως.

ΜΕΡΙΚΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΤΕΛΛΑ Μ. ΚΟΥΤΡΑΚΗ
(ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ)

I. Γύρω από την ισότητα $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

Ορισμός 1: Αν α είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και $\theta \geq 0$, τότε:

$$\sqrt{\theta}=|\alpha| \Leftrightarrow \alpha\cdot\alpha=\theta.$$

Ορισμός 2: Αν α είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός και $\theta<0$ και αν i είναι ο αριθμός που ορίζεται ως $i\cdot i=-1$, τότε $\sqrt{\theta}=|\alpha| i \Leftrightarrow \alpha i\cdot\alpha i=\theta$.

Διερεύνηση της δεδομένης ισότητας

Περίπτωση 1: Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.

Απόδειξη

Υποθέτομε ότι $\sqrt{\alpha}=|x|$ και $\sqrt{\beta}=|y|$. Από τον ορισμό 1 παίρνομε $x\cdot x=\alpha$ και $y\cdot y=\beta$. Επομένως $x\cdot x\cdot y\cdot y=\alpha\beta$ ή $(xy)\cdot(xy)=\alpha\beta$ και λόγω του ορισμού 1 έχομε $\sqrt{\alpha\beta}=|xy|$.

Επειδή $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=|x|\cdot|y|$ και $|xy|=|x|\cdot|y|$, τελικά ισχύει $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.

Περίπτωση 2: Αν $\alpha<0$ και $\beta\geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. (Η περίπτωση $\alpha\geq 0$ και $\beta<0$ εξετάζεται ανάλογα).

Απόδειξη

Υποθέτομε ότι $\sqrt{\alpha}=|x|i$ και $\sqrt{\beta}=|y|$. Από τους ορισμούς 1 και 2 έχομε $xi\cdot xi=\alpha$ και $y\cdot y=\beta$ ή $xi\cdot xi\cdot y\cdot y=\alpha\beta$ ή $(xyi)\cdot(xyi)=\alpha\beta$ και από τον ορισμό 2 ισχύει ότι $\sqrt{\alpha\beta}=|xy|i$.

Εξάλλου

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=|x|i\cdot|y| \quad \text{ή} \quad \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=|x|\cdot|y|i=|xy|i$$

Συνεπώς $$\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}.$$

Περίπτωση 3: Αν $\alpha<0$ και $\beta<0$, τότε $\sqrt{\alpha\beta}\neq\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\sqrt{\alpha} = |x|i$ και $\sqrt{\beta} = |y|i$.. Βάσει του ορισμού 2, παίρνουμε:

$$xi \cdot xi = \alpha \text{ και } yi \cdot yi = \beta$$

Συνεπώς $xi \cdot xi \cdot yi \cdot yi = \alpha\beta$

ή $(xy)\cdot(xy)\cdot i\cdot i\cdot i\cdot i = \alpha\beta$ ή $(xy)\cdot(xy)\cdot(-1)\cdot(-1) = \alpha\beta$

ή $(xy)\cdot(xy)\cdot(+1) = \alpha\beta$ ή $(xy)\cdot(xy) = \alpha\beta$ ή $\sqrt{\alpha\beta} = |xy|$.

Ακόμη $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = |x|i\cdot|y|i$ ή $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = |x|\cdot|y|\cdot i\cdot i$

ή $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = |x|\cdot|y|\cdot(-1)$ ή $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = -|x|\cdot|y|$

ή $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = -|xy|$.

Συνεπώς $\sqrt{\alpha\beta} \neq \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$.

Σχόλιο: Αν $\theta < 0$, τότε $\sqrt{\theta} = i\sqrt{-\theta}$.

Απόδειξη

Υποθέτομε ότι $\sqrt{\theta} = |\alpha|\, i$, (Σ)

Από τον οριθμό 2 παίρνουμε:

$\alpha i\cdot \alpha i = \theta$ ή $\alpha\cdot\alpha\cdot i\cdot i = \theta$ ή $\alpha\cdot\alpha\cdot(-1) = \theta$ ή $\alpha\alpha = -\theta$ $(-\theta > 0)$.

Από τον ορισμό 1 ισχύει ότι $\sqrt{-\theta} = |\alpha|$ και αντικαθιστώντας στη (Σ) έχομε:

$$\sqrt{\theta} = \sqrt{-\theta}\, i \text{ ή } \sqrt{\theta} = i\sqrt{-\theta}.$$

Εφαρμογή

Να επιλυθεί η διτετράγωνη εξίσωση:

$$\mathbf{x^4 - 2(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha-\beta)^2 = 0}.$$

Να δειχθεί ότι οι ρίζες της μπορούν να τεθούν στη μορφή απλών ριζικών.

Λύση

Για $x^2 = y$, η αρχική είναι ισοδύναμη με τη

$$y^2 - 2(\alpha+\beta)y + (\alpha-\beta)^2 = 0$$

της οποίας η διακρίνουσα ισούται με

$$4(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha-\beta)^2 = 4(\alpha+\beta+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\alpha+\beta) =$$
$$= 4\cdot 2\alpha\cdot 2\beta = 16\alpha\beta$$

$$y = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta} \quad \text{(I)} \quad \text{για } \alpha\beta \geq 0 \text{ και}$$

Άρα

$$y = \alpha + \beta \pm 2i\sqrt{-\alpha\beta} \quad \text{(II)} \quad \text{για } \alpha\beta < 0$$

που ισοδύναμα γράφεται $y = \alpha + \beta \pm 2i\sqrt{|\alpha\beta|}$.

Για την (I) διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) $\alpha > 0,\ \beta > 0 \ \Rightarrow\ \text{(I)} \ \Leftrightarrow\ y = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 \pm 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \left(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}\right)^2$.

Άρα

$$x_1 = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \quad x_2 = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \quad x_3 = \left|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right| \quad x_4 = -\left|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right| .$$

ii) $\alpha < 0,\ \beta < 0 \ \Rightarrow\ \text{(II)} \ \Leftrightarrow\ y = \left(i\sqrt{|\alpha|}\right)^2 + \left(i\sqrt{|\beta|}\right)^2 \pm 2\sqrt{|\alpha\beta|} = -\left(\sqrt{|\alpha|} \mp \sqrt{|\beta|}\right)^2$.

Άρα

$$x_1 = i\left|\sqrt{|\alpha|} - \sqrt{|\beta|}\right| \quad x_2 = -i\left|\sqrt{|\alpha|} - \sqrt{|\beta|}\right| \quad x_3 = i\left(\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}\right) \quad x_4 = -i\left(\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{|\beta|}\right) .$$

Για τη (II) διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\alpha > 0,\ \beta < 0 \ \Leftrightarrow\ \text{(II)} \ \Leftrightarrow\ y = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(i\sqrt{|\beta|}\right)^2 \pm 2i\sqrt{\alpha|\beta|} = \left(\sqrt{\alpha} \pm i\sqrt{|\beta|}\right)^2$.

Άρα

$$x_1 = \sqrt{\alpha} + i\sqrt{|\beta|} \quad x_2 = -\sqrt{\alpha} - i\sqrt{|\beta|} \quad x_3 = \sqrt{\alpha} - i\sqrt{|\beta|} \quad x_4 = -\sqrt{\alpha} + i\sqrt{|\beta|} .$$

β) $\alpha < 0,\ \beta > 0 \ \Rightarrow\ \text{(II)} \ \Leftrightarrow\ y = \left(i\sqrt{|\alpha|}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 \pm 2i\sqrt{\beta|\alpha|} = \left(i\sqrt{|\alpha|} \pm \sqrt{\beta}\right)^2$.

Άρα

$$x_1 = i\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{\beta} \quad x_2 = -i\sqrt{|\alpha|} - \sqrt{\beta} \quad x_3 = i\sqrt{|\alpha|} - \sqrt{\beta} \quad x_4 = -i\sqrt{|\alpha|} + \sqrt{\beta} .$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης τίθενται στη μορφή απλών ριζικών.

II. Απόδειξη της ταυτότητας του Euler: $e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x$

Δεχόμαστε ότι το σύμβολο e^{ix} αντιπροσωπεύει μια συνάρτηση του x που έχει τιμή 1 για $x=0$ και της οποίας η παράγωγος είναι $i\cdot e^{ix}$. Στη συνέχεια θεωρούμε την τριτοτάξια ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} e^{ix} & \sigma\upsilon\nu x & \eta\mu x \\ ie^{ix} & -\eta\mu x & \sigma\upsilon\nu x \\ -e^{ix} & -\sigma\upsilon\nu x & -\eta\mu x \end{vmatrix}.$$

Επειδή τα αντίστοιχα στοιχεία δύο γραμμών (πρώτης και τρίτης) είναι ανάλογα, η τιμή της ορίζουσας είναι μηδέν για όλα τα x.
Αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, έχομε:

$$e^{ix} - \lambda\ \sigma\upsilon\nu x - \mu\ \eta\mu x = 0$$

όπου λ και μ είναι:

$$\lambda = -i\cdot e^{ix}\ \eta\mu x + e^{ix}\ \sigma\upsilon\nu x,$$
$$\mu = i\cdot e^{ix}\ \sigma\upsilon\nu x + e^{ix}\ \eta\mu x.$$

Αν παραγωγίσουμε τα λ και μ, βρίσκομε:

$$\lambda' = e^{ix}\ \eta\mu x - i e^{ix}\ \sigma\upsilon\nu x + i e^{ix}\ \sigma\upsilon\nu x - e^{ix}\ \eta\mu x = 0$$
$$\mu' = -e^{ix}\ \sigma\upsilon\nu x - ie^{ix}\ \eta\mu x + ie^{ix}\ \eta\mu x + e^{ix}\ \sigma\upsilon\nu x = 0$$

άρα

$$\lambda = C_1, \quad \mu = C_2 \quad \Rightarrow \quad e^{ix} = C_1\ \sigma\upsilon\nu x + C_2\ \eta\mu x \quad (1)$$

$$\text{για} \quad x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 1 = C_1 \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας την (1), παίρνομε:

$$\left(e^{ix}\right)' = -C_1\ \eta\mu x + C_2\ \sigma\upsilon\nu x \Rightarrow ie^{ix} = -C_1\ \eta\mu x + C_2\ \sigma\upsilon\nu x \overset{x=0}{\Rightarrow} i = C_2 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \quad \Rightarrow \quad e^{ix} = \sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x.$$

III. Μέθοδος της διακρίνουσας

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται προκειμένου ν' αποδειχθεί μια ανισοταυτότητα, όταν είναι δυνατή η κατασκευή τριωνύμου 2ου βαθμού ως προς μια οποιαδήποτε μεταβλητή.

Υπενθύμιση

1. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \geq 0 \quad \forall x \in R \iff \alpha > 0$ και $\Delta \leq 0$.
2. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0 \quad \forall x \in R \iff \alpha > 0$ και $\Delta < 0$.
3. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0 \quad \forall x \in R \iff \alpha < 0$ και $\Delta \leq 0$.
4. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0 \quad \forall x \in R \iff \alpha < 0$ και $\Delta < 0$.

Ο μηχανισμός της μεθόδου θα γίνει αντιληπτός με τη βοήθεια των αντιπροσωπευτικών λυμένων θεμάτων που ακολουθούν.

Παράδειγμα 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$. Να βρεθούν το πεδίο τιμών της, το supremum, το infimum, το maximum και το minimum.

Λύση

Πεδίο ορισμού της f είναι το R, γιατί ο παρανομαστής $x^2 - x + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Για να βρούμε το πεδίο τιμών της f θέτομε:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} = y \iff x^2 - x - 2 = yx^2 - yx + y \iff$$

$$\iff (y-1)x^2 - (y-1)x + y + 2 = 0, \qquad (E)$$

Για y=1 παίρνομε 3=0 και επομένως ο 1 δεν ανήκει στο πεδίο τιμών της f. Υποθέτομε ότι $y \neq 1$. Ο y επιτρέπεται να πάρει εκείνες και μόνο εκείνες τις πραγματικές τιμές, για τις οποίες η ως προς x εξίσωση (E) έχει μια τουλάχιστον ρίζα που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, δηλαδή στο R. Έτσι έχομε:

$$\Delta \geq 0 \text{ και } y \neq 1 \iff (y-1)^2 - 4(y-1)(y+2) \geq 0$$

$$\text{και } y \neq 1 \iff (y-1)(y+3) \leq 0 \text{ και } y \neq 1 \iff -3 \leq y < 1.$$

Το inf (f)=-3, sup (f)=1, min (f)=-3, max (f) δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2

Να επιλυθεί στο R η εξίσωση:

$$\textbf{(E)}: 5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0.$$

Λύση

(Ε) $\Leftrightarrow$ $5x^2 + (8y-2)x + (5y^2 + 2y + 2) = 0$.

Επειδή $x \in R$, έπεται ότι πρέπει $\Delta \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(8y-2)^2 - 4 \cdot 5(5y^2 + 2y + 2) \geq 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $-36(y+1)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $y = -1$ (οπότε $x = 1$).

Παράδειγμα 3

Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f με $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$.

Λύση

Πεδίο ορισμού της f είναι το $R - \{\pm 1\}$.

Πεδίο τιμών της f. Η δεδομένη σχέση γίνεται:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x+1} = y, \quad (E).$$

Από την (Ε) παίρνομε f(1)=0. Επειδή f(0)=0 έπεται ότι το 0 ανήκει στο πεδίο τιμών. Εξάλλου, από τη σχέση (Ε) παίρνουμε $x^2 - (y+1)x - y = 0$.

Επειδή $x \in R - \{\pm 1\}$, έπεται ότι πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y+1)^2 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \leq -3 - \sqrt{8} \text{ ή } y \geq -3 + \sqrt{8}$$

Συνεπώς το πεδίο τιμών της f είναι το $R(f) = \left(-\infty, -3 - \sqrt{8}\right] \cup \left[-3 + \sqrt{8}, +\infty\right)$.

Παράδειγμα 4

Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να πληρούται για να έχει λύση η εξίσωση:

$$\textbf{(E)}: \alpha\,\text{συν}\,x + \beta\,\text{ημ}\,x + \gamma = 0.$$

Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα α, β, γ για να δέχεται η (Ε) λύσεις της μορφής $x = (2\kappa+1)\pi, \ \kappa \in Z$ **;**

Λύση

Αντικαθιστούμε στην (Ε) το ημx και το συνx συναρτήσει της

$\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$: $\eta\mu x=\dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$ και $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}$, όπου $x\neq \pi+2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$.

Για $x=\pi+2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$ δεν υπάρχει η $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$.

Έτσι παίρνομε την εξίσωση

$$\alpha\ \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}+\beta\frac{2\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}+\gamma=0$$

$$\text{ή}\qquad (\gamma-\alpha)\ \varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+2\beta\ \varepsilon\varphi\frac{x}{2}+\gamma+\alpha=0\,.$$

Για νάναι η τελευταία αυτή εξίσωση αδύνατη, πρέπει και αρκεί η διακρίνουσά της νάναι μικρότερη του μηδενός, δηλαδή $\beta^2-(\gamma^2-\alpha^2)<0$ ή $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$.

Ακόμη, πρέπει να αποκλείσομε τη δυνατότητα ύπαρξης λύσης της μορφής $x=\pi+2\kappa\pi$, (όπου κ=ακέραιος).

Επομένως, πρέπει να ισχύει:

$$\alpha\ \sigma\upsilon\nu\,(\pi+2\kappa\pi)+\beta\,\eta\mu\,(\pi+2\kappa\pi)\neq-\gamma\,,$$

δηλαδή $\gamma\neq\alpha$. Παρατηρούμε όμως ότι ο περιορισμός $\gamma\neq\alpha$, καλύπτεται από τον $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$.

Τελικά ο ζητούμενος περιορισμός είναι $\gamma^2>\alpha^2+\beta^2$. Η συνθήκη ύπαρξης λύσεων της μορφής $x=\pi+2\kappa\pi$ είναι η $\alpha=\gamma$. (Απαιτείται συνεπώς, έλεγχος των λύσεων της μορφής $x=\pi+2\kappa\pi,\ \kappa\in Z$).

Παράδειγμα 5

Βρείτε την ελάχιστη τιμή της (Σ): $z=4x^2+16xy+25y^2-24x-30y+60$.

Λύση

Ξαναγράφοντας αυτή την εξίσωση σαν τριώνυμο 2ου βαθμού ως προς x, παίρνομε:

$f(x)=4x^2+8(2y-3)x+25y^2-30y+60-z=0$

Επειδή $x\in R$, πρέπει $\Delta\geq0 \Leftrightarrow 64(2y-3)^2-16(25y^2-30y+60-z)\geq0$

ή $g(y)=9y^2+18y+24-z\leq0$.

Η διακρίνουσα της $g(y)$, η Δ_g πρέπει νάναι μη αρνητική για να ικανοποιεί την ανισότητα $g(y) \leq 0$, για κάποιες πραγματικές τιμές του y. Συνεπώς,

$$\Delta_g = 18^2 - 36\,(24 - z) \geq 0 \quad \text{ή} \quad z \geq 15 \; .$$

Οπότε το z παίρνει την ελάχιστή του τιμή, 15, όταν $\Delta=0$ και $\Delta_g=0$ ή όταν

$$y = \frac{-18 \pm \sqrt{\Delta_g}}{18} = -1 \quad \text{και} \quad x = \frac{-8(2y-3) \pm \sqrt{\Delta}}{8} = 5 \; .$$

Παράδειγμα 6

Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $y = 5x + \dfrac{16}{x} + 21$, για μια θετική τιμή του x.

Λύση

Ξαναγράφοντας τις δεδομένες σχέσεις, παίρνομε

$$5x^2 + (21 - y)x + 16 = 0 \; ,$$

δηλαδή μια εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα $\Delta = (21-y)^2 - 320$.

Επειδή $x \in R$, πρέπει

$$\Delta \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (21-y)^2 - 320 \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(21 - y - 8\sqrt{5}\right)\left(21 - y + 8\sqrt{5}\right) \geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y \geq 21 + 8\sqrt{5} \quad \text{ή} \quad y \leq 21 - 8\sqrt{5}, \qquad (1)\, .$$

Αφού το γινόμενο των δύο ριζών είναι $\dfrac{16}{5}$ και ενδιαφερόμαστε για μια θετική τιμή του x, θα πρέπει και οι δύο ρίζες νάναι θετικές.

Συνεπώς το άθροισμα των δύο ριζών $-\dfrac{21-y}{5}$, πρέπει νάναι θετικό, δηλαδή

$$-\frac{21-y}{5} > 0 \quad \text{ή} \quad y > 21, \qquad (2)\, .$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) παίρνομε

$$y \geq 21 + 8\sqrt{5}\, .$$

Επομένως το y παίρνει την ελάχιστη τιμή του $21 + 8\sqrt{5}$, όταν $\Delta=0$

$$\text{ή} \quad x = \frac{-(21-y) \pm \sqrt{\Delta}}{10} = -\frac{21-y}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{5}\, .$$

Παράδειγμα 7

Να βρεθεί το πεδίο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$$y=\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}.$$

Λύση

Έχομε $(y-1)x^2-(y+1)x+(2y-2)=0,\quad (1)$.

Λύνοντας την (1) ως προς x έχομε

$$x=\frac{y+1\pm\sqrt{-7y^2+18y-7}}{2(y-1)},\quad (2).$$

Είναι φανερό ότι το x παίρνει πραγματικές τιμές μόνο όταν $-7y^2+18y-7\geq 0$

$$\text{ή}\quad 7y^2-18y+7\leq 0\quad (y\neq 1),\quad (3).$$

Η ανίσωση (3) ικανοποιείται για τα y που ανήκουν στο διάστημα

$$\left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7},\ \frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right].$$

Βάζοντας στην (1) στη θέση του y τον αριθμό 1 παίρνομε ότι x=0, άρα το y μπορεί να ισούται με 1.

Έτσι το πεδίο τιμών της δοσμένης συνάρτησης είναι το $[y_1, y_2]$ με $y_1=\frac{9-4\sqrt{2}}{7}$ και $y_2=\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

Από την εξίσωση (2) παίρνομε τις άκρες τιμές του πεδίου ορισμού

$$x_1=\frac{y_1+1+0}{2(y_1-1)}=-\sqrt{2}\quad\text{και}\quad x_2=\frac{y_2+1-0}{2(y_2-1)}=\sqrt{2}.$$

Παράδειγμα 8

Ποιες τιμές πρέπει να πάρουν τα α, β $\in$R ώστε η συνάρτηση με τύπο $y=\frac{2\alpha x+\beta}{x^2+1}$ να έχει μέγιστη τιμή το 4 και ελάχιστη το -1.

Λύση

Έχομε $y=\frac{2\alpha x+\beta}{x^2+1}\ \Rightarrow\ yx^2-2\alpha x+y-\beta=0,\quad (1).$

Επειδή $x \in R$ πρέπει η διακρίνουσα Δ της (1) να είναι μη αρνητική. Επομένως θα έχομε

$$\Delta = \alpha^2 - y(y-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - \beta y - \alpha^2 \leq 0, \quad (2).$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $y^2 - \beta y - \alpha^2$ είναι $y_1 = \dfrac{\beta - \sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}$ και

$y_2 = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}$ και η (2) ικανοποιείται για

$$y_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2} \leq y \leq y_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2}.$$

Άρα

$$y_{max} = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2} = +4$$

και $$y_{min} = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2+4\alpha^2}}{2} = -1.$$

Από τη λύση του συστήματος

$$\left\{\beta + \sqrt{\beta^2+4\alpha^2} = 8, \ \beta - \sqrt{\beta^2+4\alpha^2} = -2\right\}$$

παίρνομε ότι $\alpha = \pm 2$, $\beta = 3$.

Άλλη λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το R. Για να έχει μέγιστη τιμή το 4 και ελάχιστη τιμή το -1 πρέπει και αρκεί να ισχύουν:

(Σ): $-1 \leq \dfrac{2\alpha x + \beta}{x^2+1} \leq 4$ για κάθε $x \in R$ και συγχρόνως το ίσον να ισχύει για κατάλληλες τιμές του x.

Οι σχέσεις (Σ) ισοδυναμούν με

$$-x^2 - 1 \leq 2\alpha x + \beta \leq 4x^2 + 4 \text{ ή (I) } x^2 + 2\alpha x + \beta + 1 \geq 0, \quad \forall x \in R$$

και (II) $4x^2 - 2\alpha x - \beta + 4 \geq 0$, $\forall x \in R$.

Η (I) αληθεύει αν το τριώνυμο $x^2 + 2x + \beta + 1$ έχει διπλή ρίζα, οπότε γίνεται θετικό ή μηδέν. Το ίδιο συμβαίνει και για την (II).

Συνεπώς πρέπει και αρκεί:

$\alpha^2-(\beta+1)=0$ και $\alpha^2-4(4-\beta)=0 \Leftrightarrow$

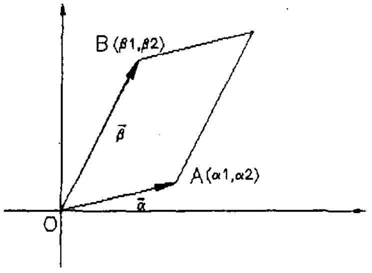
$$\Leftrightarrow \left.\begin{cases}\alpha^2=\beta+1\\ \alpha^2=16-4\beta\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\alpha^2=\beta+1\\ \beta+1=16-4\beta\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \beta=3 \quad \text{και} \quad \alpha^2=4$$

Επομένως πρέπει $\alpha=2$, $\beta=3$ ή $\alpha=-2$, $\beta=3$.

Παράδειγμα 9

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα που δεν είναι παράλληλα, του διανυσματικού χώρου $\vec{\Delta}_2$ και λ είναι πραγματικός αριθμός, τέτοιος ώστε, το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι μοναδιαίο, τότε δείξτε ότι το εμβαδό Ε του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν υπερβαίνει το μήκος του $\vec{\beta}$. Είναι δηλαδή $E\le|\vec{\beta}|$. (Ακαδημαϊκό 1979).

Λύση 1η



Έστω $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$ και $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$. Τότε η $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$ που ισοδυναμεί με

$|\vec{\alpha}|^2+\lambda^2|\vec{\beta}|^2+2\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1=0$, γράφεται

$$(\beta_1^2+\beta_2^2)\lambda^2+2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\lambda+\alpha_1^2+\alpha_2^2-1=0,$$

η οποία έχει ρίζες πραγματικές και συνεπώς:

$(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2-(\beta_1^2+\beta_2^2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2-1)\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2\le\beta_1^2+\beta_2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2\le\beta_1^2+\beta_2^2 \Leftrightarrow |\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|\le\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2} \Leftrightarrow E\le|\vec{\beta}|$

διότι το εμβαδόν Ε του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι: $|\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|$. Πραγματικά

$$E=|\overrightarrow{OA}|\,d(B,OA)=\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\,\frac{|\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2|}{\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_1^2}}=|\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|$$

διότι η εξίσωση της ΟΑ είναι

$$\alpha_2 x - \alpha_1 y = 0 \qquad \left(\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right)$$

Λύση 2η

Συμβολίζω με $\vec{i}$ το μοναδιαίο διάνυσμα $\Rightarrow$ $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{i}$. Υψώνω εσωτερικά στο τετράγωνο και παίρνω:

$$(\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta})^2 = \vec{i}^2 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \lambda^2\vec{\beta}^2 + 2\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 1 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 + \lambda^2|\vec{\beta}|^2 + 2\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\theta - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2|\vec{\beta}|^2 + 2\lambda|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\theta + |\vec{\alpha}|^2 - 1 = 0.$$

Επειδή όμως $\lambda \in R$, θα είναι $\Delta \geq 0$, άρα

$$\frac{\Delta}{4} = |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \text{συν}^2\theta - |\vec{\beta}|^2 \cdot \left(|\vec{\alpha}|^2 - 1\right) \geq 0 \Rightarrow |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \text{συν}^2\theta - |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 + |\vec{\beta}|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |\vec{\beta}|^2 \geq |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 - |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \text{συν}^2\theta \Rightarrow |\vec{\beta}|^2 \geq |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot (1 - \text{συν}^2\theta)$$

$$\Rightarrow |\vec{\beta}|^2 \geq |\vec{\alpha}|^2 \cdot |\vec{\beta}|^2 \cdot \text{ημ}^2\theta.$$

Αλλά το εμβαδό του παραλληλογράμου δίνεται από τη σχέση:

$E = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \text{ημ}\varphi$. Άρα $|\vec{\beta}|^2 \geq E^2 \Rightarrow |\vec{\beta}| \geq E$.

Παράδειγμα 10

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}.$$

Λύση

Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού είναι το $R - \{-1, +1\}$.

Εύρεση του πεδίο τιμών: Το y ανήκει στο πεδίο τιμών, τότε και μόνο τότε, αν υπάρχει πραγματικός διαφορετικός των ± 1, έτσι ώστε να ισχύει:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \Rightarrow (y-1)x^2 + 3x - y - 2 = 0, \qquad (\text{I}).$$

Θα εξετάσομε τώρα πότε λύνεται στο R η (I) ως προς x και η **λύση** δεν είναι το ± 1.

i) Αν το $y=1$ ανήκει στο πεδίο τιμών, τότε αντικαθιστώντας στην (I), παίρνομε $x=1$ που απαγορεύεται. Άρα το 1 δεν ανήκει στο πεδίο τιμών.

ii) Αν $y \neq 1$, η (I) είναι δευτεροβάθμια και για να λύνεται στο R πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μηδέν. Έχομε

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 9+4(y-1)(y+2) \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4y^2+4y+1 \geq 0 \Leftrightarrow (2y+1)^2 \geq 0, \quad (II).$$

Δηλαδή έχει πάντα πραγματικές λύσεις.

Δεν πρέπει όμως να βιαστούμε να πούμε ότι το πεδίο τιμών της (I) είναι το $R-\{1\}$, γιατί τότε ξεχνάμε ότι οι αριθμοί -1 και +1 δεν πρέπει να είναι **λύσεις** της (I).

iii) Για x=-1 η (I) δίνει $y-1-3-y-2=0$ που είναι αδύνατη και συνεπώς δεν έχομε ποτέ τη λύση x=-1.

iv) Για x=1 η (I) δίνει $y-1+3-y-2=0$ που είναι αόριστη και συνεπώς η (I) που είναι δευτεροβάθμια ($y \neq 1$) έχει πάντοτε τη λύση x=1.

Οι εξισώσεις όμως 2ου βαθμού έχουν κατά κανόνα δύο λύσεις (εκτός όταν έχουν διπλή ρίζα).

Μένει συνεπώς να δούμε πότε αυτές είναι διαφορετικές ώστε η μια λύση να είναι το 1, που δεν μας κάνει και η άλλη διαφορετική από το 1. Αυτό συμβαίνει για Δ αυστηρά θετικό κι έτσι παίρνομε ότι το $y \neq -\frac{1}{2}$.

Συμπέρασμα

Το πεδίο τιμών της συνάρτησης με τύπο

$$y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \quad \text{είναι το } R-\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Παράδειγμα 11

Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της f με

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}, \quad x \in R.}$$

Λύση

Εξετάζομε την περίπτωση του ολικού μεγίστου (εντελώς ανάλογα αντιμετωπίζεται η περίπτωση του ολικού ελαχίστου). Για να έχει μέγιστη τιμή η f πρέπει να υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε:

(I) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leq M$, για κάθε $x \in R$.

Η (I) $\Leftrightarrow x^2-x+1 \leq M\,(x^2+x+1) \Leftrightarrow x^2(1-M)-(1+M)x+1-M \leq 0$.

Για να διατηρείται όμως το τριώνυμο $x^2(1-M)-(1+M)x+1-M$ αρνητικό ή μηδέν για κάθε $x \in R$ πρέπει και αρκεί να έχει διπλή ρίζα και αρνητικό συντελεστή του x^2, δηλαδή

$$\left\{1-M<0 \text{ και } (1+M)^2-4(1-M)^2=0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M=3=\text{ολικό μέγιστο της } f.$$

Ανάλογα προσδιορίζεται ο m:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq m, \quad \text{για κάθε } x \in R.$$

Παράδειγμα 12

Οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο [α, β]. Δείξτε ότι ισχύει η ανισότητα Cauchy - Schwarz - Buniakowski:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt \int_a^b g^2(t)dt}.$$

Απόδειξη

Για κάθε πραγματικό x ισχύει

$$\int_a^b \big(f(t)-xg(t)\big)^2 dt \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\int_a^b g^2(t)dt - 2x\int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f^2(t)dt \geq 0.$$

Αυτό είναι δυνατό μόνο αν είναι η διακρίνουσα του τριωνύμου στο αριστερό μέλος αρνητική, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt,$$

το οποίο και έπρεπε να αποδειχθεί.

Σχόλιο

Με τη βοήθεια της παραπάνω ανισότητας μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\forall x>0, \quad \frac{2}{2x+1} \leq Ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}.$$

Πράγματι,

$$1=\int_x^{x+1}\sqrt{t}\,\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \sqrt{\int_x^{x+1} t\,dt \int_x^{x+1}\frac{1}{t}dt} \Rightarrow \frac{2}{2x+1} \leq Ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Επίσης είναι:

$$\operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt=\int_x^{x+1}\frac{1}{t}\cdot 1\cdot dt\ \le\ \sqrt{\int_x^{x+1}\frac{1}{t^2}dt\ \int_x^{x+1}1^2dt}=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\,.$$

Παράδειγμα 13

Να λυθεί στο N^* η εξίσωση:

$$\mathbf{3x^2+3y^2+3z^2+5yz-33y-5yx-5xz+29x-34z+103=0\,.}$$

Λύση

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$3x^2-(5y+5z+29)x+3y^2+3z^2+5yz-33y-34z+103=0$.

Επειδή $x\in R \Leftrightarrow \Delta_1=-11y^2-11z^2-10yz+106y+118z-395\ge 0$

$\Leftrightarrow \Delta_1=-11y^2-2(5z-53y)-(11z^2-118z+395)\ge 0 \quad (\mathrm{I})$.

Η τελευταία σχέση ισχύει αν:

$$\Delta_2=(5z-53)^2-11(11z^2-118z+395)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\ -96z^2+768z-1536\ge 0 \Leftrightarrow z^2-8z+16\le 0 \Rightarrow z=4\,.$$

Η (I) για z=4 δίνει

$$-11y^2+66y-99\ge 0 \Leftrightarrow y^2-6y+9\le 0 \Rightarrow y=3.$$

Για y=3 και z=4 η αρχική εξίσωση δίνει

$$3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x=1\,.$$

Επομένως x=1, y=3, z=4.

Παράδειγμα 14

x, y και z είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{x+y+z=5\ \text{και}\ xy+yz+zx=3\,.}$$

Βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει καθένας από τους τρεις αριθμούς.

Λύση 1η

Αφού $x+y=5-z$ και $xy=3+z^2-5z$, x και y είναι δύο ρίζες της β'θμίου

$$t^2+(z-5)t+(z^2-5z+3)\,.$$

Η συνθήκη να έχει αυτή η β'θμια πραγματικές ρίζες είναι

$$(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\ge 0 \ \text{ή}\ 3z^2-10z-13\le 0 \Leftrightarrow (z+1)(3z-13)\le 0.$$

Άρα $-1\le z\le\frac{13}{3} \Rightarrow z_{max}=\frac{13}{3}$. Αυτή την τιμή μπορούμε να την πάρουμε όταν

$$x - y = 0, \quad x + y = 5 - \frac{13}{3} = \frac{2}{3}, \text{ δηλαδή όταν } x = y = \frac{1}{3}.$$

Λύση 2η

Αφού $(x+y)^2 = (5-z)^2$ και $xy = 3 - z(x+y) = 3 - z(5-z)$, έχομε:

$$\begin{aligned} 0 \le (x-y)^2 &= (x+y)^2 - 4xy \\ &= 25 - 10z + z^2 - 12 + 20z - 4z^2 \\ &= -3z^2 + 10z + 13 = -(z+1)(3z-13), \end{aligned}$$

οπότε συνεχίζομε όπως στην 1η Λύση.

IV. Αλγεβρικές εξισώσεις

1. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$(2x-5)\cdot\left(\frac{3}{2}x+9\right)\cdot(0,3x-12)=0.$$

Απάντηση $x=2,5$ ή $x=-6$ ή $x=40$.

2. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$|2x|\cdot|-3,5|=|-28|.$$

Απάντηση $x=4$ ή $x=-4$.

3. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\frac{11}{5x-5}+\frac{x+3}{x^2-2x+1}=\frac{7x+6}{5x^2-10x+5}-\frac{5}{2-2x}.$$

Απάντηση $x=3$.

4. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$|x^2+3x|=|2x-6|.$$

Απάντηση $x=-6$ ή $x=1$.

5. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$x^4-4x+4=0.$$

Απάντηση

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο R, διότι

$$x^4-4x+4=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2+1+2x^2-4x+2+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2+\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)^2+1>0, \text{ για κάθε } x\in R.$$

6. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$x^4+x^2-x+2=0.$$

Απάντηση

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο R, διότι

$$x^4+x^2-x+2=0 \iff x^4+x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=0 \iff$$
$$\iff x^4+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0, \text{ για κάθε } x\in R.$$

7. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\mathbf{x^4-5x^2-6x-5=0.}$$

Λύση

$$x^4-5x^2-6x-5=0 \iff x^4-5x^2-5x-x-5=0 \iff$$
$$\iff x(x^3-1)-5(x^2+x+1)=0 \iff (x^2+x+1)\big(x(x-1)-5\big)=0 \iff$$
$$\iff (x^2+x+1)(x^2-x-5)=0.$$

Επομένως $x=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ και $x=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.

8. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\mathbf{x^8+x^4+1=0.}$$

Λύση

$$x^8+x^4+1=0 \iff (x^8+2x^4+1)-x^4=0 \iff (x^4+1)^2-(x^2)^2=0 \iff$$
$$\iff (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=0 \iff \Big((x^2+1)^2-x^2\Big)\Big((x^2+1)^2-(x\sqrt{3})^2\Big)=0 \iff$$
$$\iff (x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)=0 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Σχόλιο. $\left.\begin{cases} x^8\geq 0 \\ x^4\geq 0 \\ 1>0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x^8+x^4+1>0 \Rightarrow \nexists$ ρίζα στο R.

9. Να επιλυθεί στο N η εξίσωση

$$\mathbf{\left(\frac{2}{11\cdot 13}+\frac{2}{13\cdot 15}+\frac{2}{15\cdot 17}+\frac{2}{17\cdot 19}+\frac{2}{19\cdot 21}\right)\cdot 231-(1-4x)=9.}$$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\cdot 231-(1-4x)=9 \iff$$
$$\iff \left(\frac{1}{11}-\frac{1}{21}\right)\cdot 231-(1-4x)=9 \iff \frac{10}{11\cdot 21}\cdot 231-1+4x=9 \iff$$
$$\iff x=0.$$

10. Να επιλυθούν στο R οι εξισώσεις

$$\text{α) } 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2x - 2z + 1 = 0$$

$$\text{β) } 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0 .$$

Λύση

α) Η εξίσωση γράφεται έτσι

$$(x+z-1)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 = 0 \iff$$

$$\iff x+z-1=0 \text{ και } x-y=0 \text{ και } x-z=0 \iff$$

$$\iff x = \frac{1}{2} \text{ και } y = \frac{1}{2} \text{ και } z = \frac{1}{2}.$$

β) Είναι

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 4x - 6y - 8z + 3 = 0 \iff$$

$$\iff 4x^2 - 4x + 1 + 9y^2 - 6y + 1 + 16z^2 - 8z + 1 = 0 \iff$$

$$\iff (2x-1)^2 + (3y-1)^2 + (4z-1)^2 = 0 \iff$$

$$\iff 2x-1=0 \text{ και } 3y-1=0 \text{ και } 4z-1=0 \iff$$

$$\iff x = \frac{1}{2} \text{ και } y = \frac{1}{3} \text{ και } z = \frac{1}{4}.$$

11. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\big||x| - 2\big| = 1.$$

Λύση

$$\big||x| - 2\big| = 1 \iff |x| - 2 = \pm 1 \iff |x| = 3 \text{ ή } |x| = 1 \iff$$

$$\iff x = 3 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

12. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A): } x(x+1)(x+2)(x+3) = 0{,}5625 .$$

Λύση

$$(A) \iff (x^2+3x)(x^2+3x+2) = 0{,}5625$$

$$(\, y = x^2 + 3x)$$

$$\iff y^2 + 2y - 0{,}5625 = 0 \iff y = 0{,}25 \text{ και } y = -2{,}25 .$$

Άρα $\left(x^2 + 3x - 0{,}25 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3+\sqrt{10}}{2} \text{ και } x = \dfrac{-3-\sqrt{10}}{2} \right)$

ή $\left(x^2 + 3x + 2{,}25 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2} \text{ (διπλή)} \right)$.

13. Να επιλυθεί στο C η εξίσωση $x^3+2x-5\sqrt{3}=0$.

Λύση

$$x^3+2x-5\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow x^3-3\sqrt{3}+2x-2\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3-\left(\sqrt{3}\right)^3+2\left(x-\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x^2+\sqrt{3}x+3\right)+2\left(x-\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x^2+x\sqrt{3}+5\right)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{3} \text{ ή } x=\frac{-\sqrt{3}\pm i\sqrt{17}}{2}.$$

14. Να επιλυθεί στο C η εξίσωση $x^4-8x+63=0$.

Λύση

$$x^4-8x+63=0 \Leftrightarrow (x^4+16x^2+64)-(16x^2+8x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+8)^2=(4x+1)^2 \Leftrightarrow |x^2+8|=|4x+1| \Leftrightarrow x^2+8=\pm(4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+7=0 \text{ ή } x^2+4x+9=0) \Leftrightarrow \left(x_{1,2}=2\pm i\sqrt{3} \text{ ή } x_{3,4}=-2\pm i\sqrt{5}\right).$$

15*. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: x^4-4x^3+12x^2-24x+24=0.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow (x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)=0.$$

Επειδή $(x^2-2x)^2\geq 0$ και $x^2-3x+3>0$ $(\Delta<0)$ η εξίσωση είναι αδύνατη στο R.

16. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: x^2+2x=\frac{24}{x^2-1},\quad |x|\neq 1.$$

Λύση

$$(A): (x^2+2x)(x^2-1)=24 \Leftrightarrow x(x+2)(x+1)(x-1)=24 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-2)(x^2+x)=24 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+x=z \\ (z-2)z=24 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+x=z \\ z=-4 \text{ ή } z=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=-3 \text{ ή } x=2.$$

*** Βλέπε ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ, τεύχος 2-3, άσκηση 251, σελ. 197.**

17. Να επιλυθεί στο C η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: x^{12} - 28x^6 + 27 = 0.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^6 = y \\ y^2 - 28y + 27 = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x^6 = y, \\ y = 1 \ \ \acute{\eta} \ \ y = 27 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x^6 = 1 \text{ ή } x^6 = 27 \quad \left(\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}\right).$$

Τελικά παίρνομε:

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ x_4 = -1,$$

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ x_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ x_7 = \sqrt{3},\ x_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i,$$

$$x_9 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i,\ x_{10} = -\sqrt{3},\ x_{11} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i,\ x_{12} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} i.$$

18. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 - 4(x^2 + x) - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) + 4 = 9 \Leftrightarrow (x^2 + x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow |x^2 + x - 2| = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1 + \sqrt{21}}{2} \text{ ή } x = -\frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

19. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 16x + 3 = 0.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 4(x^2 + 4x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x)^2 + 4(x^2 + 4x) + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = -2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = -2 - \sqrt{3}.$$

20. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4}=\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1}+\frac{4}{x+4}=\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x+4)(x+3)}=\frac{x}{(x+2)(x+1)} \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-\frac{5}{2} \quad (x\neq -1,-2,-3,-4).$$

21. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$(A): \frac{x-\alpha}{\beta\gamma}+\frac{x-\beta}{\alpha\gamma}+\frac{x-\gamma}{\alpha\beta}=2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right) \quad \Big|\alpha,\ \beta,\ \gamma\in R^*.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow \left(\frac{x-\alpha}{\beta\gamma}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)+\left(\frac{x-\beta}{\alpha\gamma}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\gamma}\right)+\left(\frac{x-\gamma}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-\alpha-\beta-\gamma}{\beta\gamma}+\frac{x-\beta-\alpha-\gamma}{\alpha\gamma}+\frac{x-\gamma-\alpha-\beta}{\alpha\beta}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha-\beta-\gamma)\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\alpha\beta}\right)=0 \Leftrightarrow x=\alpha+\beta+\gamma.$$

22. Να επιλυθεί στο C η εξίσωση

$$(A): (x^2-x+1)^4-6x^2\cdot(x^2-x+1)^2+5x^4=0.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}(x^2-x+1)^2=y\\ y^2-6x^2y+5x^4=0\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}(x^2-x+1)^2=y\\ y=x^2 \text{ ή } y=5x^2\end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x+1)^2=x^2 \text{ ή } (x^2-x+1)^2=5x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=1 \text{ ή } x_{3,4}=\pm i \text{ ή } x_{5,6}=\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2} \text{ ή}$$

$$x_{7,8}=\frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}.$$

23. Να επιλυθεί στο C η εξίσωση

$$(A): (x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0.$$

Λύση

Επειδή $x \neq 3$, διαιρούμε δια $(x-3)^2$.

$$(A) \Leftrightarrow x^2 - 16 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{9x^2}{(x-3)^2} = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - 2x \cdot \frac{3x}{x-3} = 16 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} = 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{x-3} = y \\ y^2 - 6y = 16 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = 8 \text{ ή } \frac{x^2}{x-3} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = 4 \pm 2i\sqrt{2} \text{ ή } x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{7}.$$

24. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: \sqrt{3x^2 - 7x + 3} = 1 - x.$$

Λύση

$$\left(\sqrt{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta^2 \text{ και } \beta \geq 0\right)$$

$$(A) \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 3 = (1-x)^2 \text{ και } 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \text{ και } x \leq 1 \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ή } x = \frac{1}{2}\right) \text{ και } x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \text{ και } x \leq 1) \text{ ή } \left(x = \frac{1}{2} \text{ και } x \leq 1\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

25. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow x^2 = |2x - 1| + 3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |2x - 1| = x^2 - 3 \\ x^2 \geq 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2x - 1 = x^3 - 3 & \text{ή} & 2x - 1 = 3 - x^2 \\ x \geq 3 & \text{ή} & x \leq -\sqrt{3} \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x_2 = -1 - \sqrt{5}.$$

26. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: \sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5} \quad \Big|\, x \geq 7.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
(A) &\Leftrightarrow \sqrt{2x+14}=\sqrt{x-7}+\sqrt{x+5} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x+14=x-7+x+5+2\sqrt{(x-7)(x+5)} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(x-7)(x+5)}=8 \Leftrightarrow (x-7)(x+5)=64 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x^2-2x-99=0 \Rightarrow x=11.
\end{aligned}$$

27. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: \frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}-28=0.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>2 \ \text{και} \ y>1 \\ \sqrt[4]{x-2}=u>0 \ \text{και} \ \sqrt[4]{y-1}=u>0 \\ \dfrac{36}{u^2}+\dfrac{4}{u^2}+4u^2+u^2-28=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{6}{u}-2u\right)^2+\left(\dfrac{2}{u}-u\right)^2=0 \\ \sqrt[4]{x-2}=u>0 \ \text{και} \ \sqrt[4]{y-1}=u>0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=11 \ \text{και} \ y=5.$$

28. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: \sqrt{1-x^2}=4x^3-3x.$$

Λύση

$$(A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x^3-3x \geq 0 \ \text{και} \ 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x^2=16x^6-24x^4+9x^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 0 \ \text{ή} \ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq 1 \\ 16x^6-24x^4+10x^2-1=0 \\ x^2=y \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 0 \ \text{ ή } \ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1 \\ x^2 = y \\ 16y^3 - 24y^2 + 10y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = \dfrac{1}{2} \ \text{ ή } \ y = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \ \text{ ή } \ y = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ x^2 = y \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 0 \ \text{ ή } \ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \le x \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \text{ ή } \ x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \ \text{ ή } \ x = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

29 *. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14.$$

Λύση

Θέτομε $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = u > 0$ και $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = \upsilon > 0$.

$$\text{Είναι} \quad (A) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u + \upsilon = 14 \\ u \cdot \upsilon = 1 \\ u, \upsilon > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_1 = 7 + \sqrt{48}, \quad \upsilon_1 = 7 - \sqrt{48} \\ u_2 = 7 - \sqrt{48} = \left(7+\sqrt{48}\right)^{-1} \\ \upsilon_2 = 7 + \sqrt{48} = \left(7 - \sqrt{48}\right)^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x = 2 \ \text{ ή } \ x = -2.$$

30. $\exists ?\, x \in \mathbf{N}$: $\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^x}} = \sqrt[5x]{2x}$.

Λύση

$$\text{Πρέπει} \left\{\begin{array}{l} 3x - 1 \ge 2 \\ 8 - 3x \ge 2 \\ 5x \ge 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 1 \le x \le 2. \ \text{Επομένως } x = 1 \ \text{ ή } \ x = 2.$$

Δεκτή λύση είναι η $x = 2$.

(*) Βλέπε ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ, τεύχος 2-3, άσκηση 234, σελ. 216 .

31. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A):}\ \left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x=2^{\frac{x+4}{4}}.$$

Λύση

Πρέπει $\quad x^2-5x+6\geq 0 \iff x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$.

Θέτομε $\left.\begin{matrix} x^2-5x+8=u \\ x^2-5x+6=\upsilon \end{matrix}\right\} \Rightarrow u-\upsilon=2$.

$$(A) \iff \left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}}+\left(\sqrt{u}-\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}}=2^{1+\frac{x}{4}} \iff$$

$$\iff \left[\left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2+\left(u-\upsilon\right)^{\frac{x}{2}}=2^{1+\frac{x}{4}}\left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{matrix} t^2-2^{1+\frac{x}{4}}\cdot t+2^{\frac{x}{2}}=0 \\ t=\left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}} \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} t=2^{\frac{x}{4}} \\ t=\left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}} \end{matrix}\right\} \iff \left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^{\frac{x}{2}}=2^{\frac{x}{4}} \iff$$

$$\iff \sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}=2^{\frac{1}{2}} \ \text{ή}\ x=0 \left(\left(\sqrt{u}+\sqrt{\upsilon}\right)^0=2^0=1\right) \iff u+\upsilon+2\sqrt{u\upsilon}=2 \ \text{ή}\ x=0 \iff$$

$$\iff (\upsilon+2)+\upsilon+2\sqrt{(\upsilon+2)\cdot\upsilon}=2 \ \text{ή}\ x=0 \iff \upsilon+\sqrt{\upsilon^2+2\upsilon}=0 \ \text{ή}\ x=0 \iff$$

$$\iff \left(\upsilon^2+2\upsilon=\upsilon^2 \ \text{και}\ \upsilon\leq 0\right) \ \text{ή}\ x=0 \Rightarrow \upsilon=0 \ \text{ή}\ x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-5x+6=0 \ \text{ή}\ x=0 \Rightarrow x=0 \ \text{ή}\ x=2 \ \text{ή}\ x=3.$$

32. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A):}\ 8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0.$$

Λύση

$$(A) \iff \left\{\begin{matrix} 2^x=y \\ 8\left(y^2+\dfrac{1}{y^2}\right)-54\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+101=0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} 2^x=y,\ y+\dfrac{1}{y}=z \\ 8z^2-54z+85=0 \end{matrix}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{matrix} 2^x=y \\ y+\dfrac{1}{y}=z \\ z=\dfrac{5}{2}\ \text{ή}\ z=\dfrac{17}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=2 \ \text{ή}\ y=\frac{1}{2} \ \text{ή}\ y=4 \ \text{ή}\ y=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1 \ \text{ή}\ x=-1 \ \text{ή}\ x=2 \ \text{ή}\ x=-2.$$

33. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$(\mathrm{A}): 7\cdot 4^{x+1}+4\cdot 5^{x+2}=3\cdot 4^{x+1}+5^{x+3}.$$

Λύση

$$(\mathrm{A}) \Leftrightarrow 7\cdot 4^{x+1}-3\cdot 4^{x+1}=5^{x+3}-4\cdot 5^{x+2} \Leftrightarrow 4^{x}(7\cdot 4-3\cdot 4)=5^{x}(5^{3}-4\cdot 5^{2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{x}\cdot 16=5^{x}\cdot 25 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x}=\frac{25}{16} \Rightarrow x=-2.$$

34. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$(\mathrm{A}): 27\cdot 9^{x}+64\cdot 16^{x}=84\cdot 12^{x}.$$

Λύση

$$(\mathrm{A}) \Leftrightarrow 9^{x}-\frac{28}{9}\cdot 12^{x}+\frac{64}{27}\cdot 16^{x}=0 \Leftrightarrow \left(3^{2}\right)^{x}-\frac{28}{9}\cdot(3\cdot 4)^{x}+\frac{64}{27}\cdot\left(4^{2}\right)^{x}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x}-\frac{28}{9}\cdot 3^{x}\cdot 4^{x}+\frac{64}{27}\cdot 4^{2x}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x}-\frac{28}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x}+\frac{64}{27}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\frac{16}{9} \text{ ή } \left(\frac{3}{4}\right)^{x}=\frac{4}{3}\right) \Rightarrow x=-2 \text{ ή } x=-1.$$

35. Να προσδιοριστούν δύο μονοσήμαντα ορισμένοι ρητοί αριθμοί x και y, όπου y θετικός και $\sqrt{y}$ ασύμμετρος, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\sqrt[3]{45-\sqrt{841\cdot 2}}=x-\sqrt{y}.$$

Λύση

Με ύψωση στον κύβο των μελών της παραπάνω σχέσης παίρνομε:

$45-\sqrt{1682}=x^{3}-3x^{2}\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$ ή $45-\sqrt{1682}=x^{3}+3xy-(3x^{2}+y)\sqrt{y}$

ή $45-\sqrt{1682}=x^{3}+3xy-\sqrt{(3x^{2}+y)^{2}y}$ (επειδή $3x^{2}+y>0$).

Αλλά όταν $\alpha-\sqrt{\beta}=\gamma-\sqrt{\delta}$, όπου α, β, γ, δ ρητοί, β>0 και όχι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού*, θα έχομε α=γ και β=δ.

---

* Δεν είναι ανάγκη να δίνεται ο περιορισμός δ>0 και όχι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού και επομένως δεν ήταν ανάγκη να δοθεί ότι ο y είναι θετικός και ο $\sqrt{y}$ ασύμμετρος.

Επομένως θα έχομε $x^3+3xy=45$ και $(3x^2+y)^2y=1682$

ή $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{1682}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $x^3+3xy=45$ και $(3x^2+y)\sqrt{y}=\sqrt{1682}$, παίρνομε

$$\left(x+\sqrt{y}\right)^3=45+\sqrt{1682} \quad \text{ή} \quad x+\sqrt{y}=\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}\,.$$

Αλλά έχομε και $x-\sqrt{y}=\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}}$. Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο αυτών σχέσεων παίρνομε:

$$2x=\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}+\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}} \quad \text{ή}$$

$$\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}+\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}}+(-2x)=0.$$

Αλλά, όταν τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα μηδέν, το άθροισμα των κύβων τους ισούται με το τριπλάσιο γινόμενό τους. Άρα:

$$45+\sqrt{1682}+45-\sqrt{1682}-8x^3=3\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}\cdot\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}}\,(-2x)$$

$$\text{ή}\quad 90-8x^3=-6x\sqrt[3]{343} \quad \text{ή} \quad 90-8x^3=-6x\cdot 7$$

$$\text{ή}\quad 8x^3-42x-90=0 \;\text{ή}\; 4x^3-21x-45=0$$

$$\text{ή}\quad \left(x=3 \;\text{ή}\; x=\frac{-3\pm i\sqrt{6}}{2}\right).$$

Απορριπτομένων των φανταστικών λύσεων έχομε μόνο x=3.
Από τη σχέση $x^3+3xy=45$, για x=3 παίρνομε y=2. Ώστε x=3 και y=2.

Επομένως η δεδομένη σχέση γίνεται:

$$\sqrt[3]{45-\sqrt{1682}}=3-\sqrt{2}\,.$$

36. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(A)}: a^2x-x^3=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}\,.$$

Λύση

$$\text{Για } x=\frac{y}{\sqrt{3}} \text{ η (A)} \;\Leftrightarrow\; a^2\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{y^3}{3\sqrt{3}}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y^3-3a^2y+2a^3=0 \;\Leftrightarrow\; (y^3-a^2y)+(2a^3-2a^2y)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y(y-a)\,(y+a)-2a^2(y-a)=0 \;\Leftrightarrow\; (y-a)^2\,(y+2a)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (y_1=y_2=a \;\text{ή}\; y_3=-2a) \;\Rightarrow\; x_1=x_2=\frac{a}{\sqrt{3}} \;\text{ή}\; x_3=\frac{-2a}{\sqrt{3}}.$$

37. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3+x-1=0$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα και ότι αυτή βρίσκεται μεταξύ των 0,68 και 0,69.

Λύση

Έστω $f: f(x)=x^3+x-1$ για κάθε $x\in R$. Η f είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση και επομένως δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μια τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$. Ακόμη, $f(x)=x(x^2+1)-1$, οπότε:

$$f(0,68)=0,68\cdot 1,4624-1=-0,005568<0,$$
$$f(0,69)=0,69\cdot 1,4761-1=-0,018509>0.$$

Αφού η f είναι συνεχής, από το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, συνεπάγεται ότι $f(x)=0$, τουλάχιστο για ένα x μεταξύ των 0,68 και 0,69.

Σχόλιο: Υπολογίσαμε το f (0,68) και f (0,69) με μια ακρίβεια που δεν ήταν απαραίτητη. Θα ήταν αρκετό να παρατηρήσομε ότι:

$$f(0,68)<0,68\cdot 1,47-1=-0,0004<0$$
$$f(0,69)>0,69\cdot 1,47-1=0,0143>0.$$

Μ' αυτόν τον τρόπο περιορίζομε ικανοποιητικά τους υπολογισμούς.

38. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: x^4+\alpha x^2+\beta x+\frac{(\alpha+1)^2-\beta^2}{4}=0 \quad (\alpha,\ \beta\in R).$$

Λύση

$$(E) \Leftrightarrow x^4+2\frac{\alpha+1}{2}x^2+\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2-(\alpha+1)x^2+\alpha x^2+\beta x-\frac{\beta^2}{4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{\alpha+1}{2}\right)^2-x^2+\beta x-\frac{\beta^2}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\frac{\alpha+1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{\beta}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{\alpha+1}{2}+x-\frac{\beta}{2}\right)\left(x^2+\frac{\alpha+1}{2}-x+\frac{\beta}{2}\right)=0 \quad \text{κ.λ.π.}$$

39. Να επιλυθεί στο R_+^* η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: \sqrt{\frac{2}{x}}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}=0.$$

Λύση

$$(E) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}=0 \overset{\sqrt{x}=\kappa>0}{\Leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{\kappa}+\frac{3}{\kappa^2}-\frac{1}{\kappa^4}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot \kappa^3+3\kappa^2-1=0 \underset{\lambda>0}{\overset{\kappa=\lambda\sqrt{2}}{\Leftrightarrow}} 4\lambda^3+6\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\lambda^3+3\lambda^2-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2\left(2\lambda^3+2\lambda^2+\lambda^2+\lambda-\lambda-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(2\lambda^3+2\lambda^2-\lambda\right)+\frac{1}{2}\left(2\lambda^2+2\lambda-1\right)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\lambda\left(2\lambda^2+2\lambda-1\right)+\frac{1}{2}\left(2\lambda^2+2\lambda-1\right)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\left(2\lambda^2+2\lambda-1\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\lambda-\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{κ.λ.π.}$$

40. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των φυσικών αριθμών (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(E): |x-2|+|y-3|=3-y.$$

Λύση

$(E) \Leftrightarrow |x-2|+|y-3|+y-3=0$.

Επειδή πρέπει $|y-3|+y-3=0 \Rightarrow x=2$ και $y\le 3$.

Συνεπώς τα ζητούμενα ζεύγη είναι τα $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$.

41. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$(E): x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=4.$$

Λύση

Θέτομε $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{4}} \Leftrightarrow x=y^2-\dfrac{1}{4}$, $y\ge 0$.

$$(E) \Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{y^2+\frac{1}{4}+y}=4 \Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2-\frac{1}{4}+\left|y+\frac{1}{2}\right|=4 \overset{y+\frac{1}{2}>0}{\Leftrightarrow} y^2+y+\frac{1}{4}=4 \Leftrightarrow \left(y+\frac{1}{2}\right)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y+\frac{1}{2}=2 \text{ ή } y+\frac{1}{2}=-2.$$

$$\text{Η } y+\frac{1}{2}=2 \Rightarrow \sqrt{x+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=2.$$

42. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: \sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}-2.$$

Λύση

Πρέπει $x+1\geq 0$ και $x+5-4\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2\geq 0$.

$$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2}=\sqrt{x+1}-2 \\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\left|\sqrt{x+1}-2\right|=\sqrt{x+1}-2 \\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\sqrt{x+1}\geq 2 \\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}x\geq 3 \\ x\geq -1\end{matrix}\right\} \Rightarrow x\geq 3.$$

43. Να επιλυθεί στο Z η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: xy+3x-5y=-3.$$

Λύση

(E) $\Leftrightarrow$ $(x-5)(y+3)=-18$. Οι λύσεις είναι τα ζεύγη:
$(6,-21)$, $(4,15)$, $(7,-12)$, $(3,6)$, $(8,-9)$, $(2,3)$, $(11,-6)$, $(-1,0)$, $(14,-5)$, $(-4,-1)$, $(23,4)$, $(-13,-2)$.

44. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

(E): $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\alpha$, **όπου α πραγματική παράμετρος.**

Λύση

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\alpha, \ (E_1).$$

Υποτίθεται ότι $x\geq 1$ και $\alpha>0$.

Περίπτωση 1. $\sqrt{x-1}-1>0 \Leftrightarrow x>2$.

$$(E_1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=\alpha \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\alpha^2}{4}+1 \text{ με } \frac{\alpha^2}{4}+1>2 \Leftrightarrow \alpha>2 \quad (\alpha>0).$$

Περίπτωση 2. $\sqrt{x-1}-1\le 0 \iff 1\le x\le 2.$

$$(E_1) \iff \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=\alpha \iff \alpha=2.$$

Συνεπώς: αν $\alpha=2$, τότε $1\le x\le 2$.

45. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: x=\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}.$$

Λύση

Πρέπει $\left\{x>0,\ x-\frac{1}{x}\ge 0,\ 1-\frac{1}{x}\ge 0\right\} \iff x\ge 1.$

$$(E) \iff x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{x-\frac{1}{x}} \iff \left(x-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2=x-\frac{1}{x} \iff$$

$$\iff x(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}+1=0 \iff \left(\sqrt{x(x-1)}-1\right)^2=0 \iff$$

$$\iff x^2-x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

46. Να επιλυθεί στο N* η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: xyz+xy+xz+yz+x+y+z=2000.$$

Λύση

$$(E) \iff (xyz+xy)+(xz+x)+(yz+y)+(z+1)=2001 \iff$$

$$\iff xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=2001 \iff$$

$$\iff (z+1)(xy+x+y+1)=2001 \iff (x+1)(y+1)(z+1)=2001.$$

Επειδή $2001=3\cdot 23\cdot 29$, προκύπτει ότι οι τριάδες (x, y, z) που ικανοποιούν την (E) είναι οι:

(2, 22, 28), (2, 28, 22), (22, 2, 28), (22, 28, 2), (28, 2, 22), (28, 22, 2).

47. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: \sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=7.$$

Λύση

Η f με $f(x)=\alpha x+\beta$ (όπου $\alpha>0$ και $\beta\in R$) και η g με $g(x)=\sqrt{x}$ $(x\ge 0)$ είναι γνησίως αύξουσες, συνεπώς και η σύνθεση αυτών gof είναι γνησίως αύξουσα.

Ακόμη, το άθροισμα γνησίως αυξουσών συναρτήσεων είναι επίσης γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Επομένως, η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}$$

είναι γνησίως αύξουσα. Μια λύση της f (x)=7 είναι η x=2.

Άλλες λύσεις δεν έχει, γιατί είναι γνησίως αύξουσα.

48. Να επιλυθεί η εξίσωση

$$\textbf{(E)}: \mathbf{x+\sqrt{3+\sqrt{x}}=3}.$$

Λύση

$$(E) \Leftrightarrow 3+\sqrt{x}=(3-x)^2 \quad \text{με} \quad 0 \le x \le 3$$

$$\stackrel{\alpha=3}{\Leftrightarrow} \alpha+\sqrt{x}=(\alpha-x)^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha(2x+1)+(x^2-\sqrt{x})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x+\sqrt{x}+1-\alpha=0 \\ \text{ή} \\ x-\sqrt{x}-\alpha=0 \end{matrix}\right\} \stackrel{\alpha=3}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x+\sqrt{x}-2=0 \\ \text{ή} \\ x-\sqrt{x}-3=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1 \quad (\text{δεδομένου ότι } 0 \le x \le 3).$$

49. Για πραγματικούς x, y, z να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{3x^2+y^2+z^2=2x(y+z)}.$$

Λύση

Η εξίσωση ισοδυναμεί με

$$(x-y)^2+(x-z)^2+x^2=0,$$

οπότε x=y=z=0 είναι η μοναδική λύση.

V. Μια εφαρμογή της ταυτότητας του τελείου τετραγώνου

Θεώρημα

Ο κύβος κάθε ακέραιου αριθμού μπορεί να γραφεί ως διαφορά τετραγώνων δύο άλλων ακέραιων αριθμών, δηλαδή $v^3 = x^2 - y^2$, όπου v, x, y ακέραιοι.

Απόδειξη

$$\left.\begin{aligned} &(1)\quad (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &(2)\quad (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 4\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Η (3) για $\beta = 1$ δίνει:

$$\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-1}{2}\right)^2. \qquad (4)$$

Όταν ο α είναι ακέραιος αριθμός, οι όροι στα δεξιά της (4) θα είναι ακέραιοι αριθμοί μόνο όταν ο α είναι περιττός. Αντικαθιστώντας το α με το v, έχομε:

$$v = \left(\frac{v+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{v-1}{2}\right)^2. \qquad (5)$$

Επομένως:

$$v^3 = v^2 \cdot v = v^2\left(\left(\frac{v+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{v-1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{v(v+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{v(v-1)}{2}\right)^2 = x^2 - y^2,$$

όπου $x = \dfrac{v(v+1)}{2}$ και $y = \dfrac{v(v-1)}{2}$.

Παρατηρούμε ότι οι x και y είναι ακέραιοι αριθμοί, γιατί αν ο v είναι άρτιος, το 2 θα διαιρεί το v και αν το v είναι περιττός, $v+1$ ή $v-1$ θα είναι άρτιοι και συνεπώς διαιρετοί δια 2.

Σχόλιο

Μετά από διάφορες ανεπιτυχείς και μάταιες προσπάθειες να γράψουμε το v ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων, αποφασίσαμε να θεωρήσουμε το v^3, αντί του v ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων.

Αν μπορούσαμε να εκφράσουμε το v ως διαφορά δύο τετραγώνων, $v = z^2 - \omega^2$, τότε $v^3 = v^2(z^2 - \omega^2) = (vz)^2 - (v\omega)^2 = x^2 - y^2$, όπου $x = vz$ και $y = v\omega$.

Π.χ. $2^3 = 3^2 - 1^2$ ή $(-3)^3 = 3^2 - 6^2$.

Γενίκευση

Θεώρημα: Για τυχαίο ακέραιο Κ είναι ν=2, 3, 4, ... , υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y τέτοιοι ώστε: $K^{\nu} = x^2 - y^2$.

Απόδειξη

Στην ταυτότητα:

$$K^{\nu} = \left(\frac{K^{\nu-1}+K}{2}\right)^2 - \left(\frac{K^{\nu-1}-K}{2}\right)^2 \quad \text{ας είναι } x = \frac{K^{\nu-1}+K}{2} \text{ και } y = \frac{K^{\nu-1}-K}{2}.$$

Οι αριθμοί x και y είναι ακέραιοι, γιατί αν Κ είναι άρτιος ή περιττός, οι $(K^{\nu-1}+K)$ και $(K^{\nu-1}-K)$ είναι άρτιοι ακέραιοι αριθμοί για $\nu \geq 2$.

Πόρισμα: Για τυχαίο ακέραιο Κ και ν=2, 3, 4, ..., το K^{ν} δεν είναι της μορφής 4 m+2. Δηλαδή $K^{\nu} \neq 2 \pmod 4$.

Παρατηρήσεις

1. Η διαφορά μεταξύ των x και y είναι ο ακέραιος που πρέπει να είναι στην τρίτη.

Πραγματικά, αυτή η ιδιότητα ισχύει για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$:

$$x - y = \frac{K^{\nu-1}+K}{2} - \frac{K^{\nu-1}-K}{2} = K.$$

2. $\frac{K^2+K}{2}$ είναι ο τύπος του αθροίσματος των Κ πρώτων ακέραιων. Δηλαδή:

$$x = \frac{K^2+K}{2} = \frac{K(K+1)}{2} = 1 + 2 + \ldots + K.$$

3. $$(K+1)^3 = \left(\frac{(K+1)^2+(K+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(K+1)^2-(K+1)}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(K+1)^2+(K+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{K^2+K}{2}\right)^2.$$

Οι παρατηρήσεις (2) και (3) αποδεικνύουν την πολύ γνωστή πρόταση:

το άθροισμα των ν πρώτων κύβων ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των ν πρώτων ακέραιων αριθμών.

Δηλαδή:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=(1^2-0^2)+(3^2-1^2)+(6^2-3^2)+\ldots+\left(\frac{\nu^2+\nu}{2}\right)^2-\left(\frac{\nu^2-\nu}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\nu^2+\nu}{2}\right)^2=\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2=(1+2+\ldots+\nu)^2.$$

4. Αν Κ είναι ένας περιττός ακέραιος αριθμός, τότε είναι φανερό ότι:

$K\left[\frac{K}{2}\right]=\frac{K^2-K}{2}$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x.

ΠΙΝΑΚΑΣ

k	$k^3 = x^2 - y^2$	$[k/2] \cdot k = (k^2 - k)/2$
1	$1^3 = 1^2 - 0^2$	$[1/2] \cdot 1 =$ $0 \cdot 1 = (1^2 - 1)/2 = 0$
2	$2^3 = 3^2 - 1^2$	
3	$3^3 = 6^2 - 3^2$	$[3/2] \cdot 3 =$ $1 \cdot 3 = (3^2 - 3)/2 = 3$
4	$4^3 = 10^2 - 6^2$	
5	$5^3 = 15^2 - 10^2$	$[5/2] \cdot 5 =$ $2 \cdot 5 = (5^2 - 5)/2 = 10$
6	$6^3 = 21^2 - 15^2$	
7	$7^3 = 28^2 - 21^2$	$[7/2] \cdot 7 =$ $3 \cdot 7 = (7^2 - 7)/2 = 21$
8	$8^3 = 36^2 - 28^2$	
9	$9^3 = 45^2 - 36^2$	$[9/2] \cdot 9 =$ $4 \cdot 9 = (9^2 - 9)/2 = 36$
10	$10^3 = 55^2 - 45^2$	
$\vdots$	$\vdots$	
n	$n^3 = \left(\{n^2 + n\}/2\right)^2 - \left(\{n^2 - n\}/2\right)^2$	

Αφού $k\,[k/2] + k = k\left\{[k/2] + 1\right\}$, μπορούμε να γράψουμε,

π.χ. $k^3 = \left(k\left\{[k/2] + 1\right\}\right)^2 - \left(k\,[k/2]\right)^2$

$$7^3 = \left(7\left\{[7/2] + 1\right\}\right)^2 - \left(7\,[7/2]\right)^2$$
$$= \left(7 \times 4\right)^2 - \left(7 \times 3\right)^2 = 28^2 - 21^2.$$

VI. Ανισότητες - Ανισώσεις

1. Δείξτε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma > Z \\ A+\Delta = Z+\Sigma \\ A+\Sigma < \Delta + Z \\ A,\ \Delta,\ \Sigma,\ Z > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta > \Sigma > Z > A.$$

Απόδειξη

Βήμα πρώτο: $\left.\begin{array}{l} A+\Delta = Z+\Sigma \\ A+\Sigma < \Delta + Z \end{array}\right\} \Rightarrow 2A+\Delta+\Sigma < 2Z+\Sigma+\Delta \Rightarrow Z > A.$

Βήμα δεύτερο: $\left.\begin{array}{l} A+\Delta = Z+\Sigma \\ A+\Sigma < \Delta + Z \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta-\Sigma > \Sigma-\Delta.$

(Αν ανισότητες αφαιρούνται κατά μέλη από ισότητες, το αποτέλεσμα είναι ανισότητες με την αντίστροφη διάταξη).

Βήμα τρίτο: $\Delta-\Sigma > \Sigma-\Delta \Rightarrow 2\Delta - 2\Sigma \Rightarrow \Delta > \Sigma.$

Βήμα τέταρτο: Από τις σχέσεις Δ>Σ, Σ>Ζ, Ζ>Α, λόγω της μεταβατικής ιδιότητας, προκύπτει ότι: Δ > Σ > Ζ > Α.

2. Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί (χωρίς το μηδέν) Ρ, Ε, Ν. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{array}{l} P+E+N=100 \\ N > 2P \\ 3P > 4E \\ 3E > N. \end{array}$$

Λύση

Έχομε $P < \frac{N}{2} < \frac{3E}{2}$, οπότε $100 = P+E+N < \frac{3E}{2} + E + 3E = \frac{11}{2}E$,

δηλαδή $E > \frac{200}{11} > 18$. Επίσης $N > 2P > \frac{8}{3}E$, οπότε

$$100 = P+E+N > \frac{4E}{3} + E + \frac{8E}{3} = 5E,$$

δηλαδή Ε<20 και άρα 18 < Ε < 20, οπότε Ε =19.

Τώρα έχομε $81 = N+P > 2P+P = 3P > 4E = 4\cdot 19 = 76$,

δηλαδή 81 > 3Ρ > 76 οπότε Ρ=26.

Τελικά, $N = 100 - P - E = 100 - 19 - 26 = 55$.

3. (i) Λύστε τις ταυτόχρονες ανισότητες $x<\frac{1}{4x}$ και $x<0$, δηλαδή βρείτε μια μόνο ανισότητα ισοδύναμη με τις δύο δοθείσες ανισότητες.

(ii) Ποιος είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που ικανοποιεί και τις δύο ανισότητες $4x+13<0$ και $x^2+3x>16$;

(iii) Δώστε ένα ρητό αριθμό μεταξύ $\frac{11}{24}$ και $\frac{6}{13}$.

(iv) Εκφράστε το 100000 ως γινόμενο δύο ακεραίων που κανένας τους να μην είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 10.

(v) Χωρίς τη χρήση λογαριθμικών πινάκων, υπολογίστε την

$$\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}.$$

Λύση

(i) Οι δοσμένες ανισότητες ισοδυναμούν με $x^2>\frac{1}{4}$, $x<0$, που ισοδυναμούν με τη $x<-\frac{1}{2}$.

(ii) Οι ακέραιες λύσεις της $4x+13<0$ είναι κατά φθίνουσα σειρά $-4,-5,-6,\ldots$. Οι ακέραιες λύσεις της $x^2+3x>16$ είναι κατά φθίνουσα σειρά $-6,-7,-8,\ldots$ και κατά αύξουσα σειρά $3, 4, \ldots$. Άρα η απάντηση είναι -6.

(iii) Αρκετοί ρητοί αριθμοί μεταξύ των $\frac{11}{24}$ και $\frac{6}{13}$ είναι:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{11}{24}+\frac{6}{13}\right)=\frac{287}{624},\ \frac{459}{1000},\ \frac{23}{50},\ \frac{6+11}{13+24}=\frac{17}{37}.$$

(iv) $100000=10^5=2^5\cdot 5^5$.

(v) $\frac{1}{\log_2 36}+\frac{1}{\log_3 36}=\log_{36}2+\log_{36}3=\log_{36}6=\frac{1}{\log_6 36}=\frac{1}{2}$.

4. Με m_a, m_b, m_c και w_a, w_b, w_c συμβολίζομε, αντίστοιχα, τα μήκη των διαμέσων και των διχοτόμων ενός τριγώνου. Δείξτε ότι:

$$\sqrt{m_a}+\sqrt{m_b}+\sqrt{m_c}\ \geq\ \sqrt{w_a}+\sqrt{w_b}+\sqrt{w_c}\ .$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξομε ότι η διάμεσος από κάθε κορυφή είναι τουλάχιστον όση και η διχοτόμος από την ίδια κορυφή. Έστω A η κορυφή του $\overset{\triangle}{ABC}$, AM η διάμεσος και AT η διχοτόμος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτομε ότι $\overline{AB} \leq \overline{AC}$.

Αφού $BT : TC = AB : AC \Rightarrow BT \leq BM$. (Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι, εάν AP είναι ύψος, τότε $\widehat{PAB} \leq \widehat{PAC}$, έτσι ώστε $\widehat{PAB} \leq \widehat{TAB} = \widehat{TAC} \leq \widehat{PAC}$. Άρα T βρίσκεται μεταξύ των P και M).

5. Ποιος είναι ο μέγιστος ακέραιος n για τον οποίο υπάρχει ταυτόχρονη λύση x στις ανισότητες: $k < x^k < k+1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$;

Δηλαδή στις:

$$1 < x < 2$$
$$2 < x^2 < 3$$
$$3 < x^3 < 4$$
$$4 < x^4 < 5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Λύση

Το μέγιστο πιθανό n είναι 4. Εάν κάποιο x έπρεπε να ικανοποιεί τόσες όσες οι πρώτες πέντε απ' αυτές τις ανισότητες, τότε, από την τρίτη θάχαμε $3 < x^3$ και από την πέμπτη $x^5 < 6$. Αυτά δίνουν $3^5 < x^{15} < 6^3$ που απαιτεί 243<216. Άρα $n \leq 4$.

Αφού $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, κάθε x μεταξύ των $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[4]{5}$ ικανοποιεί τις τέσσερις πρώτες ανισότητες.

6. Χωρίς τη χρήση πινάκων ή υπολογιστών:

α) Δείξτε ότι οι τιμές του x για τις οποίες $x = \dfrac{x^2+1}{198}$ βρίσκονται μεταξύ του $\dfrac{1}{198}$ και του 197,99494949... .

β) Χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα της (α) για να αποδείξετε ότι $\sqrt{2} < 1{,}41\dot{4}2135\dot{6}$.

γ) Είναι αληθές ότι $\sqrt{2} < 1{,}41421356$;

Λύση

α) Λύνοντας την εξίσωση $x=\dfrac{x^2+1}{198}$ ή $x^2-198x+1=0$,

παίρνομε τις ρίζες

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 99+\sqrt{99^2-1}=99+70\sqrt{2} \\ \beta &= 99-\sqrt{99^2-1}=99-70\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

με $\alpha+\beta=198$, $\alpha\beta=1$.

Άρα

$$\alpha=\frac{\alpha^2+1}{198}>\frac{1}{198}, \quad \beta=\frac{\beta^2+1}{198}>\frac{1}{198},$$

$$\alpha=198-\beta<198-\frac{1}{198}=197{,}99494949\ldots \qquad (2)$$

$$\beta=198-\alpha<198-\frac{1}{198}=197{,}99494949\ldots$$

β) Από τις (1) και (2), έχουμε $\sqrt{2}=\dfrac{\alpha-99}{70}<\dfrac{197{,}99\dot{4}\dot{9}-99}{70}=1{,}414\dot{2}135\dot{6}$.

c) Τελικά, $(1{,}41421356)^2=1{,}99999932\ldots<2 \Rightarrow \sqrt{2}>1{,}41421356$.

7. Εάν a, b, c συμβολίζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, δείξτε ότι:

$$\mathbf{3\,(bc+ca+ab)\le(a+b+c)^2<4\,(bc+ca+ab).}$$

Λύση

Η αριστερή ανισότητα ισχύει για κάθε τρεις θετικούς αριθμούς, αφού:

$$(a+b+c)^2-3\,(bc+ca+ab)=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\ge 0.$$

Για να αποδείξουμε τη β′ ανισότητα, χρησιμοποιούμε τις συνθήκες $c+a>b$, $a+b>c$, $b+c>a$ (που ικανοποιούνται από τα μήκη των πλευρών τριγώνου) για να πάρουμε $|a-b|<c$, $|b-c|<a$, $|c-a|<b$ και άρα

$$4\,(bc+ca+ab)-(a+b+c)^2=c^2-(a-b)^2+a^2-(b-c)^2+b^2-(c-a)^2>0.$$

8. Δείξτε ότι εάν m και n είναι δύο φυσικοί αριθμοί τότε ένας από τους $\sqrt[n]{m}$, $\sqrt[m]{n}$ είναι πάντα μικρότερος ή ίσος με τον $\sqrt[3]{3}$.

Λύση

Υποθέτομε ότι m=n. Θέλουμε τότε να δείξομε ότι $\sqrt[n]{n} \le \sqrt[3]{3}$, δηλαδή $n^{\frac{1}{n}} \le 3^{\frac{1}{3}}$ ή $n^3 \le 3^n$. Όπως θα δούμε, αυτό προκύπτει εύκολα με επαγωγή. Προφανώς, η πρόταση ισχύει για n=1, 2 και 3. Τότε υποθέτομε ότι έχομε:

$n^3 \le 3^n$ για κάποια τιμή του n, $n \ge 3$. Τότε

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \ge 3n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + (n^2-3)n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$.

Άρα η υπόθεση ισχύει για m=n.

Αυτό φαίνεται να είναι η μόνη ειδική περίπτωση, με $m \ne n$ τη γενική περίπτωση. Εντούτοις, τα πράγματα είναι ακριβώς τα αντίστροφα. Γιατί, εάν $m < n$, τότε

$$\sqrt[n]{m} < \sqrt[n]{n} \le \sqrt[3]{3}.$$

Παρατηρούμε ότι η ισότητα ισχύει στη μοναδική περίπτωση που m=n=3.

9. Ένα τετράπλευρο έχει μια κορυφή σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου μήκους 1. Δείξτε ότι τα μήκη a, b, c και d των πλευρών του τετραπλεύρου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 \le a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \le 4$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + (1-x)^2 + y^2 + (1-y)^2 + u^2 + (1-u)^2 + v^2 + (1-v)^2$.

Τώρα θεωρούμε

$$x^2 + (1-x)^2 = 2\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right\}.$$

Αφού $0 \le x \le 1$ προκύπτει εύκολα ότι $\frac{1}{2} \le x^2 + (1-x)^2 \le 1$

και όμοια με το x έχομε την ίδια σχέση με y, u, v. Προσθέτοντας τις τέσσερις ανισότητες παίρνομε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

10. Να επιλυθεί η ανίσωση

$$\textbf{(A)}: \frac{1}{3x+2} < \frac{4}{7x-3}.$$

Λύση 1η

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη επί $(3x+2)(7x-3)$. Για $(3x+2)(7x-3) < 0$ έχομε αντιστροφή της ανίσωσης, άρα εμφανίζονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

(1). $3x+2>0$ και $7x-3>0$
(2). $3x+2>0$ και $7x-3<0$
(3). $3x+2<0$ και $7x-3>0$
(4). $3x+2<0$ και $7x-3<0$.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση (3): $3x+2<0$ και $7x-3>0$, η ανίσωση γίνεται: $7x-3>4(3x+2)$ που έχει λύση $x<\frac{-11}{5}$.

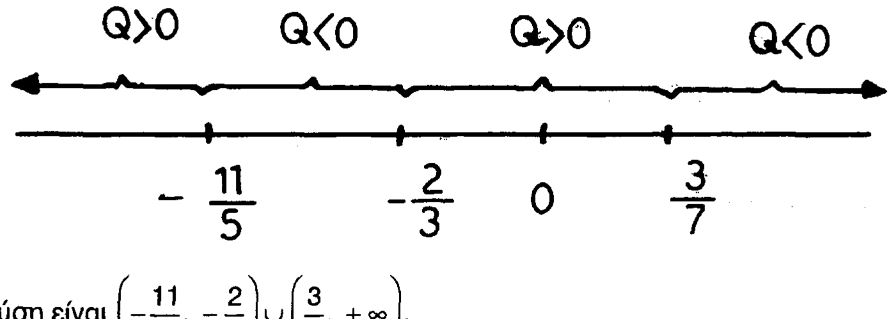
Οι υποθέσεις όμως σ' αυτή την περίπτωση μας δίνουν $x<\frac{-2}{3}$ και $x>\frac{3}{7}$ που είναι αδύνατο. Άρα η λύση στην περίπτωση (3) είναι το $\emptyset$. Η τελική λύση είναι η ένωση των λύσεων των τεσσάρων περιπτώσεων.

Λύση 2η

$$\frac{1}{3x+2}<\frac{4}{7x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{3x+2}-\frac{4}{7x-3}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(7x-3)-4(3x+2)}{(3x+2)(7x-3)}<0 \Leftrightarrow Q=\frac{-5x-11}{(3x+2)(7x-3)}<0.$$

Το πρόσημο του Q εξαρτάται από το πρόσημο των παραγόντων $-5x-11$, $3x+2$ και $7x-3$. Αλλά αυτοί έχουν αντίθετα πρόσημα αριστερά και δεξιά από τις ρίζες που είναι $-\frac{11}{5}$, $-\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{7}$. Άρα έχομε το σχήμα:



Η λύση είναι $\left(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{3}{7}, +\infty\right)$.

Λύση 3η

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το τετράγωνο του ΕΚΠ, δηλαδή

$$\frac{1}{3x+2}<\frac{4}{7x-3} \Leftrightarrow \frac{(3x+2)^2(7x-3)^2}{3x+2}<\frac{4(3x+2)^2(7x-3)^2}{7x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x+2)(7x-3)^2-4(3x+2)^2(7x-3)<0 \Leftrightarrow$$

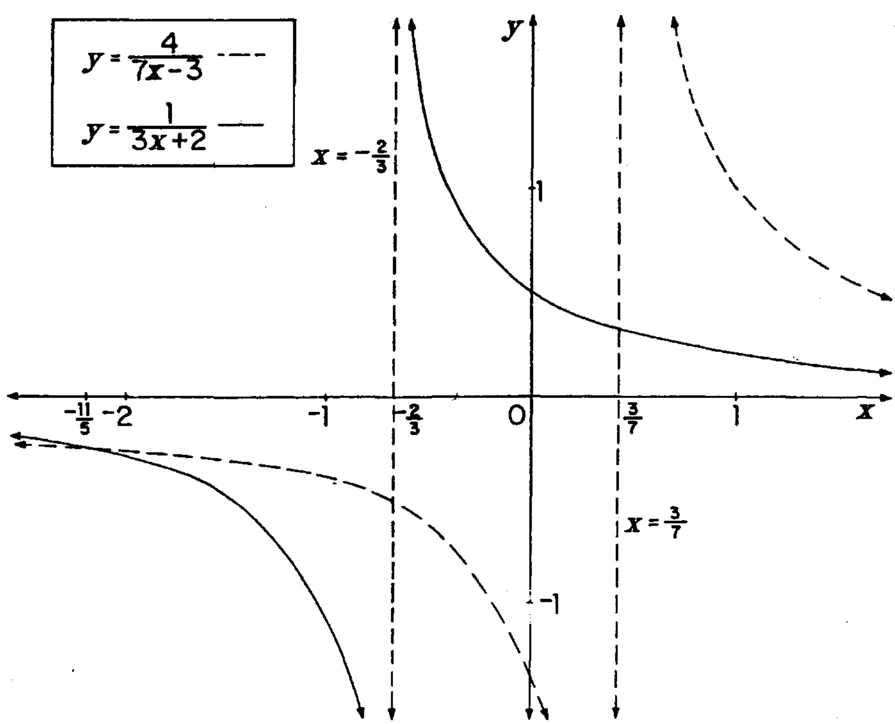
$$\Leftrightarrow (3x+2)(7x-3)\left[(7x-3)-4(3x+2)\right]<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R=(3x+2)(7x-3)(-5x-11)<0$$

οπότε συνεχίζομε όπως στη 2η λύση.

Λύση 4η

Θέτω $y=\dfrac{1}{3x+2}$ και $y=\dfrac{4}{7x-3}$ και παίρνω τις γραφικές τους παραστάσεις όπως στο σχήμα



Παρατηρώ ότι $\frac{1}{3x+2}=\frac{4}{7x-3}$ στο $x=-\frac{11}{5}$.

Εάν η γραφική παράσταση γίνει προσεκτικά, βλέπομε ότι

$$\frac{1}{3x+2}<\frac{4}{7x-3} \text{ στο } \left(-\frac{11}{5},\ -\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{7},\ +\infty\right).$$

Λύση 5η

Μια ανάλυση των τεσσάρων παραπάνω λύσεων μας δείχνει ότι τα κρίσιμα σημεία είναι εκείνα όπου

$$\text{είτε } \left(\frac{1}{3x+2} \text{ ή } \frac{4}{7x-3}\right) \text{ δεν ορίζονται είτε } \frac{1}{3x+2}=\frac{4}{7x-3}.$$

Τότε αυτά τα κρίσιμα σημεία χωρίζουν τον άξονα σε διαστήματα όπου η ανίσωση, είναι είτε αληθής είτε όχι, οπότε και παίρνομε το σύνολο των λύσεων.

11. Ποιο είναι το εμβαδόν του χωρίου, στο Καρτεσιανό επίπεδο, του οποίου τα σημεία (x, y) ικανοποιούν τη σχέση

$$|x|+|y|+|x+y|\le 2 \ ;$$

Λύση

$$|u|=u \text{ αν } u\ge 0 \text{ και } |u|=-u \text{ αν } u\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad |-u|=|u|.$$

Προκύπτει ότι το χωρίο R που ορίζεται από την

$$(1) \qquad |x|+|y|+|x+y|\le 2$$

είναι συμμετρικό ως προς την αρχή, δηλαδή εάν (a, b) ανήκει στο R, τότε ανήκει και το $(-a,-b)$. Αρκεί να ελέγξομε την (1) όταν $y\ge 0$.

Στο τεταρτημόριο $x\ge 0, y\ge 0$ έχομε $x+y\ge 0$ και η (1) γίνεται $x+y+(x+y)\le 2$.

Το τμήμα του R σ' αυτό το τεταρτημόριο δίνεται από τις

$$0\le x, \quad 0\le y, \quad x+y\le 1$$

το τρίγωνο AOB στο σχήμα 1.

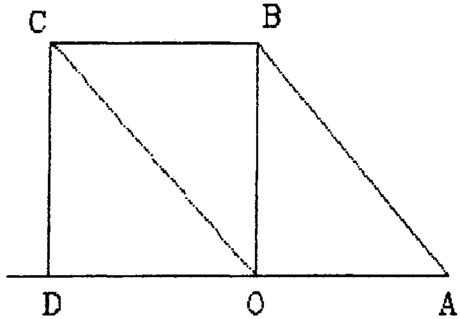
Στο τεταρτημόριο $x\le 0,\ y\ge 0$, είτε (i) $x+y\ge 0$ είτε (ii) $x+y\le 0$.

Εάν ισχύει η (i) έχομε $-x+y+x+x+y\le 2$ δηλαδή $y\le 1$, οπότε $x\le 0$, $0\le y\le 1$, $x+y\ge 0$ (και σε παρένθεση $-1\le x$) που ορίζεται το τρίγωνο BOC.

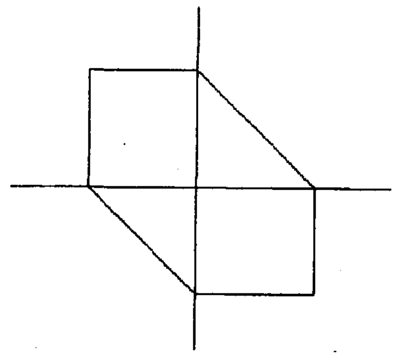
Εάν ισχύει η (ii) έχουμε $-x+y-(x+y)\le 2$ δηλαδή $-1\le x$, οπότε $-1\le x\le 0$, $0\le y$, $x+y\le 0$ (και σε παρένθεση $y\le 1$) που ορίζεται το τρίγωνο COD.

(Πράγματι, λαμβάνοντας υπόψη τις παρενθετικές ανισότητες βλέπομε ότι $x\le 0$, $y\ge 0$, $|x|+|y|+|x+y|\le 2$ που ισοδυναμεί με $-1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$ που ορίζουν το τετράγωνο OBCD.)

Το «κάτω» μισό του R το παίρνομε με ανάκλαση του πάνω μισού (Σχ. 1) ως προς την αρχή (δηλαδή στρέφοντας το χωρίο του σχ. 1 γύρω από το O). Το R είναι το εξάγωνο του σχ. 2, εμβαδού 3.



Σχ. 1



Σχ.2

12. Ας είναι $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c, x πραγματικοί αριθμοί). Αν για $|x|\le 1$ ισχύει $|f(x)|\le 1$, αποδείξτε ότι για $|x|\le 2$ ισχύει $|f(x)|\le 7$.

Λύση 1η

Αρκεί να αποδείξομε ότι για $|x|\le 1$ ισχύει $|f(2x)|\le 7$.

$$|f(2x)|=|4ax^2+2bx+c|\le|ax^2+bx+c|+|3ax^2+bx|=$$
$$|f(x)|+|x||3ax+b|\le 1+|3ax+b|.$$

Η συνάρτηση με τύπο $|3ax+b|$ αποκτάει τη μέγιστη τιμή της σ' ένα από τα άκρα του διαστήματος, άρα αρκεί να δείξομε ότι $|3ax+b|\le 6$.

Πράγματι, $|3a+b|=|2f(1)+f(-1)-2f(0)|\le 2+1+3=6$

και $|3a-b|=|f(1)+2f(-1)-3f(0)|\le 1+2+3=6$.

Λύση 2η

Αρκεί να αποδείξομε ότι για $|x|\le 1$ ισχύει $|f(x+1)|\le 7$.

Πράγματι, $|a\pm b|=|f(\pm 1)-f(0)|\le|f(\pm 1)+f(0)|\le 2$,

$$|a|=\frac{1}{2}|f(1)+f(-1)-2f(0)|\le\frac{1}{2}(1+1+2)=2,$$

οπότε

$$|f(x\pm 1)|=|ax^2+bx+c\pm 2ax+a\pm b|\le|f(x)|+2|a||x|+|a+b|\le 1+2\cdot 2\cdot 1+2=7.$$

Λύση 3η

Η συνάρτηση με τύπο f(x) αποκτά τη μέγιστη τιμή της σ' ένα από τα άκρα του διαστήματος ή στην κορυφή της παραβολής y=f (x).

Είναι $\left|f(\pm 2)\right| = \left|4a \pm 2b + c\right| \le \left|a \pm b + c\right| + \left|3a \pm b\right| \le 1 + 6 = 7$.

Υποθέτομε ότι η κορυφή της παραβολής y=f(x) είναι στο διάστημα $[-2,\ 2]$.

Τότε είναι $\left|-\dfrac{b}{2a}\right| \le 2$, δηλαδή $\left|\dfrac{b}{4a}\right| \le 1$ κι έτσι είναι

$$\left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right| = \left|\frac{b^2}{4a} - c\right| \le \left|\frac{b^2}{4a}\right| + |c| \le \left|\frac{b}{4a}\right||b| + |c|$$

$$|b| = \frac{1}{2}\left|f(1) - f(-1)\right| \le 1.$$

Αλλά $|c| = |f(0)| \le 1$, οπότε $\left|f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right| \le \left|\dfrac{b}{4a}\right| \cdot |b| + |c| \le 1 \cdot 1 + 1 = 2$.

13. Το θεώρημα των μέσων και η εφαρμογή του σε προβλήματα μεγίστου κι ελαχίστου.

Έστω x+y=S (S σταθερά) ένα άθροισμα δύο θετικών αριθμών. Τότε, όπως αποδεικνύεται από την άλγεβρα:

$$(1)\quad (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0,$$

εκτός αν x=y, οπότε το αριστερό μέλος είναι ίσο με μηδέν. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της ανισότητας (1) δια 4, μεταφέροντας και βγάζοντας τις ρίζες, παίρνομε

$$(2)\quad \sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2},$$

που μας λέει ότι ο γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών δεν είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητικό τους μέσο. Η ισότητα ισχύει μόνο αν x=y. Αυτό είναι το θεώρημα των αριθμητικών και γεωμετρικών μέσων ή απλά, το θεώρημα των μέσων, για την περίπτωση των δύο μεταβλητών.

Άλλη λύση

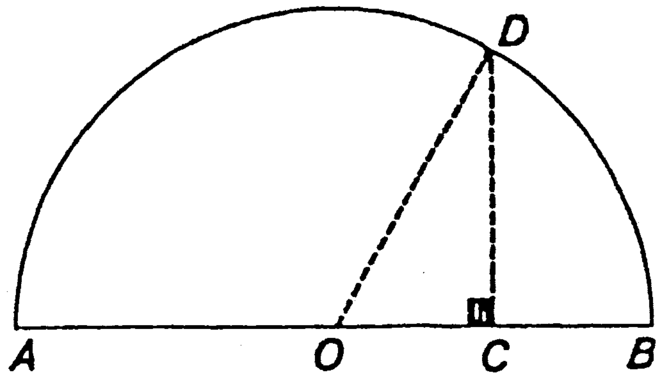
Αναφερόμαστε στο Σχ. 1. Έστω AC= α και CB=b. Υποθέτομε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a \ge b$.

Κατασκευάζομε ένα ημικύκλιο με AB ως διάμετρο και κέντρο O. Φέρομε μια κάθετο στο C.

Η ακτίνα $OD = \frac{a+b}{2}$ και $CD = \sqrt{ab}$.

Για $a>b$ έχομε (στο ορθογώνιο $O\hat{C}D$) $OD>DC$, αφού η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από κάθε κάθετο σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Για $a=b$, OD και DC συμπίπτουν και ισχύει η ισότητα.

Σχήμα 1



Η ανισότητα (2) έχει μια γεωμετρική ερμηνεία. Εάν x και y είναι οι γραμμικές διαστάσεις ενός ορθογωνίου, τότε $(x+y)^2/4$ είναι το εμβαδόν ενός τετραγώνου και xy είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου με την ίδια περίμετρο.

Άρα, η ανισότητα (2) μας λέει ότι απ' όλα τα ορθογώνια με δοσμένη περίμετρο το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

Για να πάρομε ένα όμοιο αποτέλεσμα για τρεις μεταβλητές, χρειάζεται να αποδείξομε την ανισότητα

$$(3) \qquad \sqrt[3]{xyz} < \frac{x+y+z}{3}, \qquad (x+y+z=S)$$

εκτός αν $x=y=z$, οπότε η ανισότητα γίνεται ισότητα.

Έστω $P_1 = x_1 y_1 z_1$ είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο για ένα σύνολο τιμών $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Εάν $x_1 = y_1 = z_1$ τότε το αποτέλεσμά μας αποδείχθηκε. Αλλιώς υποθέτομε ότι $x_1 \neq y_1$ και θέτομε

$$x_2 = \frac{x_1+y_1}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1+y_1}{2}, \quad z_2 = z_1.$$

Παρατηρούμε ότι $x_2 + y_2 + z_2 = x_1 + y_1 + z_1 = S$.

Το νέο γινόμενο είναι

$$P_2 = x_2 y_2 z_2 = \left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^2 z_1 \geq (x_1 y_1) z_1 = P_1$$

από την παραπάνω ανισότητα (2). Άρα, εάν δεν ισχύει $x_1 = y_1$, τότε $P_2 > P_1$, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι P_1 ήταν το μέγιστο. Άρα $x_1 = y_1$. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να αποδείξομε ότι $x_1 = z_1$ κι έτσι $x_1 = y_1 = z_1$. Αφού

$$\sqrt[3]{xyz} = \frac{(x+y+z)}{3}$$

όταν x=y=z και έχομε δείξει ότι μόνο αυτό το σύνολο τιμών δίνει τη μέγιστη τιμή των x, y, z, συνεπάγεται ότι

$$\sqrt[3]{xyz} < \frac{(x+y+z)}{3}.$$

Αυτό αποδεικνύει την παραπάνω ανισότητα (3).

14. Εάν x, y, z είναι θετικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$1)\quad \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \ge \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z},$$

$$2)\quad \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \ge \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}.$$

Λύση

1) Εύκολα παρατηρούμε ότι η δοσμένη ανισότητα ισοδυναμεί με τη

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{x}\right)^2+\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{y}\right)^2 \ge 0.$$

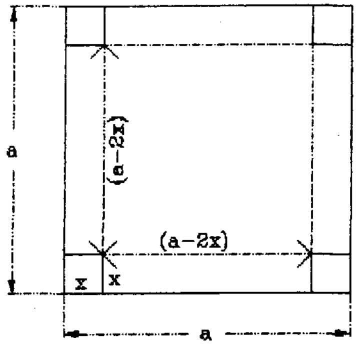
Αυτό προφανώς ισχύει. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν x=y=z.

2) Αυτό αποδεικνύεται εύκολα από τη

$$\frac{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}}{3} \ge \left(\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3}\right)^2 \ge \frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{3}.$$

15. Εάν θέλομε να κατασκευάσομε ένα ανοικτό κουτί μέγιστου δυνατού όγκου από ένα τετράγωνο κομμάτι μετάλλου του οποίου η πλευρά είναι α μονάδες, κόβοντας ίσες τετράγωνες γωνίες και μετά διπλώνοντας το υπόλοιπο μέταλλο για να σχηματίσομε τις πλευρές, ποιο θα ήταν το μήκος των πλευρών που θα κόβαμε;

Σχήμα



Έστω x= η πλευρά του τετραγώνου που κόβουμε = βάθος κουτιού. Τότε $(\alpha-2x)$ = η πλευρά του τετραγώνου που σχηματίζει τον πυθμένα του κουτιού. Ο όγκος του κουτιού είναι τότε $(\alpha-2x)^2\,x$. Αρχίζομε με την ταυτότητα

$$(\alpha-2x)+(\alpha-2x)+4x=2\alpha$$

και επιλέγομε για τις μεταβλητές μας $(\alpha-2x)$, $(\alpha-2x)$, $4x$.

Τώρα εμφαρμόζομε το θεώρημα των μέσων και φτάνομε στο

$$4V=4x\,(\alpha-2x)^2 \le \left[\frac{(\alpha-2x)+(\alpha-2x)+4x}{3}\right]^3=\frac{8\alpha^3}{27}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $4x=\alpha-2x$ ή $x=\dfrac{\alpha}{6}$.

16. Από όλους τους ορθούς κυλίνδρους που έχουν δοσμένο όγκο, δείξτε ότι ο κύλινδρος του οποίου το ύψος είναι ίσο με τη διάμετρό του, έχει την ελαχίστη επιφάνεια.

Λύση

Ας είναι V, S, r και h ο όγκος, η επιφάνεια, η ακτίνα και το ύψος του κυλίνδρου, αντίστοιχα. Τότε από τη γεωμετρία έχομε

$$V=\pi r^2 h,\quad S=2\pi r^2+2\pi r h.$$

Εδώ το S αποτελείται από δύο τμήματα και το θεώρημα των μέσων ίσως δεν εφαρμόζεται. Αλλά εάν γράψομε το S στη μορφή

$$S=2\pi r^2+\pi r h+\pi r h$$

και εφαρμόσομε το θεώρημα στις μεταβλητές $2\pi r^2$, $\pi r h$, $\pi r h$, παίρνομε

$$\left(\frac{S}{3}\right)^3 \ge 2\pi r^2\cdot \pi r h\cdot \pi r h=2\pi^3 r^4 h^2=2\pi V^2,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $2\pi r^2=\pi r h$ ή $h=2r$.

17. Δείξτε ότι ένας κώνος εκ περιστροφής ενός δεδομένου όγκου θα απαιτήσει το ελάχιστο ποσό επιφανείας όταν το ύψος είναι $\sqrt{2}$ φορές την ακτίνα της βάσης.

Λύση

Έστω V, S, r και h ο όγκος, η επιφάνεια, η ακτίνα της βάσης και το ύψος του κώνου, αντίστοιχα. Τότε από τη γεωμετρία έχομε

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad S^2 = \pi^2 r^2 (r^2 + h^2).$$

Γράφομε
$$S^2 = \pi^2 r^4 + \frac{1}{2}\pi^2 r^2 h^2 + \frac{1}{2}\pi^2 r^2 h^2$$

και εφαρμόζομε το θεώρημα των μέσων στις τρεις μεταβλητές $\pi^2 r^4$, $\frac{1}{2}\pi^2 r^2 h^2$, $\frac{1}{2}\pi^2 r^2 h^2$. Άρα

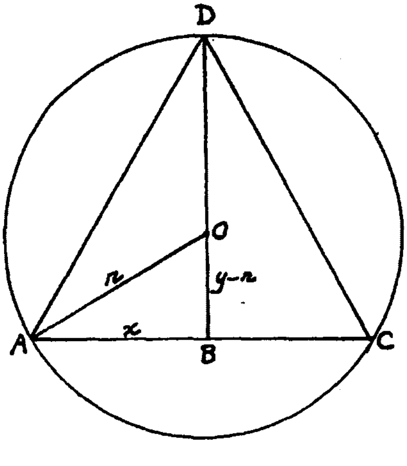
$$\frac{S^6}{27} \geq \frac{1}{4}\pi^6 r^8 h^4 = \frac{81}{4}\pi^2\left(\frac{1}{81}\pi^4 r^8 h^4\right) = \frac{81}{4}\pi^2 V^4,$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο εάν $\frac{1}{2}\pi^2 r^2 h^2 = \pi^2 r^4$ ή $h = r\sqrt{2}$.

18. Βρείτε το ύψος του μέγιστου ορθού κυκλικού κώνου που μπορεί να εγγραφεί σε μια σφαίρα ακτίνας r.

Λύση

Το σχήμα αντιπροσωπεύει μια τομή που περιέχει το κέντρο της σφαίρας και την κορυφή του κώνου. Ας είναι x η ακτίνα του κώνου και y το ύψος του. Τότε OB=y-r. Ο όγκος $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$ απαιτείται να είναι μέγιστος.



Σχήμα 1.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο AOB, $x^2 = 2ry - y^2$. Άρα

$$V = \frac{\pi}{3}(2ry^2 - y^3), \quad (0 \le y \le 2r).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y + (2r - y) = \text{σταθερό}.$$

Άρα, φέρομε το V στη μορφή

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}y\cdot\frac{1}{2}y(2r-y) \le \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{27}\left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y + (2r-y)\right]^3 = \frac{32\pi}{81}r^3$$

και εφαρμόζομε το θεώρημα των μέσων στις τρεις μεταβλητές $\frac{1}{2}y$, $\frac{1}{2}y$, $2r - y$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\frac{1}{2}y = 2r - y$ ή $y = \frac{4r}{3}$.

19. Δοσμένου του εμβαδού ενός τριγώνου, δείξτε ότι το ισόπλευρο τρίγωνο έχει την ελαχίστη περίμετρο.

Λύση

Έστω ότι a, b, c, p, A αντιπροσωπεύουν τις τρεις πλευρές, την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου, αντίστοιχα. Τότε, από τον τύπο του Ήρωνα, έχομε

$$\frac{A^2}{S} = (S-a)\ (S-b)\ (S-c), \qquad \left(S = \frac{1}{2}p\right).$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των μέσων στους τρεις παράγοντες δεξιά, έχομε

$$A^2 \le \frac{S^4}{3^3} = \frac{p^4}{2^4\,3^3}$$

και υπάρχει ισότητα μόνο όταν $S - a = S - b = S - c$· αυτό συμβαίνει όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Αντιστρέφοντας την ανισότητα, έχομε επίσης το αποτέλεσμα: για μια δοσμένη περίμετρο, το ισόπλευρο τρίγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

20. Ένα σώμα εκτοξεύεται προς τα πάνω υπό την επίδραση της βαρύτητας με ταχύτητα U_o m/sec. Μετά από πόσα sec θα επιτύχει το μέγιστό του ύψος;

Λύση

Όπως είναι γνωστό από τη μηχανική, η εξίσωση της κίνησης του σώματος δίνεται από τον τύπο:

$$S = U_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

όπου g η επιτάχυνση βαρύτητας που υποθέτομε ότι είναι σταθερά. Εάν εκφράσομε το S ισοδύναμα ως εξής:

$$S = \frac{1}{2g} \left[(gt) \cdot (2U_0 - gt)\right],$$

παρατηρούμε ότι οι δύο παράγοντες στις αγκύλες όταν προστεθούν μας δίνουν ένα σταθερό άθροισμα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των μέσων στις δύο μεταβλητές (gt), $(2U_0 - gt)$, έχομε:

$$S \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2g} \left[(gt) \cdot (2U_0 - gt)\right]^2 = \frac{U_0^2}{2g}$$

με το μέγιστο να ισχύει μόνο όταν $gt = 2U_0 - gt$ ή $t = \frac{U_0}{g}$.

21. Για ποια τιμή του x η β'θμια συνάρτηση f: $f(x) = ax^2 + bx + c$ παίρνει τη μέγιστη ή την ελάχιστή της τιμή;

Λύση

Εάν $a>0$, έστω

$$y = ax^2 + bx + c = -a\ (x - r)(s - x), \quad (r \leq x \leq s),$$

όπου r και s είναι οι ρίζες της $y=0$. Είναι προφανές ότι το γινόμενο στο δεξί μέλος είναι αρνητικό ή μηδέν. Θεωρούμε τότε τη συνάρτηση με τύπο

$$-y = a\ (x - r)(s - x)$$

όπου κάθε παράγοντας είναι τώρα θετικός ή μηδέν.

Από το θεώρημα των μέσων

$$-y \ \leq \ \frac{a}{4} \left[(x - r) + (s - x)\right]^2 = \frac{a}{4}\ (s - r)^2$$

και το μέγιστο επιτυγχάνεται μόνο όταν

$$x - r = s - x \quad ή \quad x = (r + s)/2 = -b/2a,$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στην πολύ γνωστή σχέση μεταξύ των ριζών και των συντελεστών μιας δευτεροβαθμίου εξίσωσης. Άρα y είναι μέγιστο για την ίδια τιμή του x.

Εάν $a<0$, τότε $y=(-a)(x-r)(s-x)$
έχει τρεις μη αρνητικούς παράγοντες και όπως προηγουμένως

$$-y \le -\frac{a}{4}\left[(x-r)+(s-x)\right]^2 = -\frac{a}{4}(s-r)^2$$

και μέγιστο έχομε όταν $x=\dfrac{-b}{2a}$ ξανά.

22. Ο Β λέει, «Είμαι βαρύτερος από τον Κ και ο Κ είναι βαρύτερος από τον Μ». Ο Κ λέει, «Ο Μ είναι βαρύτερος από μένα και από τον Β». Ο Μ λέει «Ο Κ είναι βαρύτερος από μένα και ο Β το ίδιο με μένα». Υποθέτοντας ότι ο ελαφρύτερος λέει πιο πολλές αλήθειες από τον βαρύτερο, βρείτε τη διάταξη των βαρών των Β, Κ, Μ.

Λύση

Υποθέτομε ότι και οι τρεις έχουν διαφορετικά βάρη Β, Κ, Μ. Τότε, σύμφωνα με αυτά που υποστηρίζουν, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} &B:\ B>K,\ K>M\\ &K:\ M>K,\ M>B\\ &M:\ K>M,\ M=B. \end{aligned}$$

Αφού καθένας κάνει δύο προτάσεις, ο ελαφρύτερος λέει δύο αληθινές προτάσεις, ο βαρύτερος καμιά και ο άλλος ακριβώς μια.
Μια από τις προτάσεις του Μ (Μ=Β) είναι ψέμα, άρα δεν είναι ελαφρύτερος.
Και ο Β δεν μπορεί να είναι ο ελαφρύτερος γιατί τότε η πρότασή του Β>Κ θάταν ψευδής. Ούτε ο Β μπορεί να είναι ο βαρύτερος, γιατί τότε Β>Κ θάταν ψευδές. Άρα ο Β είναι στη μέση. Αυτό μας δίνει τη διάταξη Μ > Β > Κ.
Τώρα μπορεί δύο τουλάχιστον να έχουν το ίδιο βάρος, καθώς δεν μας δίνεται καμιά πληροφορία σχετικά με δύο που έχουν το ίδιο βάρος. Σ' αυτή την περίπτωση των 7 δυνατοτήτων: Κ=Μ=Β, Κ>Μ = Β, Μ=Β>Κ, Β>Κ=Μ, Κ=Μ>Β, Μ>Κ=Β, Κ=Β>Μ, οι δύο πρώτες (Κ=Μ=Β και Κ>Μ=Β) είναι οι πιθανές διατάξεις.

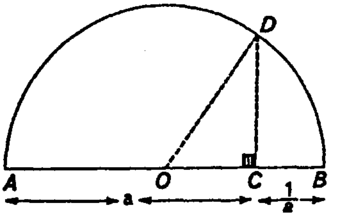
23. Εάν a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και διάφορος του 1, δείξτε ότι $a+\dfrac{1}{a}>2$.

Λύση

Αναφερόμαστε στο Σχ. 2. Ακολουθώντας τον ίδιο τρόπο όπως στο πρόβλημα 13, ας είναι AC=α και $CB=\dfrac{1}{\alpha}$ και κατασκευάζομε ένα ημικύκλιο με AB ως διάμετρο.

$$DC=\sqrt{\alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)}=1, \quad OD=\frac{\alpha+\frac{1}{\alpha}}{2}$$

και υποτείνουσα OD >DC, έτσι ώστε $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}>2$.



Σχήμα 2.

24. Εάν α, b είναι θετικοί πραγματικοί, δείξτε ότι

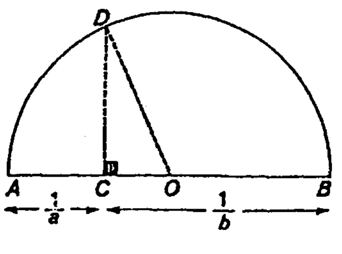
$$\frac{2\alpha b}{\alpha+b}\le\sqrt{\alpha b}$$

που σημαίνει ότι ο αρμονικός μέσος δεν είναι μεγαλύτερος από τον γεωμετρικό μέσο.

Λύση

Σχ. 3. Ξανά θέτω:

$AC=\dfrac{1}{\alpha}$ και $BC=\dfrac{1}{b}$. Υποθέτω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\alpha\ge b$ και κατασκευάζω ένα ημικύκλιο με $AB=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{b}$ ως διάμετρο.



Σχήμα 3.

Έχομε

$$CD=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{b}\right)}=\frac{1}{\sqrt{ab}},\quad OD=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

και προφανώς $OD \geq CD$. Παίρνοντας τους αντίστροφους και απλοποιώντας, έχομε

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $a=b$, αφού CD και OD θα συμπέσουν.

25. Για a, b θετικούς πραγματικούς και $a \neq b$, δείξτε ότι

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Λύση

Σχ. 4. Κατασκευάζομε ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ABC με ορθή γωνία στο C και $(a+b)$ ως υποτείνουσα. Ας είναι $AD=a$ και $DB=b$. Φέρομε μια κάθετο στο D και προεκτείνομε μέχρι την πλευρά BC. Κατασκευάζομε την AE και $CO \perp AB$. Τότε $DE=b$,

$$AC=\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{2} \quad \text{και} \quad AE=\sqrt{a^2+b^2}.$$

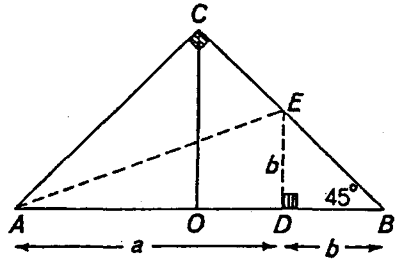
Προφανώς, στο ορθογώνιο τρίγωνο ACE, $AE > AC$, έτσι ώστε

$$\sqrt{a^2+b^2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{2}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και διαιρώντας δια 2, παίρνομε

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Ξανά, η ισότητα ισχύει όταν $a=b$.



Σχήμα 4.

26. Εάν $\alpha^2+b^2=1$ και $x^2+y^2=1$ δείξτε ότι $\alpha x+by\le 1$.

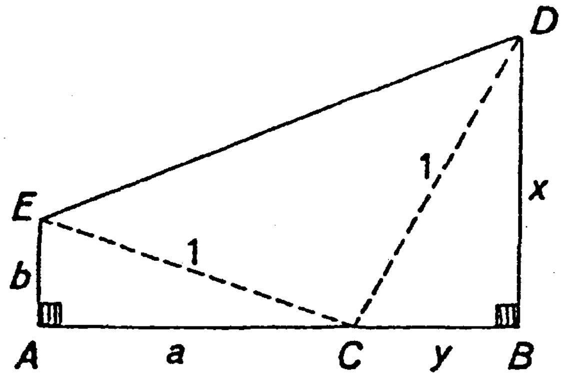
Λύση

Αναφερόμαστε στο Σχ. 5 και θεωρούμε το ευθ. τμήμα AB με AC=α, CB=y. Φέρομε $AE\perp AB$, $BD\perp AB$ και προεκτείνομε έτσι ώστε

Σχήμα 5.

AE=b, BD=x. Σχεδιάζομε CE, CD και ED. Τώρα, CE=1 και CD=1, αφού $\alpha^2+b^2=1$ και $x^2+y^2=1$, σύμφωνα με την υπόθεση. Το εμβαδόν του τραπεζίου ABDE $=\frac{1}{2}(\alpha+y)(b+x)$ και το εμβαδόν του τριγώνου ECD θα είναι μέγιστα όταν η γωνία ECD=90°. Άρα

$$\frac{1}{2}(\alpha+y)(b+x)\le\frac{1}{2}\alpha b+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}(1)(1)\,\eta\mu 90°,$$
$$\alpha x+\alpha b+xy+by\le\alpha b+xy+1 \quad \text{και} \quad \alpha x+by\le 1.$$



Εάν μαζί με την επιπεδομετρία χρησιμοποιήσομε και τη γεωμετρία των συντεταγμένων για την απόδειξη αλγεβρικών ανισοτήτων, μπορούν να αποδειχθούν ένα πλήθος πρόσθετων αποτελεσμάτων.

27. Δείξτε ότι

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2} \geq \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2},$$

όπου a_1, b_1, a_2, b_2 είναι πραγματικοί.

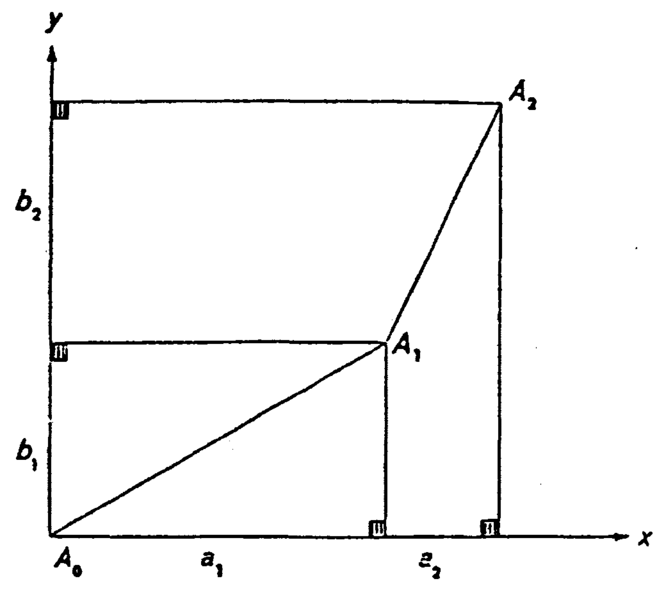
Λύση

Θεωρούμε την τεθλασμένη γραμμή $A_0A_1A_2$ (βλέπε Σχ. 6) και συμβολίζομε τις προβολές και στους δύο άξονες, όπως στο Σχ. 6

$$A_0A_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2} \quad A_1A_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2} \quad A_0A_2=\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}$$

και προφανώς $A_0A_1+A_1A_2>A_0A_2$,

αφού το άθροισμα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο από την τρίτη πλευρά.



Σχήμα 6.

Παρατήρηση: Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της πολύ γνωστής ανισότητας του Minkowsky.

28. Δείξτε ότι $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$.

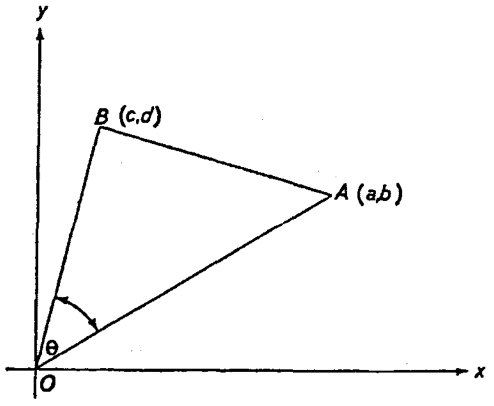
Λύση

Θεωρούμε το τρίγωνο OAB, όπως στο Σχ. 7:

$$OA=\sqrt{a^2+b^2} \quad OB=\sqrt{c^2+d^2} \quad AB=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Συμβολίζοντας τη γωνία μεταξύ των OA και OB με θ και χρησιμοποιώντας τον νόμο των συνημιτόνων, παίρνομε

$$(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\,\text{συν}\theta.$$



Σχήμα 7.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των OA, OB και AB και απλοποιώντας, παίρνομε

$$\text{συν}\theta=\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη και παρατηρώντας ότι $\text{συν}^2\theta$ είναι θετικό και ≤ 1, έχομε

$$\frac{(ac+bd)^2}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \leq 1$$

που είναι το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αυτή είναι η ειδική περίπτωση της σπουδαίας ανισότητας του Cauchy. Παρατηρήστε ότι η ισότητα ισχύει όταν $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΣΩΤΑΚΗΣ

Ορισμός 1

Μια συνάρτηση f: $A \to R$ ($A \neq \emptyset$, $A \subseteq R$) ονομάζεται περιοδική αν και μόνο αν, υπάρχει $T \in R^*$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν:

$$(x+T) \in A \text{ και } f(x+T) = f(x).$$

Ο αριθμός T ονομάζεται, τότε, μια περίοδος της f.

Είναι φανερό ότι:

$$(f\colon R \to R, \text{ περιοδική}) \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} \left(\exists T \in R^*, \ \forall \in R, \ f(x+T) = f(x)\right)$$

Ορισμός 2

Η μικρότερη απόλυτη τιμή του αριθμού T, αν υπάρχει, ονομάζεται ελάχιστη περίοδος της f.

Ορισμός 3

Μια συνάρτηση f: $A \to R$ ($A \neq \emptyset$, $A \subseteq R$) ονομάζεται αμφίπλευρα περιοδική ή σύντομα αμφιπεριοδική, αν και μόνο αν, υπάρχει $T \in R^*$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύουν:

$$(x+T) \in A, \ (x-T) \in A \text{ και } f(x+T) = f(x).$$

Θεώρημα 1.

Αν είναι T περίοδος της συνάρτησης f και $\nu \in N^*$ τότε ο αριθμός νT είναι μια περίοδος της f.

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Για $\nu=1$ έχουμε $f(x+T)=f(x)$.

Σ.τ.Ε. Ο ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΣΣΩΤΑΚΗΣ είναι φοιτητής Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Υποθέτουμε ότι ισχύει $f\left[x+(\nu-1)T\right]=f(x)$, οπότε έχουμε:

$$f(x+\nu T)=f\left[x+(\nu-1)T+T\right]=f\left[x+(\nu-1)T\right]=f(x) \;\Rightarrow\; f(x+\nu T)=f(x).$$

Άρα ο αριθμός νT είναι μια περίοδος της f.

Θεώρημα 2.

Αν είναι T η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης f, τότε ο αριθμός $\frac{T}{a}$ είναι ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης g, όπου

$$g(x)=f(ax),\quad g\colon B\to R\quad (B\neq\emptyset,\ B\subseteq R).$$

Απόδειξη

Για οποιοδήποτε αριθμό $x+m$, ο οποίος ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g, ισχύει ότι:

$$g(x+m)=f\left[a(x+m)\right]=f(ax+am).\quad (*)$$

Επειδή T είναι η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης f, ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $f(ax+am)=f(ax)$ είναι ο $am=T$. Οπότε με τη βοήθεια της (*) έχουμε ότι:

$$g(x+m)=f(ax+am)=f(ax+T)=f(ax)=g(x).$$

Έτσι αποδεικνύεται ότι ο αριθμός $m=\frac{T}{a}$ είναι ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης g. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$g(x-m)=f(ax-am)=f(ax)=g(x) \quad \text{για } m=\frac{T}{a}.$$

Θεώρημα 3

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι περιοδικές με περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα, τότε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο T των αριθμών T_1 και T_2, αν ανήκει στο πεδίο ορισμού, είναι περίοδος του αθροίσματος, της διαφοράς, του γινομένου και του πηλίκου των δοσμένων συναρτήσεων.

Απόδειξη

Ας είναι $T=\kappa T_1$ και $T=mT_2$ όπου κ και m φυσικοί αριθμοί. Ο αριθμός T, λόγω του θεωρήματος 1 είναι περίοδος καθεμιάς από τις συναρτήσεις f και g.

$$f(x+T)\,*\,g(x+T)=f(x+\kappa T_1)\,*\,g(x+mT_2)=f(x)*g(x),$$

όπου $*\in\{+,-,\cdot,:\}$.

Σημείωση: Αν είναι T_1 και T_2 αντίστοιχα ελάχιστες περίοδοι των συναρτήσεων f και g, τότε το ελάχιστο κοινό τους πολλαπλάσιο – ο αριθμός T – δεν είναι υποχρεωτικά ελάχιστη περίοδος των συναρτήσεων f+g και f · g.
Για παράδειγμα, η ελάχιστη περίοδος των συναρτήσεων ημx και συνx είναι ο αριθμός 2π και η ελάχιστη περίοδος του γινομένου τους $ημx \cdot συνx = \frac{1}{2} ημ2x$ είναι ο αριθμός π.

Το γράφημα της περιοδικής συνάρτησης f με ελάχιστη περίοδο T, το παίρνουμε από το γράφημα της ίδιας συνάρτησης μέσα σ' ένα οποιοδήποτε ημιδιάστημα του άξονα Οx, μήκους T, με μεταφορά ως προς τη διεύθυνση του άξονα Οx για διάνυσμα μήκους T. Αυτή τη διαδικασία την ονομάζουμε **περιοδική επέκταση.**
Για περιοδικές συναρτήσεις, αρκετό είναι να σχεδιάσουμε το κομμάτι του γραφήματος της συνάρτησης στο ημιδιάστημα $x_0 < x \leq x_0 + T$ όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο από το πεδίο ορισμού και να κάνουμε περιοδική επέκταση της συνάρτησης για τις υπόλοιπες τιμές της μεταβλητής x. Άρα στο χώρο του σχήματος η περιοδικότητα είναι μια σχέση ταύτισης.

Παραδείγματα περιοδικών συναρτήσεων

Π1) Η συνάρτηση y=πραγματική σταθερή είναι περιοδική.

Απόδειξη

Η περίοδός της είναι ο οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Αυτή η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστη περίοδο, επειδή μεταξύ των πραγματικών αριθμών δεν υπάρχει κατ' απόλυτη τιμή ο μικρότερος θετικός.

Π2) Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν είναι ο x ρητός} \\ 1, & \text{αν είναι ο x άρρητος} \end{cases}$$

Απόδειξη

Αυτή είναι η συνάρτηση του Dirichlet. Επειδή το οποιοδήποτε διάστημα έχει άπειρα σημεία και ρητών και άρρητων αριθμών, πρακτικά είναι αδύνατον να σχεδιαστεί το γράφημα αυτής της συνάρτησης.
Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση του Dirichlet είναι περιοδική και ότι η οποιαδήποτε ρητή τιμή, για παράδειγμα ο αριθμός α ($α \neq 0$), είναι περίοδός της.

Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται η ισότητα $f(x+a)=f(x)$ (*) για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού x.

i) Αν ο x είναι ρητός αριθμός, τότε ο $x+a$, ως άθροισμα ρητών αριθμών, είναι επίσης ρητός κι έτσι $f(x+a)=f(x)=0$, δηλαδή η ισότητα (*) ικανοποιείται.

ii) Αν ο x είναι άρρητος αριθμός, τότε ο $x+a$ είναι επίσης άρρητος κι έτσι $f(x+a)=f(x)=1$ δηλαδή η (*) ικανοποιείται και πάλι.

Επειδή μεταξύ των ρητών αριθμών δεν υπάρχει ο μικρότερος ρητός, η συνάρτηση του Dirichlet δεν έχει ελάχιστη περίοδο. Παρατηρούμε ότι κανένας από τους άρρητους αριθμούς δεν μπορεί να είναι περίοδος της συνάρτησης του Dirichlet, επειδή για άρρητο αριθμό α, η ισότητα $f(x+a)=f(x)$ δεν ικανοποιείται για κάθε x.

Π3) Βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\{x\}$.

Απόδειξη

Αν x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και κ οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός, τότε είναι

$$\{x+\kappa\}=\{x\}$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι κάθε ακέραιος αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, είναι περίοδος της συνάρτησης f. Η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης αυτής, είναι ο αριθμός 1.

Π4) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=|\sin x|$ έχει ελάχιστη περίοδο.

Απόδειξη

Πράγματι, ο αριθμός π είναι περίοδος της συνάρτησης f επειδή:

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x).$$

Αποδεικνύουμε ότι αυτή είναι και η ελάχιστη περίοδος της f. Αν υπήρχε κάποια τιμή κ τέτοια ώστε να είναι $0<\kappa<\pi$ και $f(x+\kappa)=|\sin(x+\kappa)|=|\sin x|=f(x)$, αντικαθιστώντας — ειδικά όταν είναι $x=0$ — παίρνουμε ότι είναι $|\sin\kappa|=0$ το οποίο είναι αδύνατο επειδή από τη συνθήκη $0<\kappa<\pi$, είναι $|\sin\kappa|>0$. Άρα δεν υπάρχει αριθμός κ, τέτοιος ώστε να είναι μικρότερος από τον π και να είναι περίοδος της δοσμένης συνάρτησης. Άρα η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης f είναι ο αριθμός π.

Π5) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι ο T είναι η περίοδος της συνάρτησης αυτής. Η δοσμένη συνάρτηση είναι τότε ορισμένη και για τον αριθμό $-T$ όπως και για τον αριθμό $x=-T+T=0$. Όμως, για $x=0$ η συνάρτηση f με $f(x)=\cos\frac{1}{x}$ δεν ορίζεται. Άρα άτοπο, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η f δεν έχει περίοδο.

Π6) Η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x+\sin x$ δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι T είναι η περίοδος της συνάρτησης αυτής και ότι είναι $x+T+\sin(x+T)=x+\sin x$ απ' όπου συνεπάγεται ότι

$$\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)=-\frac{T}{2\sin\left(T/2\right)},$$

το οποίο δεν είναι δυνατόν για κανένα T (T είναι σταθερά) επειδή το αριστερό μέρος είναι συνάρτηση του x και το δεξιό μέρος είναι σταθερά.

Π 7) Να ορίσετε την περίοδο της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x)=\left(x-[x]\right)\sin 3\pi x.$$

Απόδειξη

Αν η δοσμένη συνάρτηση είναι περιοδική, τότε η περίοδός της είναι ο κοινός διαιρέτης των περιόδων ξεχωριστά των συναρτήσεων με τύπους $x-[x]$ και $\sin 3\pi x$. Τότε είναι:

$$x+T_1-[x+T_1]=x-[x] \qquad (1)$$

$$\sin 3\pi(x+T_2)=x\sin 3\pi x. \qquad (2)$$

α) Από την ισότητα (1) συνεπάγεται ότι ο T_1 είναι ακέραιος αριθμός, επειδή είναι $T_1=[x+T_1]-[x]$. Αντίστροφα, αν είναι T_1 κάποιος ακέραιος αριθμός τότε είναι $[x+T_1]=[x]+T_1$ και αντικαθιστώντας στην (1), παίρνουμε:

$$x+T_1-[x+T_1]=x+T_1-[x]-T_1=x-[x],$$

το οποίο αποδεικνύει ότι ο οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός είναι περίοδος της συνάρτησης με τύπο $x-[x]$. Η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης αυτής είναι ο αριθμός 1.

β) Η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης με τύπο $\sin 3\pi x$ είναι $\frac{2}{3}$ (θεώρημα 2).

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ελάχιστων περιόδων των συναρτήσεων με τύπους $x-[x]$ και $\sin 3\pi x$ είναι ο φυσικός αριθμός 2 (θεώρημα 3) και αυτή είναι η μικρότερη περίοδος.

Π8) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \cos x \cdot \cos\sqrt{2}\,x$ δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η δοσμένη συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο Τ· τότε είναι:

$\cos(x+T)\cos\sqrt{2}(x+T) = \cos x \cos\sqrt{2}\,x$ για οποιοδήποτε x.

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα $x=0$ παίρνουμε $\cos T \cdot \cos\sqrt{2}\,T = 1$ η οποία μπορεί να χωριστεί στις

$$\cos T = 1 \quad \text{και} \quad \cos\sqrt{2}\,T = 1$$

$$\text{είτε} \quad \cos T = -1 \quad \text{και} \quad \cos\sqrt{2}\,T = -1\,.$$

Από τις $\cos T = 1$, $\cos\sqrt{2}\,T = 1$ συνεπάγεται ότι είναι $T = 2\kappa_1\pi$ και $\sqrt{2}T = 2\kappa_2\pi$ απ' όπου, διαιρώντας, παίρνουμε ότι $\sqrt{2} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ δηλαδή ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός, πράγμα άτοπο.

Όμοια αποδεικνύεται ότι και οι σχέσεις $\cos T = -1$, $\cos\sqrt{2}\,T = -1$ οδηγούν σε άτοπο. Άρα η αρχική συνάρτηση δεν είναι περιοδική.

Π9) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x^2$ δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική, τότε πρέπει το σύνολο των τιμών που μηδενίζουν τη συνάρτηση αυτή, να είναι περιοδική ακολουθία, δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών πρέπει να παραμένει **στη συνολική ακολουθία.** Εξάλλου σ' αυτή τη συνάρτηση η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών

$$\sqrt{(\kappa+1)\pi} - \sqrt{\kappa\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(\kappa+1)\pi} + \sqrt{\kappa\pi}} \rightarrow 0 \text{ όταν } \kappa \rightarrow \infty,$$

μας δείχνει ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στις ρίζες δεν είναι περιοδικά διευθετημένα. Άρα ούτε αυτή η συνάρτηση είναι περιοδική.

Π10) Εξετάστε αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x|^{\sqrt{|\cos x|-1}}$ είναι περιοδική.

Απόδειξη

Στο πεδίο ορισμού ανήκουν μόνο οι τιμές $\cos x=1$ δηλαδή τα σημεία $x=\kappa\pi$ όπου $\kappa \neq 0$ οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός. Η τιμή $x=0$ εξαιρείται επειδή για $x=0$ η συνάρτηση f δεν ορίζεται. Το γράφημα της συνάρτησης αυτής αποτελείται από μεμονωμένα σημεία με συντεταγμένες $(\kappa\pi, 1)$ όπου $\kappa = \pm1, \pm2, \dots$.

Η ελάχιστη περίοδος της συνάρτησης αυτής είναι ο αριθμός π.

Π11) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\cos\sqrt{x}$ δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι είναι $\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$ απ' όπου είναι

$$\text{είτε } \sqrt{x+T}+\sqrt{x}=2\kappa\pi \quad \text{είτε } \frac{T}{\sqrt{x+T}+\sqrt{x}}=2\kappa\pi$$

το οποίο είναι αδύνατο επειδή οι αριστερές πλευρές των τελευταίων ισοτήτων είναι συναρτήσεις του συνεχούς ορίσματος x και οι δεξιές πλευρές είναι διακεκριμένες τιμές, επειδή ο κ είναι ακέραιος αριθμός. Όμοια μπορεί να δειχθεί, για παράδειγμα, ότι οι συναρτήσεις cos (sinx) και sin (cosx) είναι περιοδικές, με περίοδους π και 2π αντίστοιχα.

Γενικότερα, κάθε συνάρτηση U (sinx, cosx, tgx, ctgx) είναι περιοδική συνάρτηση του x και μια περίοδός της είναι ο αριθμός 2π.

Π12) Ας είναι f και g συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις με περιόδους αντίστοιχα T>0 και t > 0, τέτοιες ώστε να είναι $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$. Αποδείξτε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε ότι η T είναι περίοδος και της συνάρτησης g. Από τις συνθήκες της άσκησης, για κάθε ε >0 υπάρχει αριθμός Μ τέτοιος ώστε να είναι για x > M

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Για τυχαίο x υπάρχει φυσικός αριθμός κ τέτοιος ώστε x+κt > M. Τότε είναι:

$$\begin{aligned}&|g(x+T)-g(x)|=|g(x+\kappa t+T)-g(x+\kappa t)|=\\&=|f(x+\kappa t)-g(x+\kappa t)+g(x+\kappa t+T)-f(x+\kappa t+T)|\le\\&\le|f(x+\kappa t)-g(x+\kappa t)|+|g(x+\kappa t+T)-f(x+\kappa t+T)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Επειδή είναι ε >0 τυχαίος αριθμός και ο x σταθερός αριθμός, θα είναι g (x+T)=g(x) το οποίο θέλαμε να αποδείξουμε.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι είναι f(x)=g(x) για κάθε $x\in R$.

Για τυχαίο x ορίζουμε τον φυσικό αριθμό m έτσι ώστε να είναι x+mT >M. Τότε είναι:

$$|f(x)-g(x)|=|f(x+mT)-g(x+mT)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επειδή ο ε είναι αυθαίρετος θετικός αριθμός, θα είναι f(x)=g(x).

Π13) Ας είναι $f: R \to R$ θετική, συνεχής, περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T=1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in R$ ισχύει

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)}\,dx \geq 1.$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τυχαίο ρητό αριθμό $\frac{p}{q} \in Q$ $(p \in Z,\ q \in N)$ και θέτουμε $a=\frac{p}{q}$.

Η συνάρτηση με τιμή $\frac{f(x)}{f(x+a)}$ είναι συνεχής και άρα υπάρχει το $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)}\,dx$.

Για $i \in \{0,1,\dots,q-1\}$, από την περιοδικότητα της συνάρτησης f, ισχύει:

$$\int_0^1 \frac{f\left(x+\frac{i}{q}\right)}{f\left(x+\frac{i}{q}+\frac{p}{q}\right)}\,dx \overset{t=x+\frac{i}{q}}{=} \int_{\frac{i}{q}}^{1+\frac{i}{q}} \frac{f(t)}{f\left(t+\frac{p}{q}\right)}\,dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{f\left(t+\frac{p}{q}\right)}\,dt$$

$$\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{f\left(x+\frac{p}{q}\right)}+\frac{f\left(x+\frac{1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{1}{q}+\frac{p}{q}\right)}+\dots+\frac{f\left(x+\frac{q-1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{q-1}{q}+\frac{p}{q}\right)}\right]dx =$$

$$= q\int_0^1 \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{p}{q}\right)}\,dx\,. \quad (1)$$

Οι q διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί $p,\ p+1,\ \dots,\ p+q-1$ δίνουν μετά από τη διαίρεση με το q υπόλοιπα $0,\ 1,\ \dots,\ q-1$ (όχι απαραίτητα με την ίδια σειρά) κι έτσι λόγω της περιοδικότητας της συνάρτησης f οι αριθμοί

$f\left(x+\frac{p}{q}\right),\ f\left(x+\frac{1}{q}+\frac{p}{q}\right),\dots,\ f\left(x+\frac{q-1}{q}+\frac{p}{q}\right)$ είναι κυκλική μετάθεση των αριθμών

$f(x),\ f\left(x+\frac{1}{q}\right),\ \ldots,\ f\left(x+\frac{q-1}{q}\right).$

Λόγω της ανισότητας του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου, έχουμε

$$\frac{f(x)}{f\left(x+\frac{p}{q}\right)}+\frac{f\left(x+\frac{1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{1}{q}+\frac{p}{q}\right)}+\ldots+\frac{f\left(x+\frac{q-1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{q-1}{q}+\frac{p}{q}\right)} \geq$$

$$\geq q\sqrt[q]{\frac{f(x)}{f\left(x+\frac{p}{q}\right)}\cdot\frac{f\left(x+\frac{1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{1}{q}+\frac{p}{q}\right)}\cdots\frac{f\left(x+\frac{q-1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{q-1}{q}+\frac{p}{q}\right)}}=q. \qquad (2)$$

Τώρα:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f\left(x+\frac{p}{q}\right)}dx \overset{(1)}{=} \frac{1}{q}\int_0^1\left[\frac{f(x)}{f\left(x+\frac{p}{q}\right)}+\frac{f\left(x+\frac{1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{1}{q}+\frac{p}{q}\right)}+\ldots+\frac{f\left(x+\frac{q-1}{q}\right)}{f\left(x+\frac{q-1}{q}+\frac{p}{q}\right)}\right] \underset{(2)}{\geq}$$

$$\underset{(2)}{\geq} \frac{1}{q}\int_0^1 q\,dx=1.$$

Έτσι η άσκηση έχει αποδειχθεί για $\alpha \in Q$.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $F:R \to R$, $F(\alpha)=\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+\alpha)}dx$. Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{f(x+\alpha)}$ είναι συνεχής ως προς α, άρα και η συνάρτηση F είναι συνεχής. Επειδή είναι $F(\alpha)\geq 1$ για κάθε $\alpha \in Q$, είναι $F(\alpha)\geq 1$ και για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Σημείωση: Η άσκηση αυτή λύνεται πολύ ευκολότερα αν δώσουμε μια συγκεκριμένη τιμή στο α, π.χ. $\alpha=\frac{1}{2}$.

Π14) α) Ας είναι η f συνεχής περιοδική συνάρτηση με περιόδους r και w, όπου r θετικός ρητός αριθμός και w θετικός άρρητος αριθμός. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

β) Ας είναι οι f και g συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις, όχι σταθερές, με περιόδους 1 και $\sqrt{2}$, αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f+g δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

α) Από την περιοδικότητα της συνάρτησης f συνεπάγεται ότι $f(0) = f(mr + nw)$ για όλους τους ακέραιους αριθμούς m και n.

Επειδή το σύνολο $\{mr + nw:\ m \in Z,\ n \in Z\}$ είναι παντού πυκνό στο R, από τη συνέχεια της συνάρτησης f συνεπάγεται ότι $f(0)=f(x)$ για κάθε $x \in R$ το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί.

β) Υποθέτουμε ότι η f+g είναι περιοδική συνάρτηση, δηλαδή ότι είναι για κάποιο T

$$f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x) \quad \text{για κάθε } x \in R.$$

Τότε η συνάρτηση h με τύπο $h(x) \overset{\text{ορ.}}{=} f(x+T)-f(x)=g(x)-g(x+T)$ είναι συνεχής και περιοδική με περιόδους 1 και $\sqrt{2}$. Με βάση το (α) η h είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή $h(x)=c$ για κάθε $x \in R$. Αποδεικνύουμε ότι $c=0$. Αν είναι $c \neq 0$ από την ισότητα $f(x+nT)-f(x)=nc$ για $n=1, 2, \dots$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο R το οποίο εξ αιτίας της συνέχειας και της περιοδικότητας της συνάρτησης f είναι αδύνατο. Άρα $c=0$. Αυτό σημαίνει ότι ο T είναι περίοδος των συναρτήσεων f και g. Επειδή ο T είναι είτε ρητός είτε άρρητος αριθμός, με βάση το (α), μια από τις συναρτήσεις, f είτε g, πρέπει να είναι σταθερή, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση. Άρα η f+g δεν είναι περιοδική συνάρτηση.

Π15) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin\pi x + \sin\pi\sqrt{2}x$ δεν είναι περιοδική.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική και συμβολίζουμε με $T \neq 0$ μια από τις περιόδους της. Τότε η ισότητα

$$\sin\pi(x+T)+\sin\pi\sqrt{2}(x+T)=\sin\pi x+\sin\pi\sqrt{2}x \qquad (1)$$

είναι αληθής για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x.

Εάν στην ισότητα αυτή, αντικαταστήσουμε το x με τυχαίο άρτιο αριθμό 2m, τότε θα έχουμε:

$$\sin\pi T + \sin\pi\sqrt{2}(2m + T) = \sin(\pi\sqrt{2}\cdot 2m).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την περιοδικότητα της συνάρτησης sin, παίρνω την ισότητα

$$\sin\pi T + \sin\pi\sqrt{2}\left(2m + \frac{2n}{\sqrt{2}} + T\right) = \sin\pi\sqrt{2}\left(2m + \frac{2n}{\sqrt{2}}\right)$$

το οποίο είναι αληθές για οποιουσδήποτε δύο ακέραιους αριθμούς m και n. Σύμφωνα με το Λήμμα που ακολουθεί, το σύνολο

$$\left\{2m + \frac{2n}{\sqrt{2}},\ m,n\ -\text{ακ έραιοι αριθμοί}\right\}$$

είναι παντού πυκνό.

Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτήσεις με τύπους $\sin\pi T + \sin\pi\sqrt{2}(x + T)$ και $\sin\pi\sqrt{2}x$ παίρνουν τις ίδιες τιμές όταν τα ορίσματά τους αποτελούν στοιχεία του ίδιου παντού πυκνού συνόλου και σαν συνέπεια (κατά το Λήμμα) συμπίπτουν παντού, δηλαδή η ισότητα

$$\sin\pi T + \sin\pi\sqrt{2}(x + T) = \sin\pi\sqrt{2}x \qquad (2)$$

είναι ίδια για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x.

Αφαιρώντας τη (2) από την (1), παίρνουμε

$$\sin\pi(x + T) - \sin\pi T = \sin\pi x.$$

Στην τελευταία ισότητα υποθέτουμε ότι x=T οπότε παίρνουμε

$$\sin 2\pi T - \sin\pi T = \sin\pi T$$

$$\text{ή } \sin\pi T(\cos\pi T - 1) = 0.$$

Από την τελευταία ισότητα έπεται ότι το T είναι ακέραιος αριθμός. Τότε από τη (2) έπεται ότι:

$$\sin\pi\sqrt{2}(x + T) - \sin\pi\sqrt{2}x = 0$$

$$\text{ή} \qquad \sin\pi\sqrt{2}\frac{T}{2}\cos\pi\sqrt{2}\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0.$$

Αφού υπάρχουν x για τα οποία $\cos\pi\sqrt{2}\left(x + \frac{T}{2}\right) \neq 0$ έχουμε $\sin\pi\sqrt{2}\frac{T}{2} = 0$,

απ' όπου έπεται ότι ο $\sqrt{2}\frac{T}{2}$ είναι ακέραιος αριθμός.

Όμως από την άλλη μεριά ο T είναι επίσης ακέραιος αριθμός και $T\neq 0$, δηλαδή ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός, το οποίο είναι άτοπο.

Η αντίφαση στην οποία καταλήξαμε, αποδεικνύει ότι η f δεν είναι περιοδική συνάρτηση.

Λήμμα

Ας είναι r ρητός αριθμός διαφορετικός από το μηδέν, w συγκεκριμένος άρρητος αριθμός και Z το σύνολο των ακεραίων. Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{mr + nw\colon m \in Z,\ n \in Z\}$ είναι παντού πυκνό στο R δηλαδή ότι σε κάθε διάστημα έχει στοιχεία από το σύνολο A.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το σύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι $r > 0$. Όλα τα στοιχεία του συνόλου $\left\{nw - \left[n\frac{w}{r}\right] r\colon\ n \in Z\right\}$ το οποίο εμπεριέχεται στο A, είναι μεταξύ τους διαφορετικά (επειδή ο w είναι άρρητος και $nw - \left[n\frac{w}{r}\right] r = mw - \left[m\frac{w}{r}\right] r \Rightarrow m = n$) και βρίσκονται στο διάστημα $[0, r)$.

Από αυτό συνεπάγεται ότι στο διάστημα $[0, r)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης αυτού του συνόλου, άρα και του υπερσυνόλου του A.

Ας είναι (α, b) αυθαίρετο διάστημα. Επειδή το σύνολο A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης, στην περιοχή του ακτίνας $\frac{b-\alpha}{2}$ βρίσκονται τουλάχιστον δύο σημεία u και υ, $u<\upsilon$ από το σύνολο A. Τότε είναι $0 < \upsilon - u < b - \alpha$. Ας είναι $\kappa = \left[\frac{b}{\upsilon - u}\right]$, τότε είναι $\alpha < \kappa(\upsilon - u) \le b$ επειδή

$$\alpha = b - (b - \alpha) < b - (\upsilon - u) < \kappa(\upsilon - u).$$

Αν είναι $\kappa(\upsilon - u) = b$ τότε $\alpha < (\kappa - 1)(\upsilon - u) < b$.

Επειδή το σύνολο A είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ακεραίων αριθμών, θα είναι, με βάση τα προηγούμενα, τουλάχιστον ένα από τα σημεία $\kappa(\upsilon - u)$ είτε $(\kappa - 1)(\upsilon - u)$ από το σύνολο A στο διάστημα (α, b) το οποίο και έπρεπε να αποδειχθεί.

Π16) Ας είναι f συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο p. Αποδείξτε ότι:

α) Το $\int_x^{x+p} f(t)\,dt$ δεν εξαρτάται από το x.

β) Για κάθε πραγματικό αριθμό α μπορούμε να βρούμε αριθμό x τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x + \alpha) - f(x) = 0$ και αριθμό y τέτοιο ώστε να ισχύει $f(y + \alpha) + f(y - \alpha) - 2f(y) = 0$.

Απόδειξη

α) 1ος τρόπος :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x+p} f(t)\,dt\right) = f(x+p) - f(x) = 0 \Rightarrow \int_x^{x+p} f(t)\,dt = \text{σταθερά}.$$

2ος τρόπος :

$$\int_x^{x+p} f(t)\,dt = \int_0^{x+p} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{p} f(t)\,dt + \int_p^{x+p} f(t)\,dt - \int_0^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{p} f(t)\,dt + \int_0^{x} f(u+p)\,du - \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{p} f(t)\,dt + \int_0^{x} f(u)\,du - \int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{p} f(t)\,dt.$$

β) Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό (α) συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_0^{p} \underbrace{\big(f(t+\alpha) - f(t)\big)}_{(*)} = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^{p} \underbrace{\big(f(t+\alpha) + f(t-\alpha) - 2f(t)\big)}_{(**)}\,dt = 0,$$

απ' όπου συνεπάγεται ότι, οι υπό ολοκλήρωση ποσότητες, τουλάχιστο σε κάποια σημεία x της (*) και y της (**) από το [0, p] μηδενίζονται (επειδή στην αντίθετη περίπτωση, από τη συνέχεια του ολοκληρώματος θα συνεπαγόταν ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα θα είχαν το ίδιο πρόσημο, καθώς επίσης και οι αντίστοιχες υπό ολοκλήρωση ποσότητες). Έτσι ο ισχυρισμός της άσκησης έχει αποδειχθεί.

Π17) Εάν είναι f: $R \to R$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση, αποδείξτε ότι η συνάρτηση F με τύπο $F(x) = \int_\alpha^{x} f(t)\,dt$ μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα γραμμικής και περιοδικής συνάρτησης.

Απόδειξη

Αν είναι T >0 περίοδος της συνάρτησης f, λόγω του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = A = \text{σταθερά, για κάθε } x \in R.$$

Ας είναι $F_1(x) = \frac{A}{T}x$. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση με τύπο

$F_2(x) = F(x) - F_1(x)$ είναι περιοδική με περίοδο T.

$$F_2(x+T)=F(x+T)-F_1(x+T)=F(x)+\int_x^{x+T} f(t)\,dt-\frac{A}{T}(x+T)=$$
$$=F(x)-F_1(x)=F_2(x)\ \Rightarrow\ F(x)=F_1(x)+F_2(x).$$

Η σχέση αυτή αποδεικνύει τον ισχυρισμό της άσκησης.

Π18) Ας είναι α>0 πραγματικός αριθμός και f πραγματική συνάρτηση, ορισμένη για κάθε πραγματικό x, η οποία, για κάθε x, ικανοποιεί τη συνθήκη

$$f(x+\alpha)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-(f(x))^2}\ .$$

α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική.

β) Για α=1 βρείτε παράδειγμα συνάρτησης f≠σταθερά.

Απόδειξη

α) Ισχύει ότι:

$$f(x+2\alpha)=f\left[(x+\alpha)+\alpha\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+\alpha)-\left[f(x+\alpha)\right]^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-\left[f(x)\right]^2}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-\left[f(x)\right]^2}+f(x)-\left[f(x)\right]^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+\left[f(x)\right]^2}=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|.$$

Επίσης ισχύει ότι: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x-\alpha)-\left[f(x-\alpha)\right]^2}\ \geq\ \dfrac{1}{2}$.

Άρα $f(x+2\alpha)=f(x)$ δηλαδή η f είναι περιοδική με περίοδο T=2α.

β) Για α=1 (T=2) τη δοσμένη σχέση ικανοποιεί, για παράδειγμα, η περιοδική συνάρτηση f που ορίζεται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} 1/2, & -1\leq x<0 \\ 1, & 0\leq x<1 \end{cases}$$

$$\text{και}\quad f(x+2)=f(x)$$

ή η συνεχής συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1+\left|\cos\frac{\pi x}{2}\right|\right).$$

Η ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΗΝ ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΤΖΑΝΑΚΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΡΕΘΥΜΝΟΝ 64100

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Παρουσιάζεται αναλυτικά η σχέση των μιγαδικών αριθμών με τις στροφές στο επίπεδο, καθώς και οι μετασχηματισμοί Lorentz της θεωρίας της σχετικότητας ως εφαρμογή της θεωρίας πινάκων. Στόχος του κειμένου είναι να υλοποιήσει με **συγκεκριμένα, ουσιαστικού περιεχομένου, παραδείγματα**, αφηρημένες έννοιες όπως ομάδα, σώμα, ισομορφισμός δομών κλπ. και να δείξει τις δυνατότητες που παρέχει η θεωρία πινάκων στην κατανόηση και κομψή διατύπωση μαθηματικών συμπερασμάτων και φυσικών θεωριών. Η παρουσίαση είναι στοιχειώδης και πολλές λεπτομέρειες διατυπώνονται ως ασκήσεις ώστε το κείμενο να μπορεί να χρησιμοποιηθεί διδακτικά στο Λύκειο.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έχει συχνά διατυπωθεί από μαθηματικούς, καθηγητές στην μέση εκπαίδευση (ΜΕ), η άποψη ότι είναι αδόκιμος ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται στο Λύκειο η θεωρία πινάκων και οι αλγεβρικές δομές, επικρίνοντας κυρίως τον αφηρημένο ή τεχνητό τρόπο εισαγωγής βασικών εννοιών, αλλά και τον επιτηδευμένο χαρακτήρα της πλειοψηφίας των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου, οι οποίες σε τελευταία ανάλυση δεν έχουν κανένα ουσιαστικό περιεχόμενο!

Η άποψη αυτή, κατά τη γνώμη μου, είναι σωστή, λαμβανομένου υπόψιν ότι νέες μαθηματικές έννοιες πρέπει να εισάγονται φυσιολογικά βάσει **γόνιμων** ερωτημάτων ή προβλημάτων των οποίων η διατύπωση και η **αναγκαιότητα** απάντησής τους έχει καταστεί **εμφανής.** Σε τούτο σημαντική βοήθεια μπορεί να προσφέρει και η ιστορική τους εξέλιξη (βλ. [10]). Στην προκειμένη περίπτωση (α) για την θεωρία πινάκων η έμφαση θα έπρεπε να είναι στην μελέτη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων και γραμμικών γεωμετρικών μετασχηματισμών (στροφές, μεταφορές, ανακλάσεις, ομοιοθεσίες κλπ.) που είναι και τα θέματα τα οποία ιστορικά οδήγησαν τον Cayley στην εισαγωγή και συστηματική ανάπτυξη της θεωρίας πινάκων (1858, 1866, βλ. [4] σελ. 381, [11] σελ. XXIV-XV). Έτσι στην έννοια του γραμμικού μετασχηματισμού αλλά και την αναγκαιότητα μιας συστηματικής επεξεργασίας μεθόδων λύσης γραμμικών συστημάτων, οδηγούμαστε στην προσπάθεια να περιγράψομε με την βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας γνωστούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και από εκεί και πέρα, οι πράξεις μεταξύ πινάκων προκύπτουν φυσιολογικά από τις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ συναρτήσεων:

– πρόσθεση πινάκων από πρόσθεση γραμμικών μετασχηματισμών

– πολ/μός αριθμού με πίνακα από σύνθεση γραμμικού μετασχηματισμού και ομοιοθεσίας

– πολ/μός πινάκων από σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών

(β) για τις αλγεβρικές δομές (ομάδα, δακτύλιος, σώμα) έχω υποστηρίξει την άποψη ότι δεν είναι δυνατόν να διδαχθούν **αποτελεσματικά** στο Λύκειο στην **αφηρημένη** τους μορφή, ακριβώς γιατί η απαιτούμενη μαθηματική ωριμότητα προϋποθέτει την επαφή με προβλήματα και θέματα που δεν μπορούν να διδαχθούν στην ΜΕ, [9]. Το πολύ που μπορεί να γίνει είναι να μελετηθούν **συγκεκριμένα, ουσιαστικού** μαθηματικού περιεχομένου, **παραδείγματα,** βάσει των οποίων να **υποβληθούν** έμμεσα έννοιες αλγεβρικών δομών, προετοιμάζοντας έτσι καλλίτερα για την συστηματική και λεπτομερειακή τους μελέτη στο Πανεπιστήμιο, [9] § 4. Με αυτές τις σκέψεις κατά νου, και δεδομένης της διδακτέας ύλης στην γ' Λυκείου, θα παρουσιάσω δύο παραδείγματα που

— το ένα έχει γεωμετρική και το άλλο φυσική σημασία

— δίνουν παραδείγματα ομάδων και σώματος

— υποβάλλουν την έννοια του ισομορφισμού αλγεβρικών δομών

— συνδέουν τις φαινομενικά ασύνδετες έννοιες: μιγαδικός αριθμός, πίνακας, στροφή και θέτουν γόνιμα ερωτήματα

— δείχνουν με **στοιχειώδη** τρόπο πώς μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά μία φημισμένη φυσική θεωρία.

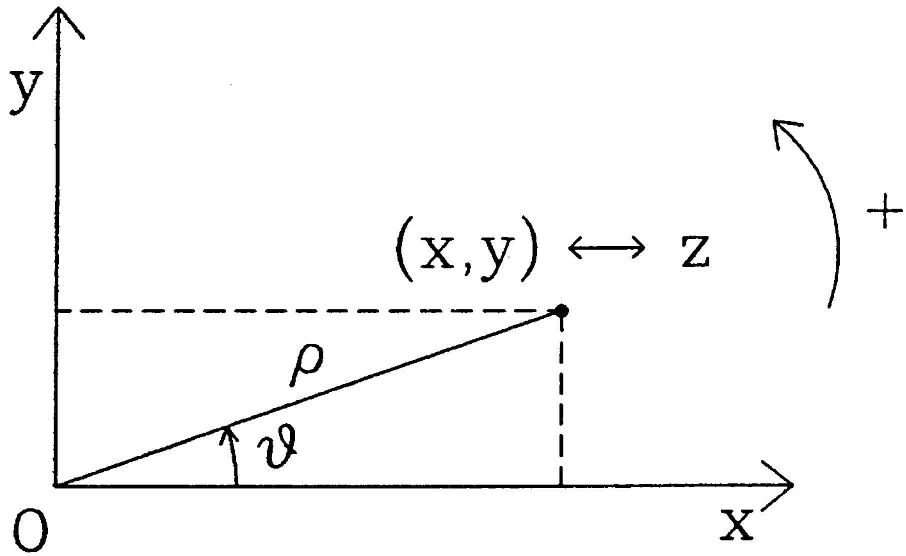
Γίνεται προσπάθεια το κείμενο να μπορεί να αποτελέσει άξονα για την διδασκαλία τουλάχιστον μέρους των παραδειγμάτων αυτών στα μαθήματα της άλγεβρας και της αναλυτικής γεωμετρίας στη γ' Λυκείου, γι' αυτό και πολλές λεπτομέρειες διατυπώνονται ως ασκήσεις που μπορούν να δοθούν στους μαθητές.

Στην §2 παρουσιάζεται η συσχέτιση των μιγαδικών αριθμών με την ομάδα των στροφών στο επίπεδο, στην §3 μελετώνται στις δύο διαστάσεις οι μετασχηματισμοί Lorentz της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, με τρόπο που να είναι όσο γίνεται κοντύτερα στην μελέτη των στροφών της §2. Στα δύο παραρτήματα παρουσιάζονται δύο σημεία της όλης παρουσίασης που ξεφεύγουν από την διδακτέα ύλη των μαθηματικών της ΜΕ.

2. ΟΙ ΣΤΡΟΦΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ξεκινάμε από την γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών ως σημείων του Ευκλειδείου επιπέδου $\mathbf{R}^2$. Σχηματικά

$$\mathbf{C} \ni z = x + iy = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \;\rightarrow\; (x, y) = (\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \rho\eta\mu\theta) \qquad (2.1)$$



Σχήμα 1

Το θεώρημα του de Moivre δίνει την δυνατότητα γεωμετρικής ερμηνείας του γινομένου των μιγαδικών αριθμών z και $z' = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi$: στροφή του z κατά γωνία φ, γύρω από το O.

Φυσιολογικά λοιπόν τίθεται το πρόβλημα: να παρασταθεί **μόνο** με τη βοήθεια της **αναλυτικής γεωμετρίας** μία στροφή κατά γωνία φ, του επιπέδου γύρω από την αρχή των αξόνων O. Συγκεκριμένα έχομε την

Άσκηση 2.1: Αν το $\overrightarrow{OA} = (x, y)$ στρεφόμενο κατά γωνία φ γύρω από το O απεικονίζεται στο $\overrightarrow{OA'} = (x', y')$, (σχήμα 2) να δειχθεί ότι

$$x' = x\sigma\upsilon\nu\varphi - y\eta\mu\varphi, \qquad y' = x\eta\mu\varphi + y\sigma\upsilon\nu\varphi$$

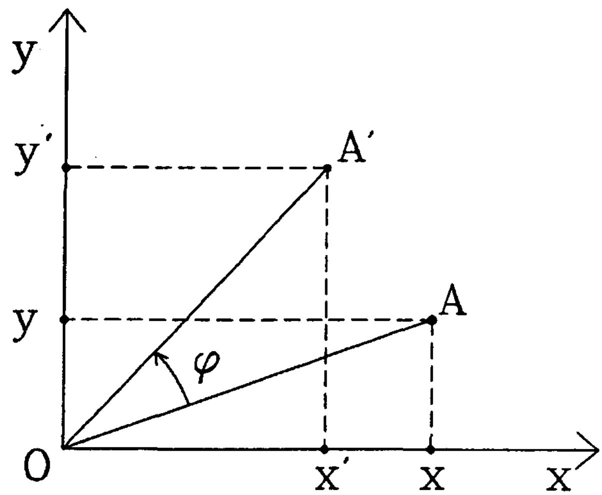
ή ισοδύναμα υπό μορφή πίνακα

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

Ορίζεται έτσι φυσιολογικά ο πίνακας

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

και αναζητούνται τυχόν ενδιαφέρουσες ιδιότητές του.



Σχήμα 2

Προς τούτο δίνομε τον

Ορισμό 2.1: Αν Α $n\times m$ πίνακας με στοιχεία a_{ij}, ο ανάστροφός του A^t είναι $m\times n$ πίνακας με στοιχεία $a'_{ij} = a_{ji}$.

Έτσι διατυπώνουμε την

Άσκηση 2.2: (α) Αν A_φ ο πίνακας στροφής του $\mathbf{R}^2$ κατά γωνία φ, (2.3), τότε

(i) $A_\varphi^{-1} = A_\varphi^t = A_{-\varphi}$ και $\det A = 1$ (2.4)

(ii) $A_{\varphi_1}A_{\varphi_2} = A_{(\varphi_1+\varphi_2)}$ (2.5)

(iii) Η απεικόνιση (2.2) απεικονίζει ευθείες σε ευθείες

(iv) $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ (2.6)

(β) Αντίστροφα, κάθε πίνακας Α που ικανοποιεί την (2.4) (δηλ. $AA^t=I$) είναι πίνακας κάποιας στροφής του $\mathbf{R}^2$ γύρω από το Ο.

Υπόδειξη: Για τα (αii, iii) γράψτε διανυσματικά την (2.2): $\vec{X}' = A_\varphi \vec{X}$ όπου $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ και χρησιμοποιήστε την διανυσματική εξίσωση της ευθείας και ότι $|\vec{X}|^2 = \vec{X}\cdot\vec{X}$, όπου $\vec{X}\cdot\vec{Y}$ το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{X}$, $\vec{Y}$ και $|\vec{X}|$ το μέτρο του $\vec{X}$.

Παρατηρήσεις: (1) Η άσκηση 2.2 (αiii) λέει ότι η (2.2) είναι γραμμική απεικόνιση. Να δειχθεί ότι αυτό ισχύει για κάθε πίνακα και όχι μόνον για τους (2.3). Στο Παράρτημα 1 δείχνομε ότι ισχύει και το αντίστροφο, υποθέτοντας ότι η απεικόνιση είναι συνεχής, 1-1 και επί και ότι $\overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

(2) Η (2.5) δείχνει ότι οι 2×2 πίνακες της μορφής (2.3) ή ισοδύναμα που ικανοποιούν την

$$AA^t = I \qquad (2.4'\text{i})$$

$$\det A = +1 \qquad (2.4'\text{ii})$$

αποτελούν αβελιανή πολ/κή ομάδα (γιατί;) που συμβολίζομε με SO(2), πράγμα γεωμετρικά προφανές (και λόγω της Άσκησης 2.2. (β)) αφού σύνθεση στροφών κατά φ_1 και φ_2 είναι στροφή κατά $\varphi_1 + \varphi_2$.

(3) Η (2.6) γράφεται ακόμα

$$\left|\overline{AX}\right| = \left|\vec{X}\right| \qquad (2.6')$$

Η (2.6′) λέει ότι η απεικόνιση (2.2) διατηρεί το μέτρο των διανυσμάτων, πράγμα ξανά προφανές από γεωμετρικής πλευράς.

Βάσει της (2.4′) δίνομε τον

Ορισμό 2.2: Ένας 2×2 πίνακας που ικανοποιεί την (2.4′i) λέγεται **ορθογώνιος.**

Άσκηση 2.3: Δείξτε ότι (α) αν Α 2×2 ορθογώνιος τότε detA$=\pm1$ και ισχύει η (2.6′) (ή η (2.6))

(β) αντίστροφα, αν Α 2×2 πίνακας που ικανοποιεί την (2.6′) τότε είναι ορθογώνιος.

Σχόλιο: Το σκέλος (α) ουσιαστικά περιέχεται στην Άσκηση 2.2. Η παρατήρηση (2) πιο πάνω περιέχει κατ' ουσίαν την απόδειξη της Πρότασης 2.1.

Πρόταση 2.1: Η πολ/κή ομάδα πινάκων SO(2) είναι **ισόμορφη** με την ομάδα των στροφών του επιπέδου γύρω από το O, με πράξη την σύνθεση.

Εν προκειμένω δύο ομάδες (G,.), (G′, o) λέγονται ισόμορφες αν υπάρχει συνάρτηση φ: $G \to G'$ 1-1 και επί η οποία ικανοποιεί την

$$\varphi(\alpha\cdot\beta) = \varphi(\alpha) \circ \varphi(\beta) \qquad (2.7)$$

Εδώ η γωνία στροφής θεωρείται στο (-π, π] και στροφές που διαφέρουν κατά 2κπ, $\kappa\in\mathbf{Z}$, ταυτίζονται.

Αν τώρα συνδυάσομε την γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου μιγαδικών αριθμών με τα προαναφερθέντα, φυσιολογικά οδηγούμαστε στην απεικόνιση

$$z \to \text{συνθ} + \text{ημθ} \to A_\theta = \begin{pmatrix} \text{συνθ} & -\text{ημθ} \\ \text{ημθ} & \text{συνθ} \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

οπότε το θεώρημα του de Moivre οδηγεί στην

Άσκηση 2.4: Να δειχθεί ότι η απεικόνιση (2.8) της μοναδιαίας περιφέρειας $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ στην SO(2) είναι **ισομορφισμός** πολ/κών ομάδων.

Είναι σαφές ότι η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου των z και ρ (συνθ+iημθ) είναι στροφή του z κατά θ και πολ/μός του μέτρου του επί ρ, δηλαδή σύνθεση μιας **στροφής** και μιας **ομοιοθεσίας** (ομοιοθεσία με συντελεστή $\rho \in \mathbf{R}$ είναι η απεικόνιση του $\mathbf{R}^2 : \vec{X} \to \rho\vec{X}$). Έτσι οδηγούμαστε φυσιολογικά στην επέκταση της (2.8) σε όλο το **C**, ορίζοντας την απεικόνιση

$$z = a + bi = \rho\,(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta) \;\to\; A = \rho\begin{pmatrix} \text{συν}\theta & -\text{ημ}\theta \\ \text{ημ}\theta & \text{συν}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad (2.8')$$

Σχόλιο: Η $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ είναι η σύνθεση ομοιοθεσίας συντελεστή ρ και στροφής κατά γωνία φ, οπότε η Άσκηση 2.4 μπορεί να γενικευθεί στην

Άσκηση 2.5: Αν

$$G = \left\{ A \quad 2\times 2 \text{ πραγματικός πίνακας: } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ με } |a| + |b| \neq 0 \right\}$$

τότε (α): Το $G \cup \{0\} \equiv G_0$ με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης πινάκων και πολ/μού επί αριθμό, είναι **διανυσματικός χώρος** διάστασης 2 και η απεικόνιση

$$\mathbf{R}^2 \ni (a,b) \;\to\; \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in G_0 \qquad (2.9)$$

είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων (δηλ. είναι 1-1, επί και γραμμική – βλ. Παράρτημα 1).

(β) η G είναι αβελιανή πολ/κή ομάδα

(γ) η (2.8′) είναι ισομορφισμός των πολ/κών ομάδων **C*** και G (γενίκευση της Άσκησης 2.4).

Σχόλιο: Η Άσκηση 2.5 δείχνει ότι το G_0 είναι **σώμα** με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολ/μού πινάκων, και μάλιστα **ισόμορφο** με το **C** (δηλ. οι ομάδες (G_0, +), (G, .) είναι ισόμορφες με τις αντίστοιχες ομάδες (**C**, +), (**C***, .)). Έτσι οι (2.8), (2.8′) δίνουν μία ολοκληρωμένη **αναπαράσταση** των μιγαδικών αριθμών βάσει των **στροφών** και **ομοιοθεσιών** του **επιπέδου** και οδηγούν φυσιολογικά στο

Ερώτημα: Είναι δυνατή μια αντίστοιχη συσχέτιση των στροφών και ομοιοθεσιών του χώρου με κάποια γενίκευση των μιγαδικών αριθμών; (πρβλ. το σχόλιο μετά την (2.8′)). Ή, πιο συγκεκριμένα: Είναι δυνατόν να βρεθεί ένα **σώμα** που να επεκτείνει το **C** (δηλ. **να περιέχει** σώμα **ισόμορφο** με το **C**) και του οποίου η πολ/κή ομάδα να είναι **ισόμορφη** με την ομάδα (ως προς την σύνθεση) που αποτελείται από συνθέσεις στροφών και ομοιοθεσιών στον **χώρο;**

Το ερώτημα αυτό που απασχόλησε τους μαθηματικούς (Wessel 1797, Argand 1806, Gauss 1831 κ.α.) πολύ **πριν** την ανάπτυξη της θεωρίας πινάκων (Cayley 1858, 1866)*, στην πιο πάνω μορφή, απαντήθηκε αρνητικά από τον Hamilton (1843), οδηγώντας τον στην ανακάλυψη των τετρανύων (quaternions), της πρώτης μη μεταθετικής δομής που μελετήθηκε διεξοδικά και άσκησε σημαντική επίδραση στην εξέλιξη της άλγεβρας στον 19ο αιώνα (για πιο συστηματική μελέτη του θέματος βλ. [9] §§3, 4).

Άσκηση (προβληματισμός): Πώς μπορεί κανείς, χωρίς υπολογισμούς και αναλύσεις να περιμένει **αρνητική** απάντηση στο πιο πάνω ερώτημα; (Υπόδειξη: η ομάδα των στροφών στον **χώρο** γύρω από το O είναι **μη μεταθετική** (γιατί;)).

---

* Ένας λόγος που μεγάλοι μαθηματικοί όπως ο Gauss, δεν μπόρεσαν να δώσουν απάντηση, είναι και το γεγονός ότι όλη η ανάλυση στην παράγραφο αυτή γίνεται εξαιρετικά περίπλοκη χωρίς την χρήση πινάκων!

3. ΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσομε τα θεμέλια της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας ως εφαρμογή της θεωρίας πινάκων. Χάριν απλότητας των υπολογισμών **και μόνον,** θα θεωρήσομε ότι ο χώρος έχει **μια** διάσταση. Κανένα από τα συμπεράσματά μας δεν προκύπτει στις 3 διαστάσεις με τρόπο ουσιαστικά διαφορετικό από αυτόν που θα δώσουμε εδώ.

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας όπως διατυπώθηκε αρχικά από τον Einstein (1905) και πήρε μια γεωμετρική μορφή από τον Minkowski (1908), ([3] Κεφ. III, V) στηρίζεται στις ακόλουθες φυσικές υποθέσεις:

(1) **Αρχή της Σχετικότητας*** (Γαλιλαίος): Υπάρχει ένα σύνολο συστημάτων αναφοράς (ή αξόνων), ονομαζόμενα **αδρανειακά,** που το ένα κινείται ως προς το άλλο με **σταθερή ταχύτητα,** και στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας: ένα σώμα στο οποίο δεν επενεργούν δυνάμεις ακολουθεί ευθύγραμμη** ομαλή κίνηση.

(2) **Αρχή της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός:** Σε κάθε αδρανειακό σύστημα ένα φωτεινό σήμα κινείται με την ίδια ταχύτητα c, ανεξάρτητα από το αν η πηγή κινείται ή όχι.

Θα εξετάσομε τώρα τις συνέπειες των υποθέσεων (1) και (2). Έστω τα αδρανειακά συστήματα Σ, Σ′ και καρτεσιανές συντεταγμένες σ' αυτά (x, t), (x', t') αντίστοιχα, όπου x η θέση στον χώρο ενός γεγονότος και t η αντίστοιχη χρονική στιγμή. Συνεπώς ένα γεγονός που συμβαίνει την χρονική στιγμή t στο σημείο x μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σημείο του $\mathbf{R}^2$ (απλώς ως διανυσματικού χώρου).

(i) Έστω υλικό σημείο Α στο οποίο δεν επενεργούν δυνάμεις στο Σ. Είναι σαφές ότι το ίδιο ισχύει και στο Σ′ (η δύναμη είναι διάνυσμα και αν μηδενίζεται σ' ένα σύστημα αναφοράς, θα μηδενίζεται σε όλα).

---

* Για τον σκοπό του κειμένου αυτού αρκεί η περιορισμένη διατύπωση του Γαλιλαίου. Ο Einstein απαίτησε όλοι οι νόμοι της φυσικής να ισχύουν με την ίδια μορφή σ' όλα τα αδρανειακά συστήματα (βλ. [3] σελ. 41).

** Εν προκειμένω, αφού θεωρούμε τον χώρο να έχει μία διάσταση, ο όρος "ευθύγραμμη" περιττεύει. Σημασία έχει η κίνηση με σταθερή ταχύτητα.

Συνεπώς βάσει της (1) ακολουθεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση και στα δύο συστήματα:

στο Σ: $x=x_0+vs$ v η ταχύτητα του A στο Σ

$t=s \quad s\in \mathbf{R}$

στο Σ′: $x'=x'_0+v's'$ v′ η ταχύτητα του A στο Σ′

$t'=s' \quad s'\in \mathbf{R}$

δηλαδή η τροχιά του στον $\mathbf{R}^2$ είναι ευθύγραμμη και στα δύο συστήματα. Συνεπώς η αλλαγή συντεταγμένων $(x,t) \to (x',t')$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 : f(x,t) = (x',t')$$

που απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

(ii) Αν v η ταχύτητα του Σ′ ως προς το Σ τότε

v′ η ταχύτητα του Σ ως προς το Σ′

που είναι εξ υποθέσεως αδρανειακό. Άρα θα πρέπει να ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός $(x',t') \to (x,t)$ (βλ. (i) πιο πάνω). Δηλαδή η f είναι 1-1 και επί.

(iii) Αν, όπως είναι φυσιολογικό από φυσικής πλευράς **απαιτήσομε** η f να είναι και συνεχής, τότε από το Παράρτημα 1 έχουμε ότι η f είναι γραμμική*, δηλαδή της μορφής

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ ct'_0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

Το c συμπεριλαμβάνεται εδώ για λόγους που θα φανούν αμέσως (βλ. (3.2) πιο κάτω). Τώρα, **χωρίς βλάβη της γενικότητας**, μπορούμε να υποθέσομε ότι για $t=0$ οι αρχές των αξόνων των Σ, Σ′ συμπίπτουν, καθώς και η χρονική αφετηρία, ώστε να πάρομε $x_0=0$, $t_0=0$ στην (3.1).

(iv) Από την (2), αν ένα φωτεινό σήμα έχει συντεταγμένες (x,t), (x',t') στα Σ, Σ′ αντίστοιχα, τότε

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 = 0 \qquad (3.2)$$

---

* Υπάρχουν και άλλοι τρόποι να αποδειχθεί η γραμμικότητα της f, που έχουν το πλεονέκτημα ότι ισχύουν στην περίπτωση που ο χώρος έχει τρεις διαστάσεις [1], [2], [6], [8].

Στο Παράρτημα 2 δείχνομε ότι τούτο συνεπάγεται την (πρβλ. (2.6))

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad (3.2')$$

Βάσει της (3.1) οδηγούμαστε στην

Άσκηση 3.1: (α) Δείξτε ότι αν θέσομε

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \quad \vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

τότε η (3.2) γράφεται ισοδύναμα

$$\vec{X} \cdot n\vec{X} = (A\vec{X}) \cdot (nA\vec{X}) \qquad (3.2'')$$

όπου $\vec{X} \cdot \vec{Y}$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbf{R}^2$

(β) Από την (3.2') δείξτε ότι ο A ικανοποιεί την

$$A^t n A = n \qquad (3.3)$$

(γ) Δείξτε ότι $\det A = \pm 1$ και

$$A^{-1} = n A^t n \qquad (3.3')$$

(δ) Επειδή τα στοιχεία του Α είναι συναρτήσεις της ταχύτητας v του Σ' ως προς το Σ και από φυσικής πλευράς είναι εύλογο να υποθέσομε την συνέχειά τους ως προς v, έχομε ότι $v \to 0 \Rightarrow A \to I$, άρα $\det A = 1$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες του συλλογισμού).

(ε) Δείξτε από την (3.3') και το (δ) ότι

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \qquad (3.4i)$$

$$\gamma^2 - \alpha^2 = 1 \qquad (3.4ii)$$

(πρβλ. (2.9)) και η (3.1) είναι

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \qquad (3.1')$$

(στ) Αντίστροφα, δείξτε ότι αν ισχύει η (3.1') τότε ισχύει και η (3.2').

(ζ) Δείξτε ότι οι πίνακες της μορφής (3.4i) αποτελούν διανυσματικό χώρο διάστασης 2, καθώς και σώμα (ως προς τις συνήθεις πράξεις). Δείξτε ακόμα ότι οι πίνακες (3.4i) με την επιπλέον συνθήκη (3.4ii) αποτελούν αβελιανή πολ/κή ομάδα (πρβλ. Ασκήσεις 2.4, 2.5 (α), (β)).

Παρατήρηση: Μπορούμε να εκφράσουμε το α συναρτήσει του γ και της ταχύτητας v του Σ' ως προς το Σ, με τον εξής απλό συλλογισμό:

Αν P σημείο **ακίνητο** στο Σ' με συντεταγμένες (x', t') τότε κινείται με σταθερή ταχύτητα v ως προς το Σ, στο οποίο έχει συντεταγμένες (x, t). Δηλαδή έχομε

$$\frac{dx'}{dt'} = 0 = \frac{dx'}{dt'}\frac{dt}{dt'}$$

Όμως $dt/dt' \neq 0$ αφού ο χρόνος "ρέει" και στα δύο συστήματα, οπότε $dx'/dt = 0$. Όμως από (3.4), (3.1΄) έχομε

$$x' = \gamma x - act \;\Rightarrow\; dx'/dt = 0 = \gamma v - ac \;\Rightarrow\; a = \gamma v/c$$

και η (3.1΄) γίνεται τελικά

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ ct \end{pmatrix} \qquad (3.1'')$$

Στο σημείο αυτό είναι βολικό να γράφομε $\beta = v/c$

Άσκηση 3.2: Από τις (3.1΄΄), (3.4) δείξτε ότι

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2} = (1-\beta^2)^{-1/2} \qquad (3.5)$$

Έτσι οι (3.1΄΄), (3.5) δίνουν τελικά τους γνωστούς **μετασχηματισμούς Lorentz** της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας για την αλλαγή συντεταγμένων (x, t) του Σ σε (x΄, t΄) του Σ΄:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \qquad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = \frac{v}{c} \qquad (3.6)$$

Παρατήρηση: Η υπόθεση (1) χρησιμοποιήθηκε **μόνον** για την απόδειξη της γραμμικότητας του μετασχηματισμού – βλ. (3.1). Όλα τα άλλα που οδηγούν στην (3.6) έπονται από την υπόθεση (2). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι στην (3.6) μπορούμε ουσιαστικά να καταλήξουμε μόνο με την υπόθεση (1) (βλ. [1] Κεφ. I, §§2, 3, 10, [7] §2, 17, [8]).

Άσκηση 3.3: Να δειχθεί ότι το σύνολο των πινάκων της μορφής

$$A_\beta = \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.6')$$

αποτελεί **αβελιανή ομάδα** ως προς τον πολ/μό πινάκων, που συμβολίζομε με SO (1,1). Δείξτε ότι

$$A_\beta A'_\beta = A_{\left((\beta+\beta')/1+\beta\beta'\right)} \qquad (3.7)$$

Σχόλιο: Φαίνεται να υπάρχει μια ομοιότητα με την (2.5). Αυτό θα γίνει καθαρότερο πιο κάτω.

Παρατήρηση: Η (3.7) έχει την ακόλουθη φυσική ερμηνεία βάσει της (3.6):
Αν Σ′ αδρανειακό σύστημα που κινείται με ταχύτητα v ως προ Σ
Αν Σ″ αδρανειακό σύστημα που κινείται με ταχύτητα v′ ως προ Σ′
τότε το Σ″ κινείται με ταχύτητα v″ ως προς το Σ όπου

$$v'' = (v + v') / (1 + vv' / c^2) \qquad (3.8)$$

(γιατί; βλ. (3.1′)). Η (3.8) είναι ο περίφημος νόμος πρόσθεσης των ταχυτήτων στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, στον οποίο μπορούμε να καταλήξομε και λίγο διαφορετικά βάσει της

Άσκησης 3.4: Έστω το αδρανειακό σύστημα Σ′ κινούμενο με ταχύτητα v ως προς το αδρανειακό σύστημα Σ. Έστω A υλικό σημείο με σταθερή ταχύτητα u′ ως προς το Σ′ και u ως προς το Σ. Δείξτε ότι

$$u = (u' + v) / (1 + u'v / c^2) \qquad (3.8')$$

Υπόδειξη: Αν (x, t), (x′, t′) οι συντεταγμένες του A στα Σ, Σ′ αντίστοιχα, τότε $x' / t' = u'$, $x / t = u$. Χρησιμοποιείστε την (3.6).

Άσκηση (3.5): Βάσει της (3.8′) δείξτε την (3.8).

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι από την (3.5) **έπεται** ότι c είναι ανώτατο όριο για την ταχύτητα οποιουδήποτε υλικού σώματος. Έτσι $\beta = v/c < 1$ και η (3.7) υποβάλλει την ακόλουθη*

Άσκηση 3.6: Δείξτε ότι αν $\beta_1, \beta_2 \in (-1,1)$ τότε η

$$\beta_1 * \beta_2 = (\beta_1 + \beta_2) / (1 + \beta_1 \beta_2) \qquad (3.8'')$$

ορίζει εσωτερική πράξη στο (-1, 1) που το καθιστά αβελιανή ομάδα. Τότε η (3.7) ορίζει ισομορφισμό των ομάδων ((-1, 1), *) και (SO (1,1), .) (πρβλ. (2.8) όπου ουσιατικά το (-π, π] με την συνήθη πρόσθεση -modulo 2π- είναι ισόμορφο με την SO(2)).

Σ' όλη την παράγραφο αυτή είδαμε ότι τα αποτελέσματά μας έχουν μία αναλογία με τα αποτελέσματα της §2. Θα τελειώσουμε το κείμενο δίνοντας στον μετασχηματισμό Lorentz (3.6), (3.6′) μια μορφή πολύ κοντινή με τις (2.2), (2.3), που αφ' ενός καθιστά την αναλογία αυτή ακόμα εμφανέστερη και αφ' ετέρου διευκολύνει τους υπολογισμούς κατά πολύ.

---

* Είναι εντυπωσιακό ότι ενώ το σχολικό βιβλίο ουσιαστικά περιέχει την Άσκηση 3.6 όπως και την 2.5 (α), (β) (βλ. [5] Κεφ. 2 ασκήσεις 4,6,8,30,31), δεν αναφέρει λέξη για το ουσιαστικό μαθηματικό ή φυσικό περιεχόμενό τους!

Ακριβώς όπως στην §2 δείξαμε ότι αν $\vec{X}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^2$ και A 2×2 πίνακας και θέσομε $\vec{X}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\equiv A\vec{X}$, τότε έχομε τις ισοδυναμίες

$$AA^t = I \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2=x'^2+y'^2$$
$$AA^t = I,\ \det A=1 \;\Leftrightarrow\; A=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix},\quad a^2+b^2=1 \quad (3.9)$$

(βλ. (2.6), (2.6′), (2.4′) και Άσκηση 2.3) έτσι και εδώ έχομε τις αντίστοιχες ισοδυναμίες

$$A^t nA = n \;\Leftrightarrow\; x^2-c^2t^2=x'^2-c^2t'^2$$
$$A^t nA = n,\ \det A=1 \;\Leftrightarrow\; A=\begin{pmatrix}\gamma & \alpha\\ \alpha & \gamma\end{pmatrix},\quad \gamma^2-\alpha^2=1 \quad (3.9')$$

Όπως λοιπόν, λόγω της $a^2+b^2=1$ στην (3.9) μπορούμε να θέσομε a=συνφ, b=ημφ και να ερμηνεύσομε την φ σαν γωνία στροφής, έτσι ζητάμε αντίστοιχη παραμέτριση της $\gamma^2-\alpha^2=1$ στην (3.9′). Γεωμετρικά η $x^2+y^2=1$ παριστάνει μοναδιαία περιφέρεια, ενώ η $x^2-c^2t^2=1$ παριστάνει ισοσκελή υπερβολή στο επίπεδο (x, c t). Ζητάμε μία παραμέτρισή της ανάλογη της

$$x=\text{συν}t\ ,\qquad y=\text{ημ}t$$

του κύκλου. Κατά αναλογία με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συν, ημ που λέγονται και **κυκλικές**, ορίζομε τις υπερβολικές συναρτήσεις:

υπερβολικό συνημίτονο: $\cosh t = 1/2\ (e^t+e^{-t})$

υπερβολικό ημίτονο: $\sinh t = 1/2\ (e^t-e^{-t})$

που η βασική τους ιδιότητα είναι

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

κι έχουν πολλές ιδιότητες ανάλογες εκείνων των συν και ημ (απ' όπου και το όνομά τους).

Βάσει της (3.10) έχομε ότι η (3.4) είναι της μορφής

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}\cosh\varphi & \sinh\varphi\\ \sinh\varphi & \cosh\varphi\end{pmatrix} \qquad (3.4')$$

που είναι εξαιρετικά όμοια με την (2.3). Αν ορίσομε την υπερβολική εφαπτομένη: tanhφ=sinhφ/coshφ τότε η μορφή των αποτελεσμάτων τούτης της παραγράφου απλουστεύεται κατά πολύ όπως δείχνει η

Άσκηση 3.7: (α) Από τις (3.4′), (3.6′) δείξτε ότι

$$v/c = b = \tanh\varphi \qquad (3.11)$$

(β) δείξτε ότι λόγω της (3.4′), η (3.7) γίνεται

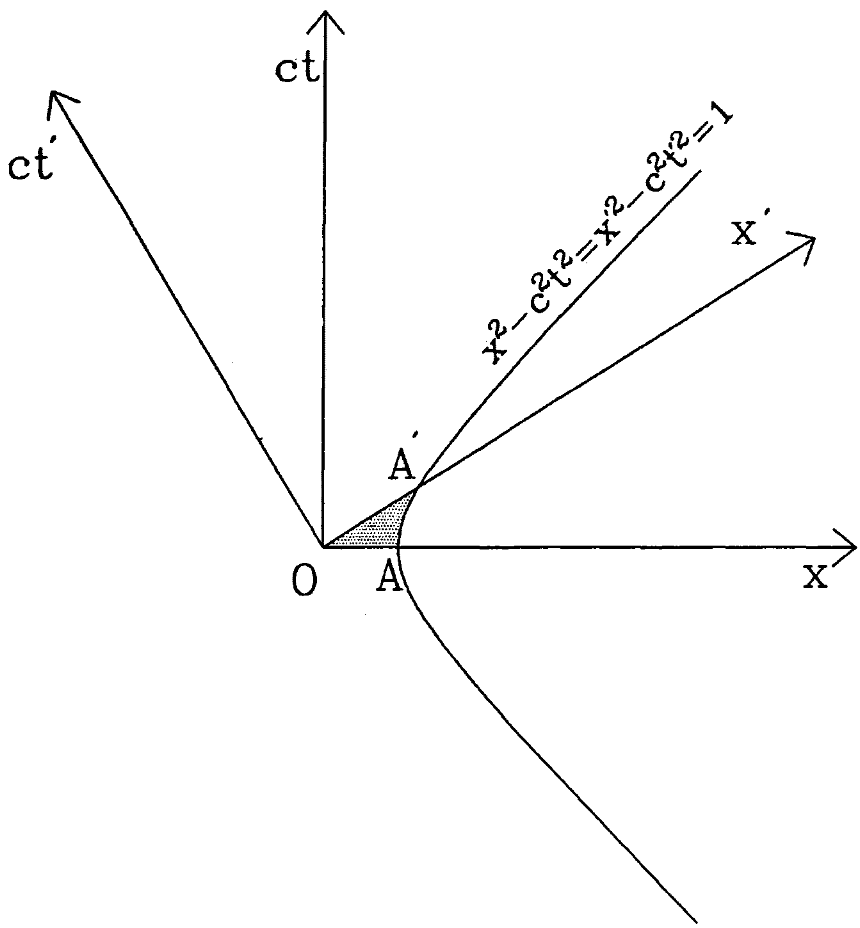
$$A_{\varphi}A_{\varphi'} = A_{(\varphi+\varphi')}, \qquad A_{\varphi}^{-1} = A_{-\varphi} \qquad (3.7')$$

(γ) η (3.8) ισοδυναμεί λόγω της (3.11) με την

$$\tanh\varphi'' = \tanh(\varphi+\varphi') \qquad (3.12)$$

(δ) αν ο μετασχηματισμός $(x, ct) \to (x', ct')$ παρασταθεί όπως στο σχήμα 3, τότε να δειχθεί ότι φ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου ΟΑΑ′ .

Σχήμα 3



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Θα αποδείξομε το ακόλουθο θεώρημα που αναφέρθηκε στην §2 και έπαιξε σημαντικό ρόλο στην §3.

Θεώρημα: Αν f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 1-1, επί, συνεχής, που απεικονίζει ευθείες σε ευθείες $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\vec{b} \in \mathbf{R}^2$, A 2×2 αντιστρέψιμος πίνακας, ώστε

$$f(\vec{X}) = A\vec{X} + \vec{b} \quad \forall\ \vec{X} \in \mathbf{R}^2$$

Σχόλιο: Επειδή προϋποτίθεται η έννοια της συνέχειας στον $\mathbf{R}^2$, η απόδειξη δεν μπορεί να διδαχθεί λεπτομερειακά στο Λύκειο, αν και γίνεται εύκολα αποδεκτή ως εύλογη γιατί η συνέχεια χρησιμοποιείται **μόνο** σε ένα σημείο και με τρόπο που άμεσα αντιστοιχεί στην συνέχεια στο **R**.

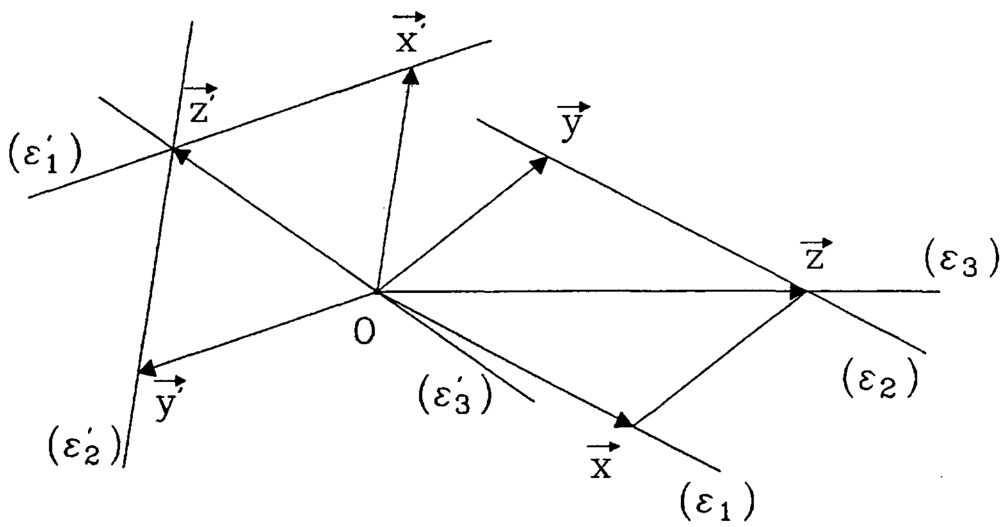
Απόδειξη: $\Leftarrow$ εύκολο

$\Rightarrow$ (α) Αν $f(\vec{0}) = \vec{b}$ τότε για την $g(\vec{X}) \equiv f(\vec{X}) - \vec{b}$ έχομε $g(\vec{0}) = \vec{0}$ και g είναι 1-1, επί και συνεχής.

(β) Εύκολα δείχνουμε με την εις άτοπον απαγωγή ότι επειδή g είναι 1-1, απεικονίζει παράλληλες ευθείες σε παράλληλες ευθείες (γιατί;), οπότε και παραλληλόγραμμα σε παραλληλόγραμμα (γιατί;)

(γ) Έστω $\vec{X}$, $\vec{Y} \in \mathbf{R}^2$, $\vec{Z} = \vec{X} + \vec{Y}$ και $\vec{X}' \equiv g(\vec{X})$, $\vec{Y}' \equiv g(\vec{Y}')$ $\vec{Z}' \equiv \vec{X}' + \vec{Y}'$ τότε (βλ. σχήμα 4) είναι σαφές ότι το παραλληλόγραμμο με πλευρές $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ απεικονίζεται βάσει του (β), σε παραλληλόγραμμο με πλευρές $\overrightarrow{OX'}$, $\overrightarrow{OY'}$. Συνεπώς η διαγώνιός του είναι το $\overrightarrow{OZ'}$. Από την άλλη, επειδή οι ευθείες (ε_1), (ε_2), (ε_3) διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι προφανές ότι και οι εικόνες τους (ε_1'), (ε_2'), (ε_3') διέρχονται από το ίδιο σημείο, συνεπώς η (ε_3') είναι η διαγώνιος του παραλληλογράμμου ΟΧ′Υ′Ζ′, άρα $g(\vec{Z}) = \vec{Z}'$ δηλαδή

$$g(\vec{X} + \vec{Y}) = g(\vec{X}) + g(\vec{Y})\ .$$



Σχήμα 4

(δ) Από την πιο πάνω σχέση δείχνομε εύκολα κατά σειρά (άσκηση)

$g(\vec{X}) = -g(-\vec{X})$

$g(m\vec{X}) = m\,g(\vec{X}) \quad m \in Z$

$g(\lambda\vec{X}) = \lambda\,g(\vec{X}) \quad \lambda \in Q$

συνεπώς επειδή $\forall\ a \in \mathbf{R}$ υπάρχει ακολουθία $a_n \in Q$ με $a_n \to a$, έχομε **λόγω της συνέχειας** της g:

$$g(a\vec{X}) = \lim g(a_n\vec{X}) = \lim a_n\,g(\vec{X}) = a\ g(\vec{X})$$

Δείξαμε λοιπόν για την g ότι είναι **γραμμική,** δηλαδή

$$\forall\ \lambda,\mu \in \mathbf{R},\ \vec{X},\vec{Y} \in \mathbf{R}^2 \qquad g(\lambda\vec{X} + \mu\vec{Y}) = \lambda\,g(\vec{X}) + \mu\,g(\vec{Y})$$

Άρα κατά τα γνωστά ορίζεται αμφιμονοσήμαντα πίνακας A με $g(\vec{X}) = A\vec{X}$, που είναι αντιστρέψιμος, αφού g είναι 1-1 ο.ε.δ.

Σχόλιο: Γιατί η πιο πάνω απόδειξη δεν γενικεύεται στον $\mathbf{R}^3$**;** Τι επί πλέον υποθέσεις χρειάζονται;

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

Θα δείξομε την ισοδυναμία των (3.2), (3.2′). Προφανώς (3.2′) $\Rightarrow$ (3.2).

Άσκηση Α.1: Βάσει της (3.1) με $x_0 = t_0 = 0$ γράψτε το $x'^2 - c^2t'^2$ ως πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς x, t. Δίνοντας κατάλληλες τιμές στα x, t ώστε $x^2 - c^2t^2 = 0$ δείξτε ότι

$$x'^2 - c^2t'^2 = k(x^2 - c^2t^2) \quad \forall\, x,t \in \mathbf{R} \qquad (\text{A.1})$$

και k ανεξάρτητο των x, t.

Αν $\beta = v/c$, v η ταχύτητα του Σ′ ως προς Σ, τότε εν γένει k=k (β). Επειδή όμως $(x',t') \to (x,t)$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός (βλ. (ii) στην §3) έχομε την

Άσκηση Α. 2: Δείξτε ότι

$$k(\beta)\ \ k(-\beta) = 1 \qquad (\text{A.2})$$

Παρακάτω θα δείξομε ότι με μία επί πλέον φυσιολογική υπόθεση k (β) = k (-β) οπότε από (Α.2) k (β)= ± 1 και το -1 απορρίπτεται διότι για $\beta \to 0$ θέλομε $(x',t') \to (x,t)$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Πράγματι έχομε την

Άσκηση Α. 3: (α) Αν αντί της (3.2) έχομε την (Α.1), δείξτε ότι

$$A^{-1} = \left(k(\beta)\right)^{-1} nA^t n$$

και βάσει αυτού ότι για τον Α στην (3.1) με $x_0 = t_0 = 0$ έχομε

$$k(\beta) = \det A$$

$$a_{11} = a_{22} = \gamma, \quad a_{21} = a_{12} = \alpha$$

οπότε η (3.4) αντικαθίσταται από την

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \gamma^2 - \alpha^2 = k$$

α, γ, k συναρτήσεις του β.

(β) Το επιχείρημα που στην §3 οδήγησε στην α=γβ εξακολουθεί να ισχύει. Άρα δείξτε τελικά ότι

$$A_\beta = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(\beta) = \sqrt{\frac{k(\beta)}{1-\beta^2}} \qquad (\text{A.3})$$

Για να δείξομε τώρα ότι k (β) = k (-β) εργαζόμαστε ως εξής: Έστω δύο σημεία **ακίνητα** στο Σ′ που απέχουν απόσταση d (π.χ. τα άκρα ενός κανόνα) την χρονική στιγμή t′. Έστω (x_1,t_1), (x_2,t_2) οι συντεταγμένες τους στο Σ. Βάσει της (Α.3) έχομε (άσκηση)

$$d = (x_1 - x_2)\, k(\beta)/\gamma(\beta)$$

Ομοίως, έστω δύο σημεία ακίνητα στο Σ που απέχουν πάλι d, και (x'_1, t'_1), (x'_2, t'_2) οι συντεταγμένες τους στο Σ'. Επειδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός Σ' → Σ χαρακτηρίζεται από την παράμετρο -β (βλ. (ii) §3) έχομε

$$d = (x'_1 - x'_2)\, k(-\beta)/\gamma(-\beta)$$

Τώρα είναι εύλογο να **υποθέσομε** ότι δύο σημεία ακίνητα μεταξύ τους έχουν μία απόσταση ως προς κινούμενους άξονες **ανεξάρτητη** από το αν αυτοί κινούνται προς την μία ή την άλλη κατεύθυνση. Δηλαδή, $x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$, άρα $k(\beta)/\gamma(\beta) = k(-\beta)/\gamma(-\beta)$ οπότε από την (Α. 3) έχομε $k(\beta) = k(-\beta)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) Aharoni J., "The special theory of relativity", Oxford University Press (1965)
2) Baird L.C., "The linearity of the Lorentz transformation", American Journal of Physics, vol. 44 No2 (1976), σελ. 167.
3) Einstein A., "The principle of relativity", Dover (1952).
4) Loria G., "Ιστορία των Μαθηματικών", τόμος 3, Παπαζήσης (1974).
5) Μαθηματικά Ι, γ Λυκείου: Άλγεβρα ΟΕΔΒ (1986).
6) Rindler W., "Special raletivtiy", Oliver and Boyd (1960).
7) Rindler W., "Essential relativity", Springer (1977).
8) Τζανάκης Κ., Κυρίτσης Κ., "On special relativity's second postulate", Annales de la Fondation L. de Broglie, vol. 9 No 4, (1984), σελ. 343.
9) Τζανάκης Κ., "Μπορούν να διδαχθούν αφηρημένες αλγεβρικές δομές στο Λύκειο;", (έχει υποβληθεί προς δημοσίευση στον "Ευκλείδη Γ").
10) Τζανάκης Κ., "Μία γενετική προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών και της Φυσικής", Πρακτικά Συνεδρίου για την "Διδακτική αξιοποίηση της ιστορίας των Επιστημών", Θεσσαλονίκη 1991.
11) Wills A.P., "Vector analysis with an introduction to tensor analysis", Dover (1958).

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΜΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

Θ.Μ. ΠΑΠΑΖΟΓΛΟΥ

Περίληψη

Μελετούμε το πρόβλημα της μεγίστης απόδοσης μιας γραμμής μεταφοράς. Προσδιορίζονται οι συνθήκες για τη μεγίστη απόδοση και ευρίσκεται η αναλυτική έκφραση του μεγίστου βαθμού απόδοσης. Θεμελιώνεται μια ενδιαφέρουσα φυσική ιδιότητα που σχετίζεται με τη συνθήκη της μεγίστης απόδοσης. Αριθμητικές εφαρμογές αποσαφηνίζουν τα αποτελέσματα.

On the Maximum Efficiency of a Transmission Line

T.M. PAPAZOGLOU

Abstract

The problem of the maximum efficiency of a transmission line is studied. The conditions for the maximum efficiency are determined, and an analytic expression for the maximum efficiency is derived. An interesting physical property related to the maximum efficiency is established. Numerical applications illustrate the results.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

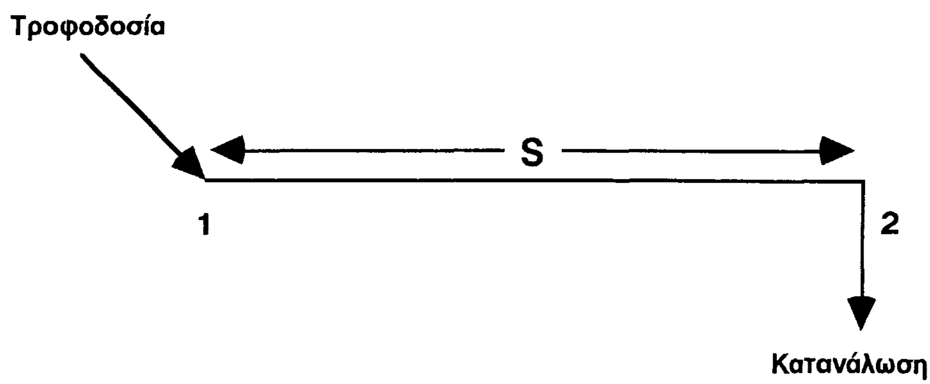
V	:	Φυσική τάση
I	:	Ένταση ρεύματος
A, B, C	:	Σταθερές διθύρου
s	:	Μήκος γραμμής
γ	:	Σταθερά διάδοσης, γραμμής
Z_w	:	Χαρακτηριστική αντίσταση, γραμμής
Z_o	:	Διαμήκης σύνθετη αντίσταση ανά μονάδα μήκους γραμμής
Y_o	:	Εγκάρσια σύνθετη αγωγιμότητα ανά μονάδα μήκους γραμμής
n	:	Βαθμός απόδοσης μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας
$n_{\mu\epsilon\gamma}$	:	Μέγιστος βαθμός απόδοσης
ζ	:	Μέτρο συχαρακτηριστικής αντίστασης, γραμμής
$\sigma\upsilon\nu\varphi$	:	Συντελεστής ισχύος
θ	:	Όρισμα συχαρακτηριστικής αντίστασης, γραμμής
Z_c	:	Συχαρακτηριστική αντίσταση, γραμμής
R_o	:	Διαμήκης ωμική αντίσταση ανά μονάδα μήκους γραμμής
L_o	:	Διαμήκης επαγωγή ανά μονάδα μήκους γραμμής
C_o	:	Εγκάρσια χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους γραμμής.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πρόσφατα ο γράφων δημοσίευσε σε διεθνές περιοδικό τη θεμελίωση του μεγίστου βαθμού απόδοσης των γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας [1]. Για την ανάλυση του προβλήματος χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις διθύρου μιας γραμμής μεταφοράς, γραμμένες έτσι, ώστε να είναι δυνατή η επίλυση από αμφότερες τις κατευθύνσεις:

$$\begin{aligned} V_n &= AV_m + (m-n)BI_m \\ I_n &= (m-n)CV_m + AI_m \end{aligned} \qquad (1)$$

m και n είναι δείκτες που αντιστοιχούν στα άκρα της γραμμής του σχήματος 1:



Σχήμα 1: Η γραμμή μεταφοράς.

και A, B, C είναι οι σταθερές διθύρου:

$$\begin{aligned} A &= \cosh(s\gamma) \\ B &= Z_w \sinh(s\gamma) \\ C &= (1/Z_w)\sinh(s\gamma) \end{aligned} \qquad (2)$$

όπου s το μήκος της γραμμής και

$$\begin{aligned} Z_w &= \left(Z_o/Y_o\right)^{1/2} \\ \gamma &= (Z_oY_o)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \qquad (3)$$

είναι η χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής και η σταθερά διάδοσης αντίστοιχα.
Ορίζομε το βαθμό απόδοσης της μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας, ως

$$n = \frac{Re(V_2 I_2^*)}{Re(V_1 I_1^*)} \qquad (4)$$

Ο βαθμός απόδοσης n μεταβάλλεται από 0 (που αντιστοιχεί στη λειτουργία της γραμμής χωρίς ενεργό φορτίο) μέχρι μια μεγίστη τιμή $n_{\mu\varepsilon\gamma}$, η οποία εξαρτάται από τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της γραμμής μεταφοράς (ηλεκτρικές παράμετροι, μήκος).

2. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΒΑΘΜΟΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Για να επιτυγχάνεται ο μέγιστος βαθμός απόδοσης πρέπει να ικανοποιούνται ορισμένες συνθήκες. Για τον προσδιορισμό των συνθηκών αυτών παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε συγκεκριμένη κατάσταση φόρτισης μιας γραμμής μεταφοράς μπορεί να παρασταθεί με τρεις πραγματικές μεταβλητές.
Επιλέγουμε ως μεταβλητές τα μέτρα: τάσης $|V|$ και έντασης $|I|$ καθώς και το συντελεστή ισχύος συνφ.
Αποδείξαμε πρόσφατα [1] ότι το μέγιστο του βαθμού απόδοσης επιτυγχάνεται όταν:

$$|V_m / I_m| = \left[Re(BA^*)/Re(AC^*)\right]^{\frac{1}{2}} = \zeta \qquad (5)$$

καθώς και:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_m = \left\{1 - \frac{Im^2(BC^*)}{4\,Re(AC^*)\,Re(BA^*)}\right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma\upsilon\nu\theta \qquad (6)$$

ως επίσης:

$$\eta\mu\varphi_m = \frac{(-1)^{m+1}\,Im(BC^*)}{2\left[Re(AC^*)\,Re(BA^*)\right]^{\frac{1}{2}}} = \eta\mu\theta \qquad (7)$$

και είναι

$$n_{\mu\varepsilon\gamma} = |A|^2 + Re(BC^*) - \left[4\,Re(AC^*)Re(BA^*) - Im^2(BC^*)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (8)$$

3. ΣΥΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Παρατηρούμε ότι οι προηγούμενες συνθήκες (5), (6) και (7) ορίζουν δύο νέες ποσότητες: τη ζ (σε Ω) και τη γωνία θ που αντιστοιχούν προς μία σύνθετη αντίσταση:

$$Z_c = \zeta \exp\,(i\theta) \qquad (9)$$

η οποία, όπως και η χαρακτηριστική αντίσταση Z_w, χαρακτηρίζει και αυτή τη γραμμή μεταφοράς και την οποία θα ονομάσουμε συχαρακτηριστική αντίσταση. Όπως βλέπουμε, από τις προηγούμενες εξισώσεις ορισμού της, η συχαρακτηριστική αντίσταση Z_c μετασχηματίζεται στην συζυγή της Z_c^* (εξ ου και το όνομα) όταν μεταφερθεί, δια της γραμμής μεταφοράς, από την άφιξη στην αναχώρηση της γραμμής. Τούτο παρατηρείται και αντιστρόφως.

Το τελευταίο αυτό γεγονός επιβεβαιώνεται εναλλακτικά και από το ότι η Z_c ικανοποιεί την εξίσωση:

$$Z_c^* = (AZ_c + B)/(CZ_c + A) \qquad (10)$$

4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ας θεωρήσουμε μία τριφασική γραμμή μεταφοράς 400 kV, 50 Hz, 500 km μήκους με :

$Z_o = 0{,}03 + j0{,}314\ \ \mathrm{Ohm/km}, \quad Y_o = 0{,}1 + j3{,}5\ \ \mu\mathrm{S/km}.$

Για τη γραμμή αυτή υπολογίζομε τη χαρακτηριστική αντίσταση

$Z_w = 300{,}14\ \ \mathrm{Ohm}/\underline{-1{,}91^\circ}$, τη συχαρακτηριστική αντίσταση:

$Z_c = 483{,}95\ \ \mathrm{Ohm}/\underline{16{,}74^\circ}$ κα το $n_{\mu\epsilon\gamma}$=94,6%.

Ας υποτεθεί, για παράδειγμα, ότι η γραμμή αυτή μεταφέρει 400 A σε ένα φορτίο υπό τάση 400 kV και με συντελεστή ισχύος στο φορτίο 0,85 επαγωγικό, τότε ο βαθμός απόδοσης της συγκεκριμένης μεταφοράς βρίσκεται ότι είναι n=94,3% κοντά στο μέγιστο.

Στη συνέχεια, ας θεωρήσουμε μία τριφασική γραμμή 220 kV, 60 Hz, 500 km μήκους, με [2] : $R_o = 0{,}074\ \ \mathrm{Ohm/km}$, $L_o = 1{,}212\ \ \mathrm{mH/km}$, $C_o = 9{,}577\ \ \mathrm{nF/km}$.

Για τη γραμμή αυτή έχομε:
χαρακτηριστική αντίσταση $Z_w = 358{,}05\ \mathrm{Ohm}/\underline{-4{,}6^\circ}$,
συχαρακτηριστική αντίσταση $Z_c = 934{,}59\ \mathrm{Ohm}/\underline{57{,}14^\circ}$ και $n_{μεγ}=96{,}3\%$.

Ας υποθέσουμε τέλος ότι, για παράδειγμα, η γραμμή αυτή μεταφέρει 90 + j 30MW + Mvar στο φορτίο υπό τάση 220 kV, τότε ο βαθμός απόδοσης της συγκεκριμένης μεταφοράς είναι μόνο n=93,6%, που είναι στην περίπτωση αυτή σημαντικά μικρότερος του μεγίστου δυνατού.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Θεμελιώθηκαν οι συνθήκες επίτευξης μεγίστου βαθμού απόδοσης των γραμμών μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Δόθηκε η αναλυτική έκφραση του μεγίστου βαθμού απόδοσης. Έγινε η εισαγωγή της έννοιας της συχαρακτηριστικής αντίστασης της γραμμής, η οποία αντιστοιχεί στις συνθήκες μεγίστης απόδοσης μεταφοράς και έχει μία ενδιαφέρουσα ιδιότητα, να μεταφέρεται από την άφιξη της γραμμής στην αναχώρηση ως η συζυγής της. Οι αριθμητικές εφαρμογές συγκεκριμενοποιούν τα αποτελέσματα.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Papazoglou T.M., "On the maximum efficiency of a long transmission line ". Electrical Power and Energy Systems, EPES Vol. 12, No 1 (Jan. 1990), pp 69--70.
2. Elgerd O.I., "Electric energy systems theory". McGraw - Hill, 1982, pp 205-207

Δρ. Θ.Μ. Παπάζογλου
Καθηγητής ΤΕΙ
Τ.Θ. 1427
711 10 Ηράκλειο
Κρήτη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΙΧΑΛΗ ΚΤΕΝΙΑΔΑΚΗ

1. Δίδεται ο αριθμός $\nu\underbrace{99\ldots9}_{\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha}$ όπου το ψηφίο ν είναι φυσικός.

Να αποδειχθεί ότι το γινόμενόν του με ένα άλλον φυσικό αριθμό λ ισούται με $\beta\underbrace{99\ldots9}_{\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha}-(\lambda-1)$, όπου ψηφίο $\beta=\lambda\nu+(\lambda-1)$.

Απόδειξη

$\nu\underbrace{99\ldots9}_{\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha}\lambda=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\lambda\cdot9\cdot10^{2}+\lambda\cdot9\cdot10^{1}+\lambda\cdot9=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\lambda\cdot9\cdot10^{2}+\lambda\cdot9\cdot10^{1}+\lambda\cdot9+(\lambda-1)-(\lambda-1)=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\lambda\cdot9\cdot10^{2}+\lambda\cdot9\cdot10^{1}+(\lambda-1)\cdot10+9-(\lambda-1)=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\lambda\cdot9\cdot10^{2}+\left[\lambda\cdot9+(\lambda-1)\right]\cdot10^{1}+9-(\lambda-1)=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\lambda\cdot9\cdot10^{2}+\left[(\lambda-1)\cdot10+9\right]\cdot10^{1}+9-(\lambda-1)=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\lambda\cdot9\cdot10^{2}+(\lambda-1)\cdot10^{2}+9\cdot10^{1}+9-(\lambda-1)=$

$\lambda\cdot\nu\cdot10^{\kappa}+\lambda\cdot9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+\left[\lambda\cdot9+(\lambda-1)\right]\cdot10^{2}+9\cdot10^{1}+9-(\lambda-1)=$

....

$\left[\lambda\cdot\nu+(\lambda-1)\right]\cdot10^{\kappa}+9\cdot10^{\kappa-1}+\ldots+9\cdot10^{2}+9\cdot10^{1}+9-(\lambda-1)$

που είναι ο αριθμός $\beta\underbrace{99\ldots9}_{\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha}-(\lambda-1)$, όπου ψηφίο $\beta=\lambda\nu+(\lambda-1)$.

2. Δείξτε ότι: $101^{202}>9999^{101}$

Απόδειξη

$101^{202}=(101^{2})^{101}>(99.101)^{101}$.

Αλλά $(99.101)^{101}=\left[(100-1)\cdot(100+1)\right]^{101}=(100^{2}-1)^{101}=9999^{101}$.

Συνεπώς: $101^{202}>9999^{101}$.

— — — — — — — —

Σ.τ.Ε.: Ο Μιχάλης Κτενιαδάκης είναι Μηχανολόγος - Ηλεκτρολόγος μηχανικός του Ε.Μ.Π. και διευθυντής της ΣΤΕΦ, ΤΕΙ Ηρακλείου.

3. (Γενίκευση της άσκησης 2).

Αν $\alpha = 10^{\kappa} + 1$, δείξτε ότι: $\alpha^{2\alpha} > (\underbrace{999\ldots9}_{2\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha})^{\alpha}$.

Απόδειξη

$$\alpha^{2\alpha} = (10^{\kappa}+1)^{2(10^{\kappa}+1)} = \left[(10^{\kappa}+1)^2\right]^{10^{\kappa}+1} > \left[(10^{\kappa}-1)\cdot(10^{\kappa}+1)\right]^{10^{\kappa}+1}.$$

Αλλά $\left[(10^{\kappa}-1)\cdot(10^{\kappa}+1)\right]^{10^{\kappa}+1} = (10^{2\kappa}-1)^{10^{\kappa}+1} = (\underbrace{999\ldots9}_{2\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha})^{10^{\kappa}+1}$.

Συνεπώς: $\alpha^{2\alpha} > (\underbrace{999\ldots9}_{2\kappa\ 9\acute{\alpha}\rho\iota\alpha})^{\alpha}$.

4. Αν ν φυσικός, δείξτε ότι:

i) $2^{3^{\nu}} - 1 = \pi o\lambda.\ 7$

ii) $2^{3^{\nu}} + 1 = \pi o\lambda.\ 3$

Απόδειξη

i) $3^{\nu} = 3, 9, 27, \ldots = 3k$

Τότε $2^{3^{\nu}} - 1 = 2^{3k} - 1^k = (2^3-1)\,(2^{3(k-1)} + 2^{3(k-2)} + \ldots + 1) =$

$= (8-1).$ (Ακέραιος)=πολ. 7

i) $3^{\nu} = 3, 9, 27, \ldots = 3k$, όπου k=1,3,9, ... (περιττός).

Τότε $2^{3^{\nu}} + 1 = 2^{3k} + 1^k = (2^3+1)\,(2^{3(k-1)} - 2^{3(k-2)} + \ldots + 1) =$

$= (8+1).$ (Ακέραιος)$= 3\cdot 3$ (Ακέραιος)=πολ. 3

5. Αν ν φυσικός και $\nu \geq 3$, δείξτε ότι: $2^{2^{\nu}} - 1 = \pi o\lambda.\ 17$

Απόδειξη

$2^{\nu} = 8, 16, 32, \ldots = 4k$, όπου k=2,4,8, ... (άρτιος).

Τότε $2^{2^{\nu}} - 1 = 2^{4k} - 1^k = (2^4+1)\,(2^{4(k-1)} - 2^{4(k-2)} + \ldots - 1) =$

$= (16+1).$ (Ακέραιος)=πολ. 17

6. Αν ν φυσικός και $\nu \geq 3$ και μ περιττός, δείξτε ότι:

i) $(2^{\mu})^{2^{\nu}} - 1 = \pi o\lambda.\ 17$

ii) $(3^{\mu})^{2^{\nu}} - 1 = \pi o\lambda.\ 41$

Απόδειξη

i) $2^{\nu} = 8,16,32,... = 4k$, όπου k=2,4,8, ... (άρτιος).

Τότε $(2^{\mu})^{2^{\nu}} - 1 = (2^{\mu})^{4k} - 1^{k} = (2^{4\mu})^{k} - 1^{k} =$ {βλ. άσκηση 5}

$= (2^{4\mu} + 1)$. (Ακέραιος Α) = {και αφού μ περιττός}

$= (2^{4} + 1) \cdot (2^{4(\mu-1)} - 2^{4(\mu-2)} + ... + 1)$. (Ακέραιος Α) =

$= (16 + 1)$. (Ακέραιος Β). (Ακέραιος Α)=πολ. 17

ii) Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και καταλήγουμε:

$(3^{\mu})^{2^{\nu}} - 1 = (3^{4} + 1)$. (Ακέραιος Δ) $\cdot$ (Ακέραιος Γ) =

$= 2 \cdot 41$ $\cdot$ (Ακέραιος Δ) $\cdot$ (Ακέραιος Γ) = πολ. 41

7. Ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει $A \le 90^{\circ}$ και ΑΒ=α, ΒΓ=β (όπου α>β). Θεωρούμε τις προβολές Ε και Ζ των απέναντι κορυφών Α και Γ αντίστοιχα πάνω στη διαγώνιο ΒΔ, καθώς και τα μέσα Μ και Ν των πλευρών ΑΔ και ΓΔ.

i) Να αποδειχθεί ότι οι φορείς των ευθ. τμημάτων ΖΝ και ΜΕ τέμνονται υπό γωνία Α.

ii) Να αποδειχθεί ότι οι παραπάνω φορείς θα τέμνονται επί της ΓΔ, αν και μόνο αν: $2\sigma\upsilon\nu A = \frac{3}{\lambda} - \lambda$, όπου $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$

Απόδειξη

i) Έστω ότι οι ΖΝ και ΜΕ τέμνονται υπό γωνία $\hat{K}$.

Επειδή η ΕΜ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΔ, θα είναι:

$M\hat{E}\Delta = Z\hat{E}K = \hat{\Delta}_1$

και για παρόμοιο λόγο από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ, θα είναι:

$E\hat{Z}K = \hat{\Delta}_2$ και

$\hat{K} = 180^{\circ} - (Z\hat{E}K + E\hat{Z}K) = 180^{\circ} - (\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2) = 180^{\circ} - \hat{\Delta} = \hat{A}$.

ii) α) Έστω ότι οι ΖΝ και ΜΕ τέμνονται επί της ΓΔ, δηλαδή στο Ν. Έχουμε προφανώς: $MN \parallel = \frac{A\Gamma}{2}$ και επομένως το Ε είναι μέσο της ΟΔ.

Άρα το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισοσκελές (αφού η ΑΕ μεσοκάθετος της ΟΔ).

Έτσι: ΑΔ=ΑΟ=ΓΟ=ΒΓ, οπότε και το τρίγωνο ΓΟΒ είναι ισοσκελές.

Άρα: ΒΖ=ΖΟ=ΟΕ=ΕΔ. (1)

Επίσης $ME = \frac{AO}{2}$ και $NE = \frac{ΓO}{2}$, οπότε $ME = NE = \frac{\beta}{2}$. (2)

Επειδή ΖΝ είναι διάμεσος στο ορθ. τρίγωνο ΓΖΔ, θα είναι: $ZN = \frac{\alpha}{2}$. (3)

Από το τρίγωνο ΖΝΕ, παίρνουμε:

$$ZE^2 = ZN^2 + NE^2 - 2 \cdot ZN \cdot NE \cdot συνA \quad \Rightarrow$$

$$2συνA = \frac{ZN^2 + NE^2 - ZE^2}{ZN \cdot NE} = \frac{ZN}{NE} + \frac{NE}{ZN} - \frac{ZE^2}{ZN \cdot NE} \quad \Rightarrow \quad \{\text{λόγω των (2) και (3)}\}$$

$$2συνA = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{4 \cdot ZE^2}{\alpha\beta}. \qquad (4)$$

Από τα ορθ. τρίγωνα ΖΓΒ και ΖΓΔ, λόγω και της (1), έχουμε διαδοχικά:

$$BZ^2 = \beta^2 - ΓZ^2 \quad \Rightarrow \quad BZ^2 = \beta^2 - (\alpha^2 - ZΔ^2) \quad \Rightarrow$$

$$BZ^2 = \beta^2 - \alpha^2 + (3 \cdot BZ)^2 \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot BZ^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad \Rightarrow$$

$$8 \cdot \left(\frac{ZE}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \beta^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot ZE^2 = \alpha^2 - \beta^2 \qquad (5)$$

Η (4), λόγω της (5), δίδει τελικά:

$$2συνA = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - \frac{2\alpha^2 - 2\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 2 \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 2 \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 3 \cdot \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{\lambda} - \lambda.$$

ii) β) Έστω ότι $2συνA = \frac{3}{\lambda} - \lambda = 3 \cdot \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$. Η ΜΕ τέμνει την ΖΝ στο Κ. Θα αποδειχθεί ότι το Κ ταυτίζεται με το μέσο Ν της ΓΔ. Προφανώς ισχύουν πάλι:

$\hat{K} = \hat{A}$

ΒΖ=ΕΔ, ΓΖ=ΑΕ και ΖΟ=ΟΕ.

Από το τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$BΔ^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta συνA \quad \Rightarrow \quad (\text{λόγω της υπόθεσης})$$

$$BΔ^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta \cdot \left(3 \cdot \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \Rightarrow \quad BΔ^2 = 2 \cdot (\alpha^2 - \beta^2) \qquad (6)$$

Από το τρίγωνο ΑΕΒ έχουμε:

$$BE^2 = AB^2 - AE^2 \quad \Rightarrow \quad (BZ + ZE)^2 = \alpha^2 - AE^2 \qquad (7)$$

Από το τρίγωνο ΒΓΖ έχουμε:

$$BZ^2 = BΓ^2 - ΓZ^2 \quad \Rightarrow \quad BZ^2 = \beta^2 - ΓZ^2 \qquad (8)$$

Με αφαίρεση των (7) και (8), και αφού ΓΖ=ΑΕ, παίρνουμε:

$(BZ + ZE)^2 - BZ^2 = \alpha^2 - \beta^2$, η οποία λόγω της (6) γίνεται:

$$(BZ+ZE)^2 - BZ^2 = \frac{B\Delta^2}{2} \Rightarrow (BZ+ZE)^2 - BZ^2 = \frac{(2\cdot BZ+ZE)^2}{2} \Rightarrow$$

$$BZ^2 + ZE^2 + 2\cdot BZ\cdot ZE - BZ^2 = 2\cdot BZ^2 + \frac{ZE^2}{2} + 2\cdot BZ\cdot ZE \Rightarrow$$

$$2BZ^2 = \frac{ZE^2}{2} \Rightarrow BZ = \frac{ZE}{2}.$$

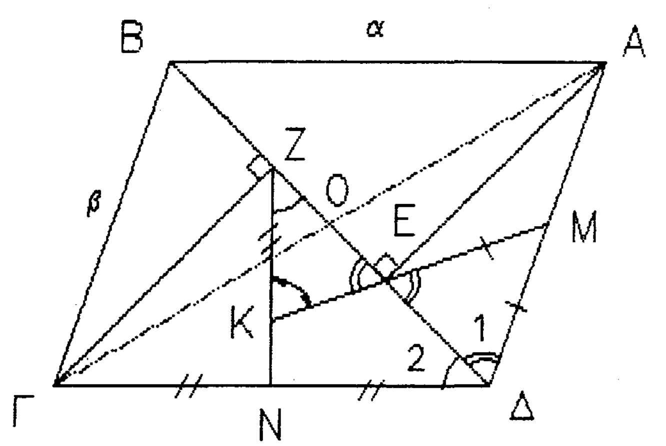
Η τελευταία ισότητα, συνδυαζόμενη με τις αρχικές, δίδει:

BZ=ZO=OE=EΔ και επομένως το E είναι μέσον της OΔ.

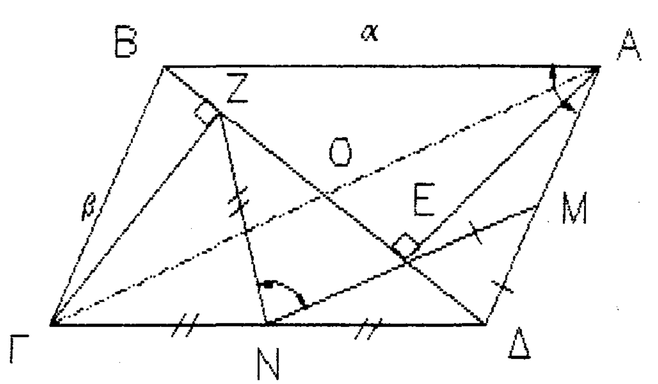
Συνεπώς $ME \parallel AO$, που σημαίνει $MK \parallel A\Gamma$. Αλλά και $MN \parallel A\Gamma$ από την υπόθεση.

Άρα $K \equiv N$ (επί της ΓΔ).

Σχήματα Άσκησης

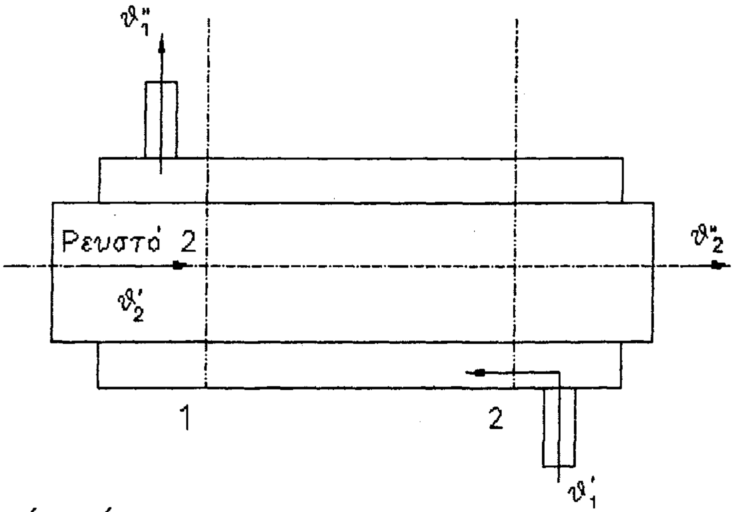


Σχ. i

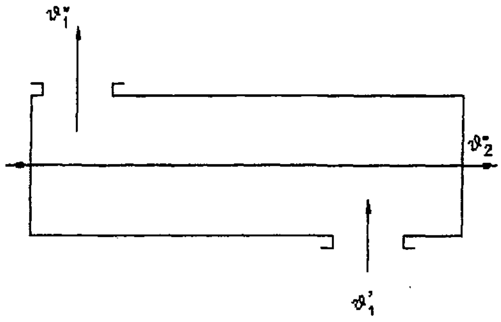


Σχ. ii

Οι **εναλλάκτες θερμότητας** είναι συσκευές στις οποίες γίνεται ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ δύο ρευστών, δηλαδή θέρμανση του ενός και ψύξη του άλλου (ή αλλαγή φάσης του ενός και ψύξη ή θέρμανση του άλλου).
Μια ειδική κατηγορία εναλλακτών θερμότητας (κλασικού τύπου) είναι οι **εναλλάκτες αντιρροής**, όπου τα δύο ρευστά ρέουν παράλληλα αλλά με αντίθετες διευθύνσεις. (Βλέπε ΣΧΗΜΑ)



Σχηματική παράσταση



Συμβολισμός

Εναλλάκτης αντιρροής

Βασικά τεχνικά - κατασκευαστικά στοιχεία ενός εναλλάκτη είναι:

K: Ο συνολικός συντελεστής μετάδοσης θερμότητας στον εναλλάκτη, που χαρακτηρίζει τα τοιχώματα συναλλαγής της θερμότητας και εξαρτάται τόσο από την κατασκευή τους όσο και από τις συνθήκες ροής των ρευστών.

F: Η συνολική επιφάνεια συναλλαγής της θερμότητας, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η συναλλαγή.

Αντίστοιχα, βασικά θερμικά χαρακτηριστικά του εναλλάκτη είναι:

Q: Η συνολικά συναλλασσόμενη θερμορροή στον εναλλάκτη, δηλαδή η θερμική ισχύς που μεταβιβάζεται από το ένα στο άλλο ρευστό.

m_1 και m_2: Οι παροχές μάζας των εργαζόμενων ρευστών.

c_1 και c_2: Οι ειδικές θερμότητες (υπό σταθερή πίεση) των ρευστών.

θ_1': Η θερμοκρασία εισόδου του ρευστού 1

θ_1'': Η θερμοκρασία εξόδου του ρευστού 1

θ_2': Η θερμοκρασία εισόδου του ρευστού 2

θ_2'': Η θερμοκρασία εξόδου του ρευστού 2

Σ' ένα δεδομένο εναλλάκτη αντιρροής, αν είναι γνωστές οι θερμοκρασίες εισόδου των δύο ρευστών, αποδεικνύεται ότι μπορεί να βρεθεί η θερμοκρασία εξόδου του ρευστού 2, από τη σχέση:

$$\theta_2'' - \theta_2' = (\theta_1' - \theta_2') \cdot \frac{1 - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}}{\frac{m_2c_2}{m_1c_1} - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}}$$

(Παρόμοιας μορφής σχέση δίνει τη θερμοκρασία εξόδου του ρευστού 1).

Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση που $m_1c_1 = m_2c_2 = mc$, είναι προφανές ότι η παραπάνω σχέση οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, αφού οι εκθέτες μηδενίζονται.

Για την εύρεση της έκφρασης της παράστασης

$$\frac{1 - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}}{\frac{m_2c_2}{m_1c_1} - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}}$$

στην περίπτωση που $m_1c_1 \to m_2c_2 = mc$, μπορούμε να εργαστούμε με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ Α – ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΑΝΟΝΑ DE L' HOSPITAL

Έστω $m_1c_1 = x$, $m_2c_2 = y$, οπότε:

$$\lim_{m_1c_1 \to m_2c_2} \frac{1 - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}}{\frac{m_2c_2}{m_1c_1} - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}} = \lim_{x \to y} \frac{1 - e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}}{\frac{y}{x} - e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}} =$$

$$= \lim_{x \to y} \frac{\left[1 - e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}\right]'}{\left[\frac{y}{x} - e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}\right]'} = \lim_{x \to y} \frac{-e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \cdot \left[KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right]'}{-\frac{y}{x^2} - e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \cdot \left[KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right]'} =$$

$$= \lim_{x \to y} \frac{-e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{KF}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} - e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{KF}{x^2}} = \lim_{x \to y} \frac{e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \cdot KF}{y + e^{KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)} \cdot KF} =$$

$$= \frac{KF}{y + KF} = \frac{1}{\frac{y}{KF} + 1} = \frac{1}{\frac{mc}{KF} + 1}.$$

Συνεπώς η σχέση που δίνει τη θερμοκρασία εξόδου του ρευστού 2 είναι σ' αυτή την περίπωση:

$$\theta_2'' - \theta_2' = (\theta_1' - \theta_2') \cdot \frac{1}{\frac{mc}{KF} + 1}.$$

ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ Β – ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ e^t

Είναι γνωστό ότι το e^t γράφεται, ως σειρά:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots$$

Έστω πάλι $m_1c_1 = x$, $m_2c_2 = y$

Έτσι, αφού παρατηρήσουμε ότι, στην παράστασή μας, ο εκθέτης του e: $t = KF\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$ γράφεται και $t = \frac{KF}{y}\cdot\left(1 - \frac{y}{x}\right)$, θα έχουμε:

$$\frac{1 - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}}{\frac{m_2c_2}{m_1c_1} - e^{KF\left(\frac{1}{m_2c_2} - \frac{1}{m_1c_1}\right)}} = \frac{1 - e^{\frac{KF}{y}\cdot\left(1 - \frac{y}{x}\right)}}{\frac{y}{x} - e^{\frac{KF}{y}\cdot\left(1 - \frac{y}{x}\right)}} =$$

$$= \frac{1 - \left\{1 + \frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right)\right]^2 + \ldots\right\}}{\frac{y}{x} - \left\{1 + \frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right)\right]^2 + \ldots\right\}} =$$

$$= \frac{-\frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right)\right]^2 - \ldots}{\frac{y}{x} - 1 - \frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{KF}{y}\left(1 - \frac{y}{x}\right)\right]^2 - \ldots} = \left\{\begin{array}{l}\text{διαιρώντας}\\ \text{και τους δύο}\\ \text{όρους με το}\\ 1 - \frac{y}{x}\end{array}\right\}$$

$$= \frac{-\frac{KF}{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{KF}{y}\right)^2\cdot\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \ldots}{-1 - \frac{KF}{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{KF}{y}\right)^2\cdot\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \ldots}$$

και για το όριο

$$\lim_{x\to y}\frac{-\dfrac{KF}{y}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{KF}{y}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{y}{x}\right)-\ldots}{-1-\dfrac{KF}{y}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{KF}{y}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{y}{x}\right)-\ldots}=\frac{\dfrac{KF}{y}}{1+\dfrac{KF}{y}}=$$

$$=\frac{KF}{y+KF}=\frac{1}{\dfrac{y}{KF}+1}=\frac{1}{\dfrac{mc}{KF}+1}$$ (όπως προηγουμένως).

ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BANACH

ΓΙΩΡΓΟΣ Ε. ΖΟΥΡΑΡΗΣ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Συχνά μας δίνεται μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών της οποίας οι όροι περιγράφονται από κάποιο αναδρομικό τύπο της μορφής $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)$ και ζητείται να προσδιορίσουμε την οριακή συμπεριφορά της για δοθέν α_1. Σ' αυτή την κατηγορία προβλημάτων – που ίσως είναι η πιο ενδιαφέρουσα στις ακολουθίες – η συνηθισμένη τακτική είναι να εντοπίζομε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες της ακολουθίας (όπως π.χ. μονοτονία, ύπαρξη άνω ή κάτω φράγματος) παρατηρώντας προσεκτικά τον αναδρομικό τύπο ή υπολογίζοντας μερικούς όρους της και έπειτα να επιβεβαιώνουμε την ισχύ αυτών των ιδιοτήτων με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Αναδρομικές ακολουθίες προκύπτουν συχνά από την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων για τον υπολογισμό προσεγγίσεων των ριζών μιας εξίσωσης $\Phi(x) = 0$. Συγκεκριμένα· το πρόβλημα $\Phi(x) = 0$ μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα $\psi(x) = x$ δηλαδή στην αναζήτηση των σταθερών σημείων μιας κατάλληλης συνάρτησης ψ. Στη συνέχεια μια αναδρομική ακολουθία παράγεται ως εξής: $x_{n+1} = \psi(x_n), \ \forall \ n \geq 0$ όπου το x_0 επιλέγεται κατάλληλα. Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach (Θ.Σ.Σ.) εξασφαλίζει τη σύγκλιση της $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, για τη συνάρτηση ψ και την αρχική τιμή x_0. Βέβαια το Θ.Σ.Σ. δεν καλύπτει τη γενικότητα που είναι σαφώς πλουσιότερη.

Σκοπός του παρόντος σημειώματος είναι να διατυπώσουμε και ν' αποδείξουμε το Θ.Σ.Σ. και στη συνέχεια να παρουσιάσουμε εφαρμογές του στη μελέτη της οριακής συμπεριφοράς αναδρομικών ακολουθιών.

Συμβολισμός: Σε ό,τι ακολουθεί, το $\mathbf{N}$ θα συμβολίζει το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίς το 0 και $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Επίσης λέγοντας κλειστό διάστημα στο $\mathbf{R}$ θα εννοούμε τα διαστήματα της μορφής: $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, +\infty)$, όπου α, β τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

Σ.τ.Ε.: Ο ΓΙΩΡΓΟΣ Ε. ΖΟΥΡΑΡΗΣ είναι μεταπτυχιακός φοιτητής στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Β. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BANACH.

Πριν από τη διατύπωση και την απόδειξη του θεωρήματος, θα δώσουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και βοηθητικές προτάσεις:

Ορισμός 1: Έστω συνάρτηση $f: D \to \mathbf{R}$ όπου $D \subset \mathbf{R}$. Ας είναι: $D_0 \subset D$ και $D_0 \neq \varnothing$. Η f είναι **συστολή** στο D_0 αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $C_0 < 1$ τέτοια ώστε: $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \leq C_0 \left|x_1 - x_2\right|$ για κάθε $x_1, x_2 \in D$.

Ορισμός 2: Έστω συνάρτηση $f: D \to \mathbf{R}$ όπου $D \subset \mathbf{R}$. Αν υπάρχει $x^* \in D$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = x^*$, τότε το x^* λέμε ότι είναι ένα **σταθερό σημείο** της f.

Ορισμός 3: Ας είναι $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία Cauchy αν και μόνο αν για κάθε ε>0 υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε: $\left|a_n - a_m\right| < \varepsilon$, για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$ με $m, n \geq n_0$.

Πρόταση 1: Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(Π1): Η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο R.

(Π2): Η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy.

Απόδειξη

(Π1) $\Rightarrow$ (Π2): Ας είναι $a \in \mathbf{R}$ το όριο της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Έστω ε >0. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\left|a_n - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n \geq n_0$. Ας είναι: $m, n \geq n_0$. Τότε:

$$\left|a_n - a_m\right| \leq \left|a_n - a\right| + \left|a - a_m\right| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

(Π2) $\Rightarrow$ (Π1): Έστω ε=1.

Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\left|a_n - a_m\right| < 1,\ \forall\ m, n \geq n_0$. Επομένως έχουμε

$$\left|a_n - a_{n_0}\right| < 1,\ \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|a_n\right| < 1 + \left|a_{n_0}\right|\ \forall\ n \geq n_0 \Rightarrow \left|a_n\right| < 1 + \max_{1 \leq n \leq n_0} \left|a_n\right|,\ \forall\ n \in \mathrm{N}.$$

Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η $(a_n)_{n \in N}$ είναι φραγμένη.

Από το Θεώρημα Bolzano - Weirstrass, έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(a_{\kappa n})_{n \in N}$ της $(a_n)_{n \in N}$ η οποία να συγκλίνει. Ας είναι: $a \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε $a_{\kappa n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.

Έστω ε>0.

Τότε υπάρχει: $n_1 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\left|a_n - a_m\right| < \dfrac{\varepsilon}{3},\ \forall\ m, n \geq n_1$. Επίσης υπάρχει: $n_2 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\left|a_{\kappa_n} - a\right| < \dfrac{\varepsilon}{3},\ \forall\ n \geq n_2$. Ας είναι $n_3 > \max\{n_1, n_2\}$ και $n \geq n_3$. Επειδή $\kappa_n > n > n_1$ έπεται: $\left|a_{\kappa_n} - a_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Έτσι:

$$\left|a_n - a\right| \leq \left|a_{\kappa_n} - a\right| + \left|a_{\kappa_n} - a_n\right| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Πρόταση 2: Έστω I ένα κλειστό διάστημα στο R και $f \in C^1(I)$ Έστω ότι: $\max\limits_{x \in I} \left|f'(x)\right| < 1$. Τότε η f είναι συστολή στο I.

Απόδειξη

Πρόκειται για μια άσκηση εφαρμογής του θεωρήματος μέσης τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BANACH)

Ας είναι I ένα κλειστό διάστημα του **R** και $f: I \to I$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συστολή στο I με σταθερά α. Τότε η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x* στο I και για οποιαδήποτε επιλογή: $x_0 \in I$, η ακολουθία $(x_n)_{n \in N_0}$ που ορίζεται ως εξής: $x_{n+1} = f(x_n)$, συγκλίνει στο x*.

Απόδειξη

(Α) Η $(x_n)_{n \in N_0}$ είναι καλά ορισμένη.

Από τις υποθέσεις μας: $x_0 \in I$. Έστω $n \in N_0$. Υποθέτουμε ότι $x_n \in I$. Τότε $x_{n+1} = f(x_n) \in I$ επειδή $f(I) \subset I$.

(Β) $\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq a^{n+1} \left|x_1 - x_0\right|, \ \forall n \in N_0, \ a > 0 \ (\Sigma)$

Για n=0 ισχύει. Έστω ότι ισχύει η (Σ) για κάποιο $n \in N_0$. Τότε:

$\left|x_{n+2} - x_{n+1}\right| = \left|f(x_{n+1}) - f(x_n)\right| \leq a \left|x_{n+1} - x_n\right|$ επειδή η f είναι συστολή. Από την υπόθεση της επαγωγής παίρνουμε τελικά $\left|x_{n+2} - x_{n+1}\right| \leq a^{n+1} \left|x_1 - x_0\right|$, δηλαδή η (Σ) ισχύει για το (n+1).

(Γ) Όταν: α=0 τότε, η $(x_n)_{n \in N}$ είναι σταθερή άρα είναι Cauchy. Έστω ότι: α>0.

Ας είναι: $m > n \geq 1$. Τότε

$$\left|x_m - x_n\right| \leq \sum_{\ell=0}^{m-n-1} \left|x_{m-\ell} - x_{m-(\ell+1)}\right| \overset{(\Sigma)}{\leq} \sum_{\ell=0}^{m-n-1} a^{m-\ell-1} \left|x_1 - x_0\right| =$$

$$= \left|x_0 - f(x_0)\right| a^n \sum_{\ell=0}^{m-n-1} a^{m-n-\ell-1} = \left|x_0 - f(x_0)\right| \cdot a^n \cdot \sum_{\ell=0}^{m-n-1} a^\ell =$$

$$= a^n \frac{1 - a^{m-n}}{1 - a} \cdot \left|x_0 - f(x_0)\right| \leq \frac{a^n}{1 - a} \cdot \left|x_0 - f(x_0)\right|.$$ Επειδή

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{1-a} \cdot \left|x_0 - f(x_0)\right| = 0$, για κάθε ε>0 υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε $\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$, για κάθε $m, n \in N$ με $m > n > n_0$.

(Δ) Από την Πρόταση 1, συμπεραίνουμε ότι η $(x_n)_{n\in N_0}$ συγκλίνει σε κάποιο $x^* \in R$. Τότε: $x^* \in I$, επειδή το I είναι κλειστό διάστημα. Επίσης η f είναι συνεχής, επειδή είναι συστολή. Άρα: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x^*)$. Επειδή: $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall\, n \in N_0$ έχουμε αμέσως: $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$, που μας δίνει $x^* = f(x^*)$. Άρα το x^* είναι ένα σταθερό σημείο της f.

(Ε) Έστω ότι υπάρχει $y^* \in I$ τέτοιο ώστε $f(y^*) = y^*$.
Τότε: $\left|x^* - y^*\right| = \left|f(x^*) - f(y^*)\right| \le a\left|x^* - y^*\right|$. Αν $x^* \neq y^*$ τότε $1 \le a$. Άτοπο.
Άρα η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στο I.

Γ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Γ1. Έστω $(a_n)_{n\in N_0}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία: $a_0 = \sqrt{7}$, $a_1 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}$ και $a_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + a_n}}$, $\forall\, n \ge 0$. Εξετάστε αν συγκλίνει η $(a_n)_{n\in N_0}$· αν ναι, υπολογίσετε το όριό της.

Λύση

Ας είναι f: $[0,\ 42] \to \mathbf{R}$ με $f(x) = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x}}$, $\forall\, x \in [0,\ 42]$.

Προφανώς $f'(x) = \dfrac{-1}{4\left(7 - (7+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (7+x)^{\frac{1}{2}}} < 0$, $\forall\ x \in [0,\ 42)$.

Άρα η f είναι φθίνουσα. Ας είναι: $I = [0,\ 7]$.

Τότε $0 < \sqrt{7 - \sqrt{14}} = f(7) \le f(x) \le f(0) = \sqrt{7 - \sqrt{7}} < 7$, $\forall\ x \in I$. Δηλαδή $f(I) \subset I$.

Επίσης $\left|f'(x)\right| \le \dfrac{1}{\sqrt{7} \cdot 4 \cdot \sqrt{7 - \sqrt{14}}} < \dfrac{1}{4\sqrt{7}} < 1$, $\forall\ x \in I$. Από την Πρόταση 2, έπεται ότι η f είναι συστολή στο I. Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο $x^* \in I$· επίσης αν $x_0 \in I$ τότε η ακολουθία $(x^n)_{n\in N_0}$, με $x^{n+1} = f(x^n)$, $\forall\ n \in N_0$ συγκλίνει στο x^*.

Παίρνοντας: $x_0 = a_0 = \sqrt{7} \in I$, έχουμε $x^n = a_{2n}$, $\forall\ n \in N_0$. Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = x^*$.

Αν πάρουμε: $x_0 = a_1 = \left(7-\sqrt{7}\right)^{\frac{1}{2}} \in I$, έχουμε $x^n = a_{2n+1}$, $\forall\ n \in N_0$.

Έτσι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1} = x^*$. Επειδή οι υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in N_0}$ και $(a_{2n+1})_{n\in N_0}$ συγκλίνουν στο x*, έπεται ότι και η $(a_n)_{n\in N}$ συγκλίνει στο x*.

Παρατηρούμε ότι: $f(2) = \left(7-\sqrt{9}\right)^{\frac{1}{2}} = (7-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \in I$. Άρα x*=2.

Γ2. Έστω $(a_n)_{n\in N}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με: $a_1 = \delta \in \left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ και $a_{n+1} = \delta + (a_n)^2$, $\forall\ n \in N$. Εξετάστε αν συγκλίνει· αν ναι, υπολογίσετε το όριό της.

Λύση

Ας είναι $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f(x) = \delta + x^2$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$. Προφανώς: $f'(x) = 2x$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$. Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Ας είναι: $I_\varepsilon = [0, \varepsilon]$. Τότε $|f'(x)| \le 2\varepsilon < 1$, $\forall\ x \in I_\varepsilon$. Από την Πρόταση 2 προκύπτει ότι η f είναι συστολή στο I_ε.

Προφανώς: $\delta \le f(x) \le \delta + \varepsilon^2$, $\forall\ x \in I_\varepsilon$. Παρατηρούμε ότι:

$$\delta + \varepsilon^2 \le \varepsilon \Leftrightarrow \left(\varepsilon^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\varepsilon + \frac{1}{4}\right) \le \frac{1}{4} - \delta \Leftrightarrow \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4} - \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon \le \left(\frac{1}{4} - \delta\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \delta\right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon.$$

Επομένως, επιλέγοντας: $\varepsilon_0 \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon_0 \ge \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - \delta\right)^{\frac{1}{2}}$, έχουμε $f(I_{\varepsilon_0}) \subset I_{\varepsilon_0}$ και f συστολή στο I_{ε_0}. Από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x* στο I_{ε_0} και η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο x* επειδή $\delta \in I_{\varepsilon_0}$ (καθώς ισχύει: $\delta + (\varepsilon_0)^2 \le \varepsilon_0$). Το x* ικανοποιεί τη σχέση $(x^*)^2 - x^* + \delta = 0$.

Άρα $x^* \in \left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4\delta}\right),\ \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\delta}\right)\right\} \cap I_{\varepsilon_0} = \left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\delta}\right)\right\}$.

Γ3. **Έστω $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με τις ακόλουθες ιδιότητες:**
(I_1) $\alpha_0 \in \mathbf{R} - \{3\}$ και (I_2) $\alpha_{n+1}(3-\alpha_n)=1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}_0$. Εξετάστε αν συγκλίνει η $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ και ποιό είναι το όριό της.

Λύση

Ας είναι: $D := \mathbf{R} - \{3\}$. Έστω $f\colon D \to \mathbf{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$, $\forall\; x \in D$. Επίσης έχουμε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2} > 0$, $\forall\, x \in D$. Άρα η f είναι αύξουσα στο D. Παρατηρούμε ότι $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow \dfrac{1}{3-x^*} = x^* \Leftrightarrow 3x^* - (x^*)^2 = 1 \Leftrightarrow (x^*)^2 - 3x^* + 1 = 0$.

Ας είναι: $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $g(x) = x^2 - 3x + 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Παρατηρούμε ότι:
$g(3)=1>0$, $g(2)=-1<0$, $g\left(\dfrac{7}{4}\right) = -\dfrac{19}{16} < 0$, $g(0)=1>0$. Επομένως η f έχει δύο σταθερά σημεία: $x_1^* \in \left(0,\ \dfrac{7}{4}\right)$ και $x_2^* \in (2,\ 3)$.

Η f′ είναι αύξουσα στο $(-\infty,\ 3)$. Ας είναι: $M \in \left[0,\ \dfrac{1}{4}\right]$. Τότε $0 < f'(x) \le f'(2-M)$, $\forall\; x \in (-\infty,\ 2-M] \Rightarrow 0 < f'(x) \le \dfrac{1}{(3-2+M)^2}$, $\forall\; x \in (-\infty,\ 2-M] \Rightarrow$

$\Rightarrow\; 0 < f'(x) \le \dfrac{1}{(1+M)^2}$, $\forall\; x \in (-\infty,\ 2-M]$. Από την Πρόταση 2, η f είναι συστολή στο $(-\infty,\ 2-M]$. Επίσης: $f(x) \le f(2-M)$, $\forall\; x \in (-\infty,\ 2-M] \Rightarrow$
$f(x) \le \dfrac{1}{1+M}$, $\forall\; x \in (-\infty,\ 2-M]$.

Παρατηρούμε ότι: $2-M \ge \dfrac{7}{4} > \dfrac{1}{1+M}$.
Επομένως $f(x) \in (-\infty,\ 2-M]$, $\forall\; x \in (-\infty,\ 2-M]$.
Δηλαδή $f\big((-\infty,\ 2-M)\big) \subset (-\infty,\ 2-M]$.

Περίπτωση 1: $\alpha_0 \in (-\infty,\ 2)$.

Τότε: $\alpha_0 \in I = (-\infty,\ 2-M_o)$, όπου $M_o = \begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{όταν } \alpha_0 \le \dfrac{7}{4} \\[2mm] \dfrac{2-\alpha_0}{2}, & \text{όταν } 2 > \alpha_0 > \dfrac{7}{4}. \end{cases}$

Από τα παραπάνω και το Θέωρημα σταθερού σημείου του Banach, προκύπτει ότι η $(a_n)_{n\in N_0}$ με: $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$, $\forall\ n \in N$, συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο x_1^* της f στο $(-\infty,\ 2)$.

Περίπτωση 2: $a_0 = 2$.

Τότε $a_1 = 1 \in (-\infty,\ 2)$. Θεωρώντας ότι η ακολουθία αρχίζει από το a_1, από την Περίπτωση 1, έπεται ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_1^*$.

Περίπτωση 3: $a_0 > 3$.

Τότε: $a_1 < 0$ δηλαδή $a_1 \in (-\infty,\ 2)$. Δουλεύοντας όπως στην Περίπτωση 2, έχουμε $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_1^*$.

Περίπτωση 4: $a_0 \in (2,\ x_2^*]$.

Με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής θα δείξουμε ότι: η $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι καλά ορισμένη και ότι $a_n \le x_2^*$, $\forall\ n \in N_0$.

Για n=0 έχουμε $a_0 \ne 3$ και $a_0 \le x_2^*$. Ας είναι $n \in N_0$.

Υποθέτουμε ότι: $a_n \le x_2^*$ τότε $a_n \ne 3$ και $a_{n+1} = f(a_n) \le f(x_2^*) = x_2^*$.

Επειδή η f είναι αύξουσα, η $(a_n)_{n\in N}$ είναι αύξουσα. Βγάλαμε ότι είναι φραγμένη άνω από το x_2^*. Άρα η $(a_n)_{n\in N_0}$ συγκλίνει. Επειδή η f είναι συνεχής, το όριό της $(a_n)_{n\in N_0}$ είναι ένα σταθερό σημείο της f και ανήκει στο $[a_0,\ x_2^*]$, άρα $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_2^*$.

Περίπτωση 5: $a_0 \in (x_2^*,\ 3]$

Έστω ότι για κάποιο $\kappa \in N$ έχουμε $a_\kappa = 3$. Με μαθηματική επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι $a_0 = \beta_\kappa$, όπου $\beta_1 = 3 - \dfrac{1}{3}$, $\beta_{m+1} = 3 - \dfrac{1}{\beta_n}$, $\forall\ m \in N$.

Κατ' αρχήν: $\beta_1 \in D$. Αν: $\beta_1 \le x_2^*$ τότε $f(\beta_1) \le f(x_2^*) \Rightarrow x_2^* \ge 3$, άτοπο. Έτσι: $\beta_1 \in (x_2^*,\ 3)$. Ας είναι: $n \in N$. Υποθέτουμε ότι: $\beta_n \in (x_2^*,\ 3)$. Αν: $\beta_{n+1} \le x_2^*$ τότε: $f(\beta_{n+1}) \le x_2^* \Rightarrow \beta_n \le x_2^*$, άτοπο. Έτσι: $\beta_{n+1} > x_2^*$.

Επειδή $\beta_n > x_2^* > 0$, έχουμε $\beta_{n+1} < 3$. Άρα $\beta_n \in (x_2^*,\ 3)$, $\forall\ n \in N$.

Το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι η $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι καλά ορισμένη αν $a_0 \ne \beta_n$, $\forall\ n \in N$.

Έστω ότι αυτό ισχύει. Η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, επειδή η f είναι αύξουσα. Αν ήταν φραγμένη θα συνέκλινε σε κάποιο αριθμό, ο οποίος θα ήταν σταθερό σημείο της f και θα ανήκε στο $[a_0, 3]$. Τέτοιος αριθμός δεν υπάρχει, άρα η ακολουθία $(a_n)_{n\in N}$ δεν είναι φραγμένη άνω. Επειδή είναι αύξουσα έχουμε ότι $a_n \to +\infty$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. K.A. Ross, «Elementary Analysis: The Theory of Calculus», 1980, Springer - Verlag.

2. G. Hämmerlin, K. - H. Hoffmann, «Numerical Mathematics», 1991, Springer - Verlag.

3. A.M. Gleason, R.E. Greenwood, L.M. Kelly: «The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938-1964», 1980, The Mathematical Association of America.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΗΣ ΤΟΥ Β. RIEMANN*
ΑΠΟ ΤΟΝ Μ. ΠΕΤΡΑΚΗ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ

Έστω $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και π: $\mathbf{N} \underset{\text{επί}}{\overset{1-1}{\rightarrow}} \mathbf{N}$. Εάν $\alpha'_n = \alpha_{\pi(n)}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n$ καλείται αναδιάταξη της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. Ας θεωρήσουμε την εναλλάσσουσα σειρά του Leibniz $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$, η οποία συγκλίνει (στον log 2) αλλά η σειρά των απολύτων τιμών των όρων της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Ο ισχυρισμός είναι ότι $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ υπάρχει αναδιάταξη $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n$ της σειράς του Leibniz έτσι ώστε η «καινούργια» σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n$ να συγκλίνει στο α.

Η ιδέα της απόδειξης είναι η εξής: Αρχίζομε με τον όρο 1 και μετά τοποθετούμε αρνητικούς όρους $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \ldots - \frac{1}{2m}$ μέχρις ότου το άθροισμα να γίνει για πρώτη φορά μικρότερο του α.

Μετά αθροίζουμε τους μη χρησιμοποιηθέντες ακόμη θετικούς όρους, έτσι ώστε το άθροισμα $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2m} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\kappa+1}$ να γίνει για πρώτη φορά μεγαλύτερο από το α. Μετά τοποθετούμε τους μη χρησιμοποιηθέντες ακόμη αρνητικούς όρους, έτσι ώστε το άθροισμα να γίνει πάλι (για πρώτη φορά) μικρότερο του α κ.λ.π.

Τα ανωτέρω μπορούν ασφαλώς να γίνουν, αφού $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = +\infty$ και $-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots\right) = -\infty$.

*** Ο,τιδήποτε αναφέρεται στο άρθρο αυτό μπορεί να ευρεθεί στα [1], [2], [3] της βιβλιογραφίας.**

Παρατηρούμε τώρα ότι αφού η απόλυτη τιμή $\frac{1}{n}$ του γενικού όρου $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ της σειράς του Leibniz συγκλίνει στο 0 όπως το $n \to \infty$, η ακολουθία $S'_n = a'_n + ... + a'_n$, $n \in \mathbf{N}$ των μερικών αθροισμάτων της «αναδιατεταγμένης» σειράς συγκλίνει στο α.

Οι παραπάνω συλλογισμοί δίνουν την ουσία της απόδειξης του περίφημου θεωρήματος του B. Riemann για την αναδιάταξη σειρών το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σειρά πραγματικών αριθμών, η οποία συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως $\left(\text{δηλ. } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty\right)$. Τότε $\forall\, a \in \mathbf{R}$ υπάρχει αναδιάταξη $\sum a'_n$ της αρχικής σειράς έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a$.

Παρατήρηση

(1) Εάν $a \le \beta$, $a, \beta \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει αναδιάταξη της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έτσι ώστε το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της αναδιατεταγμένης σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ να είναι το (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$. (βλ. [1], σελ. 76).

(2) Το συμπέρασμα του θεωρήματος του Riemann ισχύει υπό την ασθενέστερη υπόθεση ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\ge 1}$ των όρων της σειράς ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

(α) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (β) $\sum a_n^+ = +\infty$, $\sum a_n^- = +\infty$ όπου $a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}$, $a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$.

(βλ. [2] σελ. 76, 102, 104).

(3) Είναι ενδιαφέρον (και πιο δύσκολο να αποδειχθεί) ότι εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι μια συγκλίνουσα σειρά μιγαδικών αριθμών έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, τότε το σύνολο των οριακών σημείων των μερικών αθροισμάτων όλων των δυνατών αναδιατάξεων της $\sum a_n$ είναι , είτε μια γραμμή στο μιγαδικό επίπεδο (μαζί με το ∞), είτε όλο το μιγαδικό επίπεδο μαζί με το ∞. (βλ. [3], σελ. 55).

(4) Ο καλός σπουδαστής ας προσπαθήσει να δει εάν μπορεί να αποδείξει το εξής αποτέλεσμα του Sierpinki:
Εάν $s < \log 2$ τότε υπάρχει αναδιάταξη μόνο των θετικών όρων της σειράς $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ του Leibniz (οι αρνητικοί όροι μένουν ως έχουν) έτσι ώστε η αναδιατεταγμένη σειρά να συγκλίνει στο s. (βλ. [3], σελ. 55).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] W. Rudin: Principles of Mathematical Analysis.

[2] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας: Απειροστικός Λογισμός.

[3] Gelbanm and Olmsted: Counterexamples in Analysis.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗΣ

Λάμπει μέσα μου κείνο που αγνοώ. Μα ωστόσο λάμπει.

(ΟΔΥΣΣΕΑΣ ΕΛΥΤΗΣ: ΤΑ ΕΛΕΓΕΙΑ ΤΗΣ ΟΞΩΠΕΤΡΑΣ)

«...Σε κάποιο τέτοιο πρωινό, καθώς το φως του ήλιου που ανέτειλε είχε κιόλας πλημμυρίσει το κτίριο του Πανεπιστημίου και τη βρύση μπροστά από αυτό, έφτασα στο διάλογο «Τίμαιος» και μάλιστα σ' εκείνη τη θέση, όπου γίνεται λόγος για τα μικρότερα τεμάχια της ύλης. Ίσως είχα αιχμαλωτισθεί σε αυτή τη θέση, επειδή ήταν δύσκολο να μεταφρασθεί ή επειδή γινόταν λόγος για μαθηματικά αντικείμενα, που μ' ενδιέφεραν πάντοτε. Δεν μπορώ να καθορίσω πια, γιατί επέμεινα πεισματικά σε αυτό το σημείο του κειμένου. Αλλά, αυτό που διάβασα εκεί, μου φάνηκε τελείως παράλογο. Υπήρχε ο ισχυρισμός ότι τα μικρότερα τεμάχια της ύλης σχηματίζονται από ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία, συντιθέμενα κατάλληλα, σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα ή τετράγωνα, από τα οποία προκύπτουν κύβοι, τετράεδρα, οκτάεδρα και εικοσάεδρα, δηλαδή τέσσερα από τα κανονικά στερεά της Στερεομετρίας. Έτσι, αυτά τα τέσσερα σώματα ήταν οι θεμελιώδεις δομικοί λίθοι των τεσσάρων στοιχείων, δηλαδή της γης, της φωτιάς, του αέρα και του νερού. Διαβάζοντας αυτά, δεν καταλάβαινα, αν τα κανονικά στερεά αντιστοιχούσαν στα στοιχεία μόνο σα σύμβολα, για παράδειγμα αντιστοιχούσε ο κύβος στο στοιχείο «γη» για να υποδηλωθεί η σταθερότητα και η έλλειψη κινητικότητας αυτού του στοιχείου, ή αν πραγματικά τα μικρότερα τεμάχια του στοιχείου «γη» όφειλαν να έχουν τη φόρμα του κύβου.

Τέτοιους ισχυρισμούς, όπως τον τελευταίο, τους εύρισκα αυθαίρετα παραπλανητικούς και μπορούσα να τους δικαιολογήσω μόνο με την έλλειψη εμπειρικών γνώσεων στην Αρχαία Ελλάδα. Αλλά, μ' ενοχλούσε πολύ το γεγονός ότι ένας Φιλόσοφος, ο οποίος σκεπτόταν τόσο κριτικά και τόσο βαθιά όπως ο Πλάτων, έφτανε στο σημείο να δέχεται τόσο ανερμάτιστους ισχυρισμούς. Προσπάθησα να βρω συλλογισμούς, που θα με βοηθούσαν να δικαιολογήσω τον Πλάτωνα, αλλά δε βρήκα κανένα, έστω και ελάχιστα, πειστικό. Κάνοντας αυτή την προσπάθεια, με είχε συναρπάσει η ιδέα πως τα Μαθηματικά προσφέρονται για τη λύση προβλημάτων που αναφέρονται στα μικρότερα τεμάχια της ύλης και πως η κατανόηση της καθόλου ευάλωτης και καλά κρυμένης συνθετότητας των φαινομένων της φύσης μπορούσε να γίνει μόνο αν βρίσκαμε τον τρόπο να τη μαθηματικοποιήσουμε. Αλλά δε μου χωρούσε στο μυαλό με ποιο δικαίωμα ο Πλάτων διάλεξε τα τέσσερα κανονικά στερεά, προκειμένου να εξηγήσει την ατομική υφή της ύλης».

WERNER KARL HEISENBERG* (1901-1976)

(*) Βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1932 για τη συμβολή του στη θεμελίωση της κβαντομηχανικής, η εφαρμογή της οποίας οδήγησε, μεταξύ άλλων, στην ανακάλυψη των αλλοτροπικών μορφών υδρογόνου.
Η μηχανική των πινάκων του (1926) σημάδεψε τη μετάβαση από τα απλοϊκά αξιώματα του Bohr στην ακριβή αλλά διαισθητικά απρόσιτη μαθηματική περιγραφή, στην οποία και μόνο απέδιδε πραγματική υπόσταση.
Ο Heisenberg ανέτρεψε τη φιλοσοφική αιτιοκρατία με την «αρχή της απροσδιοριστίας» που καθιστά απαγορευτικό τον ταυτόχρονο προσδιορισμό συζευγμένων μεγεθών (όπως της ορμής και της θέσης ή της ενέργειας και του χρόνου) πέραν ενός ορίου ακριβείας που προσδιορίζεται από τη σταθερά του Planck. Κατά τη διάρκεια του πολέμου εργάστηκε για την παραγωγή της ατομικής βόμβας. Οι προσπάθειες δεν τελεσφόρησαν λόγω ανεπαρκούς πολιτικής στήριξής τους από την πλευρά του ναζιστικού καθεστώτος.
Ο Heisenberg ασχολήθηκε σε βιβλία του και με τις φιλοσοφικές προεκτάσεις της κβαντικής θεωρίας από τη σκοπιά μιας πιθανοκρατικής προσέγγισης.

...Ήξερα πάρα πολύ καλά πως είχα ανέβει σ' ένα τρένο που βρισκόταν ήδη σε κίνηση. Παρ' όλη τη διατριβή που είχα αποκτήσει πρόσφατα, ένιωθα ακόμα σαν ταξιδιώτης χωρίς εισιτήριο. Για να ξεφύγω από τον ελεγκτή, δεν έβλεπα παρά μόνο έναν τρόπο: να ορμήσω με το κεφάλι μπρος. Να επιτεθώ σε όλα τα μέτωπα.

Γιατί μια τέτοια φρενίτιδα; Γιατί να στριφογυρίζεις έτσι; Το να κάνεις πειράματα, να χτίζεις θεωρίες για να βολέψεις τα γεγονότα ή να τα ξαναβολέψεις, αυτό δεν έχει τίποτε το αναπόφευκτο. Από ποιαν ανάγκη κάποιοι άνθρωποι θέλουν αιωνίως με τόσο πάθος, με τόση ηδονή, να εξερευνούν τον κόσμο, να τον ρωτούν; Σ' αυτό το ερώτημα, όσοι αγαπούν την επιστήμη απαντούν: από περιέργεια, από επιθυμία να οικειοποιηθείς τη φύση, να καλυτερέψεις τη μοίρα του ανθρώπου. Όσοι δεν αγαπούν την επιστήμη λένε: από φιλοδοξία, από θέληση για ισχύ, αγάπη της δόξας ή και πλεονεξία. Αλλά αυτό δεν είναι όλο. Υπάρχουν βαθύτεροι παράγοντες. Υπάρχει η απόπειρα, ο πειρασμός να καταλάβεις έναν κόσμο που σου ξεφεύγει. Η εξέγερση ενάντια στη μοναξιά. Ενάντια σε μια πραγματικότητα που σου ξεγλιστράει, που σε αγνοεί και που, χωρίς αυτήν, δεν υπάρχει ζωή. Ένα μεταφυσικό αίτημα συνοχής και ενότητας μέσα σ' ένα σύμπαν που γυρεύεις να το πάρεις στην κατοχή σου αλλά που δεν κατορθώνεις καν να το συλλάβεις. Η φύση δεν είναι σιωπηλή. Επαναλαμβάνει αιώνια τις ίδιες νότες που φτάνουν σε μας απόμακρες, διάχυτες, χωρίς συγχορδίες και μελωδία. Αλλά δεν μπορούμε να κάνουμε δίχως μελωδία. Την αναζητήσαμε απελπισμένα πάνω στη γη και μέσα στον ουρανό προτού αντιληφθούμε ότι κανείς, ποτέ, δεν θα έρθει να μας παίξει τη μουσική που ελπίζουμε. Ότι είναι δική μας δουλειά να εκτελέσουμε τις συγχορδίες, να γράψουμε την παρτιτούρα, να κάνουμε τη συμφωνία ν' αναβρύσει, να δώσουμε στους ήχους μια μορφή που δεν έχουν χωρίς εμάς. Αυτή ήταν, στα μάτια μου, η λειτουργία της επιστήμης. Ετούτη αντιπροσώπευε για μένα την πιο συναρπαστική μορφή εξέγερσης ενάντια στην ασυναρτησία του σύμπαντος. Το πιο ισχυρό μέσο που βρήκε ο άνθρωπος για να ανταγωνιστεί τον Θεό· για να ξαναχτίσει τον κόσμο, λαμβάνοντας υπ' όψη την πραγματικότητα. Εκεί εκδηλωνόταν σε όλη της την έκταση η ασυγκράτητη ορμή της ανθρώπινης περιπέτειας. Έτσι, το γεγονός ότι ήμουν μέλος αυτού του εξαιρετικού εργαστηρίου, ότι δούλευα με εξαιρετικούς ανθρώπους, ότι συμμετείχα στις νέες εξελίξεις που άρχιζαν στη βιολογία, αυτό μου έδινε τόσο πυρετό όσο, στη διάρκεια του πολέμου, το γεγονός ότι είχα βρεθεί σε μια μαχόμενη μονάδα της Ελεύθερης Γαλλίας. Είχα και πάλι πολύ βαθιά ριζωμένο μέσα μου το αίσθημα ότι βρισκόμουν εκεί όπου συνέβαινε κάτι. Κι έπειτα, ήταν μια πρόκληση. Η ευκαιρία να αποδείξω τι μπορούσα να κάνω. Αλλά να αποδείξω σε ποιόν; Στον πατέρα μου; Στον παππού μου; Στον εαυτό μου; (Βλέπε: ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΖΑΚΟΜΠ*, Σμιλεύοντας το εσωτερικό άγαλμα, Εκδόσεις ΡΑΠΠΑ, σελ. 323-324).

(*) Ο Φρανσουά Ζακόμπ είναι διευθυντής του τμήματος ερευνών της κυτταρικής βιοχημείας στο Ινστιτούτο Παστέρ και καθηγητής της κυτταρικής γενετικής στο Collége de France. Για τις εργασίες του σχετικά με τη γενετική των μικροβίων και των ιών, τους μηχανισμούς μεταβίβασης της πληροφορίας και την κυτταρική ρύθμιση πήρε το 1965 το βραβείο Νόμπελ της Ιατρικής.

Θα υποθέσω ότι γράφω για αναγνώστες που είναι έμπλεοι, ή ήσαν τέτοιοι κατά το παρελθόν, ενός ορθού πνεύματος φιλοδοξίας. Το πρώτο καθήκον ενός ανθρώπου, και προπάντων ενός νέου, είναι να είναι φιλόδοξος. Η φιλοδοξία είναι ένα ευγενές πάθος, το οποίο μπορεί να πάρει πολλές νόμιμες μορφές. Υπήρχε **κάτι** το ευγενές στη φιλοδοξία του Αττίλα ή του Ναπολέοντα: η ευγενέστερη φιλοδοξία όμως, είναι να αφήνει κανείς πίσω του κάτι με διαχρονική αξία.

Εδώ στην επίπεδη αμμουδιά,
ανάμεσα σε ξηρά και θάλασσα,
τι θα κτίσω ή τι θα γράψω
ενάντια στη νύχτα που πέφτει;

Πες μου να χαράξω σύμβολα
να κρατούν το κύμα που σκάει
ή να φτιάξω οχυρά
που θα ζήσουν πιο πολύ από μένα.

Η φιλοδοξία υπήρξε η κινητήρια δύναμη πίσω από σχεδόν όλα τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της ανθρωπότητας. Ειδικότερα, όλες οι ουσιαστικές συμβολές στην ανθρώπινη ευτυχία πραγματοποιήθηκαν από ανθρώπους φιλόδοξους. Για να φέρω δύο διάσημα παραδείγματα, δεν ήταν ο Lister και ο Pasteur φιλόδοξοι; Ή, σ' ένα πιο ταπεινό επίπεδο, ο King Gillette και ο William Willet; Και ποιος στους πρόσφατους καιρούς συνέβαλε περισσότερο στην ανθρώπινη ανακούφιση απ' όσο αυτοί;

Υπάρχουν πολλά αξιοσέβαστα κίνητρα που οδηγούν τους ανθρώπους να ακολουθήσουν την έρευνα, αλλά τρία είναι πιο σημαντικά από τα υπόλοιπα. Το πρώτο (χωρίς το οποίο τα υπόλοιπα δεν μπορούν να κάνουν τίποτα) είναι η περιέργεια του πνεύματος, η επιθυμία για γνώση της αλήθειας. Κατόπιν, η επαγγελματική υπερηφάνεια, το άγχος να είναι η απόδοση ικανοποιητική, το όνειδος που κατακλύζει κάθε τεχνίτη που σέβεται τον εαυτό του όταν η δουλειά του δεν είναι αντάξια του ταλέντου του. Τέλος, κίνητρα είναι και η φιλοδοξία, η επιθυμία για υπόληψη και κάποια θέση, ακόμη και η δύναμη ή το χρήμα που αυτή επιφέρει. Μπορεί να είναι θαυμάσιο να αισθάνεσαι, όταν έχεις ολοκληρώσει το έργο σου, ότι προσέθεσες στην ευτυχία ή απάλυνες τα βάσανα των άλλων, αλλά δεν είναι αυτός ο λόγος που το έκανες.

Έτσι, αν ένας μαθηματικός, ή ένας χημικός ή ακόμη και ένας ιατρός μου έλεγαν ότι η κινητήρια δύναμη στην εργασία τους ήταν η επιθυμία να ωφελήσουν την ανθρωπότητα, δεν θα τους πίστευα (κι ακόμη και αν τους πίστευα, δεν θα ανέβαιναν στην εκτίμησή μου). Τα κυριάρχα κίνητρά τους ήσαν αυτά που ανέφερα, και βέβαια δεν υπάρχει σ' αυτά τίποτα για το οποίο ο οποιοσδήποτε αξιοπρεπής άνθρωπος θα έπρεπε να ντρέπεται.

(Βλέπε: G. H. HARDY, Η απολογία ενός μαθηματικού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Σελ. 56-57).

...Τη στοιχειώδη αριθμητική και, αργότερα, τα μαθηματικά, άρχισα να τα μαθαίνω με τον παππού μου, τον Αλμπέρ Φρανκ. Είχα γι' αυτόν ένα είδος λατρείας. Ήταν το ιδεώδες μου, το πρότυπο που προσπαθούσα να μιμηθώ σε όλα. Παιδί μιας αρκετά φτωχής λοραινικής οικογένειας, είχε μπει στην Στρατιωτική Πολυτεχνική Σχολή. Όταν έγινε αξιωματικός του πυροβολικού, είχε λάβει μέρος στον μεγάλο πόλεμο στην Ανατολή, με τον στρατηγό Σαρράιγ. Μετά τον πόλεμο, ήταν ο πρώτος Εβραίος που έφτασε ως τον βαθμό του στρατηγού διοικητή Σώματος Στρατού. Μετρίου αναστήματος, με αθλητικούς ώμους, είχε ένα μουστάκι που έμοιαζε να χαμογελάει και μια τούφα τρίχες λίγο πιο χαμηλά από το κάτω χείλος του. Ήταν συγχρόνως γεμάτος δύναμη και γλύκα, ένα σπάνιο κράμα ευμένειας και επιβολής, τρυφερότητας και ενεργητικότητας. Για μένα, ήταν ο βράχος. Πάνω σ' αυτόν στηρίχτηκε σε μεγάλο μέρος η παιδική μου ηλικία για να χτίσει τη δική της εικόνα ενός κόσμου με συνοχή και συνέπεια. Μπορούσα να τον ρωτάω για όλα, να του θέτω οποιοδήποτε ερώτημα. Απαντούσε πάντα με ακρίβεια και τιμιότητα, χαρίσματα που έμαθα την έννοιά τους από την ημέρα όπου, σε μιαν ερώτηση, μου είχε πει: «Δεν ξέρω. Θα πληροφορηθώ σχετικά. Θα σου απαντήσω αύριο». Το να μπορεί να μην ξέρει, το να διστάζει ένας ενήλικας, ένας μεγάλος· ακόμα καλύτερα, το να μπορεί να αναγνωρίζει πως δεν ήξερε αλλά μπορούσε να πληροφορηθεί πριν να μιλήσει, αυτό κλόνιζε μέσα μου πολλές πεποιθήσεις. Ήταν μια αποκάλυψη, μια πόρτα που άνοιγε σ' έναν καινούργιο κόσμο. Από τότε, είχα απόλυτη εμπιστοσύνη στον παππού μου.

Από τη μεριά του έδειχνε, απέναντί μου, απέραντη υπομονή. Όταν ήμουν εφτά οχτώ χρονών, είχα ένα γράψιμο που δεν διαβαζόταν. Είχε λοιπόν αποφασίσει να διορθώσει αυτό το κουσούρι, επωφελούμενος από κάποιες μέρες διακοπών που πέρασε μαζί μας το καλοκαίρι, στο Ετρετά. Σιχαινόμουν τις σχολικές εργασίες στη διάρκεια των διακοπών. Η δουλειά μου στο σχολείο ήταν ικανοποιητική. Έβρισκα επομένως ανώφελο να κάνω κάτι παραπάνω. Όλοι συμφωνούσαν σ' αυτό, και πρώτος ο παππούς μου. Κατέφθασε στο Ετρετά με μιαν ολόκληρη αρματωσιά από θήκες κονδυλοφόρων, χάρακες, χρωματιστά μελάνια, πένες μάρκας «Επιλοχία». Κι ακόμα μ' ένα ωραιότατο βιβλίο. Με αντίγραφα σχεδίων που είχαν κάνει με την πένα μεγάλοι ζωγράφοι, ο Ρέμπραντ, ο Ντύρερ, ο Γκόγια... Μ' έκανε να προσέξω πρώτα τι μπορούσε να πετύχει κανείς με μια μονοκοντυλιά. Πώς μπορούσε να κάμψει την καμπύλη μιας γραμμής, να ρυθμίσει τη λεπτότητα ή τον κόκκο της. Έπειτα δοκιμάσαμε, οι δυο μας, να σχεδιάσουμε με την πένα ένα αρκετά απλό αντικείμενο, ένα μήλο, ένα δέντρο, ποντάροντας πάνω σ' αυτές τις μεταβλητές, γδέρνοντας το χαρτί ή μόλις αγγίζοντάς το, γρατσουνίζοντάς το, ή χαϊδεύοντάς το. Ο παππούς μου μου απέδειξε τότε ότι μπορούσε κανείς να διασκεδάσει το ίδιο καλά γράφοντας. Χρησιμοποιούσε ένα βιολετί μελάνι που είχε, στεγνώνοντας, πράσινες μεταλλικές ανταύγειες. Θαύμαζα τις γραμμές που τραβούσε. Μια γραφή ήρεμη, στέρεα, σεμνή, ζεστή, γενναιόδωρη. Μια γραφή που μου έδινε εμπιστοσύνη. Μ' έκανε να δω πώς αλλάζει κανείς το γράψιμό του. Πώς να το κάνει απλό ή πολύπλοκο, θλιμμένο ή ευτυχισμένο, φιλικό ή επιθετικό. Με δυο λόγια, μου έδειξε τους κανόνες ενός παιχνιδιού που ήταν καινούργιο για μένα. Ύστερα από δεκαπέντε μέρες, όταν ξανάφυγε, είχε πετύχει να μεταμορφώσει τη γραφή μου. Το να πλάθω τα γράμματά μου, να σκαλίζω τα αδρά και τα λεπτά μέρη τους είχε γίνει, για μένα, μια σχεδόν αισθησιακή απόλαυση.

(Βλέπε ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΖΑΚΟΜΠ: Σμιλεύοντας το εσωτερικό άγαλμα, σελ. 51-52).

I. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΙΚΡΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Κάθε μαθηματικό ταξίδι στην αφηρημένη γενικότητα πρέπει να αρχίζει και να τελειώνει στο συγκεκριμένο και το ειδικό.
Richard Courant

1. Γράψετε τους αριθμούς από το 0 έως το 10, χρησιμοποιώντας τα ψηφία α) 1, 9, 8, 1 β) 1, 9, 8, 2 (με τη σειρά που δίνονται).

Απάντηση

α)
$$0=1-9+8^1$$
$$1=1+9-8-1$$
$$2=1+9-8^1$$
$$3=\sqrt{1^9+8^1}$$
$$4=\sqrt{-1+9+8^1}$$
$$5=-1-\sqrt{9}+\sqrt{81}$$
$$6=1\cdot\sqrt{9}+\sqrt{8+1}$$
$$7=1-\sqrt{9}+\sqrt{81}$$
$$8=1^9+8-1$$
$$9=1^9+8^1$$
$$10=19-8-1$$

β)
$$0=1+9-8-2$$
$$1=-1\cdot 9+8+2$$
$$2=1-9+8+2$$
$$3=\sqrt{19-8-2}$$
$$4=(1+9-8)^2$$
$$5=\sqrt{19+8-2}$$
$$6=\sqrt{-1+9+8}+2$$
$$7=-1\cdot\left(\sqrt{9}-8-2\right)$$
$$8=1-9+8\cdot 2$$
$$9=(1+9+8):2$$
$$10=1\cdot\sqrt{98+2}$$

Σχόλιο: Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1, 9, 8, 3 με τη σειρά που δίνονται έχουμε:

$$11=1^9\cdot(8+3)$$
$$19=1+\sqrt{9}\cdot 8-3!=\left(1+\sqrt{9}\right)!-8+3=\left(-1+\sqrt{9}\right)\cdot 8+3=-1+\sqrt{9}!+8+3!$$
$$23=-1+\frac{9\cdot 8}{3}$$
$$31=-1+\left[\frac{98}{3}\right]$$

$$37 = -19 + \binom{8}{3}, \quad \binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!\,(\nu-\mu)!}$$

$$41 = -1 + \left(\sqrt{9}\,!\right) \cdot 8 - 3!$$

$$47 = -1 \cdot 9 + \binom{8}{3}$$

$$53 = -1 \cdot \sqrt{9} + \binom{8}{3}$$

$$59 = 1 \cdot \sqrt{9} + \binom{8}{3} = -\left(1 + \sqrt{9}\right)! + 83 = (1 + \ldots + 9) + 8 + 3!$$

$$71 = -1 + \sqrt{9} \cdot 8 \cdot 3$$

$$83 = 1^9 \cdot 83$$

2. Προσέξτε τις παρακάτω ισότητες:

$$\mathbf{11{,}111 = 2{,}222 \times \left(2^2 + \frac{2}{2}\right)} \quad ,$$

$$\mathbf{1958 = (111 - 11 - 11) \times (1 + 1) \times (11)} \quad ,$$

$$\mathbf{1958 = (222 : 2 - 22) \times 22,}$$

$$\mathbf{1959 = (22 \times 2)^2 + 22 + \frac{2}{2}.}$$

i) Μπορείτε να γράψετε τον αριθμό 1.000.000, χρησιμοποιώντας και τα δέκα ψηφία, αλλά μια μόνο φορά το καθένα;

ii) Μπορείτε να γράψετε τον αριθμό 1.000.000, χρησιμοποιώντας μόνο ένα από τα ψηφία 0, 1, 2, 3, ... , 9;

Απάντηση

i) $1.000.000 = 80 \times 625 \times \left[7 + 9 + \sqrt{(1+3) \times 4}\right]$

ii) $0!\ 000\ 000$ (Υπενθύμιση: $0! = 1! \equiv 1$)

$$\sqrt{(11-1)^{11+1}}, \quad \left(\frac{22-2}{2}\right)^{2+2^2}, \quad \left(3 \times 3 + \frac{3}{3}\right)^{3+3},$$

$$\left(\frac{33-3}{3}\right)^3 \times \left(\frac{33-3}{3}\right)^3, \quad \left(\sqrt{4} + 4\sqrt{4}\right)^{4+\sqrt{4}}, \quad (5+5)^{5+\frac{5}{5}},$$

$$\left(\frac{66-6}{6}\right)^{6},\quad \left(\frac{77-7}{7}\right)^{7-\frac{7}{7}},$$

$$\left(8+\sqrt{\sqrt{8+\sqrt{8\cdot 8}}}\right)^{8-\sqrt{\sqrt{8+\sqrt{8\cdot 8}}}},\quad \left(9+\frac{9}{9}\right)^{\sqrt{9}+\sqrt{9}}.$$

3. Κατασκευάσετε ισότητες από τους αριθμούς 81364, 44817, με τις εξής προϋποθέσεις:

i) Δεν θα χρησιμοποιήσετε εκθέτες.

ii) Τα ψηφία θα τα χρησιμοποιήσετε με τη διάταξη που δίνονται.

iii) Στη διάθεσή σας είναι τα σύμβολα:

$+,\ \times,\ -,\ :,\ \sqrt{\ },\ \sqrt[3]{\ },\ !,\ (\ ),\ |\ |,\ [\ ]^{(1)},\ \{\ \}^{(2)}$

Παραδείγματα:

Αριθμός	**Ισότητα**
2874	$28 = 7\times 4$
1613	$\sqrt{\sqrt{16}} = \lvert 1-3\rvert$
8890	$8-8 = 9\times 0$
3142	$(3!)\times 1 = 4+2$
9725	$\sqrt{9}+7 = 2\times 5$
9632	$9:6 = 3:2$
9632	$\left(\sqrt{9}\right)!:6 = 3-2$
9632	$\sqrt{\left[\left(\sqrt{9}\right)!\right]\left[6\right]} = 3\times 2$
5947	$5+9 = \sqrt{4}\times 7$
5947	$5+\left(\sqrt{9}\right)! = 4+7$
5947	$5+\sqrt{\left(\sqrt{9}\right)!-\sqrt{4}} = 7$

---

(1) Ακέραιο μέρος πραγματικού αριθμού x, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός, ο οποίος δεν υπερβαίνει τον x. Συμβολίζεται με [x] και διαβάζεται «αγκύλη x».

(2) Κλασματικό μέρος πραγματικού αριθμού, καλείται η διαφορά x-[x]. Συμβολίζεται με {x} και διαβάζεται «άγκιστρο x».

Λύση

Αριθμός	Ισότητα
81364	$8+1+3=6\times\sqrt{4}$
81364	$\left(\sqrt[3]{8}\right)\times 1+3!=\sqrt{64}$
44817	$4-4=8-(1+7)$
44817	$4-4=\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{(1+7)}$
44817	$4-4=\sqrt{8}-\sqrt{1+7}$
44817	$\sqrt{(4+4)\times 8}=1+7$
44817	$(4:4)\times 8=1+7$
44817	$4\times 4=8+1+7$
44817	$4+\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}-1=7$
44817	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt[3]{8}-1=7$
44817	$4+4=\sqrt{8\times(1+7)}$
44817	$\left[(4!+4!):8\right]+1=7$
44817	$\sqrt[3]{4+4}=\sqrt{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{(1+7)}}$
44817	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}+1=7$.

4. Δίνονται οι αριθμητικές σχέσεις:

$$\mathbf{1^3=1^2-0^2}$$
$$\mathbf{2^3=3^2-1^2}$$
$$\mathbf{3^3=6^2-3^2}$$
$$\mathbf{4^3=10^2-6^2}.$$

Σε ποια γενίκευση οδηγούν; Αποδείξτε την.

Λύση

Η γενίκευση είναι: $x^3=S^2-(S-x)^2$,

όπου x ένας οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος και S είναι το άθροισμα των ακεραίων – x το πλήθος – από τον 1 μέχρι τον x.

Ως γνωστόν ισχύει:

$$S=1+2+...+x=\frac{1}{2}(x+x^2).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $x^3 = \left[\frac{1}{2}(x+x^2)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(x+x^2) - x\right]^2$,

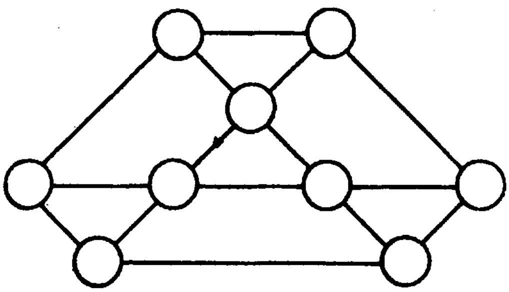
πράγμα που ισχύει διότι:

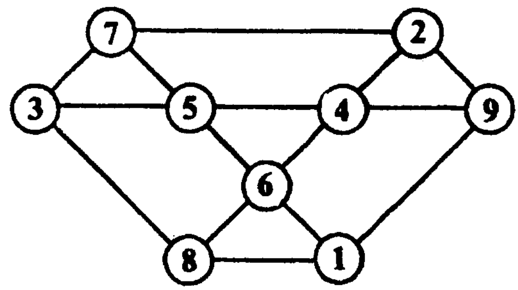
i) $1^3 + 2^3 + \ldots + v^3 = (1+2+\ldots+v)^2$

ii) $v^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + v^3) - \left((1^3 + 2^3 + \ldots + (v-1)^3\right)$

5. Οι εννέα κύκλοι του παρακάτω σχήματος είναι κορυφές 4 μικρών και 3 μεγάλων ισοπλεύρων τριγώνων. Γράψετε μέσα σ' αυτούς, τους αριθμούς από 1 μέχρι 9 και μια φορά τον καθένα, έτσι ώστε το άθροισμα των αριθμών των κορυφών κάθε τριγώνου να είναι το ίδιο. (Πρόβλημα του A. Einstein)

Απάντηση

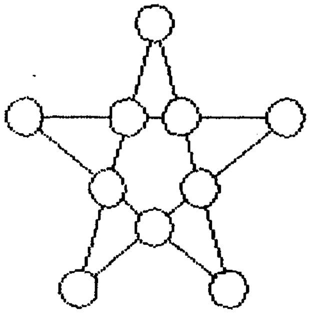


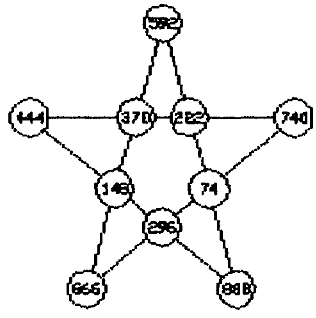


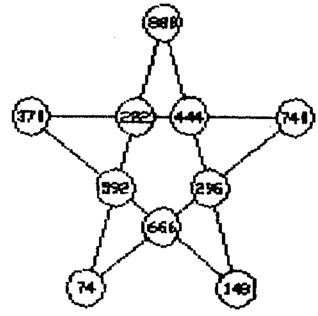
Σχήμα

6. Τοποθετήσετε τους αριθμούς 74, 148, 222, 296, 370, 444, 592, 666, 740 και 888 μέσα στους κύκλους του παρακάτω σχήματος, έτσι ώστε τα αθροίσματα κατά μήκος κάθε πλευράς του σχήματος να είναι 1776.

Απάντηση







Σχήμα

7. Δείξτε, χωρίς τη χρήση υπολογιστή, ότι:

$$\mathbf{7^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{4}}<7 \quad \text{και} \quad 4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{4}}>4.}$$

Λύση

$$7^{\frac{1}{2}}+7^{\frac{1}{3}}+7^{\frac{1}{4}} < 9^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{4}}=3+2+2=7$$

και

$$4^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{4}} > 2+1+1=4.$$

8. Παρατηρούμε ότι:

$$\mathbf{6^2-5^2=11,}$$
$$\mathbf{56^2-45^2=1111,}$$
$$\mathbf{556^2-445^2=111111,}$$
$$\mathbf{5556^2-4445^2=11111111.}$$

Αναφέρετε ένα γενικό τύπο που προκύπτει από τα παραπάνω παραδείγματα και αποδείξτε τον.

Λύση

Η γενίκευση είναι:

$$\left(\underbrace{55\ldots5}_{\nu}6\right)^2-\left(\underbrace{44\ldots4}_{\nu}5\right)^2=\underbrace{11\ldots1}_{2\nu+2} \qquad (\nu=0,1,\ldots)$$

Πραγματικά, αφού $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, το αριστερό μέλος γίνεται

$\left(\underbrace{11\ldots1}_{\nu+1}\right)\left(1\underbrace{00\ldots0}_{\nu}1\right)$ που τελικά μας δίνει το δεύτερο μέλος.

9. Δείξτε ότι $\mathbf{13!=112296^2-79896^2}$.

Λύση

$$112296^2-79896^2=(112296-79896)(112296+79896)=$$
$$=(32400)(192192)=18^2\cdot10^2\cdot192\cdot1001=$$
$$=(2\cdot9\cdot3\cdot6)(2\cdot5\cdot10)(2\cdot8\cdot12)(7\cdot11\cdot13)=13!$$

10. Γράψτε τους αριθμούς από το 1 μέχρι το 10, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς 1, 3, 5, 7, 9 με τη διάταξη που δίνονται.

Απάντηση

1 $= 1 - (3 - 5 - 7 + 9) = 1 + 3 - 5 - 7 + 9 = 1 - 3 + 5 + 7 - 9 =$
$= (1 + 3 \cdot 5 - 7) : 9 = (1 + 3) \cdot (5 - 7) + 9 = (1 \cdot 3 - 5) : (7 - 9) =$
$= (1 + 3 \cdot 5) : (7 + 9) = 1 \cdot (3 - 5) : (7 - 9) = \left[1 : (3 - 5)\right] \cdot (7 - 9) =$
$= 1 : \left[(3 - 5) : (7 - 9)\right] = 1 \cdot 3 : (5 + 7 - 9) =$
$= 1 : \left[3 : (5 + 7 - 9)\right] = (1 : 3) \cdot (5 + 7 - 9).$

2 $= 13 + 5 - (7 + 9) = 13 + 5 - 7 - 9 = 13 \cdot 5 - 7 \cdot 9 =$
$= 1 - 3 \cdot 5 + 7 + 9 = (1 + 3 - 5) \cdot 7 + 9 = 1 - (3 - 5 - 7) : 9 =$
$= (1 + 3 - 5) \cdot (7 - 9) = 1 + 3 : (5 + 7 - 9) = 1 + (3 - 5) : (7 - 9) =$
$= \left[1 : (3 + 5)\right] \cdot (7 + 9) = 1 : \left[(3 + 5) : (7 + 9)\right].$

3 $= 1 \cdot 3 \cdot (5 - 7) + 9 = 13 + 5 \cdot (7 - 9) = \left[(1 + 3) \cdot 5 + 7\right] : 9 =$
$= 1 \cdot \left[3 \cdot (5 - 7) + 9\right] = \left[(1 + 3) : (5 + 7)\right] \cdot 9.$

4 $= (1 + 3) \cdot 5 - 7 - 9 = 1 + 3 \cdot (5 - 7) + 9 = 1 \cdot 3 \cdot (5 + 7) : 9 =$
$= (1 \cdot 3 - 5) \cdot (7 - 9) = 1 \cdot (3 - 5) \cdot (7 - 9)$

5 $= 1 - 3 + 5 - 7 + 9 = 1 - 35 : 7 + 9 = 1 + 3 \cdot (5 + 7) : 9 =$
$= 1 + (3 - 5) \cdot (7 - 9) = 1 - (3 + 5) : (7 - 9) =$
$= (1 - 3) \cdot 5 : (7 - 9)$

6 $= 13 - 5 + 7 - 9 = 1 \cdot 3 + 5 + 7 - 9 = (1 - 3) \cdot 5 + 7 + 9 =$
$= 1 - (3 - 5) \cdot 7 - 9 = 1 \cdot (3 + 5) + 7 - 9 = 1 \cdot (3 + 5 + 7) - 9 =$
$= 1 \cdot (3 + 5 + 7 - 9)$

7 $= 1 + 3 + 5 + 7 - 9 = 1 - (3 - 57) : 9 = (1 + 3 + 5) \cdot 7 : 9 =$
$= (1 - 3 \cdot 5) : 7 + 9 = -1 - 3 - 5 + 7 + 9 = (1 + 3) : (5 - 7) + 9 =$
$= (1 - 3 \cdot 5) : (7 - 9) = (1 : 3) \cdot (5 + 7 + 9)$

8 $= 1 - 3 - 5 \cdot (7 - 9) = (1 - 3 - 5) : 7 + 9 =$
$= (13 \cdot 5 + 7) : 9$

9 $= 1 - 3 - 5 + 7 + 9 = 1 \cdot 3 \cdot (5 + 7 - 9) = 1 \cdot (3 + 5 - 7) \cdot 9 =$
$= (1 \cdot 3 + 5 - 7) \cdot 9 = (13 - 5 - 7) \cdot 9 = \left[1 \cdot (3 + 5) - 7\right] \cdot 9 =$
$= \left[(1 - 3) : (5 - 7)\right] \cdot 9 = \left[1 : (3 + 5 - 7)\right] \cdot 9$

$$\begin{aligned} 10 &= 1\cdot 3+5-7+9=13-5-7+9=1+3\cdot(5+7-9)= \\ &= 1\cdot(3+5)-7+9=1\cdot(3+5-7)+9= \\ &= 1\cdot(3+5-7+9)=1+(3+5-7)\cdot 9=1:(3+5-7)+9= \\ &= (1-3):(5-7)+9=(1:3)\cdot 57-9 \end{aligned}$$

11. Δείξτε ότι $31^{11} < 17^{14}$.

Απόδειξη

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{5\cdot 11} = 2^{55}$$
$$17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{4\cdot 14} = 2^{56}$$

12. Δείξτε ότι $9999^{10} > 99^{20}$.

Απόδειξη

$$9999^{10} = (99\cdot 101)^{10} = 99^{10}\cdot 101^{10} > 99^{10}\cdot 99^{10} = 99^{20}$$

13. Δείξτε ότι $11^{22} > 22^{11}$.

Απόδειξη

$$11^{22}-22^{11} = (11^{11})^2-(2\cdot 11)^{11} = 11^{11}\cdot 11^{11}-2^{11}\cdot 11^{11} = 11^{11}(11^{11}-2^{11}) > 0$$

Αλλιώτικα:

$$\frac{11^{22}}{22^{11}} = \frac{11^{11}\cdot 11^{11}}{2^{11}\cdot 11^{11}} = \left(\frac{11}{2}\right)^{11} > 1$$

14. Δείξτε ότι $202^{303} > 303^{202}$

Απόδειξη

$$202^{303} > 303^{202} \Leftrightarrow \left(202^3\right)^{101} > \left(303^2\right)^{101} \Leftrightarrow 202^3 > 303^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\cdot 101)^3 > (3\cdot 101)^2 \Leftrightarrow 8\cdot 101^3 > 9\cdot 101^2, \text{ που ισχύει}$$

15. Δείξτε ότι $\dfrac{100^{100}+1}{100^{90}+1} > \dfrac{100^{99}+1}{100^{89}+1}$.

Απόδειξη

Πραγματικά:

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1}-\frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} = \frac{(100^{100}+1)(100^{89}+1)-(100^{99}+1)(100^{90}+1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)} =$$
$$= \frac{100^{100}+100^{89}-100^{90}-100^{99}}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)} = \frac{100^{99}(100-1)-100^{89}(100-1)}{(100^{90}+1)(100^{89}+1)} > 0.$$

16. Δείξτε ότι $\dfrac{10^{1991}+1}{10^{1992}+1} > \dfrac{10^{1992}+1}{10^{1993}+1}$.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι $10^2+1>2\cdot 10$

Επομένως $10^{1993}+10^{1991}>2\cdot 10^{1992}$ (πολλαπλασιάζω επί το 10^{1991})

ή $10^{3984}\cdot 10^{1993}+10^{1991}+1>10^{3984}+2\cdot 10^{1992}+1$

(προσθέτω το $10^{3984}+1$ και στα δύο μέλη)

ή $10^{1991}+10^{1993}+10^{1991}+1>10^{1992\cdot 2}+2\cdot 10^{1992}+1$

ή $(10^{1993}+1)\,(10^{1991}+1)>(10^{1992}+1)^2$

ή $\dfrac{10^{1991}+1}{10^{1992}+1} > \dfrac{10^{1992}+1}{10^{1993}+1}$.

17. Δείξτε ότι $\dfrac{365000001}{783000001} > \dfrac{365000000}{783000000}$.

Απόδειξη

Αν $x=\dfrac{365000001}{783000001}$ και $y=\dfrac{365000000}{783000000}$,

τότε $1-x=\dfrac{418000000}{783000001}$ και $1-y=\dfrac{418000000}{783000000}$.

Επομένως $1-y>1-x \iff -y>-x \iff x>y$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θέτομε $\alpha=365000000$ και $\beta=783000000$

Είναι φανερό ότι $\beta>\alpha>0$, $x=\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}$ και $y=\dfrac{\alpha}{\beta}$

Επειδή $x-y=\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}-\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta(\beta+1)}$ και $\beta>\alpha>0$,

παίρνουμε ότι $x>y$.

Υπενθύμιση: Αν $0<\alpha<\beta$, $t>0$ τότε $\dfrac{\alpha+t}{\beta+t} > \dfrac{\alpha}{\beta}$.

18. Υπολογίστε το άθροισμα

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9.$$

Λύση

$$\left.\begin{aligned} 2S &= 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 + 2^{10} \\ S &= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad S = 2^{10} - 1 = 1023$$

19. Πόσες αρνητικές ρίζες έχει η εξίσωση:

$$\text{(E)}: \ x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0;$$

Απάντηση

Η (Ε) ισοδυναμεί με την $(x^2 - 2)^2 = 5x^3 + 7x$. Για κάθε αρνητική τιμή του x, το αριστερό μέλος είναι μη αρνητικό, ενώ το δεξιό αρνητικό. Δεχόμενοι ότι η (Ε) έχει αρνητική ρίζα φθάσαμε σε μαθηματικό αδιέξοδο.

20. Αν

$$\left.\begin{aligned} x &= (\alpha + \beta)(\gamma + \delta), \\ y &= (\alpha + \gamma)(\beta + \delta), \\ z &= (\alpha + \delta)(\beta + \gamma), \\ \alpha &< \beta < \gamma < \delta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x < y < z.$$

Απόδειξη

$$y - x = \alpha\beta + \gamma\delta - \alpha\gamma - \beta\delta = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) > 0 \ \Rightarrow \ x < y.$$

Ακόμη $\quad z - y = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta) > 0 \ \Rightarrow \ y < z.$

21. Αν $m \geq n \geq 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \geq m.$

Απόδειξη

Έστω $m = n + c$ με $c \geq 0$.

Τότε $\quad \sqrt{2mn - n^2} = \sqrt{n^2 + 2nc} \ \geq \ \sqrt{n^2} = n$

και $\quad \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{c^2 + 2nc} \ \geq \ \sqrt{c^2} = c.$

Επομένως $\quad \sqrt{2mn - n^2} + \sqrt{m^2 - n^2} \ \geq \ n + c = m.$

22. Υπολογίστε το άθροισμα:

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{99}{100!}$$

Λύση

Ισχύει ότι: $\dfrac{\kappa}{(\kappa+1)!} = \dfrac{1}{\kappa!} - \dfrac{1}{(\kappa+1)!}, \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$

Επομένως $S = \left(\dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!}\right) + \left(\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{99!} - \dfrac{1}{100!}\right) = 1 - \dfrac{1}{100!}.$

II. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Επιζητούσα τη βεβαιότητα όπως κάποιοι επιζητούν τη θρησκευτική πίστη. Σκεφτόμουν πως ασφαλώς θα ήταν πιο πιθανό η βεβαιότητα να βρίσκεται στα μαθηματικά παρά οπουδήποτε αλλού. Ανακάλυψα όμως ότι πολλές μαθηματικές αποδείξεις, που οι δάσκαλοί μου περίμεναν να τις αποδεχτώ, ήταν γεμάτες λάθη κι ακόμα ότι, αν μπορούσε πράγματι να ανακαλυφθεί βεβαιότητα στα μαθηματικά, αυτό θα γινόταν σε ένα νέο τομέα των μαθηματικών, με πιο στέρεα θεμέλια από εκείνα που θεωρούνταν ασφαλή μέχρι τότε. Αλλά καθώς προχωρούσε το έργο, θυμόμουν διαρκώς το μύθο του ελέφαντα και της χελώνας. Είχα φτιάξει έναν ελέφαντα πάνω στον οποίο θα μπορούσε να στηριχθεί όλος ο μαθηματικός κόσμος και μετά ανακάλυψα ότι ο ελέφαντας παραπατούσε· προχώρησα λοιπόν να φτιάξω μια χελώνα για να κρατήσω τον ελέφαντα να μην πέσει. Αλλά και η χελώνα δεν ήταν πιο ασφαλής από τον ελέφαντα και, μετά από είκοσι χρόνια υπερβολικά επίπονης εργασίας, έφτασα στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούσα να κάνω τίποτε περισσότερο για να γίνει η μαθηματική γνώση αναμφισβήτητη.

Bertrand Russell

Από την άλλη μεριά, όταν είναι πιο προχωρημένος ο μαθητής,όταν εξοικειώνεται με τη μαθηματική συλλογιστική και το μυαλό του έχει ωριμάσει από την ίδια του την πείρα, οι απορίες θα γεννιούνται μόνες τους και τότε οι αποδείξεις σας θα είναι ευπρόσδεκτες. Θα προκαλούν καινούριες απορίες και τα ερωτήματα θα γεννιούνται στο παιδί με τη σειρά, όπως με τη σειρά γεννήθηκαν και μέσα στους πατεράδες μας, που έφτασαν πια σ' ένα τέτοιο σημείο που μόνον η τέλεια αυστηρότητα μπορεί να τους ικανοποιήσει. Δεν αρκεί ν' αμφιβάλουμε για το καθετί. Είναι ανάγκη να ξέρουμε γιατί αμφιβάλλουμε.

Ανρί Πουανκαρέ

«Ένας υπεύθυνος ζωολογικού κήπου, δίνοντας οδηγίες στο βοηθό του να βγάλει απ' το κλουβί τις άρρωστες σαύρες, του είπε: «Πάρε έξω απ' το κλουβί εκείνο το σύνολο των άρρωστων ζώων«. Η γλώσσα είναι σωστή, ακριβής, στερεότυπη θεωρητική γλώσσα, αλλά δε λέει τίποτα περισσότερο από τη φράση «Βγάλε απ' το κλουβί τις άρρωστες σαύρες»... Οι άνθρωποι που χρησιμοποιούν τα μαθηματικά στην επιστήμη, τη μηχανική και ούτω καθεξής, ποτέ δεν χρησιμοποιούν τις σχοινοτενείς προτάσεις του φανταστικού μας υπεύθυνου του ζωολογικού κήπου... Οι περισσότεροι άνθρωποι που μελέτησαν τα εγχειρίδια αυτά μάλλον θα τα χάσουν, όταν ανακαλύψουν ότι τα σύμβολα $\cup$ και $\cap$ που αναφέρονται στην ένωση ή την τομή των συνόλων, η ειδική χρήση των αγκυλών και τα τοιαύτα, όλα τα επιτηδευμένα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για τα σύνολα στα βιβλία αυτά, δεν εμφανίζονται σχεδόν ποτέ σε κείμενα θεωρητικής φυσικής, μηχανικής, λογιστικής επιχειρήσεων, σχεδιασμού κομπιούτερ ή σ' άλλους τομείς όπου χρησιμοποιούνται μαθηματικά. Δεν βλέπω να υπάρχει ανάγκη ούτε και λόγος για να ερμηνεύονται ή και να διδάσκονται όλα αυτά τα στοιχεία. Δεν είναι πρακτικός τρόπος για να εκφραζόμαστε. Δεν είναι τρόπος σαφής και απλός. Υποστηρίζουν πως είναι ακριβής, αλλά ακριβής για ποιο σκοπό;»

R.P. Feynman*

*** Βραβείο Νόμπελ Φυσικής το 1965 για το θεμελιακό του έργο στην κβαντική ηλεκτροδυναμική, που έχει σοβαρές συνέπειες στη φυσική των στοιχειωδών σωματίων. Ανήκει στους θεμελιωτές της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, υπήρξε όμως εξίσου γνωστός ως εμπνευσμένος δάσκαλος της φυσικής χάρη στους τρεις τόμους των φημισμένων παραδόσεών του.**

Ο μόνος δρόμος που μας απομένει τώρα είναι ο κίνδυνος. Είναι η μαυριδερή εκείνη διαχωριστική γραμμή που σχηματίζεται δεξιά, στο βάθος, η γεμάτη βράχια κοφτά, ξέρες, ύφαλα, ρουφήχτρες, απονέρια. Μένουμε σταματημένοι μεσοπέλαγα. Η μοναξιά της θάλασσας είναι πικρή και ατελεύτητη. Απλώνεται ως τ' ακρότατα όρια του ορίζοντα, τεντώνεται, τσιτώνεται θα 'λεγες, ώσπου κάποια στιγμή ο νους σου ν' αγγίξει από το άλλο του άκρο το ιδανικό που κείται πέραν· στην ουσία όμως γειτονεύει όπως συμβαίνει μ' όλα τ' αντίθετα στην έσχατη έντασή τους. Αλήθεια, νιώθω τώρα να 'μαι κοντά, σχεδόν «ν' ακουμπώ» 'κείνα που διηγούνται οι παλιοί ναυτικοί. Για μια ζώνη απέραντης και άπεφθης καθαρότητας όπου το βάρος σου εκεί δεν μετράει κι όπου το φως δεν είναι του ηλίου που ξέρουμε μήτε κανενός άλλου τεχνητού ή ουρανίου σώματος. Είναι το φως που δεν χρειάζεται να περάσει από τα μάτια για να σου γίνει αισθητό. Εκεί, έχουν να λένε, συντελείται η επανάκτηση του σώματος μείον την εύτρωτη πλευρά του. Η ανασύνθεση της ύλης που σε αποτελεί, με βάση δεδομένα εντελώς άγνωστα για μας και συγκλονιστικά, προπάντων από την άποψη ότι δεν υπάγονται πλέον στις διαδικασίες του χρόνου. Στροφή λοιπόν όλο δεξιά και πρόσω καταπάνω στον κίνδυνο. Δεν γίνεται αλλιώς. Ή θα συνθηκολογήσεις και θα μείνεις από τους εδώθε ή θα περάσεις πέρα. Προσοχή. Κανένας μην λιγοψυχήσει. Τα χέρια στο τιμόνι. Κιόλας ένα μήνυμα διήγηνου οξυγόνου φτάνει ως εμάς. Προσοχή. Θάρρος. Έφτασε ο καιρός να επαληθευτούμε. Τα χέρια στο τιμόνι. Πρόσω. Πρόσω ηρέμα προς το μη θολούμενον, το έτρεπτον, το γυμνόν, το φαίνον, το αυτώ καταληπτόν, το αναλλοίωτον.

(ΟΔΥΣΣΕΑΣ ΕΛΥΤΗΣ: ΙΔΙΩΤΙΚΗ ΟΔΟΣ, ΣΕΛ. 79)

«Όταν ένας μαθητής αρχίζει στα σοβαρά να μελετά τα μαθηματικά, πιστεύει ότι ξέρει τι είναι κλάσμα, τι είναι συνέχεια και τι είναι το εμβαδόν μιας καμπυλόγραμμης επιφάνειας. Θεωρεί προφανές λογουχάρη ότι μια συνεχής συνάρτηση δε μπορεί ν' αλλάξει πρόσημο χωρίς να μηδενιστεί. Αν, χωρίς να τον προετοιμάσεις καθόλου, του πεις: «Όχι, αυτό δεν είναι καθόλου προφανές. Θα πρέπει να σου το αποδείξω». Κι αν η απόδειξη βασίζεται σε αρχές που δε φαίνονται σ' αυτόν πιο προφανείς από το συμπέρασμα, τότε τι θα σκεφτεί ο δύστυχος ο μαθητής; Θα σκεφτεί ότι η επιστήμη των μαθηματικών είναι απλούστατα μια αυθαίρετη συσσώρευση άχρηστων ακριβολογιών. Είτε θα τον αηδιάσει αυτό είτε θα το γλεντήσει σαν παιχνιδάκι και θ' αποκτήσει νοοτροπία αντίστοιχη με των αρχαίων Ελλήνων σοφιστών».

Ανρί Πουανκαρέ

1. α) Συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\frac{2{,}000004}{(1{,}000004)^2+2{,}000004} \quad \text{και} \quad \frac{2{,}000002}{(1{,}000002)^2+2{,}000002}$$

β) Δείξτε ότι:

$$(17091982!)^2 > (17091982)^{17091982}$$

Λύση

α) Θέτουμε $\alpha=1{,}000004$ και $\beta=1{,}000002$.

Αρκεί να συγκρίνουμε τους αριθμούς:

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} \quad \text{και} \quad \frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2} \quad \text{με} \quad \alpha>\beta.$$

Επειδή $\alpha>\beta$, ισχύει:

$$\frac{1+\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\beta}=\frac{1+\beta}{\beta^2} \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{1+\alpha}>\frac{\beta^2}{1+\beta}.$$

Ακόμη έχουμε

$$\frac{1+\alpha+\alpha^2}{1+\alpha}=1+\frac{\alpha^2}{1+\alpha}>1+\frac{\beta^2}{1+\beta}=\frac{1+\beta+\beta^2}{1+\beta},$$

δηλαδή

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}<\frac{1+\beta}{1+\beta+\beta^2}.$$

β) Για ν φυσικό με $\nu > 2$ ισχύει η σχέση $(\nu!)^2 > \nu^\nu$ (1)
(Βλέπε* άσκηση 68, σελ. 45, τεύχος 1)
Από την (1) για $\nu=17091982$ παίρνουμε την αποδεικτέα.

2. Δείξτε ότι

$$S_\nu = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Απόδειξη

Για $\kappa > 1$ ισχύει $\kappa > \kappa-1$, οπότε $\frac{1}{\kappa} < \frac{1}{\kappa-1}$ και $\frac{1}{\kappa^2} < \frac{1}{\kappa(\kappa-1)}$ με $\kappa > 1$.

Άρα $$S_\nu < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)^\nu} \quad (1)$$

Επειδή, $\frac{1}{(\kappa-1)\kappa} = \frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{\kappa}$ με $\kappa=2,3,\ldots$

η (1) γράφεται

$$S_\nu < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\nu-1} - \frac{1}{\nu}\right) = 2 - \frac{1}{\nu} < 2, \quad \nu = 1,2,\ldots .$$

3. Δείξτε ότι $\displaystyle\sum_{\kappa=2}^{\nu} \frac{\kappa^3-\kappa-1}{(\kappa+1)!} < \frac{5}{2}$.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\sum_{\kappa=2}^{\nu} \frac{\kappa^3-\kappa-1}{(\kappa+1)!} = \sum_{\kappa=2}^{\nu} \frac{\kappa(\kappa-1)(\kappa+1)-1}{(\kappa+1)!} = \sum_{\kappa=2}^{\nu} \left(\frac{1}{(\kappa-2)!} - \frac{1}{(\kappa+1)!}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{4!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{5!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{6!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(\nu-2)!} - \frac{1}{(\nu+1)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{(\nu-1)!} - \frac{1}{\nu!} - \frac{1}{(\nu+1)!} = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{(\nu-1)!} + \frac{1}{\nu!} + \frac{1}{(\nu+1)!}\right) < \frac{5}{2}.$$

---

* Αλλιώτικα: $\nu!\ \nu! = (1\cdot 2 \cdots \nu)\big(\nu(\nu-1)\cdots 1\big) = (1\cdot\nu)\big(2(\nu-1)\big)\cdots(\nu\cdot 1) > \nu^\nu$, διότι $1\cdot\nu = \nu\cdot 1 = \nu$ και $\kappa(\nu-\kappa+1) = (\nu-\kappa)(\kappa-1) + \nu > \nu$ (2). Από την (2) για $\kappa=2,3,\ldots,\nu-1$ παίρνουμε την $(\nu!)^2 > \nu^\nu$.

4. Δείξτε ότι:

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{v^3} < \frac{5}{4}, \qquad v \in N^*.$$

Απόδειξη

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{v^3} < 1+\frac{1}{2^3-2}+\frac{1}{3^3-3}+\ldots+\frac{1}{v^3-v}=$$

$$=1+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(v-1)v(v+1)}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(v-1)v}-\frac{1}{v(v+1)}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{v(v+1)}\right)=\frac{5}{4}-\frac{1}{2v(v+1)} < \frac{5}{4}.$$

5. Δείξτε ότι $S_v = 1\cdot1!+2\cdot2!+\ldots+v\cdot v! < (v+1)!$

Υπενθύμιση:

$v! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(v-1)\cdot v,$ $\quad$ v φυσικός

$0! = 1! \equiv 1$

$(2v)!! = 2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2v-2)(2v)$

$(2v-1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2v-3)\,(2v-1)$

Λύση

Ισχύει: $\kappa\cdot\kappa! = \left[(\kappa+1)-1\right]\cdot\kappa! = (\kappa+1)!-\kappa!$

Επομένως:

$S_v = (2!-1!)+(3!-2!)+\ldots+\left[(v+1)!-v!\right] = (v+1)!-1 < (v+1)!$

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\alpha < \beta+\gamma \Rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta}{1+\beta} < \frac{\gamma}{1+\gamma}$.

Απόδειξη

Έχουμε $\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}-\frac{\alpha}{1+\alpha}=\frac{\alpha\beta\gamma+2\beta\gamma+(\beta+\gamma-\alpha)}{(1+\alpha)\,(1+\beta)\,(1+\gamma)} > 0,$

αφού κάθε όρος στον αριθμητή είναι θετικός.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Εξ υποθέσεως:

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta+\gamma} \Rightarrow 1+\frac{1}{\alpha} > 1+\frac{1}{\beta+\gamma} \Rightarrow \frac{1+\alpha}{\alpha} > \frac{1+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}.$$

Άρα

$$\frac{\alpha}{1+\alpha} < \frac{\beta+\gamma}{1+\beta+\gamma} = \frac{\beta}{1+\beta+\gamma}+\frac{\gamma}{1+\beta+\gamma} < \frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}.$$

7. Αν

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=\dfrac{x^4}{y^4}+\dfrac{y^4}{x^4}-\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \\ x,y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y)\geq 2 .$$

Απόδειξη

$$f(x,y)-2=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right) \geq \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0.$$

8. Αν ν θετικός ακέραιος και $\alpha>2 \Rightarrow \nu<\alpha^\nu$.

Απόδειξη

$$\nu=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\nu\text{-πλήθος}} \leq 1+\alpha+\alpha^2+\ldots\alpha^{\nu-1}=\frac{\alpha^\nu-1}{\alpha-1} \leq \alpha^\nu-1<\alpha^\nu.$$

9. Αν ν φυσικός ($\nu>1$), δείξτε ότι:

$$\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}>1.$$

Απόδειξη

$$\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}>\frac{1}{\nu}+\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^2}(\nu^2-\nu)=\frac{1}{\nu}+1-\frac{1}{\nu}=1 .$$

10. Δείξτε ότι $7^{10} > 5^{10} + 6^{10}$.

(Βλέπε άσκηση 46, σελ. 35, τεύχος 1)

Απόδειξη

Επειδή $5^{10} + 6^{10} < 2 \cdot 6^{10}$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$7^{10} > 2 \cdot 6^{10} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{7}{6}\right)^{10} > 2$, πράγμα που ισχύει διότι

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{10} = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^{10} > 1 + 10 \cdot \frac{1}{6} > 2 .$$

(**Υπενθύμιση:** Για α πραγματικό ($\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$) και ν φυσικό ($\nu > 1$), ισχύει: $(1+\alpha)^{\nu} > 1 + \nu\alpha$ (Ανισότητα του J. Bernoulli)).

11. Για ν φυσικόν ($\nu \geq 3$), δείξτε ότι:

$$\nu! < 2\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu}$$

Απόδειξη

$$\sqrt[\nu-1]{(\nu-1)!} < \frac{1+2+\ldots+(\nu-1)}{\nu-1} = \frac{(\nu-1)\nu}{2(\nu-1)} = \frac{\nu}{2},$$

δηλαδή

$$(\nu-1)! < \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu-1} \Rightarrow \nu! < \nu\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu-1} = 2 \cdot \frac{\nu}{2} \cdot \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu-1} = 2\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu} .$$

12. Αν $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^{14} + \frac{1}{x^{14}} = -1$.

Απόδειξη

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = -1 \quad \text{και} \quad x^3 = 1 .$$

Επομένως

$$x^{14} + \frac{1}{x^{14}} = x^{12} \cdot x^2 + \frac{1}{x^{12} \cdot x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1 .$$

13. Αν $x + \frac{1}{x} = \kappa$, υπολογίστε σε συνάρτηση του κ την παράσταση $x^{13} + \frac{1}{x^{13}}$.

Λύση

Ισχύουν:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\kappa^2-2,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=\kappa^4-\ 4\kappa^2+2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\kappa^3-3\kappa,$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2-2=\kappa^6-6\kappa^4+9\kappa^2-2,$$

$$x^7+\frac{1}{x^7}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=(\kappa^4-4\kappa^2+2)\ (\kappa^3-3\kappa)-\kappa=$$
$$=\kappa^7-6\kappa^5+14\kappa^3-7\kappa,$$

$$x^{13}+\frac{1}{x^{13}}=\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=$$
$$=(\kappa^7-7\kappa^5+14\kappa^3-7\kappa)\ (\kappa^6-6\kappa^4+9\kappa^2-2)-\kappa=$$
$$=\kappa^{13}-13\kappa^{11}+65\kappa^9-156\kappa^7+182\kappa^5-91\kappa^3+13\kappa.$$

Αξιομνημόνευτες σχέσεις:

(Α) $$x^{2\mu}+\frac{1}{x^{2\mu}}=\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)^2-2$$

(Β) $$\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)\left(x^\nu+\frac{1}{x^\nu}\right)=\left(x^{\mu+\nu}+\frac{1}{x^{\mu+\nu}}\right)+\left(x^{\mu-\nu}+\frac{1}{x^{\mu-\nu}}\right)$$

(Γ) $$x^{\mu+\nu}+\frac{1}{x^{\mu+\nu}}=\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)\left(x^\nu+\frac{1}{x^\nu}\right)-\left(x^{\mu-\nu}+\frac{1}{x^{\mu-\nu}}\right)$$

(Δ) $$x^{\mu+1}+\frac{1}{x^{\mu+1}}=\left(x^\mu+\frac{1}{x^\mu}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{\mu-1}+\frac{1}{x^{\mu-1}}\right)$$

14. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\dfrac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=0$.

Απόδειξη

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{\beta-\gamma}=-\frac{\beta}{\gamma-\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha-\beta} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{\alpha}{\beta-\gamma}=\frac{(\beta-\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)} \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}=\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}.$$

Όμοια ισχύουν

$$\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}=\frac{\alpha-\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.$$

Επομένως

$$\sum \frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}=\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{\alpha-\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}+\frac{\alpha+\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{0}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=0 \quad (\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha).$$

15. Αν $\alpha_{\kappa-1}=\dfrac{3\kappa^2-3\kappa+1}{(\kappa^2-\kappa)^3}$, $(\mathbb{N}\ni\kappa\geq 2)$, δείξτε ότι

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{99}=0,999999$$

Απόδειξη

$$\alpha_{\kappa-1}=\frac{\kappa^3-(\kappa-1)^3}{\kappa^3(\kappa-1)^3}=\frac{1}{(\kappa-1)^3}-\frac{1}{\kappa^3}.$$

Άρα $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\kappa=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2^3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}-\dfrac{1}{3^3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{\kappa^3}-\dfrac{1}{(\kappa+1)^3}\right)=1-\dfrac{1}{(\kappa+1)^3}$.

Επομένως $\quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{99}=1-\dfrac{1}{(100)^3}=0,999999$.

16. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις συνθήκες:

α) $f\big(x+f(y)\big)=f(x+y)+1$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα (δηλαδή $x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$).

Λύση

Αν στην (α) εναλλάξουμε τα x και y παίρνουμε:

(γ) $f\big(y+f(x)\big)=f(x+y)+1$.

Από (α), (γ) έχουμε ότι: $f\big(x+f(y)\big)=f\big(y+f(x)\big)$,

δηλαδή $y+f(x)=x+f(y)$ και για $y=0$ παίρνουμε ότι $f(x)=x+f(0)$.

Επειδή $f(x)=x+f(0)$, από την (α) παίρνουμε

$\big[x+\big(y+f(0)\big)\big]+f(0)=\big[x+y+f(0)\big]+1$ ή $f(0)=1$.

Επομένως η ζητούμενη f έχει τύπο $f(x)=x+1$.

17. Αν $\gamma>0$, $\alpha>\gamma$, $\beta>\gamma$ δείξτε ότι:

$$\sqrt{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}+\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\ \le\ 2\sqrt{\alpha\beta}$$

Απόδειξη

Η σχέση για απόδειξη γράφεται:

$$A=\sqrt{\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)}+\sqrt{\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)}\quad\le 2$$

Επειδή $0<\dfrac{\gamma}{\alpha}<1$, $0<\dfrac{\gamma}{\beta}<1$ υπάρχουν τόξα $\omega,\ \varphi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε

$\dfrac{\gamma}{\alpha}=\sigma\upsilon\nu\omega$, $\dfrac{\gamma}{\beta}=\sigma\upsilon\nu\varphi$.

Επομένως

$$A=\sqrt{(1+\sigma\upsilon\nu\omega)(1+\sigma\upsilon\nu\varphi)}+\sqrt{(1-\sigma\upsilon\nu\omega)(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}=$$

$$=2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\varphi}{2}+\eta\mu\frac{\omega}{2}\ \eta\mu\frac{\varphi}{2}\right)=2\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\le 2.$$

18. Αν $\alpha,\beta,\gamma,\in R$ και $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, δείξτε ότι

$$-\frac{1}{2}\le\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\le 1.$$

Απόδειξη

Η σχέση για απόδειξη γράφεται ισοδύναμα:

$$-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ \le\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ \le\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ \le\ 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\ \le\ 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

που ισχύει διότι: $2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2\ge 0$

και $2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\ge 0$

19. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ και $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, δείξτε ότι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta \neq 1.$$

Απόδειξη

Έστω ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta=1, \quad (A)$

Τότε

$(A) \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\delta-\beta\gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2+(\beta+\gamma)^2+(\gamma+\delta)^2+(\alpha-\delta)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta=\beta+\gamma=\gamma+\delta=\alpha-\delta=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0,$ άτοπο.

Γενίκευση: Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$ και $\alpha\delta-\beta\gamma=\kappa, \quad \kappa\in R^*$, δείξτε ότι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha\beta+\gamma\delta \neq \kappa.$$

20. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ και $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1=\beta_1^2+\beta_2^2$ δείξτε ότι

$$|\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2| \leq 1.$$

Απόδειξη

$$|\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2| \leq |\alpha_1\beta_1|+|\alpha_2\beta_2| \leq \frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{2}+\frac{\alpha_2^2+\beta_2^2}{2}=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{2}+\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}=1.$$

21. Αν

$$\left.\begin{array}{r} x,y,z\in R \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Απόδειξη

Για κάθε x, y, z $\in$ **R** ισχύει:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

Επομένως $3(x^2+y^2+z^2) \geq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2=1$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}\left[x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2)\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}\left[x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\right]=\frac{1}{3}(x+y+z)^2=\frac{1}{3}.$$

Γενίκευση: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=1 \Rightarrow \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2 \geq \frac{1}{\nu}$

Απόδειξη

Θέτουμε $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2=\beta$. Αρκεί τότε να δείξουμε ότι:

$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu=1 \Rightarrow \beta \geq \frac{1}{\nu}$.

Είναι φανερό ότι ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha_1}{\beta}-1\right)^2+\left(\frac{\alpha_2}{\beta}-1\right)^2+\ldots+\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta}-1\right)^2 \geq 0$$

ή $$\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_\nu^2}{\beta^2}-2\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu}{\beta}+\nu \geq 0$$

ή $$\frac{\beta}{\beta^2}-\frac{2}{\beta}+\nu \geq 0 \quad \text{ή} \quad \nu \geq \frac{1}{\beta} \quad \text{ή} \quad \beta \geq \frac{1}{\nu}.$$

22. Αν $\left\{\begin{matrix} x, y, z, \omega \geq 0 \\ 2x+xy+z+yz\omega=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2y^2z^2\omega \leq \frac{1}{512}$

Απόδειξη

$$\sqrt[4]{2x^2y^2z^2\omega}=\sqrt[4]{2x\cdot xy\cdot z\cdot yz\omega} \leq \frac{2x+xy+z+yz\omega}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow x^2y^2z^2\omega \leq \frac{1}{512}.$$

23. Αν $\alpha+\beta \geq 1$ **δείξτε ότι** $\alpha^4+\beta^4 \geq 0{,}125$.

Απόδειξη

$\alpha+\beta \geq 1 \Rightarrow (\alpha+\beta)^2 \geq 1 \Rightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \geq 1 \quad (1)$

$(\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2 \geq 0 \quad (2)$

Από (1), (2) προκύπτει ότι $\alpha^2+\beta^2 \geq 0{,}5 \quad (3)$

Από (3) προκύπτει ότι $\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2 \geq 0{,}25 \quad (4)$

Ισχύει ακόμη ότι $\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4 \geq 0 \quad (5)$

Από (4), (5) παίρνουμε ότι $\alpha^4+\beta^4 \geq 0{,}125$

24. Αν p, q, r, s θετικοί, δείξτε ότι:

$$\prod = \frac{(p^2+p+1)\,(q^2+q+1)\,(r^2+r+1)\,(s^2+s+1)}{pqrs} \geq 81$$

Απόδειξη

$$\prod = \frac{p^2+p+1}{p}\cdot\frac{q^2+q+1}{q}\cdot\frac{r^2+r+1}{r}\cdot\frac{s^2+s+1}{s} =$$

$$= \left(p+\frac{1}{p}+1\right)\left(q+\frac{1}{q}+1\right)\left(r+\frac{1}{r}+1\right)\left(s+\frac{1}{s}+1\right) \geq$$

$$\geq (2+1)\,(2+1)\,(2+1)\,(2+1) = 3^4 = 81$$

25. Αν $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$, δείξτε ότι:

$$\sqrt{(\alpha+\gamma)\,(\beta+\delta)} \geq \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\gamma\delta}.$$

Απόδειξη

$$\sqrt{(\alpha+\gamma)\,(\beta+\delta)} = \sqrt{\alpha\beta+\alpha\delta+\beta\gamma+\gamma\delta+2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}-2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}\right)^2+\left(\sqrt{\alpha\delta}-\sqrt{\beta\gamma}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}\right)^2} = \sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\gamma\delta}.$$

26. Αν $\alpha \geq 0$, δείξτε ότι $\alpha^5+(1-\alpha)^5 \geq \dfrac{1}{16}$.

Υπόδειξη: Χωρίς να είναι υποχρεωτικό, χρησιμοποιήσετε το λήμμα:
Αν $\alpha+\beta \geq 0$, δείξτε ότι $2^{\nu-1}(\alpha^\nu+\beta^\nu) \geq (\alpha+\beta)^\nu$.

Απόδειξη

Για $\alpha=\alpha$, $\beta=1-\alpha$ $\quad(\alpha+\beta=1>0)$, $\nu=5$ έχουμε

$$2^4\left(\alpha^5+(1-\alpha)^5\right) \geq \left(\alpha+(1-\alpha)\right)^5 \quad \text{ή} \quad \alpha^5+(1-\alpha)^5 \geq \frac{1}{16}.$$

Η απόδειξη του λήμματος, με μαθηματική επαγωγή, είναι απλή.

27. Αν $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2\kappa} \le 1 \quad (\kappa \in N^*)$, δείξτε ότι

$$\sqrt{\alpha_1^2 + (1-\alpha_2)^2} + \sqrt{\alpha_2^2 + (1-\alpha_3)^2} + \ldots + \sqrt{\alpha_{2\kappa-1}^2 + (1-\alpha_{2\kappa})^2} +$$

$$+ \sqrt{\alpha_{2\kappa}^2 + (1-\alpha_1)^2} \ \ge \ \kappa\sqrt{2}.$$

Απόδειξη

Έστω $0 \le \alpha, \beta \le 1$. Εφαρμόζουμε την ανισοϊσότητα των Cauchy - Schwarz - Buniakowski:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \ \ge \ (\alpha x + \beta y)^2, \text{ για τον πίνακα } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix},$$

παίρνουμε

$$(1^2 + 1^2)\left(\alpha^2 + (1-\beta)^2\right) \ \ge \ (\alpha + 1 - \beta)^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2} \ \ge \ \alpha + 1 - \beta \quad \text{ή} \quad \sqrt{\alpha^2 + (1-\beta)^2} \ =$$

$$= \ \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha^2 + (1-\beta)^2}{2}} \ \ge \ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + 1 - \beta).$$

Επομένως

$$\sqrt{\alpha_1^2 + (1-\alpha_2)^2} + \ldots + \sqrt{\alpha_{2\kappa}^2 + (1-\alpha_1)^2} \ \ge$$

$$\ge \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left((\alpha_1 + 1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_{2\kappa} + 1 - \alpha_1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2\kappa = \kappa\sqrt{2}$$

28. Να παραγοντοποιηθεί στο Z η παράσταση:

$$(x^4 - 1)^4 - x - 1$$

Λύση

$$(x^4 - 1)^4 - x - 1 = (x^4 - 1)^4 - x^4 + (x^4 - x - 1) =$$
$$= (x^4 - x - 1)\left[(x^4 - 1)^3 + (x^4 - 1)^2 x + (x^4 - 1)x^2 + x^3 + 1\right].$$

Ο δεύτερος παράγοντας μηδενίζεται για x=-1 και x=0 και συνήθως ισούται με

$$x(x+1)(x^{10} - x^9 + x^8 - 3x^6 + 3x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1).$$

29. Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου, δείξτε ότι

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}\geq 3.$$

Απόδειξη

Είναι $\beta+\gamma-\alpha>0$, $\gamma+\alpha-\beta>0$, $\alpha+\beta-\gamma>0$. Αν

$$\left.\begin{aligned} x&=\beta+\gamma-\alpha\\ y&=\gamma+\alpha-\beta\\ z&=\alpha+\beta-\gamma\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\dfrac{y+z}{2}\\ \beta=\dfrac{z+x}{2}\\ \gamma=\dfrac{x+y}{2}\end{cases}$$

Επομένως

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}=3$$

(Υπενθύμιση: $\frac{1}{2}(p+q)\geq\sqrt{pq},\quad p,q\geq 0$)

30. Στη διαίρεση του $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^{9}+x$ δια του $x^{3}-x$, ποιο είναι το υπόλοιπο;

Λύση

$$\frac{x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^{9}+x}{x^{3}-x}=\frac{x^{80}+x^{48}+x^{24}+x^{8}+1}{x^{2}-1}=$$

$$=\frac{(x^{80}-1)+(x^{48}-1)+(x^{24}-1)+(x^{8}-1)+5}{x^{2}-1}$$

Αφού το x^2-1 διαιρεί το $x^{2\nu}-1$, το υπόλοιπο φαίνεται να είναι το 5. Επειδή όμως το x υπήρχε και στον αριθμητή και στον παρανομαστή, το υπόλοιπο στην πραγματικότητα θα είναι το $5x$, επειδή $\dfrac{5}{x^2-1}=\dfrac{5x}{x^3-x}$.

31. Αν α, β, γ, $\delta\geq 0$ δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}\geq\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Απόδειξη

$$\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\delta}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\gamma+\delta}{2}},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}, \quad \frac{\gamma+\delta}{2} \geq \sqrt{\gamma\delta}$$

Επομένως $\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\gamma+\delta}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\cdot\sqrt{\gamma\delta}} = \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}$

Άρα $\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta} \leq \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\gamma+\delta}{2}}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}.$

32. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $S=\sum_{i=1}^{\nu} x_i$, $P=\prod_{i=1}^{\nu} x_i$, $S'=\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x_i}$, δείξτε ότι :

i) $SS' \geq \nu^2$

ii) $\prod_{i=1}^{\nu}(S-x_i) \geq (\nu-1)^\nu P$

Απόδειξη

i)
$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_\nu &\geq \nu\sqrt[\nu]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_\nu} \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu} &\geq \nu\sqrt[\nu]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_\nu}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+x_2+\ldots+x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_\nu}\right) \geq \nu^2 \Rightarrow SS' \geq \nu^2$$

ii) Ισχύουν:

$$\left.\begin{aligned} x_2+x_3+\ldots+x_\nu &\geq (\nu-1)\sqrt[\nu-1]{x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_\nu} \\ x_1+x_3+\ldots+x_\nu &\geq (\nu-1)\sqrt[\nu-1]{x_1\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_\nu} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1} &\geq (\nu-1)\sqrt[\nu-1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_{\nu-1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{\nu}(S-x_i) \geq (\nu-1)^\nu P$$

33. Αν α, β, γ πλευρές τριγώνου, δείξτε ότι:

$$3\alpha\beta\gamma \geq \alpha^2(\beta+\gamma-\alpha)+\beta^2(\alpha+\gamma-\beta)+\gamma^2(\alpha+\beta-\gamma)$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$. Διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
&3\alpha\beta\gamma+\alpha^2(\alpha-\beta-\gamma)+\beta^2(\beta-\alpha-\gamma)+\gamma^2(\gamma-\alpha-\beta)=\\
&=3\alpha\beta\gamma+\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-\alpha^2\beta-\beta^2\alpha-\alpha^2\gamma-\beta^2\gamma-\gamma^2\alpha-\gamma^2\beta=\\
&=\alpha^2(\alpha-\beta)+\beta^2(\beta-\alpha)+\gamma(2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2)+\gamma(\gamma^2-\beta\gamma+\alpha\beta-\alpha\gamma)=\\
&=(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)-\gamma(\alpha-\beta)^2+\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=\\
&=(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta-\gamma)+\gamma(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma) \geq 0
\end{aligned}$$

διότι $(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, $\alpha+\beta-\gamma>0$, $\gamma>0$, $\beta-\gamma \geq 0$ και $\alpha-\gamma \geq 0$.

34. Οι πλευρές α, β, γ δεδομένου τριγώνου ικανοποιούν τη σχέση $\alpha+\beta+\gamma=2$. Δείξτε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta\gamma<2$.

Απόδειξη

Από την $\alpha+\beta+\gamma=2 \Rightarrow \alpha<1$, $\beta<1$, $\gamma<1$.

Είναι

$$\begin{aligned}
&A \equiv (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > 0 \Rightarrow\\
&A \equiv 1-(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta\gamma=\\
&=-1+\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}-\alpha\beta\gamma=\\
&=-1+\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{2}-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}-\alpha\beta\gamma=\\
&=1-\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2}-\alpha\beta\gamma>0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\alpha<2.
\end{aligned}$$

35. Αν α, β, $\gamma>0$, δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2} \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2} \geq \dfrac{\alpha+\beta}{3}$ (1)

Πραγματικά:

Η (1) $\Leftrightarrow 3(\alpha^3+\beta^3) \geq (\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha^3+2\beta^3 \geq 2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2 \geq 0$, που ισχύει.

Ανάλογα παίρνουμε

$$\frac{\beta^3+\gamma^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2} \geq \frac{\beta+\gamma}{3} \quad (2) \qquad \text{και} \qquad \frac{\gamma^3+\alpha^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2} \geq \frac{\gamma+\alpha}{3} \quad (3)$$

Θέτουμε:

$$S \equiv \frac{\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2},$$

$$T \equiv \frac{\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\gamma^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\alpha^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}.$$

Επομένως

$$T=\frac{\beta^3-\alpha^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}+\frac{\gamma^3-\beta^3}{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}+\frac{\alpha^3-\gamma^3}{\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2}+S=$$
$$=(\beta-\alpha)+(\gamma-\beta)+(\alpha-\gamma)+S=S$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) παίρνουμε:

$$S+T \geq \frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{3} \Rightarrow S \geq \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

36. Αν α, β, γ >0, δείξτε ότι:

$$\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma \geq (\alpha\beta\gamma)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$$

(Βλέπε και άσκηση 62, σελ. 41, τεύχος 1).

Απόδειξη

Ισοδύναμα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\alpha^{2\alpha-\beta-\gamma} \cdot \beta^{2\beta-\alpha-\gamma} \cdot \gamma^{2\gamma-\alpha-\beta} \geq 1.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Τότε $\quad \alpha^{2\alpha-\beta-\gamma} \geq \beta^{2\alpha-\beta-\gamma}$

ή $\quad \alpha^{2\alpha-\beta-\gamma} \cdot \beta^{2\beta-\alpha-\gamma} \geq \beta^{2\alpha-\beta-\gamma} \cdot \beta^{2\beta-\alpha-\gamma} = \beta^{\alpha+\beta-2\gamma}$

ή $\quad \alpha^{2\alpha-\beta-\gamma} \cdot \beta^{2\beta-\gamma-\alpha} \cdot \gamma^{2\gamma-\alpha-\beta} \geq \beta^{\alpha+\beta-2\gamma} \cdot \gamma^{2\gamma-\alpha-\beta} = \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\alpha+\beta-2\gamma} \geq 1$

$\left(\text{«=»} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma\right)$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \geq \alpha^\beta \cdot \beta^\alpha$. Προς τούτο θέτουμε $\dfrac{\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta}{\alpha^\beta \cdot \beta^\alpha}=x$, οπότε $\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta-\beta\ln\alpha-\alpha\ln\beta=\ln x$, δηλαδή $(\alpha-\beta)(\ln\alpha-\ln\beta)=\ln x$. Οι διαφορές μέσα στις παρενθέσεις θα έχουν το ίδιο πρόσημο. Συνεπώς $\ln x \geq 0$ ή $x \geq 1$.

Αλλιώτικα: Υποθέτουμε ότι $\alpha \geq \beta$, οπότε από την $x = \dfrac{\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta}}{\alpha^{\beta} \cdot \beta^{\alpha}}$, παίρνουμε:

$$x = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha-\beta} \geq 1.$$

Αλλιώτικα: Υποθέτουμε ότι $\alpha \geq \beta > 0$

Ως γνωστόν ισχύει: $\alpha \geq \beta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^{\nu} \geq \beta^{\nu}, & \nu > 0 \\ \alpha^{\nu} \leq \beta^{\nu}, & \nu < 0 \end{cases}$

Είναι φανερό ότι $\alpha^{\alpha-\beta} \geq \beta^{\alpha-\beta}$.

Επομένως $\alpha^{\beta} \cdot \beta^{\beta} \cdot \alpha^{\alpha-\beta} \geq \alpha^{\beta} \cdot \beta^{\beta} \cdot \beta^{\alpha-\beta} \Rightarrow \alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \geq \alpha^{\beta} \cdot \beta^{\alpha} \quad (\Sigma)$

Από την (Σ) παίρνουμε:

$$(\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta})(\beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma})(\gamma^{\gamma} \cdot \alpha^{\alpha}) \geq (\alpha^{\beta} \cdot \beta^{\alpha})(\beta^{\gamma} \cdot \gamma^{\beta})(\gamma^{\alpha} \cdot \alpha^{\gamma})$$

ή $\quad \alpha^{2\alpha} \cdot \beta^{2\beta} \cdot \gamma^{2\gamma} \geq \alpha^{\beta+\gamma} \cdot \beta^{\gamma+\alpha} \cdot \gamma^{\alpha+\beta}$

ή $\quad \alpha^{3\alpha} \cdot \beta^{3\beta} \cdot \gamma^{3\gamma} \geq (\alpha\beta\gamma)^{\alpha+\beta+\gamma}$

ή $\quad \alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} \geq (\alpha\beta\gamma)^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}}$

37. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$, δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+1} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha+1} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+1} + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) \leq 1$$

Απόδειξη

Για $\alpha=\beta=\gamma=0$, είναι προφανής. Έστω $s=\alpha+\beta+\gamma>0$

Τότε

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma+1} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha+1} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+1} + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) =$$

$$= \frac{\alpha}{s} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{s(\beta+\gamma+1)} + \frac{\beta}{s} - \frac{\beta(1-\beta)}{s(\alpha+\gamma+1)} + \frac{\gamma}{s} - \frac{\gamma(1-\gamma)}{s(\alpha+\beta+1)} +$$

$$+(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\left(\frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s} + \frac{\gamma}{s}\right) = \left(\frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s} + \frac{\gamma}{s}\right) -$$

$$-\frac{\alpha(1-\alpha)}{s}\left(\frac{1}{\beta+\gamma+1} - (1-\beta)(1-\gamma)\right) - \frac{\beta(1-\beta)}{s}\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+1} - (1-\alpha)(1-\gamma)\right) -$$

$$-\frac{\gamma(1-\gamma)}{s}\left(\frac{1}{\alpha+\beta+1} - (1-\beta)(1-\alpha)\right) \leq 1$$

επειδή

$$\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{s}+\frac{\gamma}{s}=1,$$

$$\frac{\alpha\,(1-\alpha)}{s}\left(\frac{1}{\beta+\gamma+1}-(1-\beta)\,(1-\gamma)\right)\geq 0,$$

$$\frac{\beta(1-\beta)}{s}\left(\frac{1}{\alpha+\gamma+1}-(1-\alpha)\,(1-\gamma)\right)\geq 0,$$

$$\frac{\gamma\,(1-\gamma)}{s}\left(\frac{1}{\alpha+\beta+1}-(1-\beta)\,(1-\alpha)\right)\geq 0.$$

Πραγματικά:

$$\frac{\alpha\,(1-\alpha)}{s}\geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta+\gamma+1}-(1-\beta)\,(1-\gamma)=$$

$$=\frac{(\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma+1)\,\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}\geq\frac{(\beta+\gamma)^2-3\,\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}=\frac{(\beta-\gamma)^2+\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}\geq 0.$$

38. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ δείξτε ότι:

$$(\alpha+\gamma)\,(\beta+\delta)\,(2\alpha+\gamma+\delta)\,(2\beta+\gamma+\delta)\geq 4\gamma\delta\,(2\alpha+\gamma)\,(2\beta+\delta)$$

Απόδειξη

Η απόδειξη στηρίζεται σε διαδοχικές εφαρμογές της ανισότητας του Cauchy.

Από την $\frac{(2\alpha+\gamma)+\delta}{2}\geq\sqrt{\delta\,(2\alpha+\gamma)}$ και την $\frac{(2\beta+\delta)+\gamma}{2}\geq\sqrt{\gamma\,(2\beta+\delta)}$

παίρνουμε ότι:

$$(2\alpha+\gamma+\delta)\,(2\beta+\gamma+\delta)\geq 4\sqrt{\gamma\delta\,(2\alpha+\gamma)\,(2\beta+\delta)} \qquad (2)$$

Όμοια, από την $\alpha+\gamma=\frac{(2\alpha+\gamma)+\gamma}{2}\geq\sqrt{\gamma\,(2\alpha+\gamma)}$

και την $\beta+\delta=\frac{(2\beta+\delta)+\delta}{2}\geq\sqrt{\delta\,(2\beta+\delta)}$ παίρνουμε:

$$(\alpha+\gamma)\,(\beta+\delta)\geq\sqrt{\gamma\delta\,(2\alpha+\gamma)\,(2\beta+\delta)} \qquad (3)$$

Τελικά η σχέση για απόδειξη προκύπτει από τις (2) και (3).

39. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση:

$$(\text{E}): \quad \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$$

Επίλυση

$$(\text{E}) \Leftrightarrow x^3 = (4-x^2)\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x^3 = (4-x^2)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Δεκτή είναι μόνο η ρίζα $x = \sqrt{2}$.

40. Αν x+y+z=0, δείξτε ότι:

$$\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y}\right) = 9$$

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζοντας στο αριστερό μέλος έχουμε:

$$3 + \frac{xz(z-x) + xy(x-y)}{yz(y-z)} + \frac{zy(y-z) + xy(x-y)}{xz(z-x)} + \frac{xz(z-x) + yz(y-z)}{xy(x-y)} =$$

$$= 3 + \left[\frac{x}{yz}(x-y-z) + \frac{y}{xz}(-x+y-z) + \frac{z}{xy}(-x-y+z)\right] = 3 + 2\frac{(x^3+y^3+z^3)}{xyz} = 9$$

Υπενθύμιση: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

41. Δείξτε ότι το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{array}\right\}$$

συνεπάγεται την εξίσωση:

$$xy - 12x + 15y = 0$$

Λύση

Η πρώτη απ' αυτές τις εξισώσεις μπορεί να γραφεί: $(x-y)(x-2y+1) = 0$

Άρα το αρχικό σύστημα των εξισώσεων ικανοποιείται από εκείνα τα ζεύγη τιμών (x, y) τα οποία ικανοποιούν είτε το:

$$\left\{\begin{array}{c} x - y = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

είτε το $\left\{\begin{array}{c} x-2y+1=0 \\ x^2-2xy+y^2-5x+7y=0 \end{array}\right\}$ (2)

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (1), παίρνουμε: $x=y$ και αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση, παίρνουμε $2y=0$. Άρα η μόνη λύση του (1) είναι $x=0$ και $y=0$.

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος (2), βρίσκουμε: $x=2y-1$.

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε:

$$(2y-1)^2-2(2y-1)y+y^2-5(2y-1)+7y=0.$$

Μετά από μερικές πράξεις, έχουμε:

$$y^2-5y+6=0$$

και η οποία ικανοποιείται για $y=2$ ή για $y=3$. Οι αντίστοιχες τιμές του $x=2y-1$ είναι 3 και 5. Άρα οι λύσεις είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\} \quad \text{και} \quad \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \end{array}\right\}$$

Άρα το αρχικό σύστημα των εξισώσεων έχει τρεις λύσεις:

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \end{array}\right\}$$

Ένας κατευθείαν υπολογισμός μας δείχνει ότι αυτές οι τιμές ικανοποιούν την εξίσωση:

$$xy-12x+15y=0$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε την ταυτότητα:

$$(x^2-3xy+2y^2+x-y)(x-y-9)+(x^2-2xy+y^2-5x+7y)(-x+2y+3)=$$
$$=2(xy-12x+15y)$$

Αυτό μας δείχνει αμέσως ότι αν η πρώτη και η δεύτερη εξίσωση του προβλήματός μας ικανοποιούνται, τότε το αριστερό μέλος της τρίτης εξίσωσης είναι μηδέν.

42. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού a η εξίσωση

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}}\right)^x+\left(\sqrt{a-\sqrt{a^2-1}}\right)^x=2a$$

έχει πραγματικές λύσεις για το x;

Προσδιορίστε τον αριθμό των λύσεων.

Λύση

Η εξίσωση $\left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^x+\left(\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^x=2\alpha \qquad (1)$

έχει πραγματικές ρίζες μόνο αν οι εκφράσεις α^2-1, $\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$ και $\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}$ είναι όλες μη αρνητικές, δηλαδή εάν $\alpha\geq 1$.

Άρα πρέπει να λύσουμε την (1) με την υπόθεση ότι $\alpha\geq 1$.

Παρατηρούμε ότι $\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\cdot\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}=\sqrt{\alpha^2-(\alpha^2-1)}=1$

άρα εάν $\qquad \left(\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^x=y \qquad (2)$

η εξίσωση (1) γίνεται: $\qquad y+\dfrac{1}{y}=2\alpha \qquad (3)$

Οι λύσεις της (3) είναι: $\qquad y_{1,2}=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}$

Αντικαθιστώντας αυτές στη (2) και παίρνοντας τους λογάριθμους, βρίσκουμε:

$$x_{1,2}=\frac{\ln y_{1,2}}{\ln\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}} \qquad (4)$$

Οι εκφράσεις (4) ορίζονται μόνο εάν $\ln\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\neq 0$ δηλαδή εάν $\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\neq 1$, δηλαδή εάν $\alpha\neq 1$.

Εάν $\alpha\neq 1$, τότε $\qquad x_1=\dfrac{\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)}{\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)}=2$

και $\qquad x_2=\dfrac{\ln\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}\right)}{\ln\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}}=\dfrac{\ln\dfrac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}}{\ln\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}}=-2$

Και για τις δύο τιμές $x=\pm 2$ το αριστερό μέλος της αρχικής εξίσωσης (1) ισούται με 2α. Άρα:

1) Για $\alpha>1$, η (1) έχει 2 λύσεις: $x_1=2$, $x_2=-2$.

2) Εάν $\alpha=1$, η (1) γίνεται $1^x+1^x=2$ που είναι αληθής $\forall x\in\mathbf{R}$.

43. Να επιλυθεί στο σύνολο των φυσικών αριθμών η εξίσωση:

$$\text{(E)}: \ x^2(x-1)(3x+1) = 1600$$

Απόδειξη

1) Ο x είναι άρτιος. Τότε οι $x-1$ και $3x+1$ είναι περιττοί και επειδή η έκφραση $x^2(x-1)(3x+1)$ πρέπει να διαιρείται με 16, συνεπάγεται ότι το 4 διαιρεί το x, δηλαδή το x είναι της μορφής $x = 4\kappa$, $\kappa \in \mathbf{N}$.

Η (Ε) ισοδύναμα γίνεται: $\kappa^2(x-1)(3x-1) = 10^2$

και επειδή ο αριθμός $(x-1)(3x+1) = \left(\dfrac{10}{\kappa}\right)^2$ είναι ακέραιος, πρέπει κ=2 ή κ=5.

Όμως για κ=2: $x^2(x-1)(3x+1) = 8^2 \cdot 7 \cdot 25 \neq 1600$

ενώ για κ=5: $x^2(x-1)(3x+1) = 20^2 \cdot 19 \cdot 61 \neq 1600$

δηλαδή στην περίπτωση αυτή η εξίσωση δεν έχει λύση.

2) Ο x είναι περιττός. Τότε οι $x-1$ και $3x+1$ είναι άρτιοι. Ακόμη, ο 16 διαιρεί τον $(x-1)(3x+1)$ και αν λάβουμε υπόψη ότι $x-1$ και $3x+1$ είτε διαιρούνται ταυτόχρονα με το 4, είτε όχι (γιατί $(x-1)+(3x+1) = 4x$), έχουμε ότι το $x-1$ είναι της μορφής $x-1 = 4\kappa$, δηλαδή $x = 4\kappa+1$. Τότε:

$$(4\kappa+1)^2 \cdot 4\kappa \cdot (12\kappa+4) = 10^2 \cdot 4^2 \qquad \text{ή} \qquad \kappa(4\kappa+1)^2(3\kappa+1) = 10^2$$

Όμως $\kappa(3\kappa+1) = \left(\dfrac{10}{4\kappa+1}\right)^2$ είναι ακέραιος απ' όπου φαίνεται ότι $4\kappa+1 = 5$ (προφανώς είναι $4\kappa+1 \neq 2$ και $4\kappa+1 \neq 10$), δηλαδή κ=1 και συνεπώς x=5.

44. Αν α, β, γ ρητοί και $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, δείξτε ότι ο αριθμός:

$$\frac{1}{(\beta-\gamma)^2} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$$

είναι τετράγωνο ρητού αριθμού.

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι για μη μηδενικά x, y, z, ισχύει ότι:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 \iff yz + zx + yx = 0 \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \qquad (1)$$

Αφού η (1) ικανοποιείται όταν $x = \dfrac{1}{\beta-\gamma}$, $y = \dfrac{1}{\gamma-\alpha}$, $z = \dfrac{1}{\alpha-\beta}$

προκύπτει ότι
$$\frac{1}{(\beta-\gamma)^2} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} = \left(\frac{1}{\beta-\gamma} + \frac{1}{\gamma-\alpha} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right)^2 \qquad (2)$$

45. Αν $x+y+z=0$, δείξτε ότι:

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=\frac{x^3+y^3+z^3}{3}\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{2}$$

Απόδειξη

Με $z=-(x+y)$, έχουμε:

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3}=-xy\,(x+y)$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2}=x^2+xy+y^2$$

και $$\frac{x^5+y^5+z^5}{5}=-xy\,(x+y)\,(x^2+xy+y^2),$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

46. Αν p και q είναι περιττοί ακέραιοι, δείξτε ότι η εξίσωση

$$\textbf{(1)}\quad x^2+2px+2q=0$$

δεν έχει ρητές ρίζες.

Απόδειξη

α) Καμιά λύση της (1) δεν είναι περιττός ακέραιος. Γιατί, αν x είναι περιττός τότε και ο x^2 είναι περιττός, ενώ ο $2xp+2q$ είναι άρτιος.

Άρα το άθροισμα $x^2+2px+2q$ είναι περιττός και όχι μηδέν.

β) Αν p και q είναι περιττοί, καμιά λύση της (1) δεν είναι άρτιος ακέραιος. Γιατί, αν ο x είναι άρτιος, τότε x^2+2px είναι πολλαπλάσιο του 4, ενώ το 2q δεν είναι. Το άθροισμα $(x^2+2px)+2q$ δεν διαιρείται δια 4 και άρα δεν ισούται με μηδέν.

γ) Αν p και q είναι περιττοί, καμιά ρίζα της (1) δεν είναι ρητή.

Γράφουμε την εξίσωση (1) στη μορφή $(x+p)^2=p^2-2q$ και υποθέτουμε ότι ο x είναι ένας ρητός. Αφού από τις περιπτώσεις (α) και (β) ο x δεν είναι ακέραιος εξαιρούμε αυτή την περίπτωση. Αλλά τότε $x+p$ και $(x+p)^2$ είναι ρητοί, αλλά όχι ακέραιοι, ενώ p^2-2q είναι ακέραιος.

47. Αποδείξτε ότι αν οι συντελεστές μιας β΄θμίου εξίσωσης

$$\alpha x^2+bx+c=0$$

είναι περιττοί ακέραιοι, τότε οι ρίζες της εξίσωσης δεν μπορεί να είναι ρητοί αριθμοί.

Λύση

Από τον τύπο για τις ρίζες μιας β'θμίου εξίσωσης, έχουμε: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Επομένως, για να είναι οι ρίζες της εξίσωσης ρητοί αριθμοί, η ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η έκφραση b^2-4ac να είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέτουμε $b=2n+1$, $a=2p+1$ και $c=2q+1$. Τότε έχουμε:

$$b^2-4ac=(2n+1)^2-4(2p+1)(2q+1)=4n^2+4n-16pq-8p-8q-3=$$
$$=8\left(\frac{n(n+1)}{2}-2pq-p-q-1\right)+5$$

Αφού ο αριθμός b^2-4ac είναι περιττός (αφού $n(n+1)$ είναι γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων και άρα είναι ένας άρτιος αριθμός, απ' όπου έχουμε ότι $\dfrac{n(n+1)}{2}$ είναι ακέραιος), βλέπουμε ότι εάν b^2-4ac είναι τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού, τότε αυτός ο ακέραιος αριθμός πρέπει να είναι περιττός. Κάθε περιττός αριθμός μπορεί να αντιπροσωπευθεί από τη μορφή $4\kappa\pm1$ και το τετράγωνό του μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(4\kappa\pm1)^2=16\kappa^2\pm8\kappa+1=8(2\kappa^2\pm\kappa)+1$$

Συνεπώς, η διαίρεση της έκφρασης $(4\kappa\pm1)^2$ δια 8 πάντα αφήνει υπόλοιπο ίσο με 1. Άρα, αφού η διαίρεση του αριθμού b^2-4ac δια 8 αφήνει υπόλοιπο 5, η έκφραση b^2-4ac δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο.

48. Αν ν είναι ένας άρτιος ακέραιος και $a_0, a_1, \dots, a_\nu$ είναι όλοι περιττοί ακέραιοι, τότε η πολυωνυμική εξίσωση:

$$\textbf{(2):}\quad a_0x^\nu+a_1x^{\nu-1}+a_2x^{\nu-2}+\dots+a_{\nu-1}x+a_\nu=0$$

δεν έχει ρητές ρίζες.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (2) έχει μια ρητή ρίζα $\dfrac{p}{q}$, όπου $p,q\in\mathbf{Z}$, $q\neq0$ και $(p,q)=1$. Τότε:

$$\frac{a_0p^\nu}{q^\nu}+\frac{a_1p^{\nu-1}}{q^{\nu-1}}+\dots+\frac{a_{\nu-1}\cdot p}{q}+a_\nu=0$$

$$\text{ή}\qquad a_0p^\nu+a_1p^{\nu-1}\cdot q+\dots+a_{\nu-1}\cdot p\cdot q^{\nu-1}+a_\nu q^\nu=0.$$

Σχόλιο: Η εξίσωση (3) οδηγεί σε αντίφαση επειδή το αριστερό μέλος είναι ένα άθροισμα περιττού πλήθους περιττών αριθμών, άρα είναι ένας αριθμός περιττός, τη στιγμή που το δεξί μέλος είναι αριθμός άρτιος. Για ν=2 έχουμε το θέμα 47.

Μια από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις πρέπει να ισχύει:

(i) p και q να είναι αμφότεροι περιττοί.

(ii) p περιττός και q άρτιος.

(iii) p άρτιος και q περιττός.

Στην περίπτωση (i) κάθε προσθετέος στο αριστερό μέλος της (3) είναι περιττός, αφού αποτελείται από ένα περιττό αριθμό περιττών προσθετέων. Σαν συνέπεια, η εξίσωση (3) δεν είναι αληθής, αφού το αριστερό μέλος είναι ένα περιττός ακέραιος, ενώ το δεξιό μέλος είναι το μηδέν που είναι άρτιος ακέραιος.

Στην περίπτωση (ii) μόνο ο πρώτος όρος του αριστερού μέλους της (3) είναι περιττός. Οι υπόλοιποι ν όροι είναι άρτιοι, αφού καθένας περιέχει τον άρτιο παράγοντα q. Αφού ο συνδυασμός οποιουδήποτε αριθμού αρτίων ακεραίων με ένα περιττό ακέραιο είναι περιττός, συνεπάγεται ότι το αριστερό μέλος της (3) είναι περιττός. Αυτό οδηγεί σε μαθηματικό αδιέξοδο, αφού το δεξιό μέλος είναι αριθμός άρτιος.

Η περίπτωση (iii) οδηγεί σε μια αντίφαση με τον ίδιο τρόπο όπως στην περίπτωση (ii). Η μόνη διαφοροποίηση στην απόδειξη είναι ότι οι ρόλοι των p και q έχουν αντιστραφεί. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Σχόλιο: Βάσει του θεωρήματος, καμιά από τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $3x^2+5x+7=0$

(β) $19x^4+37x^4+101x^3+59x^2-327=0$

δεν έχει ρητές ρίζες.

49. Αν η εξίσωση (Ε): $\alpha_0 x^\nu+\alpha_1 x^{\nu-1}+\alpha_2 x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu=0$ έχει ένα περιττό αριθμό από συντελεστές περιττούς ακεραίους, συμπεριλαμβανομένων των α_0 και α_ν και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι άρτιοι ακέραιοι, τότε η εξίσωση (Ε) δεν έχει ρητές ρίζες*.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (Ε) έχει μια ρητή ρίζα $\frac{p}{q}$ όπου p και q είναι ακέραιοι που δεν έχουν κοινούς παράγοντες ($q \neq 0$). Η εξίσωση, της οποίας οι ρίζες είναι εκείνες της εξίσωσης (Ε) πολλαπλασιασμένες επί α_0, είναι η εξής:

$$(E_1):\ \alpha_0 x^\nu+\alpha_1\alpha_0 x^{\nu-1}+\alpha_2\alpha_0^2 x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_0^{\nu-1}\cdot x+\alpha_\nu\alpha_0^\nu=0$$

(*) Η εξίσωση π.χ. $3x^{15}-8x^{10}+16x^7-9x^4+6x-27=0$ που έχει τους α_0 και α_ν περιττούς και ακόμη ένας περιττός αριθμός συντελεστών είναι περιττοί, δεν έχει ρητές ρίζες.

Αφού $\frac{p}{q}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης (Ε), $\frac{\alpha_0 p}{q}$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης (E_1).

Προχωρώντας, αφού το q διαιρεί το α_0, τότε ο $\frac{\alpha_0 p}{q}$ πρέπει νάναι ακέραιος. Εξ υποθέσεως, ο α_0 είναι περιττός. Άρα $\alpha_0 \alpha_1$ είναι της ίδιας παριτέ με το α_1, $\alpha_0 \alpha_2$ της ίδιας με το α_2 κ.λ.π. (Δύο ακέραιοι λέμε ότι είναι της ίδιας παριτέ, εάν είναι αμφότεροι περιττοί ή αμφότεροι άρτιοι). Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x στις εξισώσεις (Ε) και (E_1) θα έχουν την ίδια παριτέ.

Αν $\frac{\alpha_0 p}{q}$ είναι ένας άρτιος ακέραιος, τότε η αντικατάσταση του x με $\frac{\alpha_0 p}{q}$ στο αριστερό μέλος της (E_1) θα μας δώσει μόνο άρτιους ακέραιους, εκτός από τον όρο $\alpha_\nu \alpha_0^\nu$ που είναι περιττός, αφού α_0 και α_ν είναι αμφότεροι περιττοί εξ υποθέσεως. Άρα, έχουμε μια αντίφαση αφού ένα άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού αρτίων ακεραίων με ένα μόνο περιττό ακέραιο πρέπει να είναι περιττός και άρα το αριστερό μέλος της (E_1) δεν είναι μηδέν.

Από την άλλη, αν $\frac{\alpha_0 p}{q}$ είναι περιττός, τότε η ίδια αντικατάσταση πρέπει να μας δώσει ένα άθροισμα ακεραίων μεταξύ των οποίων υπάρχει ένας περιττός αριθμός περιττών αριθμών. Ξανά, αυτό το αποτέλεσμα είναι ένα άθροισμα περιττών ακεραίων· μια αντίφαση όπως στην προηγούμενη περίπτωση. Άρα η εξίσωση (Ε) δεν είναι δυνατόν να έχει μια ρητή ρίζα και το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Σχόλια: (1) Η αναγκαιότητα του περιορισμού ότι α_0 και α_ν είναι αμφότεροι περιττοί ακέραιοι μπορεί να εκτιμηθεί εξετάζοντας τις παρακάτω εξισώσεις. Κάθε μια έχει ένα περιττό αριθμό περιττών συντελεστών αν και αμφότερες έχουν ρητές ρίζες.

(α) $8x^3 - 1 = 0$ (β) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(2) Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$ έχει μια ρητή ρίζα και οι συντελεστές a, b, c είναι ακέραιοι, όχι όλοι μηδέν, τότε ένας τουλάχιστον από τους a, b, c είναι άρτιος.

Πραγματικά:

Η ρητή ρίζα μπορεί να γραφεί στη μορφή $\frac{p}{q}$ όπου p και q είναι ακέραιοι με μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1. Άρα p και q δεν μπορούν να είναι άρτιοι και $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$.

Υποθέτουμε, εάν είναι δυνατόν, ότι a, b, c είναι όλοι ακέραιοι. Αφού το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι ένας άρτιος ακέραιος, είτε κανείς, είτε ακριβώς δύο από τους όρους του είναι περιττοί.

Εάν p και q ήταν και οι δύο περιττοί, τότε κάθε όρος του αριστερού μέλους θάταν περιττός, που είναι αδύνατο.

Εάν ένας από τους p και q, ας πούμε ο p, ήταν άρτιος, τότε ap^2 και bpq θάταν άρτιοι, ενώ cq^2 θάταν περιττός, που είναι αδύνατο.

Άρα a, b, c δεν μπορούν όλοι νάναι περιττοί.

III. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Ποιες χωμάτινες καμπάνες ηχούν και ποιος γεωμέτρης τους κάνει τον υποβολέα; Επειδή κάτι το γαιώδες και ορθογωνίζον υποκυμαίνεται κάτω απ' τ' Αντιληπτά. Μ' αόρατα δάχτυλα μας εγγίζει τον νου ο έξω κόσμος. Ακούμε σαν να βλέπουμε, βλέπουμε σαν ν' ακούμε. Αδειάζουν τ' αντικείμενα κι απομένουν σκέτες γραμμές με σοφία χαραγμένες όπως εκείνα τα σχέδια της Τριγωνομετρίας όπου έσκυβα, μαθητής στο Γυμνάσιο, και αδυνατούσα να τα καταλάβω. Άλλες φορές πάλι, πιο σπάνια, λάμπουν μέσα σε μια διαφάνεια καθάριου αιθέρος. Αληθινή ουράνια επικράτεια, μετέωρη, διαπερασμένη από τις αχτίδες και αντιπροσωπευτική, απλώς, της ύλης και της απέραντης μορφολογίας της.

(ΟΔΥΣΣΕΑΣ ΕΛΥΤΗΣ:
ΙΔΙΩΤΙΚΗ ΟΔΟΣ, ΣΕΛ. 50-51)

...Τα μαθηματικά διαφέρουν θεμελιωδώς από τις άλλες επιστήμες κατά πάρα πολλούς τρόπους. Η φανερή διαφορά που παρατηρείται συνήθως είναι ότι στα μαθηματικά προσπαθούμε να αποδείξουμε κάτι, ενώ στις άλλες επιστήμες προσπαθούν να αναιρέσουν κάτι. Στα μαθηματικά προσπαθούμε να αποδείξουμε θεωρήματα· στις άλλες επιστήμες προσπαθούν να αναιρέσουν υποθέσεις. Αλλά η διαφορά είναι βαθύτερη. Εκείνο που υπαγορεύει την έρευνα στις φυσικές επιστήμες είναι ο Κόσμος· προσπαθείτε να κατανοήσετε τι υπάρχει. Στα μαθηματικά, όμως, εκείνο που όντως υπαγορεύει την έρευνα είναι η κομψότητα. Τα μαθηματικά τελειοποιούν συνεχώς τον εαυτό τους. Παίρνετε και λύνετε αρκετά προβλήματα, και ίσως αποδεικνύετε και αρκετά θεωρήματα, στη συνέχεια όμως κάποιος μεγαλοφυής παρατηρεί ένα σημείο σύνδεσής τους και αποδεικνύει ένα γενικότερο θεώρημα, υποπεριπτώσεις του οποίου είναι όλα τα προηγούμενα. Πετάμε, λοιπόν, όλα τα παλαιά θεωρήματα κατευθείαν στο καλάθι των αχρήστων και θυμόμαστε μόνο το γενικότερο θέωρημα. Έτσι ακριβώς έχει απλουστευθεί σοβαρά το σύνολο των μαθηματικών. Τα μαθηματικά, επομένως τελειοποιούν διαρκώς τον εαυτό τους αυτοαπλοποιούμενα, πράγμα που δεν συμβαίνει με τις άλλες επιστήμες οι οποίες, συσσωρεύοντας νέα πειραματικά δεδομένα, γίνονται συνεχώς πολυπλοκότερες — έτσι πρέπει να στηριχθούν σε κάτι σαν τα μαθηματικά για να γίνουν απλές.

CHRISTOPHER ZEEMAN*

(*) Ο CHRISTOPHER ZEEMAN είναι διευθυντής του Κέντρου Έρευνας Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Warwick. Ο πυρήνας της δουλειάς του βρίσκεται στα αφηρημένα μαθηματικά, σ' ένα μάλλον δυσνόητο κλάδο της γεωμετρίας: την τοπολογία. Χρησιμοποίησε τη θεωρία των καταστροφών, που ταξινομεί διάφορα είδη ασταθών καταστάσεων, για να ρίξει φως σε ποικίλα βιολογικά προβλήματα, συμπεριλαμβανομένου και του ιατρικού θέματος της ψυχογενούς ανορεξίας.

Η διδασκαλία των μαθηματικών στη στοιχειώδη και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση καθυστερεί πολύ σε σχέση με τις σημερινές απαιτήσεις και έχει μεγάλη ανάγκη από ουσιώδη βελτίωση. Προσυπογράφουμε ανεπιφύλακτα τη σχεδόν γενικά αποδεκτή αυτή γνώμη. Κι όμως αυτό που ακούμε συχνά, ότι δηλαδή η ύλη που διδάσκεται στα γυμνάσια είναι πεπαλαιωμένη, θα πρέπει να υποβληθεί σε εξονυχιστική κριτική και δε θα πρέπει να λαμβάνεται με την ονομαστική του αξία. Η στοιχειώδης άλγεβρα, η επιπεδομετρία και η στερεομετρία, η τριγωνομετρία, η αναλυτική γεωμετρία και ο διαφορικός λογισμός εξακολουθούν να είναι θεμελιώδη, όπως ήταν και πριν από πενήντα ή εκατό χρόνια. Οι μελλοντικοί χρήστες των μαθηματικών θα πρέπει να διδαχτούν όλα αυτά τα κεφάλαια, είτε προορίζονται να γίνουν μαθηματικοί είτε φυσικοί είτε μηχανικοί είτε ν' ασχοληθούν με τις κοινωνικές επιστήμες, και όλα αυτά τα θέματα θα δώσουν γενική καλλιέργεια στο μέσο μαθητή. Η παραδοσιακή διδασκόμενη ύλη των γυμνασίων περιλαμβάνει όλα αυτά τα θέματα σε μιαν ορισμένη έκταση, εκτός από το διαφορικό λογισμό. Θα ήταν καταστροφή αν αφαιρούσαμε το οποιοδήποτε κεφάλαιο απ' αυτά.

MORRIS KLINE

1. α) Δείξτε ότι

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi(\alpha+60^\circ) + \varepsilon\varphi(\alpha+120^\circ) = 3\varepsilon\varphi 3\alpha}$$

β) Δείξτε ότι

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi 1^\circ + \varepsilon\varphi 5^\circ + \varepsilon\varphi 9^\circ + \ldots + \varepsilon\varphi 173^\circ + \varepsilon\varphi 177^\circ = 45}$$

Απόδειξη

α) $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi(\alpha+60^\circ) + \varepsilon\varphi(\alpha+120^\circ) = \varepsilon\varphi\alpha + \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 60^\circ}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 60^\circ} + \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi 120^\circ}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 120^\circ} =$

$$= \varepsilon\varphi\alpha + \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha} + \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha} = 3\cdot\frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1-3\varepsilon\varphi^2\alpha} = 3\cdot\varepsilon\varphi 3\alpha,\quad \alpha \neq \frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{6},\quad \kappa\in\mathbf{Z}.$$

β) $(\varepsilon\varphi 1^\circ + \varepsilon\varphi 61^\circ + \varepsilon\varphi 121^\circ) + (\varepsilon\varphi 5^\circ + \varepsilon\varphi 65^\circ + \varepsilon\varphi 125^\circ) + \ldots +$

$$+(\varepsilon\varphi 57^\circ + \varepsilon\varphi 117^\circ + \varepsilon\varphi 177^\circ) = 3\,\varepsilon\varphi 3^\circ + 3\,\varepsilon\varphi 15^\circ + 3\,\varepsilon\varphi 27^\circ + \ldots + 3\,\varepsilon\varphi 171^\circ =$$

$$= 3\Big((\varepsilon\varphi 3^\circ + \varepsilon\varphi 63^\circ + \varepsilon\varphi 123^\circ) + (\varepsilon\varphi 15^\circ + \varepsilon\varphi 75^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ) + \ldots +$$

$$+ (\varepsilon\varphi 51^\circ + \varepsilon\varphi 111^\circ + \varepsilon\varphi 171^\circ)\Big) = 3 \cdot 3\,(\varepsilon\varphi 9^\circ + \varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi 81^\circ +$$

$$+ \varepsilon\varphi 117^\circ + \varepsilon\varphi 153^\circ) = 9 \cdot (1 + \varepsilon\varphi 9^\circ + \varepsilon\varphi 81^\circ + \varepsilon\varphi 117^\circ + \varepsilon\varphi 153^\circ =$$

$$= 9\left(1 + \frac{\eta\mu 90^\circ}{\eta\mu 9^\circ \cdot \eta\mu 81^\circ} + \frac{\eta\mu 270^\circ}{\eta\mu 117^\circ \cdot \eta\mu 153^\circ}\right) =$$

$$= 9\left(1 + \frac{-2}{\sigma\upsilon\nu 90^\circ - \sigma\upsilon\nu 72^\circ} + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 270^\circ - \sigma\upsilon\nu 36^\circ}\right) =$$

$$= 9\left(1 + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 72^\circ} - \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 36^\circ}\right) = 9\left(1 + 2\frac{\sigma\upsilon\nu 36^\circ - \sigma\upsilon\nu 72^\circ}{\sigma\upsilon\nu 72^\circ\, \sigma\upsilon\nu 36^\circ}\right) = A$$

Από τον τύπο $\sigma\upsilon\nu 5\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha(16\,\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 20\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 5)$, για $\alpha = 18^\circ$ παίρνουμε

$$16\,\sigma\upsilon\nu^4 18^\circ - 20\,\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ + 5 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

Επειδή $\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ > \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ = \frac{3}{4}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$ και επομένως

$$\sigma\upsilon\nu 36^\circ = 2\sigma\upsilon\nu^2 18^\circ - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 72^\circ = 2\sigma\upsilon\nu^2 136^\circ - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Τελικά βρίσκουμε ότι $A = 45$.

Σχόλιο: Για μια διαφορετική αντιμετώπιση με τη βοήθεια των Μιγαδικών, βλέπε Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ: Τριγωνομετρικά θέματα, Αθήνα 1979, άσκηση 353, σελ. 245.

Για μια ακόμη λύση βλέπε και Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, Αθήνα 1983, άσκηση 18, σελ. 382.

2. Δείξτε ότι

$$\sqrt[44]{\text{εφ}1^\circ \cdot \text{εφ}2^\circ \cdot \ldots \cdot \text{εφ}44^\circ} < \text{εφ}22^\circ 30' < \frac{1}{44}(\text{εφ}1^\circ \cdot \text{εφ}2^\circ \cdot \ldots \cdot \text{εφ}44^\circ)$$

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $0 < \alpha < 45^\circ$. Τότε

$$\text{εφ}\alpha + \text{εφ}(45^\circ - \alpha) - 2\,\text{εφ}22^\circ 30' = \text{εφ}\alpha + \frac{1-\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}\alpha} - 2\,\text{εφ}22^\circ 30' =$$

$$= \frac{\text{εφ}^2\alpha + 1 - 2\,\text{εφ}22^\circ 30' - 2\text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}22^\circ 30'}{1+\text{εφ}\alpha} =$$

$$= \frac{\text{εφ}^2\alpha + \text{εφ}^2 22^\circ 30' - 2\text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}22^\circ 30'}{1+\text{εφ}\alpha} = \frac{(\text{εφ}\alpha - \text{εφ}22^\circ 30')^2}{1+\text{εφ}\alpha}$$

δεδομένου ότι

$$1 - 2\,\text{εφ}22^\circ 30' = \text{εφ}^2 22^\circ 30' \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \text{εφ}45^\circ = \frac{2\,\text{εφ}22^\circ 30'}{1-\text{εφ}^2 22^\circ 30'}$$

Επειδή

$$\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\,(45^\circ - \alpha) - 2\,\text{εφ}22^\circ 30' = \frac{(\text{εφ}\alpha - \text{εφ}22^\circ 30')^2}{1+\text{εφ}\alpha}$$

θα ισχύει:

$$(A):\quad \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\,(45^\circ - \alpha) > 2\text{εφ}22^\circ 30', \qquad 0 < \alpha < 22^\circ 30'$$

Από την (Α) για $\alpha = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 22^\circ$ έχουμε το δεύτερο μέλος της σχέσης για απόδειξη. Ακόμη ισχύει:

$$1 = \text{εφ}\,45^\circ = \text{εφ}\left(\alpha + (45^\circ - \alpha)\right) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\,(45^\circ - \alpha)}{1 - \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\,(45^\circ - \alpha)} > \frac{2\text{εφ}22^\circ 30'}{1 - \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\,(45^\circ - \alpha)}$$

δηλαδή $\quad 1 - \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\,(45^\circ - \alpha) > 2\text{εφ}22^\circ 30' = 1 - \text{εφ}^2 22^\circ 30'$

Τελικά παίρνουμε

$$(B)\quad \text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}\,(45^\circ - \alpha) < \text{εφ}^2 22^\circ 30', \; 0 < \alpha < 22^\circ 30'$$

Από την (Β) για $\alpha = 1^\circ, 2^\circ, \ldots, 22^\circ$ έχουμε το πρώτο μέλος της σχέσης για απόδειξη.

3. Δείξτε ότι $\;$ ημx ημy ημz + συνx συνy συνz ≤ 1.

Απόδειξη

Θέτουμε: $\vec{\alpha} = (\text{ημ}x\,\text{ημ}y,\ \text{συν}x\,\text{συν}y)$ και $\vec{\beta} = (\text{ημ}z,\ \text{συν}z)$

Ισχύουν $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\alpha}| = \text{ημ}^2 x \cdot \text{ημ}^2 y + \text{συν}^2 x \cdot \text{συν}^2 y \leq \text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x = 1$.

Επειδή $\;|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \leq 1$ παίρνουμε:

$$|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\text{ημ}x\,\text{ημ}y\,\text{ημ}z + \text{συν}x\,\text{συν}y\,\text{συν}z| \leq 1$$

4. Ο αριθμός ν είναι φυσικός και Α, Β, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δείξτε ότι ισχύει:

$$\sigma\varphi^{\nu}\frac{A}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{B}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{\Gamma}{2}\geq 3^{\frac{\nu+2}{2}}$$

Απόδειξη

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}\;\sigma\varphi\frac{B}{2}\;\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

Επειδή $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{\Gamma}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\sigma\varphi x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, έχουμε:

$$\sigma\varphi\frac{A}{2}\;\sigma\varphi\frac{B}{2}\;\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{B}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\geq 3\sqrt[3]{\sigma\varphi\frac{A}{2}\;\sigma\varphi\frac{B}{2}\;\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}}$$

δηλαδή $\quad \sigma\varphi\frac{A}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{B}{2}\cdot\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\geq 3^{\frac{3}{2}}$

Επομένως

$$\sigma\varphi^{\nu}\frac{A}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{B}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{\Gamma}{2}\geq 3\left(\sigma\varphi\frac{A}{2}\;\sigma\varphi\frac{B}{2}\;\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}\right)^{\frac{\nu}{3}}$$

ή $\quad \sigma\varphi^{\nu}\frac{A}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{B}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{\Gamma}{2}\geq 3^{\frac{\nu+2}{2}}$

Το «=» ισχύει αν και μόνο αν είναι $\quad \sigma\varphi\frac{A}{2}=\sigma\varphi\frac{B}{2}=\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$,

δηλαδή $A=B=\Gamma=\frac{\pi}{3}$.

Παρατήρηση

Από $(\sigma\varphi^{\nu}x)''=\nu(\nu-1)\sigma\varphi^{\nu-2}x\cdot\frac{1}{\eta\mu^{4}x}+2\nu\,\sigma\varphi^{\nu-1}x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu^{3}x}>0$

για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση f με τύπο

$f(x)=\sigma\varphi^{\nu}x$ είναι κυρτή στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen παίρνουμε:

$$\sigma\varphi^{\nu}\frac{A}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{B}{2}+\sigma\varphi^{\nu}\frac{\Gamma}{2}=3\left(\frac{1}{3}\sigma\varphi^{\nu}\frac{A}{2}+\frac{1}{3}\sigma\varphi^{\nu}\frac{B}{2}+\frac{1}{3}\sigma\varphi^{\nu}\frac{\Gamma}{2}\right)\geq$$

$$\geq\ 3\sigma\varphi^{\nu}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{A}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{B}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\Gamma}{2}\right)=3\sigma\varphi^{\nu}\frac{A+B+\Gamma}{6}=3\sigma\varphi^{\nu}\frac{\pi}{6}=3^{\frac{\nu+2}{2}}$$

5. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum\nolimits_{\nu}=\frac{\eta\mu 1}{\sigma\upsilon\nu 0\,\sigma\upsilon\nu 1}+\frac{\eta\mu 1}{\sigma\upsilon\nu 1\sigma\upsilon\nu 2}+\frac{\eta\mu 1}{\sigma\upsilon\nu 2\,\sigma\upsilon\nu 3}+\ldots+\frac{\eta\mu 1}{\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\,\sigma\upsilon\nu\,\nu},\ \nu\in\mathbb{N}^{*}$$

Λύση

Επειδή $\eta\mu 1=\eta\mu\big(\kappa-(\kappa-1)\big)=\eta\mu\kappa\ \sigma\upsilon\nu(\kappa-1)-\sigma\upsilon\nu\kappa\ \eta\mu(\kappa-1)$, έχουμε ότι:

$$\frac{\eta\mu 1}{\sigma\upsilon\nu(\kappa-1)\ \sigma\upsilon\nu\kappa}=\frac{\eta\mu\kappa\ \sigma\upsilon\nu(\kappa-1)-\sigma\upsilon\nu\kappa\ \eta\mu(\kappa-1)}{\sigma\upsilon\nu(\kappa-1)\ \sigma\upsilon\nu\kappa}=\varepsilon\varphi\kappa-\varepsilon\varphi(\kappa-1).$$

Επομένως

$\sum_{\nu}=(\varepsilon\varphi 1-\varepsilon\varphi 0)+(\varepsilon\varphi 2-\varepsilon\varphi 1)+(\varepsilon\varphi 3-\varepsilon\varphi 2)+\ldots+\big(\varepsilon\varphi\nu-\varepsilon\varphi(\nu-1)\big)=$

$=\varepsilon\varphi\nu-\varepsilon\varphi 0=\varepsilon\varphi\nu$

6. Δείξτε ότι

$$\left(\frac{x^2\,\eta\mu y-2x+\eta\mu y}{x^2-2x\,\eta\mu y+1}\right)^2\ \leq\ 1,$$

για όλα τα x και y, με εξαίρεση εκείνων για τα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $x^2-2x\,\eta\mu y+1\neq 0$. Έχουμε:

$$\left(\frac{x^2\,\eta\mu y-2x+\eta\mu y}{x^2-2x\,\eta\mu y+1}\right)^2-1=\left(\frac{x^2\,\eta\mu y-2x+\eta\mu y}{x^2-2x\,\eta\mu y+1}-1\right)\cdot\left(\frac{x^2\,\eta\mu y-2x+\eta\mu y}{x^2-2x\,\eta\mu y+1}+1\right)=$$

$$=\frac{(\eta\mu y-1)(x^2+2x+1)}{x^2-2x\,\eta\mu y+1}\cdot\frac{(\eta\mu y+1)(x^2-2x+1)}{x^2-2x\,\eta\mu y+1}=\frac{(\eta\mu^2 y-1)(x+1)^2(x-1)^2}{(x^2-2x\,\eta\mu y+1)^2}\ \leq\ 0,$$

επειδή $\eta\mu^2 y-1\leq 0$.

Επομένως:

$$\left(\frac{x^2\,ημ\,y-2x+ημ\,y}{x^2-2x\,ημ\,y+1}\right)^2-1\ \le\ 0 \quad ή \quad \left(\frac{x^2\,ημ\,y-2x+ημ\,y}{x^2-2x\,ημ\,y+1}\right)^2\ \le\ 1$$

που έπρεπε ν' αποδείξουμε.

Σχόλιο

$$x^2-2x\,ημ\,y+1=0 \ \Leftrightarrow\ x^2-2x\,ημ\,y+ημ^2y+1-ημ^2y=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (x-ημ\,y)^2+συν^2y=0 \ \Leftrightarrow\ συν\,y=0,\ x=ημ\,y \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y=κπ+\frac{π}{2},\ x=ημ\,y \ \Leftrightarrow\ \left(x=1,\ y=κπ+\frac{π}{2}\right) ή \left(x=-1,\ y=κπ+\frac{π}{2}\right),\ κ\in \mathbf{Z}$$

7. Να λυθεί η εξίσωση

$$\mathbf{εφ^2 2x+2εφ2x\cdot εφ3x=1}$$

Λύση

Η δεδομένη για λύση εξίσωση γράφεται:

$$εφ^2 2x+2εφ2x\cdot εφ3x+εφ^2 3x=1+εφ^2 3x$$

$$ή\ εφ^2 2x+2εφ2x\cdot εφ3x+εφ^2 3x=τεμ^2 3x$$

$$ή\ (εφ2x+εφ3x)^2-τεμ^2 3x=0$$

$$ή\ εφ2x+εφ3x=\pm\frac{1}{συν3x}$$

$$ή\ \frac{ημ2x\cdot συν3x+ημ3x\cdot συν2x}{συν2x\cdot συν3x}=\pm\frac{1}{συν3x}$$

$$ή\ ημ5x=\pm συν2x$$

$$ή\ συν\left(\frac{π}{2}-5x\right)=\pm συν2x$$

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:

$$(α)\ 2x=\frac{π}{2}-5x+2κπ \ \Leftrightarrow\ x=\frac{π}{14}+\frac{2κπ}{7}$$

$$(β)\ 2x=-\frac{π}{2}+5x+2κπ \ \Leftrightarrow\ x=\frac{π}{6}+\frac{2κπ}{3}$$

$$(γ)\ 2x=\frac{π}{2}+5x+2κπ \ \Leftrightarrow\ x=-\frac{π}{6}+\frac{2κπ}{3}$$

$$(δ)\ 2x=-\frac{π}{2}-5x+2κπ \ \Leftrightarrow\ x=-\frac{π}{14}+\frac{2κπ}{7},\ κ\in \mathbf{Z}$$

Απορρίπτουμε τις $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\kappa\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\kappa\pi}{3}$, γιατί διαφορετικά η εφ3x δεν ορίζεται. Άρα έχουμε τις λύσεις:

$$x=\pm\frac{\pi}{14}+\frac{2\kappa\pi}{7}$$

8. Αν τα τόξα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$0<x_1, x_2, \ldots, x_\nu<\frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu<1,$$

δείξτε ότι:

$$\sqrt[2\nu]{1-(\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu)^2}<\eta\mu\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}$$

Απόδειξη

Η σχέση για απόδειξη γράφεται:

$$\sqrt{1-(\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu)^2}<\eta\mu^\nu\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}$$

Λόγω της ανισότητας του Cauchy:

$$\eta\mu x_1\ \eta\mu x_2\cdots\eta\mu x_\nu\leq\eta\mu^\nu\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\nu}{\nu}$$

που αληθεύει για τόξα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ του διαστήματος (0, π), αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sqrt{1-(\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu)^2}<\eta\mu x_1\ \eta\mu x_2\cdots\eta\mu x_\nu$$

ή $1-(\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu)^2<2^2\eta\mu^2\frac{x_1}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_1}{2}\cdot$

$\cdot\,2^2\eta\mu^2\frac{x_2}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_2}{2}\cdots 2^2\eta\mu^2\frac{x_\nu}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{x_\nu}{2}$

ή $1-(\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu)^2<2^2\frac{1-\sigma\upsilon\nu x_1}{2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu x_1}{2}\cdots$

$\cdots 2^2\frac{1-\sigma\upsilon\nu x_1}{2}\cdot\frac{1+\sigma\upsilon\nu x_\nu}{2}$

ή $1-(\sigma\upsilon\nu x_1+\sigma\upsilon\nu x_2+\ldots+\sigma\upsilon\nu x_\nu)^2<(1-\sigma\upsilon\nu x_1)\cdots$

$\cdots(1-\sigma\upsilon\nu x_\nu)(1+\sigma\upsilon\nu x_1)\cdots(1+\sigma\upsilon\nu x_\nu)$

που ισχύει διότι προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων του Karl Weierstrass:

$$(1-\sigma υν x_1)(1-\sigma υν x_2)\cdots(1-\sigma υν x_\nu) > 1-(\sigma υν x_1+\sigma υν x_2+\ldots+\sigma υν x_\nu)$$

και $(1+\sigma υν x_1)(1+\sigma υν x_2)\cdots(1+\sigma υν x_\nu) > 1+(\sigma υν x_1+\sigma υν x_2+\ldots+\sigma υν x_\nu)$

Υπενθύμιση. Ανισότητες του Weierstrass

(α) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_\nu) \geq 1-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)$

με $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu \geq 0$, $\alpha_\kappa<1$ $(\kappa=1,2,\ldots,\nu)$

και $\nu\in\mathbf{N}^*$ με $\nu\geq2$

(β) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) \geq 1+(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)$

με $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu \geq 0$ και $\nu\in\mathbf{N}^*$ με $\nu\geq2$.

Σχόλιο

Karl Weierstrass: Γερμανός Μαθηματικός του 19ου αιώνα (1815-1897) και μάλιστα από τους διασημότερους. Χρησιμοποιούσε κατ' εξοχήν αυστηρές και ακριβείς μαθηματικές μεθόδους.

9. Να λυθεί η εξίσωση

$$\textbf{(E):}\quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=2\,\eta\mu\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$$

Λύση

Θέτουμε: $t=\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}$ $\left(x=\dfrac{3\pi}{5}-2t\right)$

Η (Ε) $\Leftrightarrow$ $\eta\mu(\pi-3t)=2\eta\mu t$ $\Leftrightarrow$ $\eta\mu 3t+2\eta\mu t=0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\eta\mu t\,(4\sigma υν^2 t-3)=0$ $\Leftrightarrow$ $t=\kappa\pi$ ή $t=\dfrac{\pi}{6}+\lambda\pi$

ή $t=-\dfrac{\pi}{6}+\mu\pi$, $\kappa,\lambda,\mu\in\mathbf{Z}$.

Επομένως, οι λύσεις της δεδομένης εξίσωσης είναι:

$$x=\left(\frac{3}{5}-2\kappa\right)\pi,\quad x=\left(\frac{4}{15}-2\lambda\right)\pi,\quad x=\left(\frac{14}{15}-2\mu\right)\pi,\quad \text{όπου}\quad \kappa,\lambda,\mu\in\mathbf{Z}.$$

10. Να λυθεί στο $[0, 2\pi)$ η εξίσωση

$$\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta + \varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta + \tau\varepsilon\mu\theta + \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = 6,4$$

Λύση

Θέτουμε $x = \sigma\upsilon\nu\theta, \quad y = \eta\mu\theta, \quad \mu\varepsilon \ x, y \in [-1, \ 1]$

Η δεδομένη για λύση εξίσωση γίνεται:

$$x + y + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6,4$$

$$\acute{\eta} \quad x + y + \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{x + y}{xy} = 6,4 \quad \acute{\eta} \quad x + y + \frac{1 + x + y}{xy} = 6,4 \ , \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} u = x + y, \quad \upsilon = xy, \ \upsilon \neq 0 \\ u + \dfrac{1 + u}{\upsilon} = \dfrac{32}{5}, \quad u^2 - 2\upsilon = 1 \end{matrix} \right\} \quad \acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} 5u\upsilon + 5u - 32\upsilon + 5 = 0, \ u^2 - 2\upsilon = 1 \\ u = x + y, \quad \upsilon = xy, \quad \upsilon \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} 5u\upsilon + 5u - 32\upsilon + 5 = 0 \\ \upsilon = \dfrac{u^2 - 1}{2} \\ u = x + y, \quad \upsilon = xy, \quad \upsilon \neq 0 \end{matrix} \right\} \quad \acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} 5u^3 - 32u^2 + 5u + 42 = 0 \\ \upsilon = \dfrac{u^2 - 1}{2} \\ u = x + y, \quad \upsilon = xy, \quad \upsilon \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} (u + 1)\,(5u - 7)\,(u - 6) = 0 \\ \upsilon = \dfrac{u^2 - 1}{2} \\ u = x + y, \quad \upsilon = xy, \quad \upsilon \neq 0 \end{matrix} \right\} \quad \acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} u = -1 \\ \upsilon = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} u = 6 \\ u = x + y = \sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta \end{matrix} \right\} \quad \acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} u = \dfrac{7}{5} \\ \upsilon = \dfrac{12}{25} \end{matrix} \right\}$$

$$\acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} x + y = \dfrac{7}{5} \\ xy = \dfrac{12}{25} \end{matrix} \right\} \quad \acute{\eta} \quad \left(\left\{ \begin{matrix} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{matrix} \right\} \quad \acute{\eta} \quad \left\{ \begin{matrix} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \end{matrix} \right\} \right),$$

που ικανοποιούν την αρχική εξίσωση. Άρα οι δύο γωνίες είναι

$$\Theta = \text{Τοξ}\,\eta\mu\frac{3}{5} \quad \text{και} \quad \Theta = \text{Τοξ}\,\eta\mu\frac{4}{5}$$

δηλαδή οι γωνίες στο γνωστό τρίγωνο 3-4-5.

11. Να λυθεί στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ η εξίσωση

$$\text{(E): } \sigma\upsilon\nu^8 x + \eta\mu^8 x = \frac{97}{128}$$

Λύση

$$\text{H (E)} \Leftrightarrow \left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right)^4 = \frac{97}{128} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16}(2 + 12\,\sigma\upsilon\nu^2 2x + 2\,\sigma\upsilon\nu^4 2x) = \frac{97}{128} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{32}\left(4 + 12(1+\sigma\upsilon\nu 4x) + (1+\sigma\upsilon\nu 4x)^2\right) = \frac{97}{128} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{32}(\sigma\upsilon\nu^2 4x + 14\,\sigma\upsilon\nu 4x + 17) = \frac{97}{128} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 4x + 14\,\sigma\upsilon\nu 4x = \frac{29}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sigma\upsilon\nu 4x + \frac{29}{2}\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu 4x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{12}$$

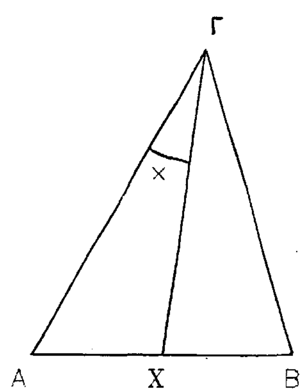
12. Δείξτε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει σημείο Χ πάνω στην πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ ώστε: $\Gamma X^2 = AX \cdot BX$ (1) είναι η

$$\eta\mu A \cdot \eta\mu B \leq \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} \qquad (2)$$

(Δόθηκε στην 16η Διεθνή Ολυμπιάδα Μαθηματικών από την Φινλανδία).

Απόδειξη

Έστω Χ ένα τυχαίο σημείο του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα

Θέτουμε

$$(3) \quad f(X) = \Gamma X^2 - AX \cdot BX$$

Έτσι παίρνουμε μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές που ορίζεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Έστω $\hat{x} = A\hat{\Gamma}X$. Από τα τρίγωνα ΑΓΧ και ΒΓΧ, έχουμε:

$$\frac{AX}{\eta\mu x} = \frac{\Gamma X}{\eta\mu A} \quad \text{και} \quad \frac{BX}{\eta\mu(\Gamma - x)} = \frac{\Gamma X}{\eta\mu B}$$

Επομένως

$$AX \cdot BX = \Gamma X^2 \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu(\Gamma - x)}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}$$

και από την (3) έχουμε:

$$(4) \quad f(X) = \Gamma X^2 \cdot \left(1 - \frac{\eta\mu x \cdot \eta\mu(\Gamma - x)}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}\right)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπάρχει σημείο Χ, για το οποίο ισχύει η (1), δηλαδή $f(X) = 0$. Τότε από την (4) έπεται ότι

$$(5) \qquad \eta\mu A \cdot \eta\mu B = \eta\mu x \cdot \eta\mu(\Gamma - x)$$

Ακόμη έχουμε,

$$\eta\mu x \cdot \eta\mu(\Gamma - x) = \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu(\Gamma - 2x) - \sigma\upsilon\nu\Gamma\right) \le \frac{1}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\Gamma) = \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$$

το οποίο μαζί με την (5) δίνει την (2) και αποδεικνύει το ικανό.
Υποθέτουμε τώρα ότι η (2) ισχύει και έστω X_1 το σημείο τομής της ημιδιχοτόμου από το Γ με το ΑΒ. Τότε η αντίστοιχη γωνία $\hat{x}_1$ είναι $\frac{\Gamma}{2}$.
Από την (4) προκύπτει

$$(6) \quad f(X_1) = \Gamma X_1 \left(1 - \frac{\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}}{\eta\mu A \cdot \eta\mu B}\right) \le 0$$

Επίσης από την (3) για $X=A$ παίρνουμε

$$(7) \quad f(A) = \Gamma A^2 > 0$$

Η συνάρτηση f είναι προφανώς συνεχής πάνω στο τμήμα ΑΒ και λόγω των σχέσεων (6) και (7) η f ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος των Bolzano - Weierstrass. Επομένως, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Χ με $f(X) = 0$. Από την (3) τώρα συνεπάγεται η (1) και έτσι αποδεικνύεται το αναγκαίο.

13. Δείξτε ότι

$$\eta\mu 5^\circ \cdot \eta\mu 15^\circ \cdot \eta\mu 25^\circ \cdot \eta\mu 35^\circ \cdot \eta\mu 45^\circ \cdot \eta\mu 55^\circ \cdot \eta\mu 65^\circ \cdot \eta\mu 75^\circ \cdot \eta\mu 85^\circ = \frac{1}{2^9}\sqrt{2}$$

Απόδειξη

Θέτουμε

$$x = \eta\mu 5^\circ \cdot \eta\mu 15^\circ \cdot \eta\mu 25^\circ \cdot \eta\mu 35^\circ \cdot \eta\mu 45^\circ \cdot \eta\mu 55^\circ \cdot \eta\mu 65^\circ \cdot \eta\mu 75^\circ \cdot \eta\mu 85^\circ$$

και

$$y = \eta\mu 5^\circ \cdot \eta\mu 10^\circ \cdot \eta\mu 15^\circ \cdot \eta\mu 20^\circ \cdots \eta\mu 45^\circ \cdot \eta\mu 50^\circ \cdots \eta\mu 85^\circ$$

Επειδή $\eta\mu\,(90^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$, έχουμε:

$$y = (\eta\mu 5^\circ\ \sigma\upsilon\nu 5^\circ) \cdot (\eta\mu 10^\circ\ \sigma\upsilon\nu 10^\circ) \cdots (\eta\mu 40^\circ\ \sigma\upsilon\nu 40^\circ) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Επειδή $2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu 2\alpha$, έχουμε:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2^8}\,\eta\mu 10^\circ\ \eta\mu 20^\circ \cdots \eta\mu 80^\circ$$

και επομένως

$$xy = \frac{1}{2}\sqrt{2}\ \frac{1}{2^8}\,\eta\mu 5^\circ\ \eta\mu 10^\circ\ \eta\mu 15^\circ \cdots \eta\mu 85^\circ = \frac{1}{2^9}\sqrt{2}\ y$$

και επειδή $y \neq 0$, έχουμε $x = \frac{1}{2^9}\sqrt{2}$.

14. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση:

$$\text{(E)}: \sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$$

Λύση

Πρέπει $|x| \leq 1$. Θέτουμε $x = \sigma\upsilon\nu\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$. Επομένως

$$\text{(E)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |\eta\mu\alpha| = \sigma\upsilon\nu 3\alpha \\ x = \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \alpha \in [0,\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ x = \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \alpha \in [0,\pi] \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi\kappa}{2},\ \kappa \in \mathbf{Z}\right) \text{ ή } \left(\alpha = \frac{3}{4}\pi + \pi\rho,\ \rho \in \mathbf{Z}\right)$$

Επειδή $0 \leq \alpha \leq \pi$, έχουμε:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8},\ \alpha_2 = \frac{5\pi}{8} \quad \text{και} \quad \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$$

Επομένως

$$x_1 = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_2 = \sigma\upsilon\nu\,\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\,\frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \sigma\upsilon\nu\,\frac{3\pi}{4} = -\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Απάντηση: $L = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}.$

15. Αν είναι Α, Β, Γ οι γωνίες τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι

$$\frac{\sqrt{\eta\mu A}}{\sqrt{\eta\mu B}+\sqrt{\eta\mu \Gamma}-\sqrt{\eta\mu A}} + \frac{\sqrt{\eta\mu B}}{\sqrt{\eta\mu A}+\sqrt{\eta\mu \Gamma}-\sqrt{\eta\mu B}} + \frac{\sqrt{\eta\mu \Gamma}}{\sqrt{\eta\mu A}+\sqrt{\eta\mu B}-\sqrt{\eta\mu \Gamma}} \geq 3$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\alpha < \beta+\gamma \;\Rightarrow\; \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 < \left(\sqrt{\beta+\gamma}\right)^2 < \left(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\alpha} < \sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha} > 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{2R\eta\mu B}+\sqrt{2R\eta\mu\Gamma}-\sqrt{2R\eta\mu A} > 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = \sqrt{\eta\mu B}+\sqrt{\eta\mu\Gamma}-\sqrt{\eta\mu A} > 0 \qquad (1)$$

Ανάλογα $\quad y = \sqrt{\eta\mu\Gamma}+\sqrt{\eta\mu A}-\sqrt{\eta\mu B} > 0 \qquad (2)$

και $\quad z = \sqrt{\eta\mu A}+\sqrt{\eta\mu B}-\sqrt{\eta\mu\Gamma} > 0 \qquad (3)$

Από τις (1), (2), (3) παίρνουμε

$$\left\{\sqrt{\eta\mu A} = \frac{y+z}{2},\quad \sqrt{\eta\mu B} = \frac{z+x}{2},\quad \sqrt{\eta\mu\Gamma} = \frac{x+y}{2}\right\} \qquad (4)$$

Επομένως

$$\frac{\sqrt{ημA}}{\sqrt{ημB}+\sqrt{ημΓ}-\sqrt{ημA}}+\frac{\sqrt{ημB}}{\sqrt{ημΓ}+\sqrt{ημA}-\sqrt{ημB}}+\frac{\sqrt{ημΓ}}{\sqrt{ημA}+\sqrt{ημB}-\sqrt{ημΓ}}\overset{(4)}{=}$$

$$=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geq$$

$$\geq\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{y}}+\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}}=1+1+1=3$$

Η ισότητα ισχύει $\Leftrightarrow\ x=y=z\ \Leftrightarrow\ ημA=ημB=ημΓ\ \Leftrightarrow\ α=β=γ$

16. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(E)}:\quad \sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$$

Λύση

Πρέπει $|x|\leq 1$. Θέτουμε x=συνα, όπου $α\in[0,π]$. Επειδή $ημ\frac{α}{2}\geq 0$, $ημα\geq 0$,

η (Ε) $\Leftrightarrow\ \sqrt{2}\,ημ\frac{α}{2}=συν2α+ημ2α\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\,ημ\frac{α}{2}=\sqrt{2}\,ημ\left(\frac{π}{4}+2α\right)\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ ημ\left(\frac{3α}{4}+\frac{π}{8}\right)συν\left(\frac{5α}{4}+\frac{π}{8}\right)=0\ \Rightarrow α=-\frac{π}{6}+\frac{4πκ}{3},\ κ\in\mathbf{Z}\ \text{ή}\ α=\frac{3π}{10}+\frac{4πρ}{5},\ ρ\in\mathbf{Z}$$

Επειδή $α\in[0,π]$ παίρνουμε $α=\frac{3π}{10}$, δηλαδή

$$x=συν\frac{3π}{10}=ημ36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

17. Να επιλυθεί στο R η εξίσωση

$$\textbf{(E)}:\quad x+\frac{2x}{\sqrt{2+x^2}}=\sqrt{2}$$

Λύση

Πρέπει $x > 0$. Θέτουμε $x = \sqrt{2}$ εφt με $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$.

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{2}\,\text{εφ}t + \frac{2\sqrt{2}\ \text{εφ}t}{\sqrt{2}\ \text{τεμ}t} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,(\text{συν}t - \text{ημ}t) = \text{ημ}2t \Leftrightarrow$$

$$(\text{Το ημ}2t > 0 \Rightarrow \text{συν}t - \text{ημ}t > 0 \Rightarrow \text{εφ}t < 1)$$

$$\Leftrightarrow 2\,(1 - \text{ημ}2t) = \text{ημ}^2 2t \Leftrightarrow \text{ημ}2t_1 = \sqrt{3} - 1 \ \text{ ή } \ \text{ημ}2t_2 = -\sqrt{3} - 1$$

$$\left(0 < \text{ημ}2t_1 < 1, \quad \text{ημ}2t_2 < -1\right)$$

Επειδή $\text{ημ}2t = \dfrac{2\,\text{εφ}t}{1 + \text{εφ}^2 t} \Rightarrow \dfrac{2\,\text{εφ}t}{1 + \text{εφ}^2 t} = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{εφ}t_1 = \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1} \quad \text{ ή } \quad \text{εφ}t_2 = \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Επειδή $\text{εφ}t_1 > 1$, $0 < \text{εφ}t_2 < 1$, θα είναι

$$x = \sqrt{2}\ \frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{\sqrt{3} - 1}$$

18. Αν $\nu \in \mathbb{N}^*$ και $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{\nu}\right)$, δείξτε ότι:

$$\text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}2\alpha \cdot \text{ημ}3\alpha \cdot \ldots \cdot \text{ημ}\nu\alpha < \frac{1}{\nu^\nu} \cdot \frac{1}{\text{ημ}^\nu \dfrac{\alpha}{2}}$$

Απόδειξη

Για τους θετικούς αριθμούς

ημα, ημ2α, ημ3α, ..., ημ(να) — $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{\nu} \Rightarrow \text{ημ}\kappa\alpha > 0$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \nu$ —

εφαρμόζουμε την ανισότητα του Cauchy:

$$\sqrt[\nu]{\text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}2\alpha \cdot \ldots \cdot \text{ημ}(\nu\alpha)} \le \frac{\text{ημ}\alpha + \text{ημ}2\alpha + \ldots + \text{ημ}(\nu\alpha)}{\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}2\alpha \cdot \text{ημ}3\alpha \cdot \ldots \cdot \text{ημ}(\nu\alpha) \le \frac{S_\nu^{\ \nu}}{\nu^\nu}, \quad (1)$$

όπου με S_ν σημειώνουμε το άθροισμα ημα + ημ2α + ... + ημ(να), το οποίο

ως γνωστόν, ισούται με $S_\nu = \dfrac{\text{ημ}\dfrac{(\nu+1)\alpha}{2} \cdot \text{ημ}\dfrac{\nu\alpha}{2}}{\text{ημ}\dfrac{\alpha}{2}}$.

Επειδή $\eta\mu\frac{(\nu+1)\alpha}{2} \leq 1$ και $\eta\mu\frac{\nu\alpha}{2}<1$, έχουμε:

$$S_\nu < \frac{1}{\eta\mu\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow S_\nu{}^\nu < \frac{1}{\eta\mu^\nu\frac{\alpha}{2}}, \quad (2)$$

Από (1) $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu 2\alpha \cdot \ldots \cdot \eta\mu(\nu\alpha) < \frac{1}{\nu^\nu} \cdot \frac{1}{\eta\mu^\nu\frac{\alpha}{2}}$.

19. Αν οι γωνίες Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ μετρούνται σε ακτίνια, δείξτε ότι:

$$\mathbf{A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma > 0}$$

Απόδειξη

Περίπτωση 1η

Αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο ή ορθογώνιο τότε είναι φανερό ότι η σχέση ισχύει.

Περίπτωση 2η

Αν $A=0,\ B=\Gamma=\frac{\pi}{2}$, τότε ισχύει το «=», αλλά το τρίγωνο είναι εκφυλισμένο.

Περίπτωση 3η

Αν $\pi > A > \frac{\pi}{2}$, τότε $\eta\mu A > 0$ και $\sigma\upsilon\nu B$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma$ θετικά, οπότε η σχέση ισχύει.

Περίπτωση 4η

Αν $B > \frac{\pi}{2}$ έχουμε $A < \frac{\pi}{2}$ και $\Gamma < \frac{\pi}{2}$. Η σχέση για απόδειξη γράφεται ισοδύναμα:

$$A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = A\,\sigma\upsilon\nu\left[\pi-(A+\Gamma)\right] + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma =$$

$$= -A\,\sigma\upsilon\nu(A+\Gamma) + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = -A\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + A\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma \geq$$

$$\geq -\varepsilon\varphi A\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + A\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma =$$

$$= -\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + A\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = A\,\eta\mu A\,\eta\mu\Gamma > 0$$

Περίπτωση 5η

Αν $\Gamma > \frac{\pi}{2}$ τότε $A < \frac{\pi}{2}$ και $B < \frac{\pi}{2}$. Επομένως

$$A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\left[\pi-(A+B)\right] =$$

$$= A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu(A+B) = A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\eta\mu A\,\eta\mu B \geq$$

$$\geq \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu^2 A\,\eta\mu B =$$

$$= \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B\underbrace{(1-\sigma\upsilon\nu B)}_{>0} + \eta\mu^2 A\,\eta\mu B \geq \eta\mu^2 A\,\eta\mu B > 0$$

20. Δείξτε ότι για κάθε x πραγματικό ισχύει:

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \neq 1,5$$

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $\xi \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε

$$\eta\mu\xi + \sigma\upsilon\nu\xi = 1,5 \Rightarrow \eta\mu^2\xi + \sigma\upsilon\nu^2\xi + 2\eta\mu\xi\,\sigma\upsilon\nu\xi = 2,25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\eta\mu\xi\,\sigma\upsilon\nu\xi = 1,25 \Rightarrow \eta\mu 2\xi = 1,25 \text{ , άτοπο ,}$$

διότι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$.

Συμπέρασμα: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \neq 1,5$.

Σχόλιο: Για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει $\left|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right| \leq \sqrt{2} = 1,4142$.

Πραγματικά:

$$\left|\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x\right| = \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x + 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{1 + \eta\mu 2x} \leq \sqrt{2} = 1,4142$$

21. Υπάρχουν $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε:

$$\eta\mu x = \alpha\sqrt{1+\eta\mu 2x} + \beta\sqrt{1-\eta\mu 2x} \qquad \text{όταν } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Λύση

$$A = \alpha\sqrt{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} + \beta\sqrt{(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)^2} = \alpha\left|\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x\right| + \beta\left|\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\right|$$

Αν $\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$, τότε $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \leq 0$, καθώς επίσης $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \leq 0$.

Επομένως: $A = -\alpha(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) - \beta(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

Τελικά έχουμε:

$$\eta\mu x = -\alpha(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) - \beta(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\alpha - \beta = 0 \ \text{ και } \ -\alpha + \beta = 1 \ \Leftrightarrow\ \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

22. Δείξτε ότι $\sqrt{\left(\frac{1999}{2\eta\mu x}\right)^2 + \left(\frac{1991}{2\sigma\upsilon\nu x}\right)^2} \geq 1995,\ \ x \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, κ ακέραιος.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε την ανισοϊσότητα των Cauchy – Schwarz – Buniakowski:

$$(\alpha^2 + \beta^2)\,(x^2 + y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$$

Συνεπώς

$$\sqrt{\left(\frac{1999}{2\eta\mu x}\right)^2 + \left(\frac{1991}{2\sigma\upsilon\nu x}\right)^2} \cdot \sqrt{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x} \geq \frac{1999}{2} + \frac{1991}{2} = 1995$$

23. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$\text{(E)}: \quad 8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1\ , \ \text{στο } (0,\ 1)$$

Λύση

Θέτουμε $x = \text{συν}\varphi$, $\varphi \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Το πρώτο μέλος της (Ε) γράφεται:

$$8\,\text{συν}\varphi\,(1-2\,\text{συν}^2\varphi)\cdot(8\,\text{συν}^4\varphi-8\,\text{συν}^2\varphi+1)=$$
$$=8\,\text{συν}\varphi\,(-\,\text{συν}2\varphi)\cdot\left(8\,\text{συν}^2\varphi\,(\text{συν}^2\varphi-1)+1\right)=$$
$$=-8\,\text{συν}\varphi\cdot\text{συν}2\varphi\cdot(-2\,\text{ημ}^2 2\varphi+1)=-8\,\text{συν}\varphi\,\text{συν}2\varphi\cdot\text{συν}4\varphi$$

Το πρόβλημά μας ανάγεται στο να λυθεί η εξίσωση

$$-8\,\text{συν}\varphi\ \text{συν}2\varphi\ \text{συν}4\varphi=1 \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ -8\,\text{ημ}\varphi\ \text{συν}\varphi\ \text{συν}2\varphi\ \text{συν}4\varphi=\text{ημ}\varphi \ \overset{(\varphi\neq 0)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow\ -\text{ημ}8\varphi=\text{ημ}\varphi\ \Leftrightarrow\ \text{ημ}8\varphi+\text{ημ}\varphi=0\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2\,\text{ημ}\frac{9}{2}\varphi\cdot\text{συν}\frac{7}{2}\varphi=0\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{2}{9}\pi\kappa,\ \kappa\in\mathbf{Z}\ \text{ή}\ \varphi=\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi\lambda}{7},\ \lambda\in\mathbf{Z}$$

Επειδή $\varphi\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ τελικά παίρνουμε:

$$\varphi_1=\frac{2\pi}{9},\quad \varphi_2=\frac{4\pi}{9},\quad \varphi_3=\frac{\pi}{7},\quad \varphi_4=\frac{3\pi}{7}\ \text{ κ.λ.π.}$$

Σχόλιο: Αν $x\in\mathbf{R}$ ενδείκνυται ο μετασχηματισμός $x=\text{εφ}\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα:

$$(\Sigma):\begin{cases}2x+x^2y=y,\\ 2y+y^2z=z,\\ 2z+z^2x=x,\\ x,y,z\in\mathbf{R}\end{cases}$$

Λύση

Ισοδύναμα το (Σ) γράφεται:

$$(\Sigma_1):\begin{cases}y=\dfrac{2x}{1-x^2},\\ z=\dfrac{2y}{1-y^2},\\ x=\dfrac{2z}{1-z^2}\end{cases}$$

Αν θέσουμε x=εφα, όπου $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\alpha \neq -\frac{\pi}{4}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, το (Σ_1) γίνεται:

$x = \text{εφ}\alpha,\ y = \text{εφ}2\alpha,\ z = \text{εφ}4\alpha,\ x = \text{εφ}8\alpha$

Επομένως

$\text{εφ}8\alpha = \text{εφ}\alpha \iff \text{εφ}8\alpha - \text{εφ}\alpha = 0 \iff$

$\iff \dfrac{\text{ημ}7\alpha}{\text{συν}8\alpha\ \text{συν}\alpha} = 0 \iff \text{ημ}7\alpha = 0 \iff \alpha = \dfrac{\kappa\pi}{7},\ \kappa \in \mathbf{Z}$

δηλαδή $x = \text{εφ}\left(\dfrac{\kappa\pi}{7}\right),\ y = \text{εφ}\left(\dfrac{2\pi\kappa}{7}\right),\ z = \text{εφ}\left(\dfrac{4\pi\kappa}{7}\right)$ κ.λ.π.

24. Χωρίς τη χρήση πινάκων δείξτε ότι:

α) $\text{συν}36^\circ - \text{συν}72^\circ = \dfrac{1}{2}$

β) $\text{συν}36^\circ \cdot \text{συν}72^\circ = \dfrac{1}{4}$

Απόδειξη

Αν $x = \text{συν}36^\circ$, τότε $\text{συν}72^\circ = 2x^2 - 1$.

Αφού $\text{συν}36^\circ - \text{συν}72^\circ = 2\,\text{ημ}54^\circ \cdot \text{ημ}18^\circ = 2\text{συν}36^\circ \cdot \text{συν}72^\circ$, έχουμε:

$$x - 2x^2 + 1 = 4x^3 - 2x$$

και επομένως

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0 \iff (4x^2 - 2x - 1)(x + 1) = 0$$

Επειδή $x = \text{συν}36^\circ \neq -1$, έχουμε:

$$4x^2 - 2x - 1 = 0$$

Άρα $\text{συν}36^\circ - \text{συν}72^\circ = x - (2x^2 - 1) = -\dfrac{1}{2}(4x^2 - 2x - 1) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Ακόμη $\text{συν}36^\circ \cdot \text{συν}72^\circ = \dfrac{1}{2}(\text{συν}36^\circ - \text{συν}72^\circ) = \dfrac{1}{4}$.

28. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει:

$$\underbrace{\text{συν}\big(\text{συν}\cdots(\text{συν}\,x)\cdots\big)}_{1988} > \underbrace{\text{ημ}\big(\text{ημ}\cdots(\text{ημ}\,x)\cdots\big)}_{1988}$$

Απόδειξη

Είναι φανερό ότι: $\text{συν}x < \dfrac{\pi}{2} - \text{ημ}x,\ \forall x \in \mathbf{R}$

Πραγματικά:

$$ημx+συνx = ημx + ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = 2\,ημ\frac{π}{4}\cdot συν\left(x - \frac{π}{4}\right) =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot συν\left(x - \frac{π}{4}\right) \le \sqrt{2} < \frac{π}{2} \qquad \left(επειδή\ συν\left(x - \frac{π}{4}\right) \le 1\right)$$

Θα αποδείξουμε τώρα με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής ότι η σχέση για απόδειξη ισχύει για οποιοδήποτε άρτιο φυσικό αριθμό (οπότε θα ισχύει και για 2ν=1988).

Βήμα 1

Για ν=2 είναι:

$συν\,(συνx) > συν\left(\frac{π}{2} - ημx\right) =$ (επειδή η συνάρτηση συν στο πρώτο τεταρτημόριο είναι γνησίως φθίνουσα) = ημ (ημx),

δηλαδή συν (συνx) > ημ (ημx)

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για ν=2κ, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\underbrace{συν\Big(συν\cdots(συν}_{2κ}x)\cdots\Big) > \underbrace{ημ\Big(ημ\cdots(ημ}_{2κ}x)\cdots\Big)$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για ν=2 (κ+1)=2κ+2, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\underbrace{συν\Big(συν\cdots(συν}_{2κ+2}x)\cdots\Big) > \underbrace{ημ\Big(ημ\cdots(ημ}_{2κ+2}x)\cdots\Big)$$

Απόδειξη

$$\underbrace{συν\Big(συν\cdots(συν}_{2κ+2}x)\cdots\Big) = \underbrace{συν\Big(συν}_{2}\ \underbrace{\Big(συν\Big(συν\cdots(συν}_{2κ}x)\cdots\Big)\Big)\Big) >$$

$$\overset{\text{βήμα 1}}{>} \underbrace{ημ\Big(ημ}_{2}\ \underbrace{\Big(συν\cdots(συν}_{2κ}x)\cdots\Big)\Big)\Big) \overset{\text{βήμα 2}}{>} \underbrace{ημ\Big(ημ}_{2}\ \underbrace{\Big(ημ\Big(ημ\cdots(ημ}_{2κ}x)\cdots\Big)\Big)\Big)$$

(επειδή η συνάρτηση ημ είναι γνησίως αύξουσα στο πρώτο τεταρτημόριο) =

$$\underbrace{ημ\Big(ημ\cdots(ημ}_{2κ+2}x)\cdots\Big)$$

29. Να λυθεί το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} y &= 4x^3 - 3x \\ z &= 4y^3 - 3y \\ x &= 4z^3 - 3z \end{aligned}$$

Λύση

Παρατηρούμε ευθύς αμέσως ότι $|x| \le 1$, γιατί αν $|x| > 1$ τότε $y = x^3 + 3(x^3 - x)$ απ' όπου $|y| > |x|$ και όμοια $|z| > |y|$, $|x| > |z|$, δηλαδή αντίφαση.

Επομένως μπορούμε να θέσουμε $x = \sigma\upsilon\nu\theta$, $0 \le \theta \le \pi$. Τότε

$$y = 4\sigma\upsilon\nu^3\theta - 3\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu 3\theta\ , \quad z = \sigma\upsilon\nu 9\theta\ , \quad x = \sigma\upsilon\nu 27\theta$$

Άρα θ είναι μια λύση στην $\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu 27\theta = 0$ ή $2\eta\mu 13\theta\ \eta\mu 14\theta = 0$, (Ε).

Η (Ε) έχει 27 λύσεις, γιατί $\theta \in [0, \pi]$ δηλαδή

$$\theta = \frac{\kappa\pi}{13},\quad \kappa = 0, 1, \ldots, 13 \quad \text{και} \quad \theta = \frac{\kappa\pi}{14},\quad \kappa = 1, 2, \ldots, 13,$$

καθένα από τα οποία μας δίνει μια διακεκριμένη τριάδα

$$(x, y, z) = (\sigma\upsilon\nu\theta,\ \sigma\upsilon\nu 3\theta,\ \sigma\upsilon\nu 9\theta)$$

που ικανοποιεί τις δεδομένες εξισώσεις.

30. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι:

$$\eta\mu^{23}\frac{A}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu^{48}\frac{B}{2} = \eta\mu^{23}\frac{B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu^{48}\frac{A}{2}$$

Υπολογίστε το πηλίκο $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ (Δόθηκε στην 4η Βαλκανική Ολυμπιάδα Μαθηματικών από την Κύπρο).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^{23}}{(1 - x^2)^{24}} \quad \text{στο } (0, 1)$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως $1-1$.

Ακόμη είναι φανερό ότι $0 < \frac{A}{2}, \ \frac{B}{2} < \frac{\pi}{2}$ και επομένως $0 < \eta\mu\frac{A}{2},\ \eta\mu\frac{B}{2} < 1$.

Για $x = \eta\mu\frac{A}{2}$ και $y = \eta\mu\frac{B}{2}$, η δεδομένη ισότητα γίνεται $f(x) = f(y)$. Επειδή η f είναι $1-1$ παίρνουμε ότι x=y και $\eta\mu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B}{2}$. Η ημιτονική συνάρτηση όμως στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι 1-1 και συνεπώς $\frac{A}{2} = \frac{B}{2}$ ή Α=Β. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και $\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = 1$.

31. Αν $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{3}$, δείξτε ότι:

$$εφ\left(\frac{\pi ημx}{4ημa}\right) + εφ\left(\frac{\pi συνx}{4συνa}\right) > 1$$

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{3}$ προκύπτει ότι $\frac{1}{ημa} < 2$ και $\frac{1}{συνa} < 2$.

Ακόμη ισχύουν

$$0 \le \frac{\pi ημx}{4ημa} \le \frac{\pi}{4ημa} < \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad 0 \le \frac{\pi συνx}{4συνa} \le \frac{\pi}{4συνa} < \frac{\pi}{2}.$$

Περίπτωση 1

Για x <a, ισχύει:

$$εφ\left(\frac{\pi ημx}{4ημa}\right) + εφ\left(\frac{\pi συνx}{4συνa}\right) \ge εφ\left(\frac{\pi συνx}{4συνa}\right) > 1 = εφ\left(\frac{\pi συνa}{4συνa}\right)$$

Περίπτωση 2

Για x=a, έχουμε

$$εφ\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{ημa}{ημa}\right) + εφ\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{συνa}{συνa}\right) = 2 > 1$$

Περίπτωση 3

Για x >a, ισχύει:

$$εφ\left(\frac{\pi ημx}{4ημa}\right) + εφ\left(\frac{\pi συνx}{4συνa}\right) \ge εφ\left(\frac{\pi ημx}{4ημa}\right) > 1 = εφ\left(\frac{\pi ημa}{4ημa}\right)$$

32. Έστω ΑΒΓ τρίγωνο με Α < Γ< 90°< Β. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εξωτερικών γωνιών Α και Β, κάθε μια μετρούμενη από την κορυφή στην απέναντι πλευρά (προεκτεινόμενη). Υποθέτουμε ότι και τα δύο αυτά ευθύγραμμα τμήματα ισούνται με ΑΒ. Υπολογίστε τη γωνία Α.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Χ και η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Β την ΑΓ στο Υ. Η υπόθεση ότι το Γ βρίσκεται μεταξύ Β και Χ έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι Β >Γ, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Β βρίσκεται μεταξύ των Γ και Χ.

Όμοια, συμπεραίνουμε ότι το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Υ γιατί Α < Γ. Αν Ζ σημείο της ΑΒ με Β μεταξύ των Α και Ζ, από το τρίγωνο ΑΒΥ παίρνουμε:

$$Z\hat{B}Y = 2\hat{A} \Rightarrow B\hat{X}A = A\hat{B}X = Z\hat{B}\Gamma = 2Z\hat{B}Y = 4\hat{A}$$

και το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΧ είναι:

$$90^\circ - \frac{1}{2}\hat{A} + 8\hat{A} = 180^\circ, \quad \text{απ' όπου} \quad \hat{A} = 12^\circ.$$

IV. ΑΠΛΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΟΘΕΩΡΙΑΣ

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα μαθηματικά μιλούν για πράγματα που δεν παρουσιάζουν κανένα ενδιαφέρον για τον άνθρωπο...
Μοιάζει με ειρωνεία της δημιουργίας που το μυαλό του ανθρώπου γνωρίζει να χειρίζεται τα πράγματα τόσο καλύτερα όσο πιο απομακρυσμένα είναι από το κέντρο της ύπαρξής του. Έτσι είμαστε εξυπνότεροι εκεί που η γνώση έχει τη μικρότερη σημασία: Στα μαθηματικά, κι ιδιαίτερα στη θεωρία των αριθμών.

ΧΕΡΜΑΝ ΒΕΪΛ

Από τη στιγμή που γίνεται αποδεκτή, από τη στιγμή που διδάσκεται, η επιστήμη είναι ψυχρή. Ψυχρή σαν τις τεχνικές που απορρέουν από αυτήν. Ψυχρή σαν τα εγχειρίδια που περιγράφουν το περιεχόμενό της ή τα βιβλία που αφηγούνται την ιστορία της. Όμως, η επιστήμη που βρίσκεται εν τω γίγνεσθαι έχει δύο όψεις. Θα μπορούσαμε να τις ονομάσουμε επιστήμη της μέρας και επιστήμη της νύχτας. Η επιστήμη της μέρας χρησιμοποιεί συλλογισμούς που συναρμολογούνται σαν γρανάζια, αποτελέσματα που έχουν τη δύναμη της βεβαιότητας. Θαυμάζει κανείς τη μεγαλειώδη τους διάταξη, όπως εκείνην ενός πίνακα του Ντα Βίντσι ή μιας φούγκας του Μπαχ. Περιδιαβάζει μέσα της όπως μέσα σ' έναν κήπο γαλλικού ρυθμού. Έχοντας συνείδηση της μεθόδου της, περήφανη για το παρελθόν της, σίγουρη για το μέλλον της, η επιστήμη της μέρας προχωράει μέσα στο φως και στη δόξα.

Η επιστήμη της νύχτας, αντίθετα, περιπλανιέται στα τυφλά. Διστάζει, τρικλίζει, κάνει πίσω, ιδρώνει, ξυπνάει αιφνίδια. Αμφιβάλλοντας για τα πάντα, ψάχνεται, αναρωτιέται, αυτοδιορθώνεται ασταμάτητα. Είναι ένα είδος εργαστηρίου όσων μπορούν να συμβούν, όπου γίνεται η κατεργασία του μελλοντικού υλικού της επιστήμης. Όπου οι υποθέσεις έχουν ακόμα τη μορφή ακαθόριστων προαισθήσεων, νεφελωδών αισθημάτων. Όπου τα φαινόμενα δεν αποτελούν ακόμα παρά μόνο απομονωμένα γεγονότα χωρίς δεσμό μεταξύ τους. Όπου τα σχέδια κάποιων πειραμάτων έχουν μόλις πάρει μορφή. Όπου η σκέψη πορεύεται μέσ' από δαιδαλώδεις δρόμους, από δρομάκια όλο γυρίσματα, τις περισσότερες φορές χωρίς διέξοδο. Στο έλεος της τύχης, το πνεύμα αναδεύει μέσα σ' έναν λαβύρινθο, κάτω από έναν κατακλυσμό μηνυμάτων, αναζητώντας ένα σημείο, ένα κλείσιμο του ματιού, έναν απρόβλεπτο συσχετισμό. Όπως ένας φυλακισμένος μέσα στο κελί του, γυρίζει γύρω γύρω, γυρεύει μιαν έξοδο, ένα φωτάκι. Δίχως να σταματάει, περνάει από την ελπίδα στην απογοήτευση, από την έξαρση στη μελαγχολία. Τίποτε δεν σου επιτρέπει να πεις ότι η επιστήμη της νύχτας θα περάσει κάποτε στο στάδιο της μέρας. Ότι ο φυλακισμένος θα βγει από τον ίσκιο. Αν αυτό γίνει, θα γίνει τυχαία, όπως ένα καπρίτσιο. Απρόοπτα, όπως μια αυτόματη γένεση. Οπουδήποτε, οποτεδήποτε, όπως ο κεραυνός. Εκείνο που οδηγεί τότε το πνεύμα δεν είναι η λογική. Είναι το ένστικτο, η διαίσθηση. Είναι η ανάγκη να δεις τι συμβαίνει. Είναι το πάθος για ζωή. Μέσα στον ατέρμονο εσωτερικό διάλογο, ανάμεσα στις αναρίθμητες υποθέσεις, τους αναρίθμητους συσχετισμούς, συνδυασμούς, συνειρμούς που διασχίζουν ακατάπαυστα το πνεύμα, ένα πύρινο βέλος σκίζει κάποτε το σκοτάδι. Φωτίζει ξάφνου το τοπίο μ' ένα φως εκτυφλωτικό, τρομαχτικό, πιο δυνατό από ό,τι χίλιοι μαζί ήλιοι. Ύστερα από το πρώτο σοκ αρχίζει ένας σκληρός αγώνας με τις συνήθειες της σκέψης. Μια σύγκρουση με το εννοιολογικό σύμπαν που κανονίζει τους συλλογισμούς μας. Τίποτε ακόμα δεν σου δίνει το δικαίωμα να πεις αν η καινούργια υπόθεση θα ξεπεράσει την αρχική της μορφή ενός χονδροειδούς προσχεδίου για να εκλεπτυνθεί, να τελειοποιηθεί. Αν θα αντέξει τη δοκιμασία της λογικής. Αν θα γίνει δεκτή μέσα στην επιστήμη της μέρας.

ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΖΑΚΟΜΠ

«Είναι μια βαθύτατα λαθεμένη ταυτολογία, που την επαναλαμβάνουν όλα τα σχολικά εγχειρίδια και διαπρεπείς άνθρωποι όταν βγάζουν λόγους, ότι θα πρέπει να καλλιεργήσουμε τη συνήθεια να σκεφτόμαστε τι κάνουμε. Στην πραγματικότητα προτιμότερο είναι το διαμετρικά αντίθετο. Ο πολιτισμός προχωρεί επεκτείνοντας τον αριθμό των σημαντικών πράξεων που μπορούμε να εκτελέσουμε χωρίς να τις σκεφτόμαστε. Οι πράξεις της σκέψης είναι όπως οι επελάσεις του ιππικού σε μια μάχη — είναι αυστηρά περιορισμένες σε αριθμό, απαιτούν ξεκούραστα άλογα και θα πρέπει να γίνονται μόνο σε στιγμές αποφασιστικής σημασίας».

ΑΛΦΡΕΝΤ ΝΟΡΘ ΓΟΥΑΪΤΧΕΝΤ

1. i) Δείξτε ότι το τελευταίο ψηφίο κάθε γινομένου δύο φυσικών αριθμών, καθένας από τους οποίους έχει στο δεκαδικό σύστημα τελευταίο ψηφίο 6, έχει στο δεκαδικό σύστημα τελευταίο ψηφίο 6.

ii) Σε ποιο ψηφίο τελειώνει ο αριθμός 2^{100};

Απόδειξη

i) $(10\alpha+6)(10\beta+6)=10(10\alpha\beta+6\alpha+6\beta+3)+6$

ii) Από την (i) έπεται:

$$2^{100}=2^{4\cdot 25}=16^{25}=16\cdot 256^{12}=16\cdot 256^{2\cdot 6}=$$
$$16(10\alpha+6)^6=16(10\alpha+6)^{2\cdot 3}=16(10\beta+6)^3=$$
$$=16(10\beta+6)(10\gamma+6)=16(10\delta+6)=10\varepsilon+6,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbf{N}^*$.

Άρα το τελευταίο ψηφίο του φυσικού αριθμού 2^{100} είναι το 6.

2. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν, η παράσταση

$$\mathbf{1492^{\nu}-1770^{\nu}-1863^{\nu}+2141^{\nu}} \quad \textbf{διαιρείται δια 1946.}$$

Λύση

Η διαφορά $x-y$ διαιρεί το $x^{\nu}-y^{\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$

Αφού $2141-1863=1770-1492=278$, η δεδομένη εξίσωση διαιρείται δια του 278. Όμοια $2141-1770=1863-1492=371$, που είναι πρώτος προς το 278 και επίσης διαιρεί τη δεδομένη έκφραση.

Συνεπώς το γινόμενο $278\cdot 371=53\cdot 1946$ είναι διαιρέτης.

3. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν, ισχύει η ισότητα

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2\nu-1}=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}$$

Λύση

Το αποτέλεσμα ισχύει για ν=1.

Υποθέτοντας ότι ισχύει για ν=κ, δηλαδή

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}=\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa+1}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}-\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}=\left(\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\kappa+1}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}\right)-\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}=$$

$$=\frac{1}{\kappa+1}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}+\left(\frac{1}{\kappa}-\frac{1}{2\kappa}\right)+\frac{1}{2\kappa+1}=\frac{1}{\kappa+1}+\ldots+\frac{1}{2\kappa-1}+\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{2\kappa+1}$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2\nu-2}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu-1}\right)=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu+1}+\ldots+\frac{1}{2\nu-1}$$

4. α) Δείξτε ότι ο αριθμός 10201 είναι σύνθετος σε κάθε βάση μεγαλύτερη του 2.

β) Δείξτε ότι ο αριθμός 10101 είναι σύνθετος σε κάθε βάση.

γ) Δείξτε ότι ο αριθμός 100011 είναι σύνθετος σε κάθε βάση.

Λύση

Έστω x η βάση.

α) Αν $x>2$, τότε $10201=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2$

β) $10101=x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(και αφού $x>2$) και οι δύο παράγοντες ξεπερνούν το 1.

γ) $100011=x^5+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$ και πάλι και οι δύο παράγοντες ξεπερνούν το 1.

5. Δείξτε ότι μπορούμε να πάρουμε το ν τόσο μεγάλο ώστε

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{\nu}$$

να είναι μεγαλύτερο του 100.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16} > 8\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{2}$$

....

Επομένως

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1+2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{8} > 1+3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{16} > 1+4\left(\frac{1}{2}\right)$$

....

Π.χ.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{198} > 1+198\left(\frac{1}{2}\right)=100$$

6. Δείξτε ότι $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{\nu!} < 3$ **για** $\nu=1, 2, 3, \ldots$

Απόδειξη

Για κ=3, 4, ... ισχύει :

$$\kappa!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots \kappa > 2^{\kappa-1} \Rightarrow \frac{1}{\kappa!} < \frac{1}{2^{\kappa-1}},\quad \kappa=3,4,\ldots$$

Άρα για $\nu \geq 1$ ισχύει:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{\nu!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu-1}}=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}}{\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{\nu-1}} < 3$$

7. Δείξτε ότι αν α, β, γ είναι ακέραιοι που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt{3}=0$, τότε $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Απόδειξη

$$\alpha+\beta\sqrt{2}=-\gamma\sqrt{3} \Rightarrow \alpha^2+2\alpha\beta\sqrt{2}+2\beta^2=3\gamma^2 \Rightarrow 2\sqrt{2}\alpha\beta=3\gamma^2-\alpha^2-2\beta^2$$

Αφού $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, πρέπει να έχουμε $\alpha\beta=0$ και $3\gamma^2-\alpha^2-2\beta^2=0$

Αν $\alpha=0$, τότε $3\gamma^2=2\beta^2 \Rightarrow \beta=\gamma=0$ (επειδή $\sqrt{\frac{3}{2}}$ άρρητος).

Αν $\beta=0 \Rightarrow 3\gamma^2=\alpha^2 \Rightarrow \alpha=\gamma=0$

8. Δείξτε ότι ο αριθμός $4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1$ είναι σύνθετος για $\nu=1, 2, 3, \ldots$

Απόδειξη

$$4\nu^3+6\nu^2+4\nu+1=(\nu+1)^4-\nu^4=\left[(\nu+1)^2-\nu^2\right]\left[(\nu+1)^2+\nu^2\right]=(2\nu+1)\left[(\nu+1)^2+\nu^2\right]$$

9. Αν μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι, κάτω από ποιες συνθήκες είναι $\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}$ ρητός;

Λύση

Υποθέτουμε ότι $\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}$ είναι ρητός. Τότε, ο αριθμός

$$\sqrt{\mu}-\sqrt{\nu}=\frac{\mu-\nu}{\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}} \text{ είναι ρητός.}$$

Άρα $$\sqrt{\mu}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu}-\sqrt{\nu}\right) \text{ είναι ρητός.}$$

Άρα μ είναι τέλειο τετράγωνο. Όμοια και το ν είναι τέλειο τετράγωνο. Αντιστρόφως: Αν μ και ν είναι τέλεια τετράγωνα, τότε ο αριθμός $\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu}$ είναι ακέραιος και επομένως ρητός.

10. Αν $f(x)=x^2+x$ δείξτε ότι η εξίσωση $4f(\alpha)=f(\beta)$ δεν έχει λύση στο σύνολο των θετικών ακεραίων.

Απόδειξη

Η εξίσωση $4\alpha(\alpha+1)=\beta(\beta+1) \Leftrightarrow 4\alpha^2+4\alpha+(-\beta^2-\beta)=0$

Επομένως

$$\alpha=\frac{-4\pm\sqrt{16+16\beta^2+16\beta}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\beta+\beta^2}}{2}$$

Επειδή $\beta^2<\beta^2+\beta+1<(\beta+1)^2$ παίρνουμε ότι η παράσταση $\beta^2+\beta+1$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου και συνεπώς η παράσταση $\frac{-1\pm\sqrt{1+\beta+\beta^2}}{2}$ δεν μπορεί νάναι ακέραιος αριθμός.

11. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^3+11^3=y^3$ δεν έχει λύση στο σύνολο των θετικών ακεραίων.

Απόδειξη

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή

$$11^3=y^3-x^3=(y-x)\,(y^2+xy+y^2),\quad 0<x<y$$

Αφού $y-x$ διαιρεί το 11^3, έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{array}{lll} (1) & y-x=1\ , & y^2+xy+x^2=11^3 \\ (2) & y-x=11\ , & y^2+xy+x^2=11^2 \\ (3) & y-x=11^2, & y^2+xy+x^2=11 \\ (4) & y-x=11^3, & y^2+xy+x^2=1 \end{array}$$

Στις τελευταίες τρεις περιπτώσεις ισχύει $y>11$ και συνεπώς $y^2+xy+x^2>11^2$, δηλαδή δεν υπάρχει λύση. Στην πρώτη περίπτωση ισχύει:

$$(x+1)^2+x\,(x+1)+x^2=11^3 \qquad ή \qquad 3x^2+3x=1330$$

Αλλά το 1330 δεν διαιρείται δια 3 και επομένως δεν υπάρχει λύση και στην περίπτωση αυτή.

12. Δείξτε ότι το πολυώνυμο x^4+2x^2+2x+2 δεν είναι γινόμενο δύο πολυωνύμων $x^2+\alpha x+\beta$ και $x^2+\gamma x+\delta$, όπου α, β, γ, δ είναι ακέραιοι.

Απόδειξη

Το γινόμενο $(x^2+\alpha x+\beta)\,(x^2+\gamma x+\delta)$ ισούται με

$$x^4+(\alpha+\gamma)x^3+(\beta+\alpha\gamma+\delta)x^2+(\beta\gamma+\alpha\delta)x+\beta\delta\,.$$

Αυτή η έκφραση ισούται με x^4+2x^2+2x+2 αν και μόνο αν:

(1) $\alpha+\gamma=0$, (2) $\beta+\alpha\gamma+\delta=2$, (3) $\beta\gamma+\alpha\delta=2$, (4) $\beta\delta=2$

Αφού α, β, γ, δ ακέραιοι, ένας από τους παράγοντες στην (4) πρέπει νάναι περιττός (±1) και ο άλλος άρτιος (±2).

Υποθέτουμε ότι ο β είναι περιττός και ο δ άρτιος. Η (3) συνεπάγεται ότι βγ άρτιος, οπότε ο γ είναι άρτιος. Αφού β περιττός και δ, γ άρτιοι, το αριστερό μέλος της (2) είναι περιττός.

Αυτό είναι αδύνατο, αφού το δεύτερο μέλος είναι άρτιος. Όμοια, η υπόθεση ότι β είναι άρτιος και δ περιττός, θα μας οδηγήσει σε αδιέξοδο. Άρα το δεδομένο πολυώνυμο 4ου βαθμού δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί σε δύο δευτεροβάθμια πολυώνυμα με ακεραίους συντελεστές.

13. Είναι το $100!+1$ πρώτος; Δώστε μια ακολουθία 100 διαδοχικών συνθέτων ακεραίων.

Λύση

Ο αριθμός $100!+1$ είναι 158-ψήφιος. Η απάντηση δίνεται από το θεώρημα του Wilson:

Αν p είναι πρώτος, τότε $(p-1)!+1$ είναι διαιρετός δια p. Π.χ. αφού 7 είναι πρώτος, ξέρουμε ότι $6!+1=721$ είναι διαιρετός δια 7 και αφού ο 101 είναι πρώτος, ο $100!+1$ διαιρείται δια 101. Άρα ο $100!+1$ είναι σύνθετος.

Μια λύση του προβλήματος είναι η:

$$100!+1,\ 100!+2,\ 100!+3, \dots,\ 100!+100$$

14. Να λυθεί στο σύνολο των θετικών ακεραίων η εξίσωση:

$$\text{(E):}\quad x^{5-x}=(6-x)^{1-x}$$

Λύση

Η (Ε) έχει προφανείς λύσεις τις $x=1$ και $x=5$. Υποθέτουμε ότι $x>6$. Αν ο $1-x$ είναι περιττός, τότε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι αρνητικό και το αριστερό θετικό. Άρα ο αριθμός x είναι περιττός, έστω $x=2v+1$ $(v\geq 3)$.

Η εξίσωση (Ε) ισοδύναμα γράφεται:

$$(2v+1)^{5-2v-1}=(6-2v-1)^{1-2v-1} \quad \text{ή} \quad (2v+1)^{v-2}=(2v-5)^{v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2v+1}{2v-5}\right)^{v-2}=(2v-5)^2 \Leftrightarrow \left(1+\frac{6}{2v-5}\right)^{v-2}=(2v-5)^2$$

Αν ο αριθμός $1+\frac{6}{2v-5}$ ήταν κλάσμα $\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$ τότε θα ήταν $(p^{v-2},\ q^{v-2})=1$ και επομένως το πρώτο μέλος της τελευταίας εξίσωσης δεν θα ήταν ακέραιος.

Άρα ο αριθμός $1+\frac{6}{2v-5}$ πρέπει να είναι ακέραιος, δηλαδή $(2v-5)/6$, απ' όπου $2v-5=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$ και $2v+1=0, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12$.

Παίρνουμε μόνο τις περιττές λύσεις που είναι μεγαλύτερες του 6, κι αυτές είναι 7 και 9. Με αντικατάσταση διαπιστώνουμε ότι η $x=7$ δεν ικανοποιεί την εξίσωση, ενώ η $x=9$ την ικανοποιεί.
Επομένως οι λύσεις της δεδομένης εξίσωσης είναι $x=1, 5, 9$.

15. Βρείτε όλες τις τριάδες (x, y, z) θετικών ακεραίων έτσι ώστε

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$$

Λύση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \leq y \leq z$ για κάθε λύση (x, y, z). Άρα $\frac{3}{x} \geq \frac{4}{5}$ δηλαδή $x \leq \frac{15}{4}$. Η $x=1$ δεν είναι δεκτή, άρα έχουμε $x=2$ ή $x=3$. Αν $x=2$, τότε $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$.

Άρα $\frac{2}{y} \geq \frac{3}{10}$ δηλαδή $y \leq \frac{20}{3}$. Άρα $y=4$ ή 5 ή 6 αφού $\frac{3}{10}<\frac{1}{3}$. Με υπολογισμό παίρνουμε ότι οι μόνες λύσεις στην περίπτωση αυτή είναι (2, 4, 20) και (2, 5, 10).

Αν $x=3$, τότε $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}$. Άρα $\frac{2}{y} \geq \frac{7}{15}$, δηλαδή $y \leq \frac{30}{7}$. Άρα $y=3$ ή $y=4$.

Με υπολογιστικό έλεγχο διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχουν λύσεις αυτού του είδους.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε τις 12 λύσεις-τριάδες, που είναι οι μεταθέσεις των (2, 4, 20) και (2, 5, 10).

16. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο ακεραίων m,n, p εκτός των 0,0,0 για τους οποίους $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι m, n, p είναι ακέραιοι, τέτοιοι ώστε

$$m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$$

Αν οι n και p είναι 0, το ίδιο είναι και ο m. Αν ακριβώς ένας από τους n και p είναι μηδέν, έχουμε $\sqrt{2}=-\frac{m}{n}$ ή $\sqrt{3}=-\frac{m}{p}$, που οδηγούν και τα δύο σε μαθηματικό αδιέξοδο.

Αν ούτε n ούτε p είναι μηδέν, τότε

$$m^2 = \left(n\sqrt{2} + p\sqrt{3}\right)^2 = 2n^2 + 3p^2 + 2np\sqrt{6} \quad \text{και} \quad \sqrt{6} = \frac{m^2 - 2n^2 - 3p^2}{2np}$$

πράγμα άτοπο.

Έτσι η μόνη τριάδα ακεραίων για την οποία ισχύει η δεδομένη σχέση είναι $m=0$, $n=0$, $p=0$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε τη βασική πρόταση:

Αν α είναι θετικός ακέραιος και $\sqrt{\alpha}$ δεν είναι ακέραιος, τότε $\sqrt{\alpha}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι α είναι ένας θετικός ακέραιος και $\sqrt{\alpha} = \dfrac{b}{c}$ όπου b και c θετικοί ακέραιοι. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι b και c είναι μεταξύ τους πρώτοι.

Τότε $\alpha c^2 = b^2$. Θεωρούμε[1] ένα πρώτο q που διαιρεί το c. Τότε q διαιρεί τον b^2 και άρα το b. Οπότε αν υπάρχει ένας τέτοιος πρώτος q, τότε b και c έχουν ένα κοινό διαιρέτη, που είναι άτοπο.

Άρα το c δεν έχει πρώτους παράγοντες, επομένως $c=1$ και $\sqrt{\alpha} = b$ είναι ένας ακέραιος.

Η παραπάνω βασική πρόταση διατυπώνεται κι έτσι:

Αν α είναι ένας θετικός ακέραιος, τότε $\sqrt{\alpha}$ είναι ένας θετικός ακέραιος ή $\sqrt{\alpha}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι α είναι ένας θετικός ακέραιος, $\sqrt{\alpha}$ δεν είναι θετικός ακέραιος και $\sqrt{\alpha}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός ακέραιος κ τέτοιος ώστε $\sqrt{\alpha}\cdot\kappa$ να είναι θετικός ακέραιος. Επίσης υπάρχει ένας θετικός ακέραιος p τέτοιος ώστε $p < \sqrt{\alpha} < p+1$.

Άρα

$$p\kappa < \sqrt{\alpha}\cdot\kappa < p\kappa + \kappa \quad \text{ή} \quad 0 < \sqrt{\alpha}\cdot\kappa - p\kappa < \kappa$$

Επομένως $\sqrt{\alpha}\cdot\kappa - p\kappa$ είναι ένας θετικός ακέραιος μικρότερος από τον κ

$$\text{και} \quad \sqrt{\alpha}\left(\sqrt{\alpha}\cdot\kappa - p\kappa\right) = \alpha\cdot\kappa - \left(\sqrt{\alpha}\cdot\kappa\right)p$$

---

1. **Δεν είναι άγνωστο ότι: Κάθε ακέραιος $n>1$ έχει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη. (Βλέπε: J. Hunter «Αριθμοθεωρία», σελ. 35).**

είναι ένας θετικός ακέραιος, που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι ο κ είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος, τέτοιος ώστε $\sqrt{\alpha}\cdot\kappa$ είναι θετικός ακέραιος. Άρα αν α είναι θετικός ακέραιος, τότε $\sqrt{\alpha}$ είναι θετικός ακέραιος ή $\sqrt{\alpha}$ είναι άρρητος.

17. Βρείτε τα τελευταία δύο ψηφία του 3^{1000}

Λύση

$3^{1000}=(1+80)^{250}=1+250\cdot 80+$ όροι που περιέχουν τον παράγοντα 80^{ν} με $\nu\geq 2$. Είναι προφανές ότι τα δύο τελευταία ψηφία του 3^{1000} είναι 01.

Διαφορετική αντιμέτωπιση

$$3^{1000}=(10-1)^{500}=10000\,M-\frac{500\cdot 499\cdot 498}{3!}\cdot 10^3+\frac{500\cdot 499}{2!}\cdot 10^2-500\cdot 10+1=$$

$=10000\,(M-50\cdot 499\cdot 83)+5000\,(2495-1)+1$

απ' όπου προκύπτει ότι τα τέσσερα τελευταία ψηφία του 3^{1000} είναι 0001.

18. Δείξτε ότι οι μόνες θετικές ακέραιες τιμές που επαληθεύουν την εξίσωση $\alpha\beta=\alpha+\beta$ είναι $\alpha=\beta=2$.

Απόδειξη

Αφού $\alpha/(\alpha\beta-\alpha)$, $\alpha\beta=\alpha+\beta$ προκύπτει ότι α/β και όμοια β/α, επομένως $\alpha=\beta$, $\alpha^2=2\alpha$ και $\alpha=\beta=2$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha\leq\beta$. Η διαίρεση του $\alpha\beta=\alpha+\beta$ δια β, δίνει $\alpha=\frac{\alpha}{\beta}+1$ που είναι μεταξύ του 1 και του 2 και συνεπώς όχι ακέραιος αν $\alpha<\beta$. Άρα $\alpha=\beta$ και επομένως $\alpha^2=2\alpha$ και $\alpha=2=\beta$ είναι η μόνη λύση.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αν $\alpha\beta=\alpha+\beta$ τότε $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}=1+\frac{1}{\beta-1}$. Επειδή $\frac{1}{\beta-1}$ ακέραιος, παίρνουμε ότι $\beta=2=\alpha$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Από τη σχέση $\alpha\beta = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \dfrac{\beta}{\beta - 1} \Rightarrow (\beta - 1)/\beta$.

Επειδή $(\beta - 1, \beta) = 1 \Rightarrow \beta - 1 = 1$ και $\beta = 2 = \alpha$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτομε $\alpha \geq \beta$.

Αν $\beta \geq 3$, τότε $\alpha\beta \geq 3\alpha > 2\alpha \geq \alpha + \beta = \alpha\beta$ πράγμα άτοπο, άρα $\beta \leq 2$. Επειδή $\beta = 1$ αδύνατο, τελικά έχουμε $\beta = 2$ και $\alpha = 2$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$\alpha\beta = \alpha + \beta \Rightarrow (\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = 2$

19. Να εξεταστεί αν υπάρχει πρώτος αριθμός στην άπειρη ακολουθία 10001, 100010001, 1000100010001, ...

Λύση

Οι όροι της ακολουθίας μπορούν να εκφρασθούν ως εξής:

$10^4 + 1,\ 10^8 + 10^4 + 1, \dots,\ 10^{4\kappa} + 10^{4(\kappa - 1)} + \dots + 10^4 + 1$

Ξαναγράφομε τον γενικό όρο στη μορφή:

$$10^4 + 10^{4\kappa - 4} + \dots + 10^4 + 1 = \frac{10^{4(\kappa+1)} - 1}{10^4 - 1} = \frac{10^{2(\kappa+1)} + 1}{10^2 + 1} \cdot \frac{10^{2(\kappa+1)} - 1}{10^2 - 1} =$$

$$= \frac{(10^{2\kappa+2} + 1)(10^{2\kappa} + 10^{2\kappa - 2} + \dots + 10^2 + 1)}{101}$$

Αφού 101 είναι πρώτος, διαιρεί τουλάχιστον έναν από τους παράγοντες $10^{2\kappa+2} + 1$ και $10^{2\kappa} + 10^{2\kappa-2} + \dots + 10^2 + 1$. Εάν $\kappa > 1$ τότε και οι δύο παράγοντες είναι μεγαλύτεροι του 101.

Άρα το δεξί μέλος της ανωτέρω ισότητας είναι ένας σύνθετος αριθμός. Άρα $10^{4\kappa} + 10^{4\kappa-4} + \dots + 10^4 + 1$ δεν μπορεί να είναι πρώτος αριθμός εάν $\kappa > 1$. Εάν $\kappa = 1$, ο όρος σταματά στο $10^4 + 1$ που ισούται με 137.73, άρα ούτε αυτός είναι πρώτος.

Οπότε η ακολουθία 10001, 100010001, 1000100010001, ... δεν περιέχει πρώτο αριθμό.

20. (Θεώρημα του Πυθαγόρα). Δεν υπάρχει ρητός αριθμός p με $p^2 = 2$.

Απόδειξη 1

Επειδή $p^2 = (-p)^2$, μπορούμε να υποθέσομε ότι p >0. Άρα θα έχουμε $p = \frac{\alpha}{\beta}$ όπου α, β φυσικοί, πρώτοι προς αλλήλους. Τότε παίρνουμε $2\beta^2 = \alpha^2$.

Αφού ο α^2 είναι άρτιος, θα πρέπει και ο α να είναι άρτιος, δηλαδή $\alpha = 2\kappa$, $\kappa \in \mathbf{N}$. (Γιατί αν ο α ήταν περιττός, τότε $\alpha = 2\lambda + 1$ για κάποιο φυσικό λ και $\alpha^2 = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 4\lambda(\lambda + 1) + 1$. Άρα α^2 θάταν περιττός, πράγμα άτοπο, αφού αντιφάσκει στην υπόθεση ότι α^2 είναι άρτιος αριθμός).

Τότε έχουμε $2\beta^2 = 4\kappa^2$ ή $\beta^2 = 2\kappa^2$, δηλαδή ο β^2 είναι άρτιος, άρα και ο β θα είναι άρτιος. Είχαμε υποθέσει ότι α και β δεν έχουν κοινό παράγοντα και μετά καταλήξαμε στο ότι έχουν το 2 κοινό παράγοντα, άτοπο.

Απόδειξη 2

Έστω ότι $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Τότε $1 < \frac{\alpha}{\beta} < 2$ και $\beta < \alpha < 2\beta$. Οπότε $0 < \alpha - \beta < \beta$. Τότε $\frac{\alpha(\alpha - \beta)}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta} - \alpha = \frac{\alpha^2 \beta}{\beta^2} - \alpha = 2\beta - \alpha$ δεν είναι ακέραιος, άτοπο.

Απόδειξη 3

Έστω $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$ με α, β σχετικώς πρώτους, οπότε β>1. Υπάρχουν τότε ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε $1 = \kappa\alpha + \lambda\beta$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας το α^2 με το $2\beta^2$, βλέπουμε ότι το β διαιρεί το 1, άτοπο.

Απόδειξη 4

Έστω ότι $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$ και $\alpha^2 = 2\beta^2$, όπου α και β σχετικώς πρώτοι θετικοί ακέραιοι. Τώρα, το τελικό ψηφίο του τετραγώνου ενός ακεραίου είναι το τελικό ψηφίο του τετραγώνου του τελικού ψηφίου του ακεραίου. Άρα το β^2 τελειώνει σε κάποιο από τα: 0, 1, 4, 5, 6 ή 9, έτσι ώστε το $2\beta^2$ να τελειώνει σε 0, 2 ή 8. Αφού το α^2 τελειώνει επίσης σε 0, 1, 4, 5, 6, 9 και έτσι το α^2 $(= 2\beta^2)$ δεν μπορεί να τελειώνει σε 2 ή 8, έχουμε ότι α^2 και $2\beta^2$ τελειώνουν αμφότερα σε 0. Αυτό απαιτεί το β^2 να τελειώνει σε 0 ή 5. Αλλά εάν το α^2 τελειώνει σε 0 και το β^2

τελειώνει σε 0 ή 5, τότε το α τελειώνει σε 0 και το β τελειώνει σε 0 ή 5, έτσι ώστε το 5 να διαιρεί αμφότερα τα α και β. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι οι αριθμοί α και β είναι σχετικώς πρώτοι. Άρα το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη 5

Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2}=\frac{\alpha}{\beta}$ και $\alpha^2=2\beta^2$ όπου α και β είναι πρώτοι προς αλλήλους θετικοί ακέραιοι. Βλέπουμε ότι $\beta>1$ γιατί αν $\beta=1$ τότε $\sqrt{2}=\alpha=$ακέραιος, πράγμα άτοπο. Διαιρώντας παίρνουμε $\beta^2=\left(\frac{\alpha}{2}\right)\alpha$. Τώρα (1) κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 είναι είτε πρώτος είτε γινόμενο πρώτων και (2) εάν p ένας πρώτος που διαιρεί το γινόμενο $\kappa\cdot\lambda$ δύο ακεραίων, τότε ο p διαιρεί τον κ ή ο p διαιρεί τον λ. Υπάρχει ένας πρώτος p που διαιρεί τον β, αφού $\beta>1$. Επίσης ο p διαιρεί τον $\frac{\alpha}{2}$ ή ο p διαιρεί τον α. Και στις δύο περιπτώσεις ο p διαιρεί τον α, οπότε ο p διαιρεί και τον α και τον β, που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι α και β είναι πρώτοι προς αλλήλους. Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη 6

Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2}=\frac{\alpha}{\beta}$ και $\alpha^2=2\beta^2$ όπου α και β είναι θετικοί ακέραιοι, πρώτοι προς αλλήλους. Τότε $\beta^2=\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$. Τώρα (1) κάθε θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 είναι είτε πρώτος, είτε γινόμενο πρώτων και (2) εάν ένας πρώτος p διαιρεί ένα γινόμενο $\kappa\cdot\lambda$ ακεραίων, τότε ο p διαιρεί τον κ ή ο p διαιρεί τον λ και (3) εάν ο p είναι πρώτος και ο p διαιρεί τον κ και ο p διαιρεί τον $\kappa+\lambda$ ή ο p διαιρεί τον $\kappa-\lambda$, τότε ο p διαιρεί τον λ. Υπάρχει ένας πρώτος p που διαιρεί τον β, αφού $\beta>1$. Τότε ο p διαιρεί το $\alpha+\beta$ ή το $\alpha-\beta$, οπότε ο p διαιρεί τον α. Ως εκ τούτου ο p διαιρεί αμφότερους τους α και β, άτοπο. Άρα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη 7

Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2}=\frac{\alpha}{\beta}$ και $\alpha^2=2\beta^2$. Επειδή $\beta>1$ και $\sqrt{2}>1$, συνεπάγεται ότι $\alpha>1$. Ως γνωστόν, κάθε φυσικός αριθμός Α δέχεται μονοσήμαντη ανάλυση σε γινόμενο της μορφής

$$A = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdot p_3^{\nu_3} \cdots p_\kappa^{\nu_\kappa}$$

όπου $p_1, p_2, ..., p_\kappa$ πρώτοι αριθμοί φυσικοί και $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa$ φυσικοί αριθμοί και $p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_\kappa$.

Οπότε $\alpha = p_1^{r_1}\ p_2^{r_2} \ ...\ p_t^{r_t}$ και $\beta = q_1^{s_1}\ q_2^{s_2}\ ...\ q_u^{s_u}$, όπου $p_1, ..., p_t$, $q_1, q_2, ..., q_u$ είναι πρώτοι και $r_1, ..., r_t$, $s_1, ..., s_u$ είναι θετικοί ακέραιοι. Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, η ισότητα $\alpha^2 = 2\beta^2$ γράφεται

$$p_1^{2r_1}\ p_2^{2r_2}\ ...\ p_t^{2r_t} = 2q_1^{2s_1}\ q_2^{2s_2}\ ...\ q_u^{2s_u},$$

αλλά αυτό είναι άτοπο, αφού ο πρώτος αριθμός 2 εμφανίζεται σε άρτια δύναμη στο αριστερό μέλος και σε περιττή δύναμη στο δεξιό μέλος ή αφού ο ολικός αριθμός των παραγόντων είναι άρτιος στο ένα μέλος και περιττός στο άλλο. Άρα $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη 8

Ως γνωστόν, το πλήθος των διαιρετών του φυσικού αριθμού $N = p_1^{\nu_1} \cdot p_2^{\nu_2} \cdot ... \cdot p_\kappa^{\nu_\kappa}$ όπου $p_1, p_2, ..., p_\kappa$ θετικοί πρώτοι και $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_\kappa \in \mathbf{N}$ με $p_1 < p_2 < ... < p_\kappa$, είναι $(\nu_1 + 1)\ (\nu_2 + 1) ... (\nu_\kappa + 1)$.

Εκφράζουμε το N σε μια μορφή γινομένου πρώτων παραγόντων, όπως $N = p_1^{\alpha} \cdot p_2^{\beta} \cdot p_3^{\gamma} \cdots$. Τότε, $N^2 = p_1^{2\alpha} \cdot p_2^{2\beta} \cdot p_3^{2\gamma} \cdots$.

Ο αριθμός των διαιρετών του N, D(N) είναι $(\alpha+1)\ (\beta+1)\ (\gamma+1) \cdots$. Τότε, ο αριθμός των διαιρετών του N^2 είναι $(2\alpha+1)\ (2\beta+1)\ (2\gamma+1)$, που όπως βλέπουμε είναι ένας περιττός αριθμός. Άρα, κάθε τετράγωνο αριθμού έχει πάντα ένα περιττό αριθμό διαιρετών. Τώρα, δύο φορές το τετράγωνο ενός αριθμού θα έχει άρτιο αριθμών διαιρετών, γιατί:

(α) Εάν 2 δεν είναι παράγοντας του N^2, τότε $2N^2 = 2^1\,(p_1^{2\alpha}) \cdot (p_2^{2\beta}) \cdot (p_3^{2\gamma}) \cdots$.
Οπότε $D(2N^2) = (1+1)\,(2\alpha+1)\,(2\beta+1)\,(2\gamma+1) \cdots$.

(β) Εάν 2 είναι παράγοντας του N^2, τότε $N^2 = (2^{2\kappa})\,(p_1^{2\alpha})\ (p_2^{2\beta})\ (p_3^{2\gamma}) \cdots$ και $2N^2 = (2^{2\kappa+1})\,(p_1^{2\alpha})\ (p_2^{2\beta})\ (p_3^{2\gamma}) \cdots$.

Οπότε $D(2N^2) = (2\kappa+1+1)\,(2\alpha+1)\,(2\beta+1)\,(2\gamma+1) \cdots$, δηλαδή $D(2N^2)$ είναι άρτιος. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η σχέση $\alpha^2 = 2\beta^2$ δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για τους ακεραίους α και β, αφού το α^2 έχει περιττό πλήθος διαιρετών και το $2\beta^2$ άρτιο πλήθος διαιρετών.

Απόδειξη 9

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$. Αν η εξίσωση αυτή έχει ρητές ρίζες, αυτές θα είναι της μορφής $\frac{p}{q}$, όπου ο p είναι διαιρέτης του 2 και ο q διαιρέτης του 1. Δηλαδή οι πιθανές ρητές ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1, -1, 2, -2. Όμως $f(1) = f(-1) = -1 \neq 0$ και $f(2) = f(-2) = 2 \neq 0$.

Δηλαδή, οι αριθμοί 1, -1, 2, -2 δεν είναι ρίζες της $x^2 - 2 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει ρητές ρίζες. Άρα ο αριθμός $\sqrt{2}$ που είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης, δεν μπορεί να είναι ρητός αριθμός.

V. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Είναι αλήθεια πως ο κόσμος καθορίζει την κατεύθυνση ανάπτυξης των μαθηματικών· μπορεί να εκτροχιαστούν, και τότε ο κόσμος τα ξαναφέρνει στον σωστό δρόμο. Υπάρχει μία ωραία αναλογία που την αναφέρει ο δημιουργός της θεωρίας των καταστροφών, ο René Thom: Όταν γεννιέται ένα μωρό, στην αρχή βγάζει όλους τους φθόγγους όλων των γλωσσών του κόσμου· αφού παρακολουθήσει, όμως, την ομιλία της μητέρας του για ένα διάστημα, αρχίζει να χρησιμοποιεί αποκλειστικά τους φθόγγους της γλώσσας της. Έτσι κι εμείς οι μαθηματικοί χρησιμοποιούμε όλους τους φθόγγους των δυνατών μαθηματικών και πρέπει να ακούσουμε τη μητέρα Φύση για να βρούμε ποια μαθηματικά είναι τα κατάλληλα γι' αυτόν τον κόσμο.

CHRISTOPHER ZEEMAN

* * *

Παλαιότερα είχαμε την άποψη ότι τα μοντέρνα μαθηματικά είναι από την πλευρά της λογικής εντυπωσιακά, ενδιαφέροντα και αξιόλογα, αλλά μόνο για απασχόληση των μαθηματικών. Όσον αφορά εμάς του θεωρητικούς φυσικούς, θεωρούσαμε πως ξέραμε όλα τα αναγκαία μαθηματικά και ότι όλο αυτό το μοντέρνο οπλοστάσιο δεν θα μας παρείχε καμία βοήθεια. Τώρα η γνώμη μου είναι εντελώς διαφορετική. Τηρώ την αντίθετη στάση, ότι δηλαδή δεν υπάρχει κανένα τμήμα των αξιόλογων μαθηματικών που έχουν βρεθεί – ή θα βρεθούν – που να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να μη χρησιμοποιηθεί κάποτε για να περιγραφεί κάποια όψη του Σύμπαντος. Οδηγήθηκα αναγκαστικά σε αυτή την άποψη επειδή, απλώς, διαπίστωσα ότι έτσι συμβαίνει. Συνειδητοποίησα πως τα πιο εκπληκτικά μέρη των μαθηματικών (η τοπολογία και η θεωρία των αριθμών, η θεωρία των καταστροφών κ.ά.) ήταν εκείνα ακριβώς που χρειαζόμουν για ιδιαίτερα φυσικά προβλήματα. Αυτός είναι ο πρακτικός λόγος που με υποχρέωσε να αλλάξω στάση. Αλλά είναι προφανές ακόμη κι όταν το σκέφτεστε θεωρητικά. Τελικά ολόκληρο το Σύμπαν, που η περιγραφή του είναι το έργο της επιστήμης, είναι πολυπλοκότερο από τον εγκέφαλό μας, και από αυτό «γεννιούνται» τα μαθηματικά.

MICHAEL BERRY

(*) Ο MICHAEL BERRY, είναι καθηγητής της φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Bristol. Εργάζεται σε κυματικά φαινόμενα. Είναι ένα πεδίο που αφορά πολλά φυσικά φαινόμενα, από τη συμπεριφορά των ραδιοκυμάτων και του φωτός ως τις κινήσεις των υποατομικών σωματιδίων. Ο Berry έχει ασχοληθεί με προβλήματα τόσο διαφορετικά όσο το τρεμούλιασμα του φωτός των άστρων και το πώς γίνεται να μπορεί ο αρσενικός σκόρος να ακολουθεί τη μυρωδιά μίας θηλυκής φερομένης καθώς αυτή διαχέεται σε μεγάλες αποστάσεις, παρασυρόμενη από τα ρεύματα του αέρα. Ο Michael Berry, που εφαρμόζει μερικές από τις νεότερες ιδέες των μαθηματικών σε κυματικά προβλήματα, κατόρθωσε, χρησιμοποιώντας ένα είδος μαθηματικών γνωστό ως θεωρία καταστροφών, να καταστήσει δυνατή την περιγραφή των πολύπλοκων σχηματισμών που δημιουργούνται από το ηλιακό φως στον πυθμένα μιας δεξαμενής γεμάτης νερό.

Υ.Σ.1. Οι φερομένες είναι μια κατηγορία δραστικών ουσιών που καθιστούν δυνατή την χημική επικοινωνία ατόμων του ίδιου είδους. Τέτοιες εκπέμπουν τα θηλυκά άτομα για να προσελκύσουν από μεγάλες αποστάσεις τα αρσενικά μέσω της όσφρησης.

Υ.Σ.2. Σκοπός της θεωρίας των καταστροφών του René Thom είναι να περιγράψει και να ταξινομήσει τις ασυνεχείς και απότομες μεταβολές που παρατηρούνται σε συστήματα όλων των ειδών, φυσικά, βιολογικά, κοινωνικά κ.ά. Η καταστροφή, είναι το απότομο άλμα που κάνει ένα σύστημα από μια κατάσταση σε κάποια άλλη ή από ένα δρόμο σε κάποιον άλλο, για να εξακολουθήσει να υφίσταται· αναφερόμαστε στη δημιουργία ενός οργάνου εμβρύου, σε μια κοινωνική επανάσταση, στην αλλαγή φάσης ενός φυσικού συστήματος κ.λ.π.

Μέσα σε μια συμπλεγματική ανθρωπότητα, κατάφορτη από τις αμαρτίες παλαιών και νέων δογμάτων, έχω στήσει τα πενήντα τετραγωνικά μου και περιμένω· με δύο αόρατα για τους άλλους ακουστικά περασμένα στ' αυτιά μου, αυτοδίδακτος ασυρματιστής που ξέρει ότι σ' αυτά προπάντων τα «επιτόπου» ταξίδια είναι δυνατόν να παρουσιαστούν οι πιο απροσδόκητες, οι πιο συγκλονιστικές περιπέτειες.

(ΟΔΥΣΣΕΑΣ ΕΛΥΤΗΣ: ΙΔΙΩΤΙΚΗ ΟΔΟΣ, ΣΕΛ. 57)

Καθώς δεν πιέζομαι και εργάζομαι περισσότερο από ευχαρίστηση παρά από καθήκον, μοιάζω με τους θεούς που κτίζουν: κατασκευάζω, χαλώ και ξανακατασκευάζω, μέχρι που να μείνω σχετικά ικανοποιημένος με το αποτέλεσμα, πράγμα που συμβαίνει σπάνια.

Lagrange

Δεν είναι στη φύση των πραγμάτων ένας μόνο άνθρωπος να κάνει ξαφνικά μια μεγάλη ανακάλυψη. Η επιστήμη προοδεύει βήμα προς βήμα και κάθε άνθρωπος στηρίζεται στο έργο των προγενεστέρων του. Όταν ακούτε ότι έγινε μια ξαφνική και αναπάντεχη ανακάλυψη – μια έκρηξη από την ηρεμία – μπορείτε να είστε πάντα βέβαιοι ότι είναι το προϊόν της επίδρασης ενός ανθρώπου σ' έναν άλλο και είναι ακριβώς αυτή η αλληλεπίδραση που κάνει δυνατή την τεράστια επιστημονική πρόοδο. Οι επιστήμονες δεν βασίζονται στις ιδέες ενός μόνο ανθρώπου, αλλά στη συνδυασμένη σοφία χιλιάδων ανθρώπων, που όλοι εξετάζουν το ίδιο πρόβλημα και ο καθένας προσθέτει τη δική του μικρή συμβολή στο μέγα οικοδόμημα της γνώσης, το οποίο ανεγείρεται βαθμιαία.

Rutherford

Ένας ανόητος αλλοτριοπράγμων ρώτησε τον Νεύτωνα πώς ανακάλυψε το νόμο της βαρύτητας. Βλέποντας πως είχε να κάνει με άτομο νηπιακής νοημοσύνης και θέλοντας να απαλλαγεί από τον μπελά, απάντησε πως ένα μήλο έπεσε και τον χτύπησε στη μύτη. Ο άνθρωπος απομακρύνθηκε απόλυτα ικανοποιημένος και πλήρως διαφωτισμένος.

Johann Friederich Carl Gauss

1. Αν $0 < \kappa < 1$ δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left[(\nu+1)^{\kappa} - \nu^{\kappa}\right] = 0$.

Απόδειξη

$$0 < (\nu+1)^{\kappa} - \nu^{\kappa} = \nu^{\kappa}\left[\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\kappa} - 1\right] < \nu^{\kappa}\left(1+\frac{1}{\nu} - 1\right) = \frac{1}{\nu^{1-\kappa}} \to 0$$

Συνεπώς $(\nu+1)^{\kappa} - \nu^{\kappa} \to 0$.

2. *Δείξτε ότι η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2\nu)}$ είναι μηδενική.*

Απόδειξη

$$\alpha_\nu^2 = \frac{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2\nu-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2\nu)^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(2\nu-1)(2\nu+1)}{(2\nu)^2}\cdot\frac{1}{2\nu+1} < \frac{1}{2\nu+1}$$

Επομένως $0 < \alpha_\nu < \dfrac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = 0$.

3. Υπολογίστε το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{99}$ όταν

$$\alpha_\nu = \frac{1}{(\nu+1)\sqrt{\nu} + \nu\sqrt{\nu+1}}.$$

Λύση

$$\alpha_\nu = \frac{(\nu+1)\sqrt{\nu} - \nu\sqrt{\nu+1}}{(\nu+1)^2\nu - \nu^2(\nu+1)} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}.$$

Επομένως

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{99} = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$$

Παρατήρηση

$$\frac{1}{(\nu+1)\sqrt{\nu} + \nu\sqrt{\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu+1}\left(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu+1}(\nu+1-\nu)} = \frac{\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}}{\sqrt{\nu}\sqrt{\nu+1}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} - \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$$

4. Αν $\alpha_\nu = \sqrt[2\nu]{\sigma\upsilon\nu^2\nu + \frac{(2\nu+1)\,\eta\mu^2\nu}{2\nu}}$, δείξτε ότι $\alpha_\nu \to 1$.

Απόδειξη

$$\alpha_\nu = \sqrt[2\nu]{\frac{2\nu\,\sigma\upsilon\nu^2\nu + 2\nu\,\eta\mu^2\nu + \eta\mu^2\nu}{2\nu}} = \sqrt[2\nu]{\frac{2\nu + \eta\mu^2\nu}{2\nu}}$$

Επειδή

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu = \sqrt[2\nu]{1+\frac{\eta\mu^2\nu}{2\nu}} \geq 1 \\ \sqrt[2\nu]{1+\frac{\eta\mu^2 2\nu}{2\nu}} \leq \sqrt[2\nu]{1+\frac{1}{2\nu}} < \sqrt[2\nu]{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \leq \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu \leq \lim_{\nu\to+\infty}\sqrt[2\nu]{2} \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = 1$$

5. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{\nu^\nu}{5^\nu \cdot \nu!}$.

Λύση

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \frac{1}{5}e < 1 \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = 0$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$\alpha_\nu = \left(\frac{\nu}{5}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}$. Επειδή $\nu! > \left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu > \left(\frac{\nu}{4}\right)^\nu \Rightarrow \frac{1}{\nu!} < \left(\frac{4}{\nu}\right)^\nu$,

συνεπώς $0 \leq \left(\frac{\nu}{5}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} < \left(\frac{\nu}{5}\right)^\nu \cdot \left(\frac{4}{\nu}\right)^\nu = \left(\frac{4}{5}\right)^\nu \to 0$, δηλαδή $\alpha_\nu \to 0$.

Σχόλιο. Για $\nu \geq 7$ ισχύει: $\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu < \nu! < \nu\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu$

Θα δείξουμε ότι ισχύει: $\left(\frac{\nu+1}{e}\right)^{\nu+1} < (\nu+1)! < (\nu+1)\left(\frac{\nu+1}{e}\right)^{\nu+1}$,

με την προϋπόθεση ότι $\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu < \nu! < \nu\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu$.

Πραγματικά: $\left(\frac{7}{e}\right)^7 < 7! < 7\left(\frac{7}{e}\right)^7 \Leftrightarrow 747{,}65966 < 5040 < 5233{,}61$ που ισχύει.

Επειδή η σχέση $e > \left(1+\frac{1}{v}\right)^v$ συνεπάγεται την $\frac{e}{\left((1+\frac{1}{v}\right)^v} > 1$, έχουμε

$$(v+1)! > \left(\frac{v}{e}\right)^v (v+1) = \left(\frac{v+1}{e}\right)^{v+1} \cdot \frac{v^v \cdot e}{(v+1)^v} = \left(\frac{v+1}{e}\right)^{v+1} \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{v}\right)^v} > \left(\frac{v+1}{e}\right)^{v+1}$$

Ακόμη έχουμε

$$(v+1)! < (v+1)\, v \left(\frac{v}{e}\right)^v = (v+1)\left(\frac{v+1}{e}\right)^{v+1} \cdot \frac{v^{v+1}\, e}{(v+1)^{v+1}} =$$

$$= (v+1)\left(\frac{v+1}{e}\right)^{v+1} \cdot \frac{e}{\left(1+\frac{1}{v}\right)^v} < (v+1)\left(\frac{v+1}{e}\right)^{v+1}.$$

Διαφορετική αντιμέτωπιση

$$\frac{\alpha_{v+1}}{\alpha_v} = \frac{(v+1)^{v+1} \cdot 5^v \cdot v!}{5^{v+1} \cdot (v+1)!\, v^v} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{v}\right)^v < \frac{3}{5},$$

για κάθε $v > 1$, δηλαδή $\alpha_{v+1} < \frac{3}{5}\alpha_v < \alpha_v$.

Ακόμη

$$\alpha_{2v} = \frac{(2v)^{2v}}{5^{2v} \cdot (2v)!} = \frac{4^v \cdot v^v \cdot v^v}{5^v \cdot 5^v \cdot 2v\,(2v-1)\cdots(v+1) \cdot v!} = \frac{4^v \cdot v^v}{5^v \cdot 2v\,(2v-1)\cdots(v+1)} \cdot \alpha_v$$

Επειδή $\frac{4^v \cdot v^v}{5^v \cdot 2v\,(2v-1)\cdots(v+1)} = \left(\frac{4}{5}\right)^v \cdot \frac{v}{2v} \cdot \frac{v}{2v-1} \cdots \frac{v}{v+1} < \left(\frac{4}{5}\right)^v$, έχουμε:

$$0 \le \lim_{v\to+\infty} \alpha_{2v} \le \lim_{v\to+\infty}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^v \alpha_v\right] = L \cdot \lim_{v\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^v = L \cdot 0 = 0, \text{ δηλαδή } \alpha_v \to 0.$$

6. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim\limits_{v\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{v^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{v^2+2^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{v^2+v^2}}\right)$

ii) $\lim\limits_{v\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{v^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{v^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{v^2+v}}\right)$

iii) $\lim\limits_{v\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{v^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{v^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{v^2+v^2}}\right)$

Λύση

i) $$\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{v^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{v^2+v^2}}=\frac{1}{v}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{v}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{v}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{v}{v}\right)^2}}\right]$$

Η τελευταία μορφή είναι το κάτω άθροισμα του Riemann για $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\left\{x_0=0,\ \frac{1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},\ 1\right\}$.

Άρα

$$\lim_{v\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{v^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{v^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{v^2+v^2}}\right)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2}$$

ii) $$\frac{1}{\sqrt{v^2+v}}\le\frac{1}{\sqrt{v^2+i}}\le\frac{1}{\sqrt{v^2+1}},\quad i=1,2,\ldots,v$$

$$\Rightarrow\ \frac{v}{\sqrt{v^2+v}}\le\sum_{i=1}^{v}\frac{1}{\sqrt{v^2+i}}\le\frac{v}{\sqrt{v^2+1}}\ \Rightarrow\lim_{v\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{v}\frac{1}{\sqrt{v^2+i}}\right]=1$$

iii) $$\frac{1}{\sqrt{v^2+i}}\ge\frac{1}{\sqrt{v^2+v^2}}=\frac{1}{v\sqrt{2}},\quad i=1,2,\ldots,v^2$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{v^2}\frac{1}{\sqrt{v^2+i}}\ge\frac{v}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\lim_{v\to+\infty}\sum_{i=1}^{v^2}\frac{1}{\sqrt{v^2+i}}=+\infty$$

7. Δείξτε ότι η ακολουθία $S_v=\left(1+\dfrac{1}{v}\right)^v$ είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση του v, στο σύνολο των θετικών ακεραίων.

Απόδειξη

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο v, ισχύει:

$$\left(1+\frac{1}{v+1}\right)^{v+1}>\left(1+\frac{1}{v}\right)^v.$$

Αφού $1+\frac{1}{\nu} > 1$ και $\frac{j}{\nu+1} < \frac{\nu}{\nu+1}$, όταν $j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$,

έχουμε $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{j}{\nu+1}} < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$, όταν $j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$.

Διαδοχικά έχουμε

$$\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{j}{\nu+1}} < \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} = \nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

Παίρνοντας το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου στο αριστερό μέλος της ανισότητας, έχουμε:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}-1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}-1} < \nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \quad \text{ή} \quad \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}-1 < \nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)-\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

και επομένως $(\nu+1)\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} < (\nu+1)+1$.

Συνεπώς $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} < 1+\frac{1}{\nu+1}$ και υψώνοντας και τα δύο μέλη στην (ν+1),

έχουμε: $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε το σύνολο των (ν+1) αριθμών: $1,\ 1+\frac{1}{\nu},\ 1+\frac{1}{\nu},\ 1+\frac{1}{\nu}, \ldots, 1+\frac{1}{\nu}$

Αυτοί έχουν αριθμητικό μέσο τον $1+\frac{1}{\nu+1}$ και γεωμετρικό μέσο τον $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$.

Άρα $\quad 1+\frac{1}{\nu+1} > \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$ ή $\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} > \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$.

Επομένως $S_1 < S_2 < \ldots < S_\nu < S_{\nu+1} \ldots$.

8. Δείξτε ότι η ακολουθία $T_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του ν, στο σύνολο των θετικών ακεραίων.

Απόδειξη

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι:

$$\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu} > \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} \quad \text{όταν ν θετικός ακέραιος.}$$

Αφού $1-\frac{1}{\nu} < 1$ παίρνουμε:

$$\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{j}{\nu+1}} > \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}, \quad \text{όταν } j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1.$$

Διαδοχικά έχουμε:

$$\sum_{j=0}^{\nu-1}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{j}{\nu+1}} < \sum_{j=1}^{\nu-1}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} = \nu\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

Παίρνοντας το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου στο αριστερό μέλος της ανισότητας, έχουμε:

$$\frac{1-\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}}{1-\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}} > \nu\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}}$$

Η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$\nu > (\nu+1)\left(1-\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \quad \text{ή} \quad \frac{\nu}{\nu+1} > \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{\nu+1}} \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1} > \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^{\nu}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{\nu+1} < \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^{\nu} \quad \text{ή} \quad \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1} < \left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu}$$

Επομένως $T_1 > T_2 > \ldots > T_\nu > T_{\nu+1} > \ldots$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε το σύνολο των (ν+2) αριθμών:

$$1, \frac{\nu}{\nu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}, \frac{\nu}{\nu+1}, \ldots, \frac{\nu}{\nu+1}.$$

Αυτοί έχουν αριθμητικό μέσο τον $\dfrac{\nu+1}{\nu+2}$ και γεωμετρικό μέσο τον $\left(\dfrac{\nu}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu+2}}$.

Συνεπώς $\dfrac{\nu+1}{\nu+2} > \left(\dfrac{\nu}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu+2}}$

Αντιστρέφοντας έχουμε $1+\dfrac{1}{\nu+1} < \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{\nu+2}}$ ή $\left(1+\dfrac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+2} < \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$

Άρα η T_ν είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση για κάθε ν.

Σχόλιο. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι οι ακολουθίες S_ν και T_ν τείνουν και οι δύο σε ένα και το αυτό όριο. Πραγματικά: Η ακολουθία S_ν είναι γνησίως αύξουσα.

Επίσης, αφού
$$T_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)S_\nu$$
παίρνουμε ότι $S_\nu < T_\nu$ και επειδή η T_ν είναι γνησίως φθίνουσα, έχουμε:
$$S_\nu < T_\nu \le T_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4$$
Άρα S_ν είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία που φράσσεται προς τα άνω από το 4 και επομένως πρέπει να τείνει σ' ένα όριο.

Όμοια, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η S_ν είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε:
$$S_\nu \ge S_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$
Αφού $T_\nu > S_\nu$, συμπεραίνουμε ότι η T_ν είναι γνησίως φθίνουσα και φράσσεται προς τα κάτω από το 2. Άρα η T_ν τείνει σ' ένα όριο. Επίσης, αφού
$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{T_\nu}{S_\nu} = \lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = 1,$$
τα όρια των S_ν και T_ν ταυτίζονται. Καλούμε αυτό το κοινό όριο e. Άρα με τις υποθέσεις: T_ν γνησίως φθίνουσα και S_ν γνησίως αύξουσα, είναι αρκετά εύκολο να δείξουμε ότι
$$\lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} T_\nu = e$$
Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι για όλους τους θετικούς ακεραίους ν, ισχύει $S_\nu < e < T_\nu$. Για παράδειγμα, αν ν=200, έχουμε
$$2{,}711 < \left(1+\frac{1}{200}\right)^{200} = S_{200} < e < T_{200} = \left(1+\frac{1}{200}\right)^{201} < 2{,}725.$$

9. Να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας (α_ν) με $\alpha_\nu = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}$ (ν ριζικά), αν υπάρχει.

Λύση

Η ακολουθία (α_ν) είναι αύξουσα γιατί $\alpha_2 = \sqrt{2} > \alpha_1$ και για $\nu \geq 2$ έχουμε:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \sqrt{1+\alpha_\nu} - \alpha_\nu = \frac{1+\alpha_\nu - \alpha_\nu^2}{\sqrt{1+\alpha_\nu}+\alpha_\nu} = \frac{\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}}{\sqrt{1+\alpha_\nu}+\alpha_\nu}$$

Επειδή $\alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$.

Η ακολουθία είναι επίσης φραγμένη γιατί $\alpha_1 = 1 < 2$ και

$$\alpha_\nu < 2 \Rightarrow \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu} < \sqrt{1+2} < 2.$$

Άρα η (α_ν) έχει ένα όριο λ, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\lambda = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \sqrt{1+\alpha_{\nu-1}} = \sqrt{1+\lim_{\nu\to+\infty}\alpha_{\nu-1}} = \sqrt{1+\lambda}.$$

Τότε το λ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 - x - 1 = 0$.

Συνεπώς $\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398875$

και απλουστεύοντας λ=1,618.

Σχόλιο

Το ορθογώνιο, που η σχέση των πλευρών του είναι ο αριθμός $\Phi \equiv 1,618$ έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον κατά την ανάλυσή του, γιατί δίνει ένα σοβαρό αριθμό αρμονικών σχέσεων.

10. Να εξεταστεί αν συγκλίνει η ακολουθία (β_ν) με

$$\beta_\nu = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{\ldots+\sqrt{\nu}}}}}$$

Λύση

Η (β_ν) είναι γνησίως αύξουσα, γιατί για ν φυσικό η διαφορά $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu$ μας δίνει: $\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = \frac{\sqrt{\nu+1}}{p} > 0$ γιατί ο παρονομαστής p είναι θετική ποσότητα.

Θα δείξουμε ότι (β_ν) είναι φραγμένη. Για $\nu \geq 2$, ισχύει:

$$\frac{\beta_\nu^2-1}{\sqrt{2}}=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{\ldots+\sqrt{\nu}}}}}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\sqrt{4+\sqrt{\ldots+\sqrt{\nu}}}}}=\ldots=$$

$$=\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{2^2}+\sqrt{\frac{4}{2^4}+\sqrt{\frac{5}{2^8}+\sqrt{\ldots+\sqrt{\frac{\nu}{2^{2^{\nu-2}}}}}}}}}\ \le\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1}}}}}\ \ (\nu-1 \text{ ριζικά})$$

$<\ \lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, όπου λ ο αριθμός του προηγούμενου θέματος 9, γιατί $\dfrac{\nu}{2^{2^{\nu-2}}}\le 1$ για $\nu\ge 2$.

Τελικά, για $\nu\ge 2$ ισχύει $\beta_\nu<\sqrt{1+\sqrt{2}\lambda}=1{,}813$. Άρα η (β_ν) ως αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει.

11. i) $\dfrac{\nu^4+\nu^3-7\nu+1}{2^\nu}\to 0$

ii) $\dfrac{\alpha_\nu-L}{\alpha_\nu+L}\to 0\ \Rightarrow\ \alpha_\nu\to L\ \ (\alpha_\nu\ne -L,\ L\ne 0)$

iii) $\alpha_\nu\to\alpha\ne 0\ \Rightarrow\ \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|}\to 1$

iv) $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\ge \kappa>1\ \Rightarrow\ \alpha_\nu\to+\infty\ \ (\alpha_\nu>0,\ \forall\ \nu\in N^*)$ **(κριτήριο D' Alembert)**

v) $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\to\lambda$ **και** $\lambda>1\ \Rightarrow\ \alpha_\nu\to+\infty\ \ (\alpha_\nu>0,\ \forall\ \nu\in N^*)$

vi) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^{2\nu}}{(1+\nu^2)^\nu}\to 1$

vii) Έστω ακολουθία (α_ν) με θετικούς όρους και $\lim\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\lambda$. Δείξτε ότι:

1) $\alpha_\nu\to 0$, αν $\lambda<1$ 2) $\alpha_\nu\to+\infty$, αν $\lambda>1$ (Κριτήριο D' Alembert)

Λύσεις

i) Είναι $\sqrt[5]{2}>1\ \Rightarrow\ \sqrt[5]{2}=1+\theta,\ \ \theta>0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 2^\nu=\left[(1+\theta)^\nu\right]^5>(\nu\cdot\theta)^5\ \Rightarrow\ 2^\nu>\nu^5\cdot\theta^5\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{2^\nu}<\dfrac{1}{\nu^5}\cdot\dfrac{1}{\theta^5}\ \Rightarrow\ \dfrac{\nu^4+\nu^3-7\nu+1}{2^\nu}<\dfrac{\nu^4+\nu^3-7\nu+1}{\nu^5}\cdot\dfrac{1}{\theta^5}\ \Rightarrow\ \alpha_\nu\to 0.$

(Είναι $\nu^4+\nu^3-7\nu+1>0$, από κάποιο ν και πέρα).

ii) $\dfrac{\alpha_\nu - L}{\alpha_\nu + L} - 1 \to -1 \Rightarrow \dfrac{-2L}{\alpha_\nu + L} \to -1 \Rightarrow \dfrac{2L}{\alpha_\nu + L} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha_\nu + L}{2L} \to 1 \Rightarrow \alpha_\nu + L \to 2L \Rightarrow \alpha_\nu \to L.$

iii) Έστω ε>0. $\exists \nu_0 \in \mathbf{N^*}$: $\forall \nu \ge \nu_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \Rightarrow \big||\alpha_\nu| - |\alpha|\big| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < |\alpha_\nu| - |\alpha| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\alpha| - \varepsilon < |\alpha_\nu| < |\alpha| + \varepsilon \overset{\varepsilon<|\alpha|}{\Rightarrow} \underbrace{\sqrt[\nu]{|\alpha| - \varepsilon}}_{\downarrow\atop 1} < \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} < \underbrace{\sqrt[\nu]{|\alpha| + \varepsilon}}_{\downarrow\atop 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sqrt[\nu]{|\alpha_\nu|} \to 1.$

Σχόλιο. Αρκεί να εκλέξω $\varepsilon = \dfrac{|\alpha|}{2}$ για να ισχύουν τα προηγούμενα.

iv) Αφού $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \ge \kappa \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\kappa^{\nu+1}} \ge \dfrac{\alpha_\nu}{\kappa^\nu} \Rightarrow \left(\dfrac{\alpha_\nu}{\kappa^\nu}\right)\uparrow \Rightarrow \dfrac{\alpha_\nu}{\kappa^\nu} \ge \dfrac{\alpha_1}{\kappa} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\nu \ge \kappa^\nu \cdot \dfrac{\alpha_1}{\kappa} \to +\infty$, γιατί: $\kappa^\nu \to +\infty$ και $\dfrac{\alpha_1}{\kappa} > 0$

v) Αφού $\dfrac{\lambda - 1}{2} > 0$ και $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \to \lambda$, $\exists \nu_0 \in \mathbf{N^*}$: $\forall \nu \ge \nu_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - \lambda\right| < \dfrac{\lambda - 1}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} - \lambda > \dfrac{-\lambda + 1}{2} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} > \dfrac{\lambda + 1}{2} = \theta \ (\Rightarrow \theta > 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\theta^{\nu+1}} > \dfrac{\alpha_\nu}{\theta^\nu} \Rightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\theta^{\nu+1}} > \dfrac{\alpha_\nu}{\theta^\nu} \Rightarrow \left(\dfrac{\alpha_\nu}{\theta^\nu}\right)\uparrow \underset{\nu \ge \nu_0}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha_\nu}{\theta^\nu} \ge \dfrac{\alpha_{\nu_0}}{\theta^{\nu_0}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\nu \ge \theta^\nu \cdot \dfrac{\alpha_{\nu_0}}{\theta^{\nu_0}} \to +\infty \Rightarrow \alpha_\nu \to +\infty.$

vi) Είναι $\alpha_\nu = \left(\dfrac{\nu^2}{1+\nu^2}\right)^\nu < 1$. Εξάλλου, έχουμε

$$\alpha_\nu = \left(1 - \frac{1}{1+\nu^2}\right)^\nu \ge 1 - \nu \cdot \frac{1}{1+\nu^2} = 1 - \frac{\nu}{1+\nu^2}$$

Άρα, θα είναι: $1 - \dfrac{\nu}{1+\nu^2} \le \alpha_\nu < 1 \Rightarrow \lim \alpha_\nu = 1.$

vii) 1) Επειδή $\frac{1-\lambda}{2}>0$ και $\lim\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}=\lambda$, $\exists\, \nu_0\in\mathbf{N}^*$: $\forall\, \nu\in\mathbf{N}^*$ με $\nu>\nu_0$ ισχύει:

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}-\lambda\right| < \frac{1-\lambda}{2} \Rightarrow \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}-\lambda < \frac{1-\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}<\lambda+\frac{1-\lambda}{2} \Rightarrow \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}<\frac{\lambda+1}{2}=\theta.$$

Είναι όμως $\lambda<1 \Rightarrow \lambda+1<2 \Rightarrow \frac{\lambda+1}{2}<1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta<1 \Rightarrow \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}<1,\ \forall\, \nu>\nu_0 \Rightarrow (a_{\nu+\nu_0})\downarrow$$

και φραγμένη κάτω από το 0, αφού $a_\nu>0$ $\forall\, \nu\in N^*$. Άρα, η (a_ν) έχει όριο πραγματικό αριθμό x. Αν $x\neq 0$, τότε η σχέση $\lim\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}=\lambda$ γράφεται:

$\frac{\lim a_{\nu+1}}{\lim a_\nu}=\lambda \Rightarrow \frac{x}{x}=\lambda \Rightarrow 1=\lambda$, που είναι άτοπο, αφού $\lambda<1$ και συνεπώς $x=0$.

2) Από τη σχέση $\lim\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}=\lambda$, έχουμε:

$$\lim\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}=\frac{1}{\lambda}<1 \Rightarrow \lim\frac{\frac{1}{a_{\nu+1}}}{\frac{1}{a_\nu}}=\theta<1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση, είναι

$\lim\frac{1}{a_\nu}=0$ με $a_\nu>0$, $\forall\, \nu\in\mathbf{N}^* \Rightarrow \lim a_\nu=+\infty$.

12. Οι $(x_{2\nu})$, $(x_{2\nu-1})$, $(x_{3\nu})$ είναι συγκλίνουσες υπακολουθίες της (x_ν). Η (x_ν) είναι συγκλίνουσα ακολουθία;

Λύση

Υποθέτουμε ότι: $x_{2\nu}\to a$, $x_{2\nu-1}\to\beta$, $x_{3\nu}\to\gamma$.

$$\begin{cases}(x_{3\nu}):\ x_3,\ x_6,\ x_9,\ x_{12},\ x_{15},\ x_{18},\ x_{21},\ \ldots\\ (x_{2\nu}):\ x_2,\ x_4,\ x_6,\ x_8,\ x_{10},\ x_{12},\ x_{14},\ \ldots\\ (x_{6\nu}):\ x_6,\ x_{12},\ x_{18},\ \ldots\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } (x_{6\nu}) \text{ είναι υπακολουθία της } (x_{3\nu}) \text{ δηλαδή } x_{6\nu} \to \gamma \\ \text{Η } (x_{6\nu}) \text{ είναι υπακολουθία της } (x_{2\nu}) \text{ δηλαδή } x_{2\nu} \to \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$\begin{cases}(x_{3\nu}):\ x_3,\ x_6,\ x_9,\ x_{12},\ x_{15},\ x_{18},\ x_{21},\ldots \\ (x_{2\nu-1}):\ x_1,\ x_3,\ x_5,\ x_7,\ x_9,\ x_{11},\ x_{13},\ldots \\ (x_{3(2\nu-1)}):\ x_3,\ x_9,\ x_{15},\ x_{21},\ldots\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } (x_{3(2\nu-1)}) \text{ είναι υπακολουθία της } (x_{3\nu}) \\ \text{Η } (x_{3(2\nu-1)}) \text{ είναι υπακολουθία της } (x_{2\nu-1})\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_{3(2\nu-1)} \to \gamma \\ x_{3(2\nu-1)} \to \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \gamma$$

Συνεπώς $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλιο. Η σύγκλιση δύο υπακολουθιών από τις τρεις δεν συνεπάγεται και τη σύγκλιση της τρίτης.

Αντιπαράδειγμα. $x_\nu = (-1)^\nu$.

$x_{2\nu} = 1 \to 1$

$x_{2\nu-1} = -1 \to -1$. Όμως $x_{3\nu} = (-1)^{3\nu} = (-1)^\nu$ αποκλίνει.

13. Έστω (α_ν) μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι, αν (β_ν) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \beta_\nu = +\infty$ τότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0$. Το αντίστροφο ισχύει;

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \left|\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right| = 0$ και εφαρμόζοντας το γνωστό θεώρημα ότι αν μια ακολουθία (x_ν) έχει την ιδιότητα $|x_\nu| \to 0$ τότε και $x_\nu \to 0$, θα προκύψει ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0$. Αλλά η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη, συνεπώς υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|\alpha_\nu| \le M$, για κάθε $\nu \in \mathbf{N}^*$. Έστω $\varepsilon>0$· επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty} |\beta_\nu| = 0$, προκύπτει ότι υπάρχει $N\left(\dfrac{M}{\varepsilon}\right) = N$ τέτοιο ώστε για κάθε $\nu \ge N$ να έχουμε $|\beta_\nu| > \dfrac{M}{\varepsilon}$.

Τότε $\dfrac{1}{|\beta_\nu|} < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Συνεπώς $\left|\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right| = \dfrac{|\alpha_\nu|}{|\beta_\nu|} \le \dfrac{M}{|\beta_\nu|} < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, για κάθε $\nu \ge N$. Συνεπώς $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \left|\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right| = 0$.

Το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει.

Για παράδειγμα: έστω (α_ν) με $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$ και (β_ν) με $\beta_\nu = 1$. Τότε η ακολουθία (α_ν) είναι φραγμένη, $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{1}{\nu} = 0$, αλλά $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \beta_\nu = 1 \neq +\infty$.

Σχόλιο. Θέτοντας μια επιπλέον συνθήκη στην ακολουθία (α_ν) μπορεί να ισχύει και το αντίστροφο.

Έστω (α_ν) με $\alpha < |\alpha_\nu| < \beta$ για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, όπου $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$. Τότε αν $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0$, συνεπάγεται ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} |\beta_\nu| = +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το γεγονός ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0$, προκύπτει ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{|\alpha_\nu|}{|\beta_\nu|} = 0$ και συνεπώς υπάρχει $N\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) = N$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\frac{|\alpha_\nu|}{|\beta_\nu|} < \frac{\alpha}{\varepsilon}$ για κάθε $\nu \geq N$.

Αλλά $|\alpha_\nu| > \alpha$, άρα $\frac{\alpha}{|\beta_\nu|} < \frac{|\alpha_\nu|}{|\beta_\nu|} < \frac{\alpha}{\varepsilon}$, δηλαδή $\frac{\alpha}{|\beta_\nu|} < \frac{\alpha}{\varepsilon}$ και συνεπώς $|\beta_\nu| > \varepsilon$, για κάθε $\nu \geq N$. Καθώς $\varepsilon > 0$ είναι αριθμός τυχαίος, προκύπτει ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} |\beta_\nu| = +\infty$.

14. Θεωρούμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_ν) τέτοια ώστε, για κάθε ν, να ισχύει η σχέση

$$x_{\nu+2} = \frac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2}$$

Αν $x_1 \leq x_2$, δείξτε ότι:

α) Η ακολουθία $(x_{2\nu+1})$ είναι αύξουσα, ενώ η ακολουθία $(x_{2\nu})$ είναι φθίνουσα.

β) Για κάθε ν ισχύει η σχέση $|x_\nu - x_{\nu-1}| = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{\nu-2}}$.

γ) Για κάθε ν ισχύει $2x_{\nu+2} + x_{\nu+1} = 2x_2 + x_1$.

δ) Η (x_ν) είναι συγκλίνουσα και έχει όριο ίσο με $\frac{x_1 + 2x_2}{3}$.

Απόδειξη

α) Δείχνουμε με επαγωγή ως προς ν, ότι $x_{2\nu-1} \leq x_{2\nu}$ για κάθε $\nu \geq 1$.

Πραγματικά, έχουμε $x_1 \le x_2$. Υποθέτουμε ότι $x_{2\kappa-1} \le x_{2\kappa}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x_{2\kappa+1} \le x_{2\kappa+2}$. Αλλά

$$x_{2\kappa+1} \le x_{2\kappa+2} \Leftrightarrow \frac{x_{2\kappa}+x_{2\kappa-1}}{2} \le \frac{x_{2\kappa+1}+x_{2\kappa}}{2} \Leftrightarrow \frac{x_{2\kappa}+x_{2\kappa-1}}{2} \le \frac{\frac{x_{2\kappa}+x_{2\kappa-1}}{2}+x_{2\kappa}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_{2\kappa}+2x_{2\kappa-1} \le x_{2\kappa}+x_{2\kappa-1}+2x_{2\kappa} \Leftrightarrow x_{2\kappa-1} \le x_{2\kappa},$$

το οποίο ισχύει από την υπόθεση της επαγωγής. Θα δείξουμε τώρα ότι $(x_{2\nu+1})$ είναι αύξουσα. Έχουμε

$$x_{2\kappa+1} = \frac{x_{2\kappa}+x_{2\kappa-1}}{2} \ge \frac{x_{2\kappa-1}+x_{2\kappa-1}}{2} = x_{2\kappa-1},$$

διότι δείξαμε ότι $x_{2\nu-1} \le x_{2\nu}$ για κάθε $\nu \ge 1$. Επίσης, η ακολουθία $(x_{2\nu})$ είναι φθίνουσα, διότι

$$x_{2\kappa} = \frac{x_{2\kappa-1}+x_{2\kappa-2}}{2} \le \frac{x_{2\kappa}+x_{2\kappa-2}}{2} \Leftrightarrow 2x_{2\kappa} \le x_{2\kappa}+x_{2\kappa-2} \Leftrightarrow x_{2\kappa} \le x_{2\kappa-2}$$

β) Από την $x_3 = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ προκύπτει ότι

$$x_3 - x_2 = \frac{x_2+x_1}{2} - x_2 \quad \text{ή} \quad x_3 - x_2 = \frac{x_1-x_2}{2} \quad \text{και συνεπώς} \quad |x_3 - x_2| = \frac{|x_2-x_1|}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι $|x_\kappa - x_{\kappa-1}| = \dfrac{|x_2-x_1|}{2^{\kappa-2}}$.

Τότε από την $x_{\kappa+1} = \dfrac{x_\kappa + x_{\kappa-1}}{2}$ προκύπτει ότι $x_{\kappa+1} - x_\kappa = \dfrac{x_{\kappa-1}-x_\kappa}{2}$ ή

$|x_{\kappa+1} - x_\kappa| = \dfrac{|x_\kappa - x_{\kappa-1}|}{2} = \dfrac{|x_2-x_1|}{2^{\kappa-1}}$, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής.

γ) Εφαρμόζοντας τη σχέση $x_{\nu+2} = \dfrac{x_\nu + x_{\nu+1}}{2}$, ν φορές διαδοχικά παίρνουμε:

$2x_{\nu+2} + x_{\nu+1} = 2x_{\nu+1} + x_\nu = 2x_\nu + x_{\nu-1} = \ldots = 2x_2 + x_1$.

δ) Από τη σχέση $2x_{\nu+2} + x_{\nu+1} = 2x_2 + x_1$ του ερωτήματος (γ) παίρνουμε,

$$2(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) + 3x_{\nu+1} = 2x_2 + x_1 \Leftrightarrow 3x_{\nu+1} = 2x_2 + x_1 - 2(x_{\nu+2} - x_{\nu+1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{\nu+1} = \frac{2x_2+x_1}{3} - \frac{2(x_{\nu+2}-x_{\nu+1})}{3}, \qquad (1)$$

Αλλά σύμφωνα με το ερώτημα (β), $|x_{\nu+2} - x_{\nu+1}| = \dfrac{|x_2-x_1|}{2^\nu} \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, συνεπώς η ακολουθία $(x_{\nu+2} - x_\nu)$ τείνει στο 0.

Παίρνουμε το όριο της (1) καθώς το $\nu \to +\infty$ και έχουμε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} x_{\nu+1} = \dfrac{2x_2+x_1}{3}$.

15. Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (x_ν), όπου

$$x_\nu = ac + (a+ab)\,c^2 + (a+ab+ab^2)\,c^3 + \ldots + (a+ab+\ldots+ab^\nu)\,c^{\nu+1},$$

όπου a,b,c είναι πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε:

$$|c| < 1, \quad b \neq 1 \text{ και } |bc| < 1.$$

Λύση

Έχουμε διαδοχικά

$$x_\nu = ac + (1+b)\,ac^2 + (1+b+b^2)\,ac^3 + \ldots + (1+b+\ldots+b^\nu)\,ac^{\nu+1} =$$

$$= ac + \frac{b^2-1}{b-1}ac^2 + \frac{b^3-1}{b-1}ac^3 + \ldots + \frac{b^{\nu+1}-1}{b-1}ac^{\nu+1} =$$

$$= \frac{ac}{b-1}\left[(b-1) + (b^2-1)c + (b^3-1)c^2 + \ldots + (b^{\nu+1}-1)c^\nu\right] =$$

$$= \frac{ac}{b-1}\left[(b + b^2c + b^3c^2 + \ldots + b^{\nu+1}c^\nu) - (1 + c + c^2 + \ldots + c^\nu)\right] =$$

$$= \frac{ac}{b-1}\left[b\,\frac{(bc)^{\nu+1}-1}{bc-1} - \frac{c^{\nu+1}-1}{c-1}\right]$$

Στην παραπάνω ακολουθία των ισοτήτων χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $b \neq 1$, $c \neq 1$, $bc \neq 1$. Επειδή $|c| < 1$ έχουμε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} c^{\nu+1} = 0$ και επειδή $|bc| < 1$, έχουμε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} (bc)^{\nu+1} = 0$. Συνεπώς

$$\lim_{\nu\to+\infty} x_\nu = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{ac}{b-1}\left[b\frac{(bc)^{\nu+1}-1}{bc-1} - \frac{c^{\nu+1}-1}{c-1}\right] = \frac{ac}{b-1}\left(-\frac{b}{bc-1} + \frac{1}{c-1}\right) =$$

$$= \frac{ac}{b-1}\cdot\frac{b-1}{(bc-1)(c-1)} = \frac{ac}{(bc-1)(c-1)}.$$

16. Έστω $f: \left[\frac{1}{\pi}, +\infty\right] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int_{\frac{1}{\pi}}^{x} \left|\text{συν}\frac{1}{t}\right| \cdot \frac{dt}{t^2}$.

α) Δείξτε ότι η f είναι μονότονη.

β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} f(\nu)$.

Λύση

α) Έστω $x_1 < x_2$. Πρέπει να δείξουμε ότι $f(x_1) \le f(x_2)$. Γι' αυτό θα συγκρίνουμε το $f(x_2) - f(x_1)$ με το 0. Η συνάρτηση $g: \left[\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$, $g(t) = \left|\text{συν}\frac{1}{t}\right| \cdot \frac{1}{t^2}$ είναι συνεχής. Τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής, μπορούμε να γράψουμε

$$f(x_2)-f(x_1)=\int_{\frac{1}{\pi}}^{x_2} g(t)\,dt-\int_{\frac{1}{\pi}}^{x_1} g(t)\,dt=\int_{x_1}^{x_2} g(t)\,dt=(x_2-x_1)\,g(\xi)=$$

$$=(x_2-x_1)\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\right|\cdot\frac{1}{\xi^2}\geq 0,\quad \text{όπου } \xi\in(x_1,x_2).$$

Συνεπώς $f(x_1)\leq f(x_2)$, δηλαδή η f είναι αύξουσα.

Σχόλιο. Μπορούμε ακόμη να παραλείψουμε το θεώρημα της μέσης τιμής και να χρησιμοποιήσουμε μόνο το γεγονός ότι η g είναι θετική, οπότε το ολοκλήρωμά της στο διάστημα $[x_1,x_2]$ είναι ένας θετικός αριθμός.

β) Για $\nu\geq 1$, επειδή $1>\frac{2}{\pi}$, έχουμε:

$$f(\nu)=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right|\cdot\frac{dt}{t^2}+\int_{\frac{2}{\pi}}^{\nu}\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right|\cdot\frac{dt}{t^2}=\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\left(-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{dt}{t^2}+\int_{\frac{2}{\pi}}^{\nu}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{t^2}=$$

$$=\left[\eta\mu\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}-\left[\eta\mu\frac{1}{t}\right]_{\frac{2}{\pi}}^{\nu}=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\eta\mu\pi-\eta\mu\frac{1}{\nu}+\eta\mu\frac{\pi}{2}=2-\eta\mu\frac{1}{\nu}.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{\nu\to+\infty} f(\nu)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(2-\eta\mu\frac{1}{\nu}\right)=2$.

Διαφορετική αντιμετώπιση του (β) ερωτήματος

$$\lim_{\nu\to+\infty} f(\nu)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\beta}\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right|\frac{dt}{t^2}=-\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\beta}\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right|d\left(\frac{1}{t}\right).$$

Θέτουμε $\frac{1}{t}=\omega\Rightarrow t=\frac{1}{\omega}$. Για $t=\frac{1}{\pi}\Rightarrow\omega=\pi$. Αν $\beta\to+\infty\Rightarrow\omega\to 0$. Για $t=\beta\Rightarrow\omega=\frac{1}{\beta}$.

Συνεπώς

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\frac{1}{\pi}}^{\beta}\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right|d\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{\beta\to+\infty}\int_{\beta}^{\frac{1}{\pi}}\left|\sigma\upsilon\nu\frac{1}{t}\right|d\left(\frac{1}{t}\right)=$$

$$=\lim_{\frac{1}{\beta}\to 0}\int_{\frac{1}{\beta}}^{\pi}\left|\sigma\upsilon\nu\,\omega\right|d(\omega)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu\,\omega\,d\omega-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sigma\upsilon\nu\,\omega\,d\omega=2.$$

17. **Έστω $\alpha_1 = \alpha > 0$, $\alpha_2 = \alpha^{\alpha_1}$, $\alpha_3 = \alpha^{\alpha_2}$, $\dots, \alpha_{\nu+1} = \alpha^{\alpha_\nu}$, $\dots$. Τι μπορούμε να πούμε για το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ σε συνάρτηση του α;**

Λύση

Υποθέτουμε στην αρχή ότι $0 < \alpha < 1$.

Τότε $\quad 1 > \alpha_2 > \alpha_1, \ \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_2, \ \alpha_2 > \alpha_4 > \alpha_3, \ \alpha_3 < \alpha_4 \dots$

και γενικά $\quad 0 < \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \dots < \alpha_{2\nu-1} < \dots,$

$\quad 1 > \alpha_2 > \alpha_4 > \alpha_6 > \dots > \alpha_{2\nu} > \dots$

και $\quad \alpha_{2i-1} < \alpha_{2\kappa}$ όταν $i, \kappa = 1, 2, \dots$.

Επομένως υπάρχουν δύο όρια: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_{2\nu-1} = x$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_{2\nu} = y$ όπου $x \leq y$. Αυτά τα όρια είναι λύσεις των εξισώσεων

$$\alpha^x = y, \qquad \alpha^y = x, \qquad (1)$$

Το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ υπάρχει, τότε και μόνο τότε, όταν τα x και y είναι ίσα για κάθε τιμή του α. Για τις διάφορες τιμές του α με $\frac{1}{e^e} \leq \alpha \leq 1$, τα διαγράμματα των καμπύλων (1) τέμνονται σ' ένα σημείο. Σ' αυτό το σημείο ισχύει $x=y$.

Συνεπώς, όταν $\frac{1}{e^e} \leq \alpha \leq 1$ υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = x = y$.

Για τις διάφορες τιμές του α με $0 < \alpha < \frac{1}{e^e}$, οι καμπύλες τέμνονται σε τρία σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), όπου $x_1 < y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 > y_3$, $x_3 = y_1$, $x_1 = y_3$. Αν $0 \leq x < x_2$ τότε η f με $f(x) = \alpha^{\alpha^x}$, επίσης ανήκει σ' αυτό το διάστημα, ενώ εάν $\alpha_1 = f(0)$, $\alpha_3 = f(\alpha_1)$ και γενικότερα $\alpha_{2\kappa+1} = f(\alpha_{2\kappa-1})$, τότε το $x = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_{2\nu+1}$ μπορεί να ισούται με x_1 ή x_2. Εφόσον $f'(x_2) = \ln^2\alpha \cdot \alpha^{\alpha^x + x} > 1$, το δεύτερο είναι αδύνατο. Επομένως το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ δεν υπάρχει. Αποδεικνύεται εύκολα, ότι $\lim\limits_{\alpha\to 0} \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_{2\nu+1} = 0$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_{2\nu} = 1$.

Για $\alpha=1$, όλα τα α_ν και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ είναι επίσης ίσα με 1. Για κάθε τιμή του α με $1 < \alpha < \sqrt[e]{e}$ οι καμπύλες (1) τέμνονται σε δύο σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) όπου $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 < x_2$.

Όταν $\alpha = \sqrt[e]{e}$ τα παραπάνω σημεία ταυτίζονται σε ένα $x_1 = x_2 = e$ και όταν $\alpha > \sqrt[e]{e}$ οι καμπύλες (1) δεν τέμνονται.

Για όλα τα $\alpha > 1$, ισχύουν οι ανισότητες $1 < \alpha < \alpha_2 < \dots < \alpha_\nu < \dots$.

Γι' αυτό $x=\lim a_\nu$, είτε απειρίζεται θετικά, είτε είναι πεπερασμένο. Αν είναι πεπερασμένο τότε x και y=x είναι λύση των καμπύλων (1). Αν $1<a\le\sqrt[e]{e}$, τότε

$$1<a_2<\left(\sqrt[e]{e}\right)^{\sqrt[e]{e}},\quad 1<a_3<\left(\sqrt[e]{e}\right)^{\left(\sqrt[e]{e}\right)^{\sqrt[e]{e}}},\ \dots$$

Επομένως, το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu$ είναι πεπερασμένο, εάν είναι πεπερασμένο κατ' αναλογία το όριο, όταν $a=\sqrt[e]{e}$. Όμως

$$\sqrt[e]{e}<e,\quad \sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}}<\left(\sqrt[e]{e}\right)^e=e,\quad \sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}^{\sqrt[e]{e}}}<e,\dots$$

και γι' αυτό $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu=e$ όταν $a=\sqrt[e]{e}$. Τα όρια $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu$ που είναι πεπερασμένα όταν $1<a<\sqrt[e]{e}$, δίνουν λύσεις $x_1=y_1$ των καμπύλων (1), που ανήκουν σ' αυτό το διάστημα. Στην ειδική περίπτωση που το $a=\sqrt[e]{e}$, το όριο της ακολουθίας (a_ν) είναι ίσο με e. Εφόσον για κάθε $a>\sqrt[e]{e}$ οι καμπύλες (1) δεν τέμνονται, το όριο της ακολουθίας (a_ν) όταν $a>\sqrt[e]{e}$ δεν υπάρχει. Έτσι το πεπερασμένο $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu$ υπάρχει μόνο στο διάστημα $\frac{1}{e^e}\le x\le\sqrt[e]{e}$.

Αν παραστήσουμε το a με x και το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu$ με y, τότε για να βρεθεί το όριο, πρέπει να λυθεί η εξίσωση $y=x^y$.

Επομένως, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε την καμπύλη $y=x^y$ στο διάστημα $\left[\frac{1}{e^e},\ \sqrt[e]{e}\right]$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής μαζί και παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα, εκτός από το σημείο $x=\sqrt[e]{e}$ και είναι αύξουσα από $x=\frac{1}{e}$ μέχρι $x=\sqrt[e]{e}$. Το σημείο καμπής της καμπύλης έχει συντεταγμένες x=0,396, y=0,582. Αριστερά του σημείου καμπής η καμπύλη είναι κοίλη και δεξιά αυτού είναι κυρτή (σε σχέση με τον άξονα των x).

Οι συντεταγμένες των χαρακτηριστικών σημείων της καμπύλης δίνονται στον πίνακα:

x	$\frac{1}{e^e}=0,0763$	0,396	1	$\sqrt[e]{e}=1,44$
y	$\frac{1}{e}=0,368$	0,582	1	e=2,72

18. i) Αν $x=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$ και $y=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$, δείξτε ότι $y^x=x^y$.

ii) Δείξτε ότι, για όλους τους θετικούς ακεραίους ν, ισχύει η σχέση

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{\nu}(\nu-2)^2+(-1)^{\nu+1}\nu^2=(-1)^{\nu+1}(1+2+\ldots+\nu)$$

Λύση

i) $$y^x=\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}\right)^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{(\nu+1)\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{\nu^{\nu}}}$$

και $$x^y=\left(\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right)^{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{(\nu+1)^{\nu+1}}{\nu^{\nu}}}$$

ii) Αν ν άρτιος, έχουμε:

$$\begin{aligned}&(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+\left((\nu-1)^2-\nu^2\right)=\\&=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\ldots+(\nu-1-\nu)(\nu-1+\nu)=\\&=-(1+2)-(3+4)-\ldots-(\nu-1+\nu)=-(1+2+\ldots+\nu)=\\&=(-1)^{\nu+1}(1+2+\ldots+\nu)\end{aligned}$$

Αν ν περιττός, έχουμε:

$$\begin{aligned}&1^2-(2^2-3^2)-(4^2-5^2)-\ldots-\left((\nu-1)^2-\nu^2\right)=\\&=1-(2-3)(2+3)-(4-5)(4+5)-\ldots-(\nu-1-\nu)(\nu-1+\nu)=\\&=1+2+3+4+5+\ldots+(\nu-1)+\nu=(-1)^{\nu+1}(1+2+\ldots+\nu).\end{aligned}$$

19. Για την ακολουθία των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{1988}$ ισχύει ότι: $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$, $|\alpha_{\kappa+1}| = |\alpha_\kappa + 1|$ για κ=1, 2, ..., 1988. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $|\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{1988}|$.

Λύση

Έστω ότι $|\alpha_{1989}| = |\alpha_{1988} + 1|$. Τότε είναι:

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_1| = |\alpha_0 + 1| \\ |\alpha_2| = |\alpha_1 + 1| \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ |\alpha_{1989}| = |\alpha_{1988} + 1| \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{υψώνουμε στο} \\ \text{τετράγωνο}}}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{1989} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=0}^{1988} |\alpha_i + 1| \Rightarrow \sum_{i=1}^{1989} \alpha_i^2 = \sum_{i=0}^{1988} (\alpha_i + 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{1989} \alpha_i^2 = \sum_{i=0}^{1988} \alpha_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=0}^{1988} \alpha_i + 1989 \Rightarrow 2 \cdot \sum_{i=0}^{1988} \alpha_i = \alpha_{1989}^2 - \alpha_0^2 - 1989 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{1988} \alpha_i = \frac{1}{2}\left(\alpha_{1989}^2 - 1989\right) \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{1988} \alpha_i\right| = \frac{1}{2}\left|\alpha_{1989}^2 - 1989\right|$$

Η $\left|\sum_{i=1}^{1988} \alpha_i\right|$ είναι ελάχιστη, όταν γίνει ελάχιστη η παράσταση $\left|\alpha_{1989}^2 - 1989\right|$.

Επειδή ο αριθμός α_{1989} είναι ακέραιος και $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$, η τελευταία παράσταση γίνεται ελάχιστη (ίση με 18) όταν ισχύει $\alpha_{1989} = \pm 45$.

Υπολείπεται τώρα να διαπιστώσουμε αν ο α_{1989} μπορεί να πάρει τις τιμές 45, -45.

Ιδού ένα παράδειγμα:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -2,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = -2,\ \alpha_5 = 1,\ \dots,\ \alpha_{1944} = -2,$$
$$\alpha_{1945} = 1,\ \alpha_{1946} = 2,\ \alpha_{1947} = 3,\ \dots,\ \alpha_{1989} = \pm 45$$

20. α) Αν ν φυσικός και $\alpha \in R$, δείξτε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha = (-1)^\nu \sigma\upsilon\nu(\alpha - \nu\pi)$. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi\sqrt[2\nu]{e}\right)$ και το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \eta\mu\left(\nu\pi\sqrt[\nu]{e}\right)$.

β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ όταν:

$$\alpha_\nu = \frac{\eta\mu 1}{\nu^2 + 1} + \frac{\eta\mu 2}{\nu^2 + 2} + \dots + \frac{\eta\mu\nu}{\nu^2 + \nu}.$$

γ) **Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu$ όταν: $\alpha_\nu = \eta\mu^2\left(\pi\sqrt{\nu^2+\nu}\right)$.**

Λύση

α) $(-1)^\nu \sigma\upsilon\nu(\alpha - \nu\pi) = (-1)^\nu \left(\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu(\nu\pi) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu(\nu\pi)\right) =$

$= (-1)^\nu (-1)^\nu \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha$, για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Επομένως:

$$\alpha_\nu = \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi\sqrt[2\nu]{e}\right) = (-1)^\nu \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi\sqrt[2\nu]{e} - \nu\pi\right) =$$

$$= (-1)^\nu \sigma\upsilon\nu\left[\nu\pi\left(\sqrt[2\nu]{e} - 1\right)\right] = (-1)^\nu \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{2\nu}} - 1}{\frac{1}{2\nu}}\right).$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\frac{\sqrt[2\nu]{e} - 1}{\frac{1}{2\nu}} = 1 \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt[2\nu]{e} - 1}{\frac{1}{2\nu}}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0.$$

Η ακολουθία $\beta_\nu = (-1)^\nu$ είναι φραγμένη, συνεπώς το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = 0$.

$$\text{Το } \lim_{\nu\to+\infty}\eta\mu\left(\nu\pi\sqrt[\nu]{e}\right) = \lim_{\nu\to+\infty}(-1)^\nu\,\eta\mu\left(\nu\pi\sqrt[\nu]{e} - \nu\pi\right) =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty}(-1)^\nu\,\eta\mu\left[\nu\pi\left(\sqrt[\nu]{e} - 1\right)\right] = \lim_{\nu\to+\infty}(-1)^\nu\,\eta\mu\left(\pi\,\frac{e^{\frac{1}{\nu}} - 1}{\frac{1}{\nu}}\right).$$

Επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\sqrt[\nu]{e} - 1}{\frac{1}{\nu}} = 1$ και $(-1)^\nu$ φραγμένη, $\nu \to +\infty$, παίρνουμε ότι:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\eta\mu\left(\nu\pi\sqrt[\nu]{e}\right) = \eta\mu\pi = 0.$$

β) $$\left|\alpha_\nu\right| \le \frac{|\eta\mu 1|}{\nu^2+1} + \frac{|\eta\mu 2|}{\nu^2+2} + \ldots + \frac{|\eta\mu\nu|}{\nu^2+\nu} < \frac{1}{\nu^2+1} + \frac{1}{\nu^2+2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2+\nu} = \beta_\nu$$

$$\underbrace{\frac{1}{\nu^2+\nu}+\frac{1}{\nu^2+\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu^2+\nu}}_{\nu-\text{πλήθος}} < \beta_\nu < \underbrace{\frac{1}{\nu^2+1}+\frac{1}{\nu^2+1}+\ldots+\frac{1}{\nu^2+1}}_{\nu-\text{πλήθος}}$$

δηλαδή $\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu} < \beta_\nu < \dfrac{\nu}{\nu^2+1}$, οπότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\beta_\nu = 0$.

Τελικά παίρνουμε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu = 0$.

γ) Για κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$, ισχύει $2\eta\mu^2\alpha = 1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Θέτουμε $\beta_\nu = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\sqrt{\nu^2+\nu}\right)$, οπότε $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2}(1-\beta_\nu)$, για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Συνεπώς

$$\beta_\nu = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\sqrt{\nu^2+\nu}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\left(\left(\sqrt{\nu^2+\nu}-\nu\right)+\nu\right)\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\left(\sqrt{\nu^2+\nu}-\nu\right)\right)\sigma\upsilon\nu\, 2\nu\pi - \eta\mu\left(2\pi\left(\sqrt{\nu^2+\nu}-\nu\right)\right)\eta\mu\, 2\nu\pi =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\left(\sqrt{\nu^2+\nu}-\nu\right)\right).$$

Τελικά έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\beta_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\left(\sqrt{\nu^2+\nu}-\nu\right)\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\lim_{\nu\to+\infty}\left(\sqrt{\nu^2+\nu}-\nu\right)\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\nu}+\nu}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot\frac{1}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1.$$

21. α) i) Δείξτε ότι η ακολουθία $x_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}^*$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $y_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$, $\nu \in \mathbf{N}^*$ είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} x_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} y_\nu = e$.

β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{2^\nu}{\nu!}$.

Λύση

α) i) $$\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu} = \left(1-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{\nu+1}{\nu} > \left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\cdot\frac{\nu+1}{\nu} = 1,$$

δηλαδή η (x_ν) $\nu \in \mathbf{N}^*$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $\dfrac{y_\nu}{y_{\nu-1}}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}{\left(1+\dfrac{1}{\nu-1}\right)^{\nu}}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\nu^2-1}\right)^{\nu}}\cdot\dfrac{\nu+1}{\nu}<\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\nu}{\nu^2-1}\right)}\cdot\dfrac{\nu+1}{\nu}=\dfrac{\nu^3+\nu^2-\nu-1}{\nu^3+\nu^2-\nu}<1,$

συνεπώς η (y_ν) $\nu\in\mathbf{N}^*$ είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Είναι φανερό ότι $x_\nu<y_\nu$ για κάθε $\nu\in\mathbf{N}^*$.

Επειδή $0<y_\nu-x_\nu=\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\dfrac{1}{\nu}<\dfrac{e}{\nu}$, παίρνουμε ότι:

$0\le\lim\limits_{\nu\to+\infty}(y_\nu-x_\nu)\le\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{e}{\nu}$ και επομένως $\lim\limits_{\nu\to+\infty}x_\nu=\lim\limits_{\nu\to+\infty}y_\nu=e$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$\dfrac{y_\nu}{x_\nu}=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}{\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu}}=1+\dfrac{1}{\nu}>1$. Έχουμε $x_1\le x_\nu<y_\nu\le y_1\iff 2\le x_\nu<y_\nu\le 4$.

Ώστε η (x_ν) είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω από τον 4 και η (y_ν) γνησίως φθίνουσα και φραγμένη κάτω από τον 2. Επομένως οι δύο υπακολουθίες έχουν όριο.

Επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{y_\nu}{x_\nu}=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)=1$, οι δύο ακολουθίες θα έχουν κοινό όριο. Το κοινό τους όριο συμβολίζεται με e. Αποδεικνύεται* ότι ο e είναι ασύμμετρος και ότι μια προσεγγίζουσα τιμή του είναι ο 2,718.

β) Για κάθε ν≥4 έχουμε: $0<\dfrac{2^\nu}{\nu!}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2}{\nu}<\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2}{3}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\nu-2}$

Επειδή $\dfrac{2}{3}<1$ το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\nu}=0$. Επειδή $0<\dfrac{2^\nu}{\nu!}<2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\nu-1}$, παίρνουμε ότι

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{2^\nu}{\nu!}=0$.

*** Βλέπε: TOM M. APOSTOL: MATHEMATICAL ANALYSIS, SECOND EDITION, Θεώρημα 1.11, σελ. 7.**

22. i) Αν $0<\alpha<1 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = 0$.

ii) Αν $\alpha>1 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = +\infty$.

iii) Αν $\alpha<-1$, δείξτε ότι η ακολουθία (y_ν), $\nu \in \mathbb{N}$ με $y_\nu = \alpha^\nu$, δεν έχει όριο πραγματικό αριθμό.

iv) Δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{\nu} = 1$.

v) Αν $\alpha>0 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

vi) Αν $\alpha_\nu \to \alpha$ και $\beta_\nu \to \beta$ τότε $\alpha_\nu \beta_\nu \to \alpha\beta$.

Λύση

i) Θέτουμε $\alpha = \dfrac{1}{1+\theta}$ όπου $\theta>0$. Τότε κατά την ανισότητα του J. Bernoulli έχουμε:

$$(1+\theta)^\nu \geq 1+\nu\theta$$

Επομένως για κάθε $\varepsilon>0$, $\quad 0<\alpha^\nu \leq \dfrac{1}{1+\nu\theta} < \dfrac{1}{\nu\theta} < \varepsilon$,

αν $\nu \geq \nu_0$, όπου $\nu_0 > \dfrac{1}{\theta}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Επειδή $\alpha^\nu > \alpha^{\nu+1}$, από το θεώρημα: Κάθε αύξουσα και φραγμένη άνω ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει στο supremum του πεδίου τιμών της, έχουμε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha^{\nu+1} = S$. Επειδή $\alpha^{\nu+1} = \alpha^\nu \cdot \alpha$, παίρνουμε:

$$S = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha^{\nu+1} = \alpha \lim_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = \alpha S$$

Επομένως $S(1-\alpha) = 0 \overset{\alpha\neq 1}{\Rightarrow} S = 0$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Επειδή $0<\alpha<1$ για κάθε $\nu, \kappa \in \mathbf{N}^*$ με $\nu>\kappa \Rightarrow \alpha^\nu < \alpha^\kappa$. Συνεπώς:

$$\nu\alpha^\nu = \underbrace{\alpha^\nu + \alpha^\nu + \ldots + \alpha^\nu}_{\nu-\text{όροι}} < 1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{\nu-1} = \frac{1-\alpha^\nu}{1-\alpha} < \frac{1}{1-\alpha},$$

δηλαδή για κάθε $\nu \in \mathbf{N}^*$ ισχύει:

$$\nu\alpha^\nu < \frac{1}{1-\alpha} \Rightarrow \alpha^\nu < \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\nu} \Rightarrow \lim_{\nu\to+\infty} \alpha^\nu = 0.$$

ii) $a^{\nu} = \left(1+(a-1)\right)^{\nu} \ > \ 1+\nu(a-1) \ > \ \nu\underbrace{(a-1)}_{>0} \ \to \ +\infty \ \Rightarrow \ a^{\nu} \to +\infty$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$a>1 \ \Rightarrow \ 0<\frac{1}{a}<1 \overset{(i)}{\Rightarrow} \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{a^{\nu}}=0 \ \Rightarrow \ \lim_{\nu\to+\infty} a^{\nu}=+\infty$$

Σχόλιο. Αν η (a_{ν}), $\nu \in \mathbf{N}^*$ είναι μηδενική ακολουθία με $a_{\nu} \neq 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}^*$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_{\nu} = 0^{+}$, τότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{1}{a^{\nu}}=+\infty$.

Πραγματικά: Επειδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_{\nu} = 0^{+} \Rightarrow \forall \ M>0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbf{N}^*$:

$0<a_{\nu}<\dfrac{1}{M} \ \ \forall \ \ \nu>\nu_0$. Άρα $\dfrac{1}{a^{\nu}}>M \ \ \forall \ \ \nu>\nu_0$ και επομένως $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{1}{a^{\nu}}=+\infty$.

Αναλόγως: Αν η $(a_{\nu}) \in \mathbf{N}^*$ είναι μηδενική ακολουθία με $a_{\nu} \neq 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}^*$ και $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a^{\nu} = 0^{-}$, τότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{1}{a^{\nu}}=-\infty$.

iii) Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty} y_{\nu} = L \in \mathbf{R}$. Επειδή $a<-1 \ \Leftrightarrow \ |a|=-a>1$, παίρνουμε

ότι: $\qquad y_{\nu}=a^{\nu}=\left(-|a|\right)^{\nu}=(-1)^{\nu}|a|^{\nu} \ \Rightarrow \ y_{\nu}\cdot\dfrac{1}{|a|^{\nu}}=(-1)^{\nu}, \quad (\mathrm{I})$

Αφού $|a|>1 \ \Rightarrow \ \dfrac{1}{|a|}<1 \ \Rightarrow \ \dfrac{1}{|a|^{\nu}}\to 0$.

Από την (Ι) έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(y_{\nu}\cdot\frac{1}{|a|^{\nu}}\right)=\lim_{\nu\to+\infty}(-1)^{\nu} \ \Rightarrow \ L\cdot 0=\lim_{\nu\to+\infty}(-1)^{\nu} \ \Rightarrow \ \lim_{\nu\to+\infty}(-1)^{\nu}=0, \text{ άτοπο.}$$

iv) Έχουμε:

$$1<\sqrt[\nu]{\nu}=\sqrt[\nu]{\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdots1}_{\nu-2\ \text{όροι}}\cdot\sqrt{\nu}\cdot\sqrt{\nu}} \ \leq \ \frac{1+1+\ldots+1+2\sqrt{\nu}}{\nu} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 1<\sqrt[\nu]{\nu} \ \leq \ \frac{(\nu-2)+2\sqrt{\nu}}{\nu} \ \Rightarrow \ 1<\sqrt[\nu]{\nu} \ \leq \ 1-\frac{2}{\nu}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}} \ \Rightarrow \ \sqrt[\nu]{\nu}\to 1$$

v) Επειδή $a_{\nu}=\sqrt[\nu]{a}=\sqrt[\nu]{\underbrace{1\cdot1\cdots1}_{\nu-1\ \text{όροι}}\cdot a}$, έχουμε:

$$\frac{\nu}{1+1+\ldots+1+\frac{1}{\alpha}} \le \alpha_\nu = \sqrt[\nu]{1\cdot 1\cdots 1\cdot \alpha} \le \frac{1+1+\ldots+1+\alpha}{\nu}$$

$$\text{ή } \frac{\nu}{(\nu-1)+\frac{1}{\alpha}} \le \sqrt[\nu]{\alpha} \le \frac{(\nu-1)+\alpha}{\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{1}{1-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu\alpha}} \le \sqrt[\nu]{\alpha} \le 1-\frac{1}{\nu}+\frac{\alpha}{\nu}$$

$$\text{ή } \frac{1}{1+\frac{1}{\nu\alpha}} \le \sqrt[\nu]{\alpha} < 1+\frac{\alpha}{\nu} \Rightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

α) Αν $\alpha > 1 \Rightarrow 1 < \alpha < \nu \Rightarrow 1 < \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\nu} \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{\alpha} = 1.$

β) Αν $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} > 1 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{\alpha} = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \frac{1}{\left(\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}}\right)} = 1.$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αποδεικνύεται απλά ότι:

Αν $\nu \in \mathbf{N}^*$ με $\nu \neq 1$ και $\alpha > 1$ τότε $0 < \sqrt[\nu]{\alpha} - 1 < \frac{1}{\nu}(\alpha - 1)$ και συνεπώς $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$.

Πραγματικά: Η σχέση για απόδειξη γράφεται ισοδύναμα:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \frac{1}{\nu}(\alpha-1)+1 \Leftrightarrow \alpha < \left(1+\frac{1}{\nu}(\alpha-1)\right)^\nu,$$

που ισχύει διότι $\left(1+\frac{1}{\nu}(\alpha-1)\right)^\nu > 1+\alpha-1=\alpha$.

vi) Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ έχουμε:

$$\left|\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta\right| = \left|\alpha_\nu(\beta_\nu-\beta)+\beta(\alpha_\nu-\alpha)\right| \le \left|\alpha_\nu\right|\cdot\left|\beta_\nu-\beta\right| + \left|\beta\right|\cdot\left|\alpha_\nu-\alpha\right|, \quad (\mathrm{I}).$$

Επειδή η ακολουθία $(\alpha_\nu), \nu \in \mathrm{N}$, είναι συγκλίνουσα, η (α_ν) είναι φραγμένη δηλαδή υπάρχει αριθμός $\kappa > 0$ τέτοιος ώστε $\left|\alpha_\nu\right| \le \kappa$ για όλα τα ν. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\left|M\right| < \left|M\right|+1$ έχουμε από την (Ι):

(II): $|\alpha_\nu\beta_\nu-\alpha\beta| \leq \kappa\cdot|\beta_\nu-\beta|+(|\beta|+1)|\alpha_\nu-\alpha|$. Επειδή $\lim\alpha_\nu=\alpha$, υπάρχει αριθμός ν_1 τέτοιος ώστε: όταν $\nu>\nu_1$ τότε $|\alpha_\nu-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$. Επειδή $\lim\beta_\nu=\beta$, υπάρχει αριθμός ν_2 τέτοιος ώστε: όταν $\nu>\nu_2$ τότε $|\beta_\nu-\beta|<\dfrac{\varepsilon}{2\kappa}$.

Αν $\nu_o=\max(\nu_1,\nu_2)$ τότε:

(III): $|\beta_\nu-\beta|<\dfrac{\varepsilon}{2\kappa}$ και $|\alpha_\nu-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ για κάθε $\nu>\nu_0$.

Βάσει των (III), η (II) γίνεται:

$|\alpha_\nu\beta_\nu-\alpha\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ για κάθε $\nu>\nu_0$, δηλαδή

$\lim\limits_{\nu\to+\infty}(\alpha_\nu\beta_\nu-\alpha\beta)=0 \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu\beta_\nu=\alpha\beta$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Επειδή $\lim\alpha_\nu=\alpha$ έπεται ότι η (α_ν), $\nu\in N$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει αριθμός $M>0$ με $|\alpha_\nu|\leq M$ για όλα τα ν.

Επειδή $\lim\alpha_\nu=\alpha \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu_1(\varepsilon)$: $|\alpha_\nu-\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{M+|\beta|}$ για κάθε $\nu>\nu_1(\varepsilon)$ και επειδή $\lim\beta_\nu=\beta \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\nu_2(\varepsilon)$: $|\beta_\nu-\beta| < \dfrac{\varepsilon}{M+|\beta|}$ για κάθε $\nu>\nu_2(\varepsilon)$. Αν $\nu_0(\varepsilon)=\max(\nu_1(\varepsilon),\nu_2(\varepsilon))$, τότε ισχύουν

$$|\alpha_\nu-\alpha| < \frac{\varepsilon}{M+|\beta|},\quad |\beta_\nu-\beta| < \frac{\varepsilon}{M+|\beta|} \text{ για κάθε } \nu>\nu_0(\varepsilon).$$

Σημείωση: Επειδή θα γίνει στη συνέχεια διαίρεση δια του συντελεστή του $|\alpha_\nu-\alpha|$, αντικαθιστούμε το $|\beta|$ με το $(|\beta|+1)$ γιατί μπορεί νάναι $|\beta|=0$.

Έχουμε

$$\left|\alpha_\nu\beta_\nu-\alpha\beta\right|=\left|\alpha_\nu(\beta_\nu-\beta)+(\alpha_\nu-\alpha)\beta\right|\le\left|\alpha_\nu\right|\cdot\left|\beta_\nu-\beta\right|+\left|\alpha_\nu-\alpha\right|\cdot\left|\beta\right| <$$

$$< M\cdot\frac{\varepsilon}{M+|\beta|}+\frac{\varepsilon}{M+|\beta|}\,|\beta|=\varepsilon$$

για κάθε $\nu>\nu_0(\varepsilon)$ και συνεπώς $\alpha_\nu\beta_\nu\to\alpha\beta$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αποδεικνύεται απλά ότι:

Καθώς $\alpha_\nu\to\alpha \;\Rightarrow\; \alpha_\nu^2\to\alpha^2$.

Πραγματικά: $\alpha_\nu\to\alpha \;\Rightarrow\; \alpha_\nu+\alpha\to 2\alpha$ και $\alpha_\nu-\alpha\to 0$.

Συνεπώς η $(\alpha_\nu+\alpha), \nu\in N$, είναι φραγμένη, έστω δε $|\alpha_\nu+\alpha|\le\varphi(>0)$ για όλα τα ν. Έστω $\varepsilon>0$. Για τον θετικό αριθμό $\frac{\varepsilon}{\varphi}$, υπάρχει αριθμός ν_1 τέτοιος ώστε να ισχύει: $|\alpha_\nu-\alpha| < \frac{\varepsilon}{\varphi}$ για κάθε $\nu\ge\nu_1$.

Ώστε για κάθε $\nu\ge\nu_1$ θα ισχύουν $|\alpha_\nu+\alpha|\le\varphi$ και $|\alpha_\nu-\alpha| < \frac{\varepsilon}{\varphi}$,

συνεπώς θα ισχύει και: $|\alpha_\nu+\alpha|\,|\alpha_\nu-\alpha|<\varphi\cdot\frac{\varepsilon}{\varphi}=\varepsilon$ για κάθε $\nu\ge\nu_1$,

δηλαδή $|\alpha_\nu^2-\alpha^2|<\varepsilon$ για κάθε $\nu\ge\nu_1$. Επομένως $\alpha_\nu^2\to\alpha^2$.

Παρατηρούμε ότι: $\alpha_\nu\beta_\nu=\frac{1}{2}(\alpha_\nu+\beta_\nu)^2-\frac{1}{2}(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2)$.

Επειδή $\alpha_\nu+\beta_\nu \to \alpha+\beta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(\alpha_\nu+\beta_\nu)^2 \to \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2$.

Επειδή $\left\{\alpha_\nu^2\to\alpha^2 \text{ και } \beta_\nu^2\to\beta^2\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2) \to \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$.

Τελικά παίρνουμε: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu\beta_\nu=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Έστω $\varepsilon>0$, με $\varepsilon<\varepsilon\kappa^2$, όπου $\kappa=\max\left(|\alpha|,|\beta|\right)$.

Τότε: $\alpha_\nu\beta_\nu-\alpha\beta=(\alpha_\nu-\alpha)\beta+\alpha(\beta_\nu-\beta)+(\alpha_\nu-\alpha)(\beta_\nu-\beta)$.

Επομένως $|\alpha_\nu\beta_\nu-\alpha\beta| \le |\alpha_\nu-\alpha|\cdot|\beta|+|\alpha|\cdot|\beta_\nu-\beta|+|\alpha_\nu-\alpha||\beta_\nu-\beta|$.

Αφού $\lim\alpha_\nu = \alpha \in \mathbf{R}^*$ και $\lim\beta_\nu = \beta \in \mathbf{R}^*$, όταν δοθεί οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε αριθμούς ν_1 και ν_2 τέτοιους ώστε:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3\kappa}, \text{ για κάθε } \nu > \nu_1, \quad |\beta_\nu - \beta| < \frac{\varepsilon}{3\kappa}, \text{ για κάθε } \nu > \nu_2.$$

Αν $\nu_o = \max(\nu_1, \nu_2)$, τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ έχουμε:

$$|\alpha_\nu - \alpha| \cdot |\beta| + |\alpha| \cdot |\beta_\nu - \beta| + |\alpha_\nu - \alpha||\beta_\nu - \beta| \leq \frac{\varepsilon}{3\kappa} \cdot \kappa + \kappa \cdot \frac{\varepsilon}{3\kappa} + \frac{\varepsilon}{3\kappa} \cdot \frac{\varepsilon}{3\kappa} =$$

$$= \varepsilon\left(\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon}{9\kappa^2}\right) < \varepsilon\left(\frac{2}{3} + \frac{3\kappa^2}{9\kappa^2}\right) = \varepsilon$$

Συνεπώς $|\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta| < \varepsilon$ για κάθε $\nu > \nu_0$ δηλαδή $\alpha_\nu\beta_\nu \to \alpha\beta$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Για όλα τα $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta = (\alpha_\nu - \alpha)(\beta_\nu - \beta) + \beta(\alpha_\nu - \alpha) + \alpha(\beta_\nu - \beta) \qquad (1)$$

Έστω ότι $\varepsilon > 0$. Αφού $\alpha_\nu \to \alpha$ όταν $\nu \to +\infty$, υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι m_1 και m_2 τέτοιοι ώστε $|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$ για όλα τα $\nu \geq m_1$ και $|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{|\beta| + 1}$ για όλα τα $\nu \geq m_2$.

Όμοια, αφού $\beta_\nu \to \beta$ όταν $\nu \to +\infty$, υπάρχουν δύο θετικοί ακέραιοι m_3 και m_4 τέτοιοι ώστε $|\beta_\nu - \beta| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}$ για όλα τα $\nu \geq m_3$ και $|\beta_\nu - \beta| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{|\alpha| + 1}$ για όλα τα $\nu \geq m_4$.

Επιλέγουμε $m = \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$

Τότε για $\nu \geq m$, έχουμε

$$\left.\begin{aligned} &|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}, \quad |\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{|\beta| + 1}, \\ &|\beta_\nu - \beta| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}, \quad |\beta_\nu - \beta| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{|\alpha| + 1} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), έχουμε για όλα τα $\nu \geq m$,

$$|\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta| \leq |(\alpha_\nu - \alpha)(\beta_\nu - \beta)| + |\beta(\alpha_\nu - \alpha)| + |\alpha(\beta_\nu - \beta)| =$$

$$= |\alpha_\nu - \alpha|\,|\beta_\nu - \beta| + |\beta||\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha||\beta_\nu - \beta| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{7\varepsilon}{9} < \varepsilon.$$

Συνεπώς $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu\beta_\nu=\alpha\beta$.

23. Αν $x_1=1$ και $x_{\nu+1}=\dfrac{1}{x_\nu}\left(\sqrt{1+x_\nu^2}-1\right)$, δείξτε ότι η ακολουθία $(2^\nu x_\nu)$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της.

Απόδειξη

Πρώτα δείχνουμε με επαγωγή ότι:

(1) $x_\nu=\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2^{\nu+1}}\right)$ για όλα τα $\nu\in\mathbf{N}$.

Επειδή $x_1=1=\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}$, η (1) είναι αληθής για ν=1. Υποθέτουμε ότι η (1) είναι αληθής για ν=κ. Τότε:

$$x_{\kappa+1}=\frac{1}{\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{2^{\kappa+1}}}\left(\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)}-1\right)=\frac{\tau\varepsilon\mu\left(\dfrac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)-1}{\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)}=$$

$$=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)}{\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)}=\varepsilon\varphi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2^{\kappa+1}}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2^{\kappa+2}}\right).$$

Επομένως η (1) είναι αληθής για όλα τα $\nu\in\mathbf{N}$. Θέτουμε $y=\dfrac{1}{2^\nu}$. Τότε, καθώς το $\nu\to+\infty$, το $y\to0^+$. Οπότε, από το Θεώρημα του L' Hospital έχουμε:

$$\lim_{\nu\to+\infty}2^\nu x_\nu=\lim_{y\to0^+}\frac{\varepsilon\varphi\dfrac{\pi y}{2}}{y}=\lim_{y\to0^+}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\tau\varepsilon\mu^2\dfrac{\pi y}{2}}{1}=\frac{\pi}{2}.$$

24. Η ακολουθία (α_ν) $\nu\in\mathbf{N}$ ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_1=x,\quad \alpha_\nu=x^{\alpha_{\nu-1}},\quad \nu=2,3,\ldots$$

όπου $x=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία και βρείτε το όριό της αν υπάρχει.

Λύση

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\alpha_\nu$ και ισούται με α, τότε από τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης έχουμε:

$\alpha = \lim\limits_{\nu \to +\infty} \alpha_\nu = \lim\limits_{\nu \to +\infty} x^{\alpha_{\nu-1}} = x^\alpha$, οπότε το α ικανοποιεί την εξίσωση $t = x^t$.

Γραφικά, αυτή η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες: $t_1 \approx 1,3$ και $t_2 \approx 11,2$.

Προφανώς $t_1 = \frac{4}{3}$, αφού $\frac{4}{3} = x^{\frac{4}{3}}$. Τώρα η ακολουθία (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}$, είναι γνησίως αύξουσα, αφού

$$\alpha_1 = x > 1 \quad \text{και} \quad \alpha_2 = x^{\alpha_1} = \alpha_1^{\alpha_1} > \alpha_1, \quad \alpha_\nu > \alpha_{\nu-1} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} = x^{\alpha_\nu} > x^{\alpha_{\nu-1}} = \alpha_\nu .$$

Η ακολουθία επίσης είναι φραγμένη άνω από το $\frac{4}{3}$, αφού

$$\alpha_1 = x \approx 1,24 < \frac{4}{3}, \quad \alpha_\nu < \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha_{\nu+1} = x^{\alpha_\nu} < x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} .$$

Συνεπώς $\alpha = \frac{4}{3}$.

25. Αν $x_0 = 5$ και $x_{\nu+1} = x_\nu + \frac{1}{x_\nu}$, δείξτε ότι $45 < x_{1000} < 45,1$

Λύση

Αφού $x_{\nu+1} = x_\nu + \frac{1}{x_\nu} \Rightarrow$ (1) $x_{\nu+1}^2 = x_\nu^2 + 2 + \frac{1}{x_\nu^2}$,

οπότε $x_{\nu+1}^2 > x_\nu^2 + 2$.

Επομένως $x_1^2 > 27$, $x_2^2 > 29$ και επαγωγικά παίρνουμε εύκολα ότι

$$(2) \quad x_\nu^2 > 2\nu + 25, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Θέτοντας ν=1000 στη (2), παίρνουμε: $x_{1000} > 45$. Επίσης, για ν≥1, παίρνουμε από τις (1) και (2)

$$(3) \quad x_{\nu+1}^2 < x_\nu^2 + 2 + \frac{1}{2\nu + 25}.$$

Αν προσθέσουμε τις ν σχέσεις που παίρνουμε θέτοντας ν=0 στην (1) και αντικαθιστώντας το ν διαδοχικά με 1, 2, 3, ..., $\nu - 1$ στην (3), παίρνουμε

$$x_\nu^2 < 2\nu + 25 + \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{1}{2\kappa + 25}$$

Επειδή

$$(4) \quad \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \frac{1}{2\kappa+25} < \int_0^{\nu-1} \frac{dx}{2x+25} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2\nu+23}{25}\right),$$

παίρνουμε τελικά

$$(5) \quad x_\nu < \sqrt{2\nu + 25 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\nu+23}{25}\right)},$$

και θέτοντας ν=1000, παίρνουμε $x_{1000} < 45,024401 < 45,1$.

26. Δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \sqrt[\nu]{1-\eta\mu\nu} = 1$.

Απόδειξη*

Αφού $\sqrt[\nu]{1-\eta\mu\nu} \leq 2^{\frac{1}{\nu}} \to 1$, χρειάζεται μόνο να δείξουμε ότι

$$(1) \quad \sqrt[\nu]{1-\eta\mu\nu} \geq \nu^{-\frac{c}{\nu}}$$

για μεγάλα ν, όπου c είναι κάποια αριθμητική σταθερά.

Τώρα $\left|\pi - \frac{\alpha}{\beta}\right| > \beta^{-42}$ για όλους τους ρητούς αριθμούς $\frac{\alpha}{\beta}$ με $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\beta \in \mathbf{Z}^*$ και $(\alpha, \beta) = 1$. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στον K. Mahler**.

Συνεπώς, αν $m\pi + \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbf{N}$ είναι το πιο κοντινό περιττό πολλαπλάσιο του $\frac{\pi}{2}$

στο ν, $\left|\nu - \left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left(m + \frac{1}{2}\right)\left|\frac{\nu}{m+\frac{1}{2}} - \pi\right| > (3m)^{-41} > \nu^{-42}$ για μεγάλα ν.

Άρα για μια κατάλληλη αριθμητική σταθερά A, έχουμε:

$$|1-\eta\mu\nu| > A\left|\nu - \left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right| > A \cdot \nu^{-42}$$

που μας δίνει την (1) και ολοκληρώνει την απόδειξη.

*** Η απόδειξη απαιτεί (περιλαμβάνει) ανώτερα μαθηματικά, που έχουν σχέση με την προσέγγιση του π από ρητούς $\frac{p}{q}$.**

**** On the approximation of π, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56, Math. 15, 30-42 (1953).**

Η παραπάνω εργασία (12 σελίδων) του καθηγητή K. Mahler, του Πανεπιστημίου Manchester, είναι στη διάθεση κάθε ενδιαφερόμενου.

VI. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η μεγάλη σημασία ορισμένων προβλημάτων και ο σημαντικός ρόλος τον οποίο παίζουν τα προβλήματα αυτά στις εργασίες των διαφόρων ερευνητών είναι αναμφισβήτητη. Όσο καιρό ένας επιστημονικός κλάδος παρουσιάζει πολλά προβλήματα, έχει ζωτικότητα. Έλλειψη προβλημάτων σημαίνει ότι ο κλάδος πεθαίνει ή σταμάτησε η ανάπτυξή του. Όπως γενικά κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα χρειάζεται ένα σκοπό, έτσι και η μαθηματική έρευνα χρειάζεται προβλήματα. Η λύση προβλημάτων χαλυβδώνει τη δύναμη του ερευνητή.

D. HILBERT

Οι ζωολόγοι υποστηρίζουν ότι σε μια σύντομη χρονική περίοδο το έμβρυο ενός ζώου ανακεφαλαιώνει την ιστορία των προγόνων του όλων των γεωλογικών εποχών. Φαίνεται ότι το ίδιο συμβαίνει και με την ανάπτυξη του νου. Το έργο του παιδαγωγού είναι να κάνει το μυαλό του παιδιού να βιώσει τα όσα πέρασαν οι πρόγονοί του, να περάσει γοργά από ορισμένα στάδια δίχως όμως να παραλείψει κανένα. Για το σκοπό αυτό οδηγός μας θα έπρεπε να είναι η ιστορία της επιστήμης.

HENRI POINCARE

Μια επιπόλαιη ματιά πάνω στα Μαθηματικά μπορεί να δώσει την εντύπωση ότι αυτά είναι αποτέλεσμα χωριστών ατομικών προσπαθειών που γίνονται από επιστήμονες διασκορπισμένους σε όλες τις ηπείρους και τους αιώνες. Όμως, η εσωτερική λογική της ανάπτυξής τους μας θυμίζει πολύ περισσότερο το έργο μιας μόνο διάνοιας, που αναπτύσσει τη σκέψη της συστηματικά και με συνέπεια, χρησιμοποιώντας την πολλαπλότητα των ανθρώπινων ατομικοτήτων μόνο ως μέσο. Μοιάζει με μια ορχήστρα που παίζει μια συμφωνία η οποία έχει γραφτεί από κάποιον. Ένα μουσικό θέμα περνά από το ένα όργανο στο άλλο και, όταν κάποιος από τα μέλη πρόκειται να εγκαταλείψει το μέρος του, το παίρνει κάποιος άλλος και το εκτελεί με άψογη ακρίβεια.

Αυτό δεν είναι μόνο ένα σχήμα λόγου. Η ιστορία των Μαθηματικών γνώρισε πολλές επιπτώσεις που μια ανακάλυψη που έγινε από έναν επιστήμονα παραμένει άγνωστη μέχρι να την ξανακάνει αργότερα κάποιος άλλος με εκπληκτική ακρίβεια. Στο γράμμα που έγραψε την παραμονή της μοιραίας μονομαχίας του, ο Galois έκανε κάποιες διαπιστώσεις που είχαν εκπληκτική σπουδαιότητα και αφορούσαν τα ολοκληρώματα των αλγεβρικών συναρτήσεων. Περισσότερο από είκοσι χρόνια αργότερα, ο Riemann, ο οποίος αναμφίβολα δεν ήξερε τίποτε για το γράμμα του Galois, βρήκε πάλι και απέδειξε ακριβώς τις ίδιες προτάσεις. Ένα άλλο παράδειγμα: Αφού ο Lobachevski και ο Bolyai έβαλαν τα θεμέλια της μη ευκλείδειας γεωμετρίας, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, έγινε γνωστό ότι δύο άλλοι άνθρωποι, ο Gauss και ο Schweikart, οι οποίοι επίσης εργάζονταν ανεξάρτητα, είχαν φτάσει και οι δύο στα ίδια αποτελέσματα δέκα χρόνια νωρίτερα. Νιώθει κανείς να κατακλύζεται από ένα περίεργο συναίσθημα όταν βλέπει τα ίδια σχέδια σαν να είχαν σχεδιαστεί από το ίδιο χέρι, στην εργασία τεσσάρων επιστημόνων που δούλευαν εντελώς ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο.

Γοητεύεται κανείς από την ιδέα ότι μια τόσο θαυμαστά πολύπλοκη και μυστηριώδης δραστηριότητα του ανθρώπινου γένους, μια δραστηριότητα που συνεχίστηκε για χιλιάδες χρόνια, δεν μπορεί να είναι απλά μια σύμπτωση — πρέπει να έχει κάποιο σκοπό. Αν το αναγνωρίσουμε αυτό, βρισκόμαστε αναπόφευκτα αντιμέτωποι με το ερώτημα: *Ποιος είναι αυτός ο σκοπός;*

Κάθε δραστηριότητα που δεν έχει κάποιο στόχο, απ' αυτό και μόνο το γεγονός, χάνει τη σημασία της. Αν συγκρίνουμε τα Μαθηματικά με ένα ζωντανό οργανισμό, τα Μαθηματικά δε μοιάζουν με μια συνειδητή και σκόπιμη δραστηριότητα. Μοιάζουν περισσότερο με ενστικτώδεις πράξεις που επαναλαμβάνονται στερεότυπα, σαν να τις κατευθύνει ένας εξωτερικός ή εσωτερικός διεγέρτης.

Χωρίς ένα συγκεκριμένο στόχο, τα Μαθηματικά δεν μπορούν να αναπτύξουν καμιά ιδέα που να έχει τη δική της μορφή. Το μόνο που τους απομένει, ως ιδανικό, είναι μια ανεξέλεγκτη ανάπτυξη ή, ακριβέστερα, μια επέκταση προς όλες τις κατευθύνσεις. Χρησιμοποιώντας μια άλλη παρομοίωση, μπορεί κάποιος να πει ότι η ανάπτυξη των Μαθηματικών διαφέρει από την ανάπτυξη ενός ζωντανού οργανισμού που διατηρεί τη μορφή του και καθορίζει τα όρια της ανάπτυξής του. Αυτή η ανάπτυξη είναι πιο συγγενής με την ανάπτυξη των κρυστάλλων ή τη διάχυση του αερίου το οποίο θα επεκταθεί ελεύθερα μέχρι να συναντήσει κάποιο εξωτερικό εμπόδιο.

I.R. SHAFAREVITCH

Οι σπουδαστές των Μαθηματικών γνωρίζουν το φαινόμενο της «αργής εξέλιξης» ή της υποσυνείδητης αφομοίωσης: όταν για πρώτη φορά μελετάται κάτι, οι λεπτομέρειες είναι τόσες πολλές και μπερδεμένες και δεν μένει στο μυαλό μια ευκρινής αντίληψη του όλου. Επιστρέφοντας μετά από μια σύντομη ανάπαυση, το κάθε πράγμα φαίνεται να είναι στη σωστή θέση με την πρέπουσα έμφαση, σαν να πρόκειται για την εμφάνιση φωτογραφικού φιλμ. Αυτό το συναίσθημα δοκιμάζει η πλειοψηφία όσων αντιμετωπίζουν με σοβαρότητα την Αναλυτική Γεωμετρία για πρώτη φορά. Από την άλλη, ο Λογισμός, με την εξ αρχής και ξεκάθαρη παρουσίαση των κατευθυντηρίων γραμμών του, συνήθως γίνεται γρήγορα κατανοητός. Ακόμη και επαγγελματίες μαθηματικοί συχνά ξεφυλλίζουν τις εργασίες άλλων για να αποκτήσουν μια πλατειά, περιεκτική άποψη του όλου, πριν απασχοληθούν με τις λεπτομέρειες που τους ενδιαφέρουν. Το να παραλείπεις δεν είναι αμάρτημα όπως πίστευαν οι πουριτανοί δάσκαλοί μας, αλλά σωστή επίδειξη κοινής λογικής.

(Από το βιβλίο του E.T. BELL: Οι Μαθηματικοί,
Τόμος Ι, σελ. 5, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).

Η Επιστήμη μας, την οποία αγαπάμε πάνω από ο,τιδήποτε άλλο, μας έφερε κοντά. Εμφανίστηκε σε μας σαν ένας κήπος με λουλούδια. Σ' αυτόν τον κήπο υπήρχαν πολύ πατημένα μονοπάτια, όπου καθένας μπορούσε να κοιτάξει γύρω με την ησυχία του και να απολαύσει το περιβάλλον χωρίς προσπάθεια και ειδικότερα στο πλευρό μιας ευχάριστης συντροφιάς. Αλλά μας άρεσε ακόμα να αναζητάμε κρυμμένα μονοπάτια και ανακαλύψαμε μια απροσδόκητη θέα, η οποία ευχαριστούσε τα μάτια μας· και όταν ο ένας την έδειχνε στον άλλο, τη θαυμάζαμε μαζί και η ευχαρίστησή μας ήταν πλήρης.

(DAVID HILBERT: Στην επιμνημόσυνη
ομιλία του για τον Herman Minkowski)

Δεν έκανα ποτέ κάτι «χρήσιμο». Δεν έγινε καμιά ανακάλυψη δική μου, ούτε πρόκειται να γίνει, άμεσα ή έμμεσα, για το καλό ή το κακό, που θα προκαλεί την ελάχιστη ευχαρίστηση στον κόσμο. Βοήθησα να εκπαιδευτούν άλλοι μαθηματικοί, αλλά μαθηματικοί του είδους μου, και το έργο τους υπήρξε, στο μέτρο που τους βοήθησα, το ίδιο άχρηστο όπως και το δικό μου. Αν κριθώ με βάση τα πρακτικά δεδομένα, η αξία της μαθηματικής μου ζωής είναι μηδενική. Και, πέρα από τα μαθηματικά, είναι σχεδόν ασήμαντη. Μόνο μια πιθανότητα έχω να ξεφύγω από την καταδίκη σε πλήρη ασημαντότητα, ότι μπορεί να κριθεί πως δημιούργησα κάτι που άξιζε να γίνει. Και ότι έκανα κάτι είναι αναμφισβήτητο: το ερώτημα είναι αν άξιζε.

Τα επιχειρήματα για την αξία της ζωής μου ή για τη ζωή οποιουδήποτε άλλου που ήταν μαθηματικός με την ίδια έννοια όπως εγώ, είναι τα εξής: Έχω προσθέσει κάτι στη γνώση και έχω βοηθήσει άλλους να προσθέσουν περισσότερα. Και αυτά τα κάτι έχουν μια αξία, που διαφέρει μόνο στο μέγεθός της, όχι στο είδος της, από τις δημιουργίες των μεγάλων μαθηματικών ή οποιωνδήποτε άλλων καλλιτεχνών, μεγάλων ή μικρών, που άφησαν πίσω τους κάποιο είδος μνημείου.

G. H. HARDY (1877 – 1947)

1. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς 0xy δίνονται τα σημεία Α (4, 2) και Β (3, −5). Θεωρούμε την ευθεία (ε) με εξίσωση $7x + y - 23 = 0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

Λύση

Έστω Μ(x, y) ένα σημείο του επιπέδου. Έχουμε $\overrightarrow{AM} = (x-4,\ y-2)$ και $\overrightarrow{BM} = (x-3,\ y+5)$. Το Μ(x, y) είναι ένα ζητούμενο σημείο, τότε και μόνο τότε:

$$\begin{Bmatrix} M \in (\varepsilon) \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 7x + y - 23 = 0 \\ (x-4)(x-3) + (y-2)(y+5) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 23 - 7x \\ (x-4)(x-3) + (21-7x)(28-7x) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 23 - 7x \\ (x-4)(x-3) + 49(3-x)(4-x) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = 23 - 7x \\ 50(x-4)(x-3) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ x = 3 \ \text{και} \ y = 2 \quad \text{ή} \quad x = 4 \ \text{και} \ y = -5$$

2. Βρείτε τον γ. τόπο του σημείου Ρ, του οποίου το τετράγωνο της απόστασης από την υποτείνουσα ενός δεδομένου ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου, ισούται με το γινόμενο των αποστάσεών του από τις κάθετες πλευρές.

Λύση

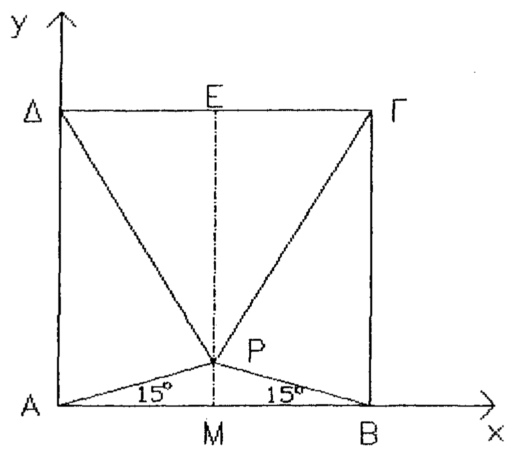
Έστω ABC ένα τρίγωνο, ορθογώνιο στο C που έχει κάθετες πλευρές μήκους α. Παίρνουμε τις CA και CB ως άξονες των x και y αντίστοιχα, ενός ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων και με (x, y) συμβολίζομε τις συντεταγμένες του σημείου P. Αν PD, PE, PF είναι οι κάθετες από το P στις AB, CA, CB αντίστοιχα, έχουμε τη γεωμετρική σχέση $(DP)^2 = (EP)(FP)$

Όμως $EP = y$, $FP = x$ και αφού η εξίσωση της ευθείας AB είναι $x + y - \alpha = 0$, το $DP = \dfrac{x + y - \alpha}{\sqrt{2}}$. Άρα $\dfrac{(x + y - \alpha)^2}{2} = xy$ ή $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\alpha y + \alpha^2 = 0$

είναι η εξίσωση του γ. τόπου του σημείου P. Συνεπώς ο γ. τόπος είναι ένας κύκλος με κέντρο (α, α) και ακτίνα α.

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εσωτερικό του σημείο Ρ τέτοιο ώστε $P\hat{A}B = P\hat{B}A = 15°$.Δείξτε ότι τα σημεία Ρ, Γ και Δ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Απόδειξη



Θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, έτσι ώστε οι κορυφές του τετραγώνου να έχουν συντεταγμένες Α (0, 0), Β (1, 0), Γ (1, 1), Δ (0, 1).

Τότε είναι $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon\varphi 15°}{2}\right)$ και επομένως $P\Delta = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\varepsilon\varphi 15°}{2}\right)^2}$.

Επειδή εφ15° =εφ (45°-30°)=

$$= \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}, \text{ θα είναι}$$

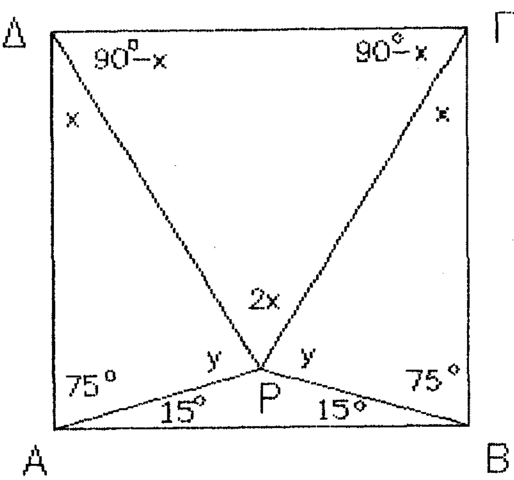
$$P\Delta = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι ΡΓ=1. Συνεπώς ΓΔ=ΡΔ=ΡΓ (=1).

Σχόλιο 1. Η άσκηση έχει προταθεί από τον Stan Wagon, Smith College, Northampton, Massachussetts.

Κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε ακόμη μια λύση.

Λύση από τον Kenneth S. Williams, Carleton University, Ottawa.



(σχημα 2)

Τα τρίγωνα ΔΑΡ και ΓΡΒ είναι ίσα κι έτσι ΔΡ=ΡΓ. Έστω ότι το μέτρο της γωνίας $\hat{\Delta P \Gamma}$ είναι 2x· τότε, (βλέπε το Σχήμα 2)

$2x \geq 60^\circ \Leftrightarrow x \geq 30^\circ \Leftrightarrow y \leq 75^\circ$

$\Leftrightarrow \Gamma B \leq P\Gamma \Leftrightarrow \Delta\Gamma \leq P\Gamma$

$\Leftrightarrow 2x \leq 90^\circ - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x \leq 90^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leq 30^\circ \Leftrightarrow 2x \leq 60^\circ$.

Επομένως $\hat{\Delta P \Gamma}=2x=60^\circ$

Σχόλιο 2. Για μια τριγωνομετρική αντιμετώπιση του θέματος ακολουθούμε την εξής πορεία:

Από το τρίγωνο ΑΜΡ του (Σχήμ. 1), έχουμε: $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}=\frac{MP}{AM}$. Επειδή

$$\varepsilon\varphi\frac{\pi}{12}=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3},\quad \text{θα είναι}\quad MP=\frac{\alpha}{2}\left(2-\sqrt{3}\right),$$

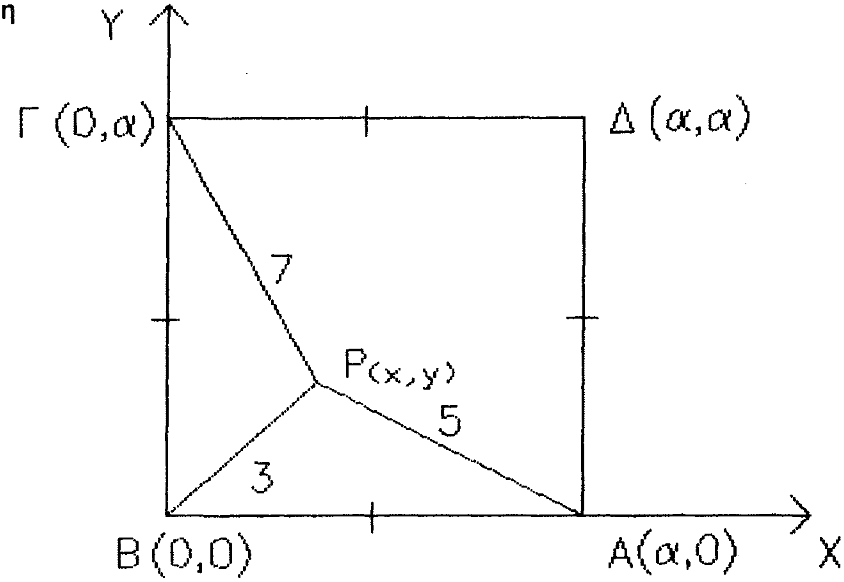
όπου α η πλευρά του τετραγώνου και $PE=\alpha-\frac{\alpha}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Πυθαγόρα στο τρίγωνο ΡΕΓ, παίρνουμε ΡΓ=α, καθώς επίσης ΔΡ=α.

Σχόλιο 3. Για εννέα ακόμη διαφορετικές λύσεις βλέπε Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ: «ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ», Αθήνα 1978, έκδοση εκτός εμπορίου, άσκηση 28, σελ. 146.

4. Το σημείο Ρ είναι εσωτερικό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. Οι αποστάσεις του Ρ από τα Α, Β και Γ είναι αντίστοιχα 5, 3 και 7.
Ποιο είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου;

Λύση



Είναι φανερό ότι

$$x^2 + y^2 = 9 \quad (1)$$

$$(\alpha - x)^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

$$x^2 + (\alpha - y)^2 = 49 \quad (3)$$

Από την (1) παίρνουμε $y = \sqrt{9 - x^2}$. Αντικαθιστώντας στη (2), έχουμε

$(\alpha - x)^2 + 9 - x^2 = 25$ ή $\alpha^2 - 2\alpha x = 16$ ή $x = \dfrac{\alpha^2 - 16}{2\alpha}$, $(\alpha > 4)$.

Αντικαθιστώντας στην (3), παίρνουμε:

$$\left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2 + \left[\alpha - \sqrt{9 - \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2}\,\right]^2 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2 + \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{9 - \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2} + 9 - \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{9 - \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2} = 40 \Rightarrow 2\alpha\sqrt{9 - \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2} = \alpha^2 - 40 \overset{(\alpha > \sqrt{40})}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow 4\alpha^2\left[9 - \left(\frac{\alpha^2-16}{2\alpha}\right)^2\right] = \alpha^4 - 80\alpha^2 + 1600 \Rightarrow 36\alpha^2 - (\alpha^2 - 16)^2 =$$

$$= \alpha^4 - 80\alpha^2 + 1600 \Rightarrow \alpha^4 - 74\alpha^2 + 928 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 16 \text{ ή } \alpha^2 = 58.$$

Η λύση $\alpha = 4$ απορρίπτεται και συνεπώς $\alpha = \sqrt{58}$ μονάδες μήκους.

5. **Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ έτσι ώστε: $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{2}{3}$ και σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε: $\frac{ΒΕ}{ΕΓ}=\frac{1}{5}$. Υποθέτουμε ότι η ΑΕ τέμνει τη ΓΔ στο Η και η ΒΗ την ΑΓ στο Ζ. Υπολογίστε το λόγο $\frac{ΒΗ}{ΗΖ}$.**

Λύση

Αφού ισχύει για τυχαίο τρίγωνο θα ισχύει και για κάποιο ειδικό τρίγωνο.

ΑΕ $\mapsto$ $5x+y=5$, ΓΔ $\mapsto$ $x+2y=6$

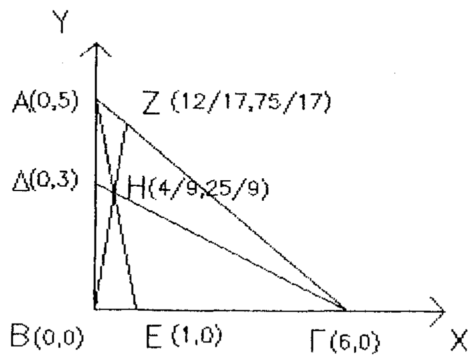
Οι εξισώσεις αυτές, μας δίνουν το ζεύγος $\left(\frac{4}{9}, \frac{25}{9}\right)$ για συντεταγμένες του Η.

Η εξίσωση τότε της ΒΗ είναι $y=\frac{25}{4}x$.

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων $y=\frac{25}{4}x$ και $5x+6y=30$ (ΑΓ) δίνει για το Ζ το ζεύγος $\left(\frac{12}{17}, \frac{75}{17}\right)$.

Άρα $\frac{ΒΗ}{ΒΖ}=\left(\frac{4}{9}\right):\left(\frac{12}{17}\right)=\frac{17}{27}$.

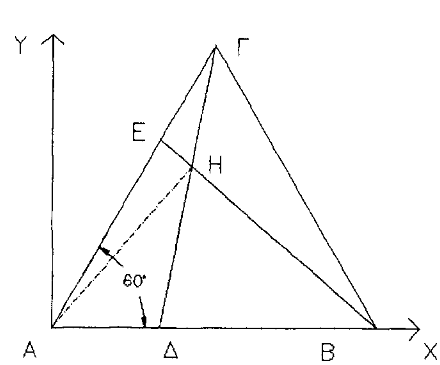
Συνεπώς ο ζητούμενος λόγος $\frac{ΒΗ}{ΗΖ}=\frac{17}{10}$.



6. **Στις πλευρές ισόπλευρου τριγώνου βρίσκονται τα σημεία Δ και Ε έτσι ώστε να είναι $ΔΒ=2\cdot ΑΔ$, $ΑΕ=2\cdot ΕΓ$. Αν Η η τομή των ευθειών ΒΕ και ΓΔ, δείξτε ότι $ΑΗ \perp ΒΕ$.**

Απόδειξη

Τοποθετούμε το τρίγωνο σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έτσι ώστε το σημείο Α να είναι το σημείο τομής των αξόνων και το σημείο Β να είναι στον θετικό ημιάξονα 0x. Αν η πλευρά του τριγώνου είναι α, οι συντεταγμένες των κορυφών είναι



$A\ (0,\ 0)$, $B\ (\alpha,\ 0)$, $\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2},\ \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)$. Ακόμη $\Delta\left(\dfrac{\alpha}{3},\ 0\right)$ $E\left(\dfrac{\alpha}{3},\ \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)$. Οι εξισώσεις των ΒΕ και ΓΔ είναι:

$$\left.\begin{array}{ll} BE & \mapsto\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha \\ \Gamma\Delta & \mapsto\ y=3\sqrt{3}\,x-\alpha\sqrt{3} \end{array}\right\}\quad (\Sigma)$$

Λύνοντας το σύστημα (Σ) παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου Η:

$$H\left(\frac{3\alpha}{7},\ \frac{2\alpha\sqrt{3}}{7}\right)$$

Επόμενως η εξίσωση της ΑΗ θα είναι $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,x$.

Τέλος, $\lambda_{BE}\cdot\lambda_{AH}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=-1$, δηλαδή $BE\perp AH$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έτσι ώστε: $A\ (0,\ 0)$, $B\ (3,\ 0)$. Θα είναι: $\Gamma\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\Delta\,(1,0)$, $E\left(1,\sqrt{3}\right)$

Η ΓΔ έχει εξίσωση: $y=3\sqrt{3}\,x-3\sqrt{3}$ και η ευθεία ΒΕ έχει εξίσωση:

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Για το σημείο Η έχουμε $x=\dfrac{9}{7}$, $y=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}$.

Μετά, έχουμε τα διανύσματα: $\vec{AH}=\dfrac{3}{7}\left(3\vec{i}+2\sqrt{3}\,\vec{j}\right)\neq\vec{0}$, $\vec{BE}=-2\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}\neq\vec{0}$

Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:

$\vec{AH}\cdot\vec{BE}=\dfrac{3}{7}\left(-2\cdot 3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)=0$, επομένως $AH\perp BE$.

7. Δείξτε ότι, η απόσταση κάθε σημείου του οποίου οι συντεταγμένες είναι ακέραιοι αριθμοί, από την ευθεία $\rho\mapsto y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{4}{5}$, είναι μεγαλύτερη από $\dfrac{1}{30}$.

Απόδειξη

Η γενική μορφή της εξίσωσης της ευθείας p είναι $25x-15y+12=0$. Αποδεικνύεται απλά ότι δεν υπάρχει ζεύγος ακεραίων αριθμών x, y που να ικανοποιούν την εξίσωση αυτή. Δηλαδή ο $y=\frac{25x+12}{15}=2x+1-\frac{5x+3}{15}$ είναι ακέραιος αριθμός, αν είναι ο $\frac{5x+3}{15}$ ακέραιος.

Όμως, δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε ο $5x+3$ να διαιρείται δια του 15.

Ας είναι τώρα T ένα οποιοδήποτε σημείο με ακέραιες συντεταγμένες α και β. Η απόσταση του σημείου T από την ευθεία p δίνεται από τη σχέση

$$d(T,p)=\frac{|25\alpha-15\beta+12|}{\sqrt{25^2+(-15)^2}}=\frac{|25\alpha-15\beta+12|}{5\sqrt{34}}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ότι υπάρχει σημείο T για το οποίο ισχύει $\frac{|25\alpha-15\beta+12|}{5\sqrt{34}}\le\frac{1}{30}$ δηλαδή $|25\alpha-15\beta+12|\le\frac{\sqrt{34}}{6}$.

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται, κατ' ανάγκην, ότι ο ακέραιος αριθμός $25\alpha-15\beta+12$ είναι ίσος με το 0 και αυτό όπως είδαμε δεν είναι δυνατόν για κανένα ζεύγος ακεραίων αριθμών α και β. Συνεπώς ισχύει

$$d(T,p)=\frac{|25\alpha-15\beta+12|}{5\sqrt{34}}>\frac{1}{30}.$$

Σχόλιο. Δεν είναι άγνωστο ότι οι εξισώσεις των οποίων ζητάμε, όχι απλά τη λύση, αλλά λύση στο σύνολο των ακεραίων λέγονται **διοφαντικές εξισώσεις.** Η διοφαντική εξίσωση πρώτου βαθμού έχει τη μορφή $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z})$. Ισχύουν οι παρακάτω χρήσιμες προτάσεις:

Θεώρημα. Η γραμμική διοφαντική εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ έχει λύση τότε και μόνο τότε όταν ο ΜΚΔ δ των α, β διαιρεί τον γ. Αν δε (x_0,y_0) είναι μια λύση αυτής, τότε η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις που δίνονται από τους τύπους:

$$x=x_0-\frac{\beta}{\delta}\lambda,\quad y=y_0+\frac{\alpha}{\delta}\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{Z}.$$

Πόρισμα. Αν ΜΚΔ(α,β,γ)=1 τότε η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ έχει λύση τότε και μόνο τότε όταν ΜΚΔ(α, β)=1. Αν (x_0,y_0) είναι μια λύση αυτής τότε οι άπειρες λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x=x_0-\beta\lambda,\quad y=y_0+\alpha\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{Z}.$$

8. Αποδείξτε το ευθύ και το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

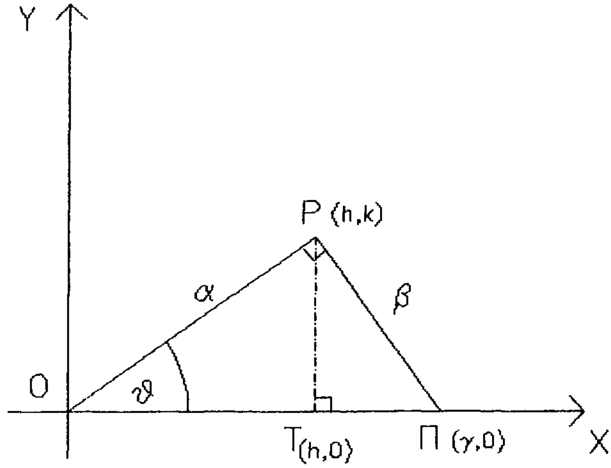
Απόδειξη για το ευθύ

Έστω $\theta = \hat{P O \Pi}$. Επειδή $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\beta}{\alpha}$, η εξίσωση της ευθείας ΟΡ είναι

$y = \frac{\beta}{\alpha}x$, (1)

$P\Pi \perp O\Pi \Rightarrow \lambda_{P\Pi} = -\frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow P\Pi \mapsto y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\alpha\gamma}{\beta}$, (2).



Το σημείο Ρ είναι η τομή των ευθειών ΟΡ και ΠΡ. Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε τις συντεταγμένες του Ρ, δηλαδή $h = \frac{\alpha^2\gamma}{\alpha^2+\beta^2}$ και $\kappa = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}$.

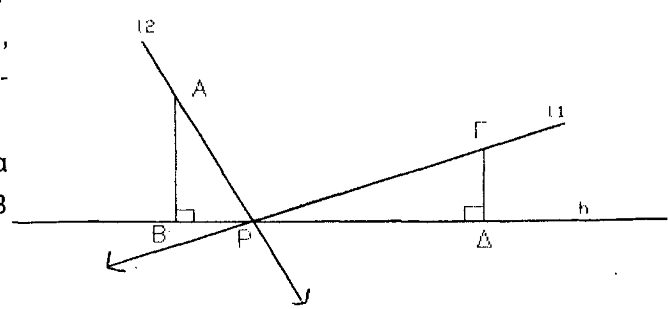
Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΠΡ μπορεί να βρεθεί είτε ως $\frac{1}{2}\alpha\beta$ είτε ως $\frac{1}{2}\kappa\gamma$.

Εξισώνοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, έχουμε $\frac{1}{2}\alpha\beta = \frac{1}{2}\alpha\beta\gamma^2 \cdot \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$, απ' όπου $\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2$ αφού το $\alpha\beta \neq 0$.

Σχόλιο. Η απόδειξη για το ότι οι κάθετες ευθείες έχουν κλίσεις που το γινόμενό τους ισούται με -1 υπάρχει στα περισσότερα βιβλία είτε με αναλυτική γεωμετρία είτε με τριγωνομετρία.

Προτείνουμε την παρακάτω απόδειξη που απαιτεί μόνο στοιχειώδη άλγεβρα και γεωμετρία. Στο Σχήμα 1, $\ell_1 \perp \ell_2$ με κλίσεις m_1 και m_2 αντίστοιχα.

Από την τομή τους Ρ φέρνουμε μια οριζόντια γραμμή h και κάθετες ΑΒ και ΓΔ. Μπορούμε να δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΡ και ΡΔΓ είναι όμοια, απ' όπου έπεται ότι

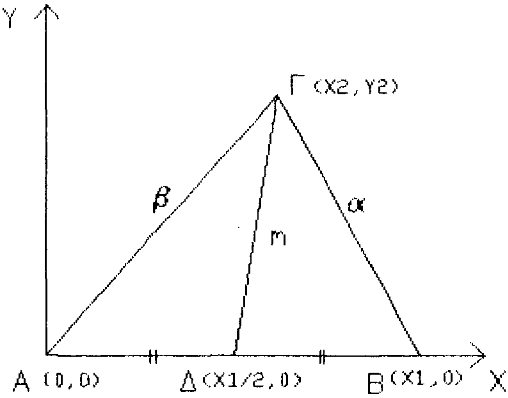


$m_2 = -\left(\frac{BA}{BP}\right) = -\left(\frac{\Delta P}{\Delta\Gamma}\right) = -\frac{1}{m_1}$.

Απόδειξη για το αντίστροφο.

Επιλέγουμε για άξονα των x την ευθεία που περιέχει το τμήμα ΑΒ και για άξονα των y την κάθετο στον άξονα των x στο σημείο Α. Οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ είναι Α (0, 0), $B(x_1,0)$, $\Gamma(x_2,y_2)$. Αφού $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$, έχουμε: $x_1^2=x_2^2+y_2^2+(x_2-x_1)^2+y_2^2$ ή $y_2^2=x_1x_2-x_2^2$ ή $y_2^2=x_2(x_1-x_2)$ ή

$$\frac{y_2}{x_2}=-\frac{x_2-x_1}{y_2} \text{ και } \frac{y_2}{x_2}=\frac{-1}{\dfrac{y_2}{x_2-x_1}}.$$



Αλλά $\dfrac{y_2}{x_2}=$ κλίση της ΑΓ $=\lambda_{A\Gamma}$ και

$\dfrac{y_2}{x_2-x_1}=$ κλίση της ΒΓ $=\lambda_{B\Gamma}$. Αφού

$\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{-1}{\lambda_{B\Gamma}}$, η ΑΓ είναι κάθετος στη ΒΓ. Άρα ΑΒΓ ορθογώνιο στο Γ.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Στο (Σχ. 2) έστω Δ το μέσον του ΑΒ με συντεταγμένες $\left(\dfrac{x_1}{2},\ 0\right)$. Ξεκινώντας με την εξίσωση $y_2^2=x_1x_2-x_2^2$ της προηγούμενης λύσης, έχουμε $x_2^2-x_1x_2+y_2^2=0$. Πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο της εξίσωσης επί 4 και προσθέτοντας το x_1^2 σε αμφότερα τα μέλη της, έχουμε: $4x_2^2+x_1^2-4x_1x_2+4y_2^2=x_1^2$.

Τότε $4\left(x_2^2+\dfrac{x_1^2}{4}-x_1x_2+y_2^2\right)=x_1^2$ ή $4\left[\left(x_2-\dfrac{x_1}{2}\right)^2+y_2^2\right]=x_1^2$

και $2\sqrt{\left(x_2-\dfrac{x_1}{2}\right)^2+y_2^2}=x_1$.

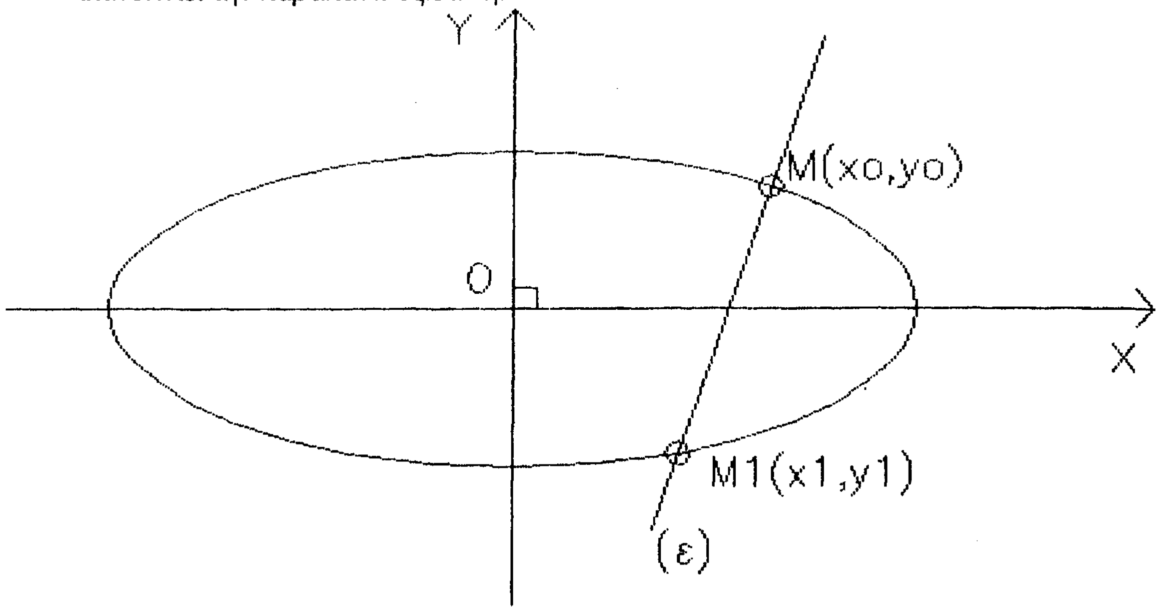
Το αριστερό μέλος της ισότητας ισούται με 2ΓΔ και το δεξιό με ΑΒ. Άρα 2ΓΔ=ΑΒ ή $\Gamma\Delta=\dfrac{AB}{2}$. Άρα μπορούμε να περιγράψουμε ένα κύκλο στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνοντας κέντρο το Δ και το ΔΒ ως ακτίνα, άρα η γωνία Γ βρίσκεται σε ημικύκλιο. Οπότε η γωνία Γ είναι ορθή και το τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο.

9. Ας είναι α^2, β^2 ρητοί αριθμοί διάφοροι του 0. Να αποδειχθεί ότι αν η εξίσωση (α) $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ έχει μια ρητή λύση, τότε έχει άπειρες ρητές λύσεις.

(Ονομάζουμε ρητή λύση της εξίσωσης, ένα διατεταγμένο ζευγάρι ρητών αριθμών (x_0, y_0) που ικανοποιούν την εξίσωση, δηλαδή $\frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{\beta^2}=1$).

Λύση

Έστω (x_0, y_0)μια ρητή λύση της εξίσωσης. Θεωρούμε την έλλειψη στο $\mathbf{R}^2$ που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση.



Έστω M το σημείο (x_0, y_0). Θεωρούμε μια ευθεία (ε) που περνάει από το M και έχει ρητό συντελεστή διευθύνσεως. Έστω ότι η εξίσωση της (ε) είναι

$$(\beta) \quad \gamma x+\delta y=\kappa$$

Τα σημεία τομής της (ε) και της έλλειψης δίνονται από τις λύσεις του συστήματος των εξισώσεων (α) και (β). Αφού τα x_0, y_0 και η κλίση της (ε) είναι ρητοί αριθμοί έπεται ότι και τα γ, δ, κ είναι ρητοί.

Για να λύσουμε το σύστημα των (α), (β) λύνουμε την (β) ως προς έναν των αγνώστων, αντικαθιστούμε την τιμή αυτή στην (α) και έτσι οδηγούμεθα σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση (ως προς x, ας πούμε), η οποία έχει ήδη γνωστή λύση την x_0 και επιπλέον και η εξίσωση αυτή έχει ρητούς συντελεστές, διότι όλες οι πράξεις που εκτελούμε είναι ρητές. Αφού λοιπόν, η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει ρητούς συντελεστές και μια ρητή ρίζα, σημαίνει ότι και η άλλη ρίζα της είναι ρητή.

Αυτό σημαίνει ότι η (ε) τέμνει την έλλειψη στα M και M_1 (x_1, y_1) όπου το x_1 είναι ρητός, και λόγω της (β) και το y_1 είναι ρητός. Τα M, M_1 συμπίπτουν το πολύ σε μια περίπτωση, όταν η (ε) εφάπτεται της έλλειψης.

Έτσι αποδείξαμε ότι η (ε) (με μια εξαίρεση το πολύ) ξανατέμνει την έλλειψη σε ένα δεύτερο σημείο με ρητές συντεταγμένες. Αλλά η (ε) είναι τυχούσα με ρητό συντελεστή διευθύνσεως. Άρα υπάρχουν άπειρα σημεία με ρητές συντεταγμένες στην έλλειψη, διότι στρέφοντας την (ε) παίρνουμε κάθε φορά και ένα καινούργιο σημείο.

ΣΧΟΛΙΟ. Τα γ, δ, κ, ως γνωστόν μπορούν να υπολογιστούν συναρτήσει των x_0, y_0 και της κλίσης της (ε), αλλά οι τύποι που τα εκφράζουν δεν ενδιαφέρουν για την άσκηση. Το μόνο που μας ενδιαφέρει, είναι ότι οι τύποι αυτής είναι ρητές εκφράσεις.

10. Για ένα πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$, βρείτε την παράμετρο κ, $\kappa \neq 0$ έτσι ώστε οι δύο παραβολές $y = x^2$ (1) και $(y - \alpha^2)^2 = \kappa(x + \alpha)$ (2) να τέμνονται σε τρία ακριβώς σημεία.

Λύση

Αντικαθιστώντας την (1) στη (2), έχουμε:

$(x^2 - \alpha^2)^2 = \kappa(x + \alpha)$ ή $(x + \alpha)\left[(x^2 - \alpha^2)(x - \alpha) - \kappa\right] = 0$

Ένα σημείο τομής είναι το $(-\alpha, \alpha^2)$. Άρα ψάχνουμε δύο διαφορετικά σημεία τομής από την εξίσωση: $(x^2 - \alpha^2)(x - \alpha) - \kappa = 0$ ή

$x^3 - \alpha x^2 - \alpha^2 x + (\alpha^3 - \kappa) = 0,$ (3)

Η εξίσωση (3) πρέπει να έχει ρίζες της μορφής λ, μ, μ. Εάν εξισώσουμε το $(x - \lambda)(x - \mu)(x - \mu)$ με την (3), βρίσκουμε

$$\lambda + 2\mu = \alpha \quad (4)$$
$$2\lambda\mu + \mu^2 = -\alpha^2 \quad (5)$$
$$\lambda\mu^2 = -\alpha^3 + \kappa \quad (6)$$

Απαλείφοντας το λ από τις (4) και (5) παίρνουμε:

$3\mu^2 - 2\alpha\mu - \alpha^2 = 0$ ή $(\mu - \alpha)(3\mu + \alpha) = 0$

Αν $\mu = \alpha \Rightarrow \lambda = -\alpha$ και από την (6) παίρνουμε $\kappa = 0$, πράγμα άτοπο, άρα $\mu \neq \alpha$.

Αν $\mu = -\dfrac{\alpha}{3} \Rightarrow \lambda = \dfrac{5\alpha}{3}$ και η (6) δίνει $\dfrac{5}{27}\alpha^3 = -\alpha^3 + \kappa \Rightarrow \kappa = \dfrac{32}{27}\alpha^3$.

Άρα η οικογένεια των παραβολών $(y-\alpha^2)^2 = \dfrac{32}{27}\alpha^3(x+\alpha)$

τέμνει στην παραβολή $y = x^2$ σε τρία ακριβώς διακεκριμένα σημεία:

$$(-\alpha, \alpha^2),\quad \left(\frac{5\alpha}{3}, \frac{25\alpha^2}{9}\right) \text{ και } \left(-\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha^2}{9}\right)$$

Όταν $\alpha=1$, οι παραβολές $y=x^2$ και $(y-1)^2 = \dfrac{32}{27}(x+1)$ ικανοποιούν το επίταγμα του προβλήματος.

11. Αν μια παραβολή δίνεται στο επίπεδο, κατασκευάστε γεωμετρικά (με κανόνα και διαβήτη) την εστία της.

Λύση

Ανάλυση. Θεωρούμε τις χορδές της παραβολής που καθορίζονται από μια οικογένεια (ε) παραλλήλων ευθειών. Είναι γνωστό ότι τα μέσα αυτών των χορδών βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής. (Μια τέτοια ευθεία ονομάζεται **διάμετρος** της παραβολής). Μια διάμετρος συναντά την παραβολή μόνο μια φορά. Αν η διάμετρος που καθορίζεται από την (ε) συναντά την παραβολή στο P, τότε, η ευθεία της οικογένειας (ε) που περιέχει το P εφάπτεται στην παραβολή. Λόγω της γνωστής ιδιότητας της παραβολής, αν η διάμετρος που περιέχει το P ανακλαστεί στην εφαπτομένη στο P, η ευθεία που προκύπτει διέρχεται από την εστία. Έτσι οδηγούμαστε στην εξής κατασκευή.

Σύνθεση. Φέρνουμε μια οποιαδήποτε χορδή της παραβολής και κατασκευάζουμε μια άλλη παράλληλη σ' αυτή. Βρίσκουμε τα μέσα A και B αυτών των χορδών και έστω ότι η ευθεία AB τέμνει την παραβολή στο P. Φέρνουμε ευθεία PQ παράλληλη στην αρχική χορδή και βρίσκουμε σημείο Γ τέτοιο ώστε $\widehat{APQ} = \widehat{QP\Gamma}$, με το Γ από το μέρος του PQ που δεν ανήκει το A.

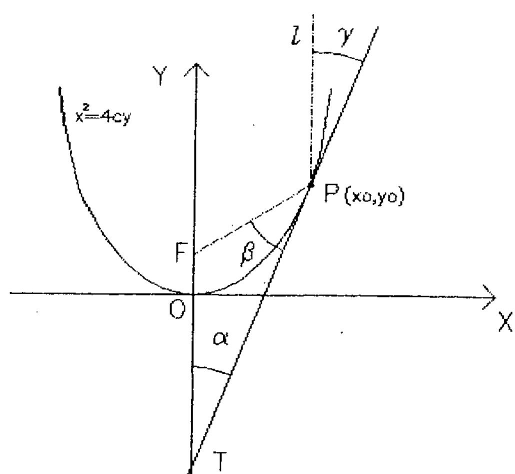
Η εστία είναι πάνω στην ευθεία PΓ. Επαναλαμβάνουμε την κατασκευή, ξεκινώντας από μια διαφορετική χορδή για να πάρουμε μια άλλη ευθεία που διέρχεται από την εστία.

Υποθέτουμε ότι οι δύο ευθείες που κατασκευάστηκαν είναι διακεκριμένες, οπότε το σημείο τομής τους θα είναι η εστία. Για να αποφύγουμε την περίπτωση κατά την οποία οι δύο γραμμές που διέρχονται από την εστία συμπίπτουν, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι οι δύο αρχικές χορδές δεν είναι ούτε παράλληλες ούτε κάθετες. Για να δείτε ότι αυτό αρκεί, σημειώστε ότι αν οι αρχικές χορδές για τις δύο κατασκευές σχηματίζουν γωνία α, οι ευθείες που προκύπτουν τελικά σχηματίζουν γωνία 2α· οπότε, αν $\alpha \neq 0, \frac{\pi}{2}$ οι τελικές γραμμές θα έχουν διαφορετικές διευθύνσεις.

Σχόλιο 1. Για την πραγματοποίηση της κατασκευής μπορεί να βρεθεί ένας αριθμός από παρακάμψεις. Για παράδειγμα, από τη στιγμή που η πρώτη διάμετρος έχει βρεθεί, ο άξονας συμμετρίας της παραβολής βρίσκεται γρήγορα, αφού είναι η μεσοκάθετη οποιασδήποτε χορδής κάθετης στη διάμετρο.

Σχόλιο 2. Η χαρακτηριστική ιδιότητα της παραβολής προκύπτει ως εξής: Παίρνουμε μια παραβολή και εκλέγουμε σύστημα αξόνων τέτοιο ώστε η εξίσωσή της να είναι $x^2 = 4cy$. Από αυτήν έχουμε $y = \frac{x^2}{4c}$.

Επειδή $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4c} = \frac{x}{2c}$ η εφαπτομένη στο σημείο $P(x_0, y_0)$ έχει κλίση $\lambda = \frac{x_0}{2c}$ και $y - y_0 = \frac{x_0}{2c}(x - x_0)$.



Για να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου T θέτουμε στην εξίσωση της εφαπτομένης x=0 και λύνουμε ως προς y. Οι συντεταγμένες του T είναι $\left(0, y_0 - \frac{x_0^2}{2c}\right)$. Επειδή το σημείο (x_0, y_0) είναι σημείο της παραβολής, θα έχουμε: $x_0^2 = 4cy_0$, άρα $T\ (0, -y_0)$.

Επειδή η εστία F έχει συντεταγμένες (0, c), $\quad d(F,T)=c+y_0$.

Προφανώς $\quad d(F,P)=\sqrt{x_0^2+(y_0-c)^2}=\sqrt{4cy_0+(y_0-c)^2}=\sqrt{(y_0+c)^2}=c+y_0$

και επομένως $\quad d(F,T)=d(F,P)$.

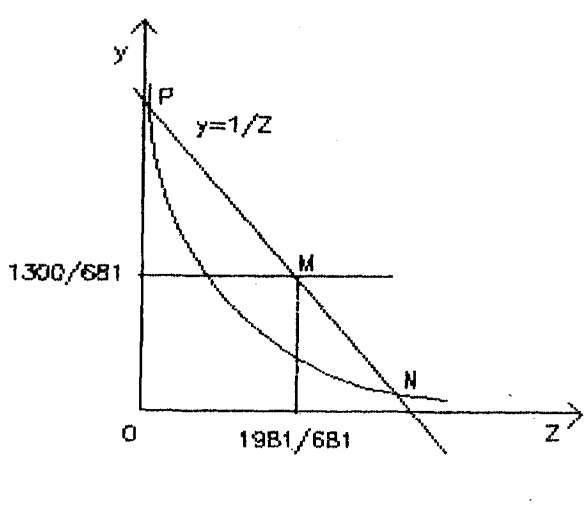
Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι το τρίγωνο TFP είναι ισοσκελές, δηλαδή $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$. Επειδή η ℓ είναι παράλληλη στον άξονα y, $\hat{\alpha}=\hat{\gamma}$ και συνεπώς $\hat{\gamma}=\hat{\beta}$. Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι, όταν το φως ανακλάται, η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη $\hat{\gamma}$ ή τη $\hat{\beta}$ ως γωνία πρόσπτωσης, οπότε η άλλη θα είναι η γωνία ανάκλασης. Η ισότητα των γωνιών $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ έχει μια αξιόλογη συνέπεια στην οπτική. Σημαίνει ότι, αν μια ακτίνα φωτός εκπέμπεται από την εστία αυτή, στη συνέχεια ανακλάται κατά διεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα και αντιστρόφως ακτίνα παράλληλη προς τον άξονα, ανακλάται πάνω στο κάτοπτρο σε άλλη, που διέρχεται από την εστία. Τα παραβολικά κάτοπτρα στους προβολείς χρησιμοποιούν την πρώτη αρχή, ενώ τα ανακλαστικά τηλεσκόπια τη δεύτερη.

12. Δείξτε ότι υπάρχουν 681 θετικοί αριθμοί $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{681}$ τέτοιοι ώστε:

$$Z_1+Z_2+\ldots+Z_{681}=1981$$

και $$\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}+\ldots+\frac{1}{Z_{681}}=1300$$

Απόδειξη



Σχήμα

Θα εξετάσουμε στο επίπεδο Ozy την υπερβολή $y=\frac{1}{z}$, $z>0$. Θεωρούμε το σημείο $M\left(\frac{1981}{681}, \frac{1300}{681}\right)$. Επειδή το $\frac{681}{1981} < \frac{1300}{681}$, έπεται ότι το M είναι «πάνω» από την υπερβολή. Από το σημείο M φέρνουμε ευθεία με αρνητικό συντελεστή διεύθυνσης, η οποία τέμνει την υπερβολή στα σημεία N και P. Αν οι συντεταγμένες του N είναι $\left(x, \frac{1}{x}\right)$, τότε οι συντεταγμένες του σημείου P θα είναι $\left(\frac{1981-681x}{681-1300x}, \frac{681-1300x}{1981-681x}\right)$. (Αυτές οι συντεταγμένες μπορούν να βρεθούν με τη βοήθεια της αναλυτικής γεωμετρίας, αν φέρομε ευθεία από τα M και N και μετά βρούμε τα σημεία τομής αυτής της ευθείας και της υπερβολής).

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων MN και MP:

$$MN=\sqrt{\left(\frac{1981}{681}-x\right)^2+\left(\frac{1300}{681}-\frac{1}{x}\right)^2},$$

$$MP=\sqrt{\left(\frac{1981}{681}-\frac{1981-681x}{681-1300x}\right)^2+\left(\frac{1300}{681}-\frac{681-1300x}{1981-681x}\right)^2}.$$

Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=MN-MP=\sqrt{\left(\frac{1981}{681}-x\right)^2+\left(\frac{1300}{681}-\frac{1}{x}\right)^2}-$$

$$-\sqrt{\left(\frac{1981}{681}-\frac{1981-681x}{681-1300x}\right)^2+\left(\frac{1300}{681}-\frac{681-1300x}{1981-681x}\right)^2},$$

η οποία δεν είναι συνεχής και για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\frac{1981}{681}} f(x)=-\infty$.

Άρα υπάρχει αριθμός $x_0>\frac{1981}{681}$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=0$, δηλαδή πάνω στην υπερβολή υπάρχουν σημεία N_0 και P_0, που βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το σημείο M και $MN_0=MP_0$. Ας εξετάσουμε τα σημεία $A_1\equiv A_3\equiv A_5\equiv\ldots\equiv A_{677}\equiv N_0$ και $A_2\equiv A_4\equiv A_6\equiv\ldots\equiv A_{678}\equiv P_0$.

Τότε $\vec{MA_1}+\vec{MA_2}+\vec{MA_3}+\vec{MA_4}+\ldots+\vec{MA_{677}}+\vec{MA_{678}}=\vec{0}$.

Με ανάλογο τρόπο εξετάζοντας τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = MN - \frac{1}{2}MP$, πάνω στην υπερβολή βρίσκουμε τα σημεία N_0' και P_0', τα οποία βρίσκονται στην ίδια ευθεία με το Μ και $MN_0' = \frac{1}{2}MP_0'$. Εκλέγουμε τα σημεία $A_{679} \equiv A_{680} \equiv N_0'$ και $A_{681} \equiv P_0'$. Τότε $\vec{MA_{679}} + \vec{MA_{680}} + \vec{MA_{681}} = \vec{0}$. Έτσι πάνω στην υπερβολή πήραμε τα σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_{681}$, για τα οποία ισχύει η ισότητα

$$\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_{681}} = \vec{0}.$$

Επομένως οι συντεταγμένες του σημείου Μ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{Z_{A_1} + Z_{A_2} + \ldots + Z_{A_{681}}}{681} = \frac{1981}{681}$$

και

$$\frac{Y_{A_1} + Y_{A_2} + \ldots + Y_{A_{681}}}{681} = \frac{1300}{681}$$

Αν θέσουμε $Z_i = Z_{A_i}$ και χρησιμοποιώντας το ότι $Y_{A_i} = \frac{1}{Z_{A_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, 681$,

έχουμε $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_{681} = 1981$ και $\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_{681}} = 1300$,

όπου οι αριθμοί $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{681}$ είναι όλοι θετικοί.

Σχόλιο. Η άσκηση γενικεύεται έτσι:

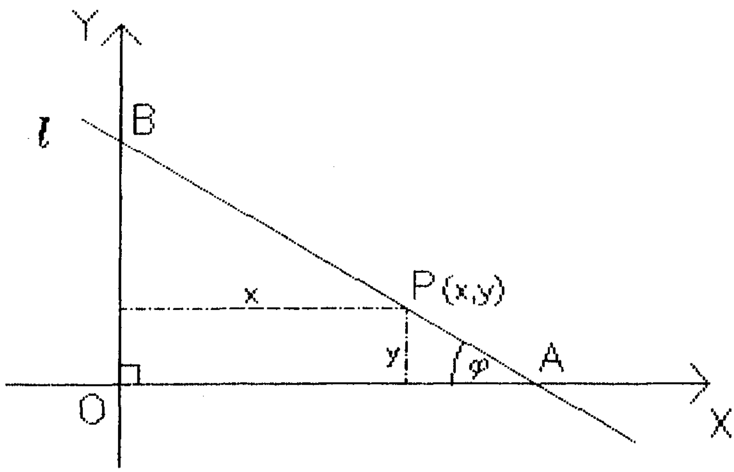
Ας είναι ν ένας θετικός αριθμός και α, β δύο τυχαίοι θετικοί αριθμοί. Δείξτε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ με τις ιδιότητες: $Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_\nu = \alpha$ και $\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots + \frac{1}{Z_\nu} = \beta$ τότε μόνο τότε αν $\alpha\beta \geq \nu^2$.

(Εξετάζουμε την παραπάνω υπερβολή και θεωρούμε το σημείο $M\left(\frac{\alpha}{\nu}, \frac{\beta}{\nu}\right)$. Στη συνέχεια βρίσκουμε σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πάνω στην υπερβολή τέτοια ώστε $\vec{MA_1} + \vec{MA_2} + \ldots + \vec{MA_\nu} = \vec{0}$).

13. Εάν μια ευθεία ℓ μετακινείται έτσι ώστε δύο σημεία αυτής, Α και Β, να κινούνται πάνω σε δύο σταθερές κάθετες ευθείες, αντίστοιχα, ο γεωμετρικός τόπος κάθε τρίτου σημείου πάνω στην ℓ είναι μια έλλειψη.

Λύση

Σχήμα



Παίρνουμε τις σταθερές κάθετες ευθείες όπως έχουμε πάρει τους άξονες των x και y. Καθώς κινείται η ℓ, το σημείο Α βρίσκεται πάντα στον άξονα των x και το σημείο Β στον άξονα των y. Ονομάζουμε P (x,y) το τρίτο σημείο στην κινούμενη ευθεία και τη μεταβλητή γωνία $O\hat{A}B$ με φ. Εάν το P βρίσκεται μεταξύ των A και B, τότε

$$(1) \qquad \frac{x}{BP} = συνφ, \quad \frac{y}{AP} = ημφ$$

Εάν το P είναι πέρα από το A ή το B, οι σχέσεις (1) πάλι δίνουν το σωστό μέγεθος για τις συντεταγμένες x και y, αλλά τα πρόσημά τους μπορεί να χρειάζονται αλλαγή. Σε κάθε περίπτωση, υψώνοντας στο τετράγωνο τους τύπους (1), παίρνουμε αποτελέσματα που ισχύουν για όλες τις θέσεις του P. Έτσι,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{(BP)^2} = συν^2φ, \quad \frac{y^2}{(AP)^2} = ημ^2φ$$

Συνεπώς, έχουμε

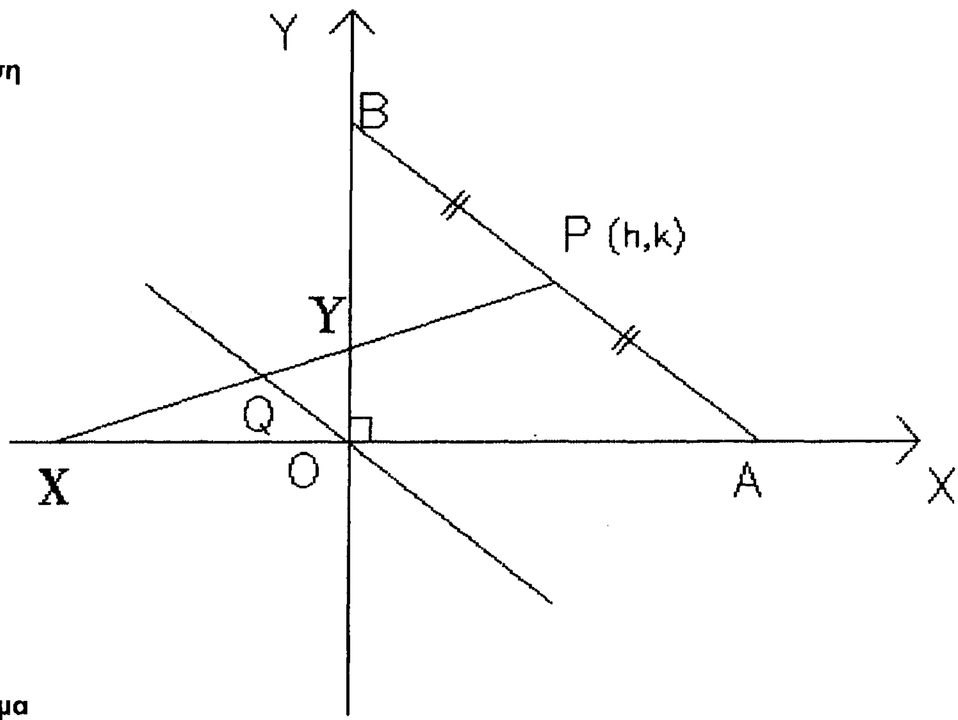
$$συν^2φ + ημ^2φ = \frac{x^2}{(BP)^2} + \frac{y^2}{(AP)^2} = 1,$$

το οποίο μας λέει ότι ο γεωμετρικός τόπος του P είναι μια έλλειψη με κέντρο στην αρχή και ημιάξονες BP και AP κατά μήκος των αξόνων x και y, αντίστοιχα. Το αντίστροφο είναι απλό.

14. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο P (h,κ) έτσι ώστε, αν συναντά τους άξονες των συντεταγμένων στα σημεία A και B, το P

να είναι το μέσον του AB. Αν κάθε ευθεία που περνά από το P συναντά τον άξονα των x στο X, τον άξονα των y στο Y και την παράλληλη από την αρχή στην ευθεία AB στο Q, δείξτε ότι $\frac{2}{PQ}=\frac{1}{PX}+\frac{1}{PY}$ (τα μήκη μετρούνται αλγεβρικά).

Λύση



Σχήμα

Αν το P(h,κ) είναι το μέσον του AB, $A \equiv (2h, 0)$, $B \equiv (0, 2\kappa)$ η εξίσωση του AB είναι $\frac{x}{2h}+\frac{y}{2\kappa}=1$ και η εξίσωση της ευθείας που περιέχει την αρχή και είναι παράλληλη στην AB είναι $\frac{x}{h}+\frac{y}{\kappa}=0$ (i)

Η εξίσωση κάθε ευθείας που περνά από το P μπορεί να είναι της μορφής

$$\frac{x-h}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{y-\kappa}{\eta\mu\theta}=r \qquad \text{(ii)}$$

Η ευθεία αυτή συναντά τον Ox στο X και r=PX, επομένως $PX=-\frac{\kappa}{\eta\mu\theta}$ (iii).

Όμοια $PY=-\frac{h}{\sigma\upsilon\nu\theta}$ (iv).

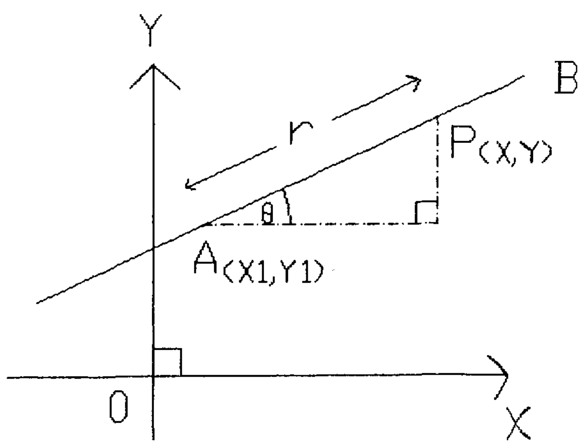
Οι ευθείες (i) και (ii) συναντώνται στο Q όπου

$$\frac{h + r\,\sigma\upsilon\nu\theta}{h} + \frac{\kappa + r\,\eta\mu\theta}{\kappa} = 0 \quad \text{και} \quad r = PQ.$$

Άρα $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{h} + \dfrac{\eta\mu\theta}{\kappa} = -\dfrac{2}{PQ}$ και επομένως από τις (iii) και (iv) έχουμε

$$\frac{1}{PX} + \frac{1}{PY} = \frac{2}{PQ}$$

Υπενθύμιση. Παραμετρικές εξισώσεις ευθείας



Σχήμα

Έστω μια ευθεία AB που περνά από το σταθερό σημείο A (x_1, y_1) και σχηματίζει με τον Ox γωνία θ. Έστω P(x,y) ένα σημείο της AB ή της προέκτασής της και έστω AP=r. Τότε $x = x_1 + r\,\sigma\upsilon\nu\theta$, $\quad y = y_1 + r\,\eta\mu\theta$.

Αυτές οι εξισώσεις που δίνουν τις συντεταγμένες κάθε σημείου της ευθείας συναρτήσει μιας μόνο μεταβλητής (παραμέτρου) r, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας. Μπορούν να γραφούν και στη μορφή

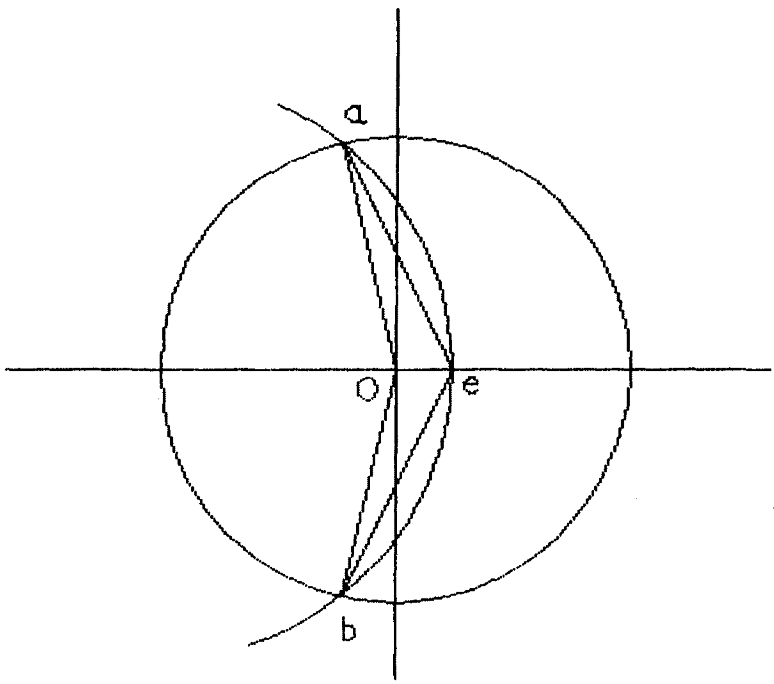
$$\frac{x - x_1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{y - y_1}{\eta\mu\theta} = r$$

Παρατηρούμε ότι τα σημεία της προέκτασης της BA αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές του r.

15. Έστω K η περιφέρεια ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 1 και έστω κ ένα κυκλικό τόξο που ενώνει δύο σημεία a, b στην K και βρίσκεται στον αρχικό κυκλικό δίσκο. Υποθέτουμε ότι το κ διαιρεί τον κυκλικό δίσκο σε δύο τμήματα ίσου εμβαδού. Δείξτε ότι το μήκος του κ είναι μεγαλύτερο του 2.

Λύση

Εάν α και b ήσαν αντιδιαμετρικά στην Κ, δεν θα υπήρχε κυκλικό τόξο από το α στο b που να διχοτομεί την Κ. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε συντεταγμένες τέτοιες ώστε Κ να είναι ο μοναδιαίος κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ και α και b να έχουν συντεταγμένες (c, d) και (c, -d) αντίστοιχα, όπου $c < 0$. Τώρα το τόξο κ διαιρεί τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη ίσου εμβαδού, οπότε πρέπει να τέμνει τον θετικό άξονα των x σ' ένα σημείο e. Εάν o είναι η αρχή, παίρνουμε μήκος $\kappa > 2ae > 3ao = 2$.



Σχήμα

Παρατήρηση

Η απαίτηση να είναι το κ ένα κυκλικό τόξο δεν είναι πράγματι σπουδαία: Οποιαδήποτε καμπύλη κ που διχοτομεί το δίσκο έχει μήκος τουλάχιστον 2 με την ισότητα να ισχύει εάν και μόνο εάν είναι διάμετρος. Εάν τα άκρα α και b είναι αντιδιαμετρικά, το συμπέρασμα είναι άμεσο· διαφορετικά, μπορούμε να αρχίσουμε ως ανωτέρω. Τότε το κ πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο p του ανοικτού ορθού ημιεπιπέδου, οπότε το μήκος του είναι τουλάχιστον $ap + pb > a + b = 2$.

16. Θεωρούμε στο επίπεδο το δίκτυο σημείων που έχουν ακέραιες συντεταγμένες. Για ευθείες που έχουν κλίση ρητό αριθμό, δείξτε ότι:

(i) Η ευθεία δεν περνά από σημεία του δικτύου ή περνά από άπειρα.

(ii) Υπάρχει για κάθε ευθεία ένας θετικός αριθμός d που έχει την ιδιότητα ότι κανένα σημείο του δικτύου, εκτός αυτών που βρίσκονται στην ευθεία, δεν είναι κοντύτερα στην ευθεία από την απόσταση d.

Λύση

(i) Εάν L είναι μια ευθεία με ρητή κλίση η εξίσωσή της μπορεί να γραφεί ως εξής: $ax + by + c = 0$, όπου a και b είναι ακέραιοι όχι και οι δύο μηδέν.

Υποθέτουμε ότι (x_1, y_1) είναι ένα σημείο της ευθείας και ότι x_1 και y_1 είναι αμφότεροι ακέραιοι.

Τότε σημεία της μορφής $(x_1 + \kappa b,\ y_1 - \kappa a)$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ βρίσκονται όλα επί της ευθείας, αφού $a(x_1 + \kappa b) + b(y_1 - \kappa a) + c = ax_1 + by_1 + c = 0$.

Άρα, εάν υπάρχει ένα σημείο με ακέραιες συντεταγμένες σε μια ευθεία με ρητή κλίση, υπάρχουν άπειρα στο πλήθος.

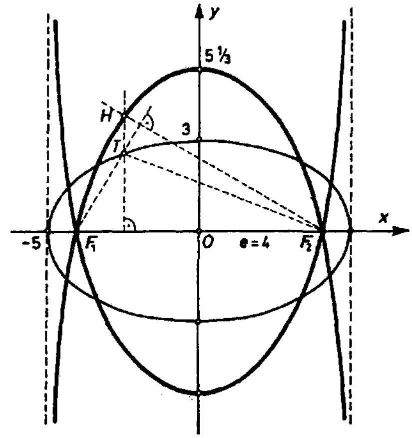
(ii) Η απόσταση του σημείου (p, q) από την ευθεία L με εξίσωση $ax + by + c = 0$ είναι $d = \dfrac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Αφού η L έχει ρητή κλίση, μπορούμε να επιλέξουμε τα a και b να είναι ακέραιοι. Τότε ap+bq παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Άρα, εάν c είναι ακέραιος, το d είναι είτε 0 είτε τουλάχιστον $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Εάν c δεν είναι ακέραιος, το d είναι τουλάχιστον $\dfrac{e}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, όπου e είναι η απόσταση από το c στον πιο κοντινό ακέραιο.

Παρατήρηση: Εάν επιλέξουμε την εξίσωση της L έτσι ώστε a και b να είναι σχετικώς πρώτοι ακέραιοι, τότε ap+bq παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές και η ελάχιστη απόσταση από την L ενός σημείου με ακέραιες συντεταγμένες, όχι στην L, είναι ακριβώς $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ εάν c είναι ακέραιος και $\dfrac{e}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ εάν όχι.

17. Ορίσετε τον γεωμετρικό τόπο του ορθοκέντρου του τριγώνου TF_1F_2, όταν το σημείο T διαγράφει δεδομένη έλλειψη με εστίες F_1F_2. Σχεδιάσετε και τα δύο γραφήματα για a=5, b=3 (a, b ημιάξονες της έλλειψης).

Λύση



Σχήμα

Για να πάρουμε τις συντεταγμένες του ορθοκέντρου του τριγώνου, πρέπει να ξέρουμε τις εξισώσεις των ευθειών που περιέχουν δύο ύψη του. Το ορθόκεντρο βρίσκεται στην τομή αυτών των δύο ευθειών. Παίρνουμε στην έλλειψη τυχαίο σημείο T. Επειδή η εξίσωση της έλλειψης είναι $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι $\left(x_T,\ b\sqrt{1-\frac{x_T^2}{a^2}}\right)$.

Ένα από τα ύψη του τριγώνου TF_1F_2 είναι κάθετο στον άξονα των τετμημένων – από το σημείο T δηλαδή στην ευθεία $x = x_T$. Ορίζουμε στη συνέχεια την εξίσωση του ύψους που φέρνουμε από την εστία F_2 στην πλευρά F_1T.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας F_1T είναι $\kappa = \dfrac{y_T - y_1}{x_T - x_1} = \dfrac{b\cdot\sqrt{1-\frac{x_T^2}{a^2}}}{x_T + \sqrt{a^2-b^2}}$.

Η κάθετος από την εστία F_2 στην ευθεία F_1T έχει εξίσωση

$$y - y_2 = -\frac{1}{\kappa}(x - x_2), \text{ δηλαδή } \quad y = -\frac{x_T + \sqrt{a^2-b^2}}{b\cdot\sqrt{1-\frac{x_T^2}{a^2}}}\left(x - \sqrt{a^2-b^2}\right).$$

Έτσι βρήκαμε την εξίσωση του άλλου ύψους του τριγώνου. Τις συντεταγμένες του σημείου τομής με το πρώτο ύψος τις παίρνουμε, αν θέσουμε $x = x_T$. Οπότε

$$\left(x_T,\ \frac{a^2-b^2-x_T^2}{\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x_T^2}{a^2}}}\right)$$

Άρα για κάθε x, $|x|<a$, το ορθόκεντρο του τριγώνου με κορυφές F_1, F_2, T βρίσκεται στην καμπύλη $y=\dfrac{a^2-b^2-x^2}{\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$ ή $y=\pm\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a^2-b^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Η καμπύλη αυτή έχει κορυφές τα σημεία $\left(0,\ \pm\dfrac{e^2}{b}\right)$, τέμνει τον άξονα των x στις εστίες της έλλειψης και οι ασύμπτωτές της είναι $x=\pm a$.

18. Υπολογίστε τη θέση μιας κάθετης χορδής σε μια παραβολή έτσι ώστε να αποκόπτει από την παραβολή τμήμα με ελάχιστο εμβαδόν.

Λύση

Διαλέγουμε συντεταγμένες τέτοιες ώστε η εξίσωση της παραβολής να είναι $4ay=x^2$, $a>0$. Η χορδή που ενώνει το σημείο $P(2as,\ as^2)$ με το σημείο $Q(2at,\ at^2)$ έχει την εξίσωση

$$y=\frac{1}{2}(t+s)\,x-ast \qquad (1)$$

και η εφαπτομένη στο $(2at,\ at^2)$ έχει κλίση t. Άρα η ευθεία (1) θα είναι κάθετη στην παραβολή στο Q εάν και μόνο εάν $\frac{1}{2}t\,(t+s)=-1$ που μπορεί να γραφεί ως εξής: $s=-\frac{2}{t}-t$.

Άρα βλέπουμε ότι s και t έχουν αντίθετα πρόσημα. Παίρνουμε $s<0$ και $t>0$. Τότε το εμβαδόν που αποκόπτεται από τη χορδή είναι

$$\int_{2as}^{2at}\left[\frac{1}{2}(t+s)x-ast-\frac{1}{4a}x^2\right]dx=\frac{1}{3}a^2\,(t-s)^3$$

Αυτό το εμβαδόν θα είναι ελάχιστο όταν $t-s$ είναι ελάχιστο. Αλλά

$$t-s=2t+\frac{2}{t}=2\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+4 \ \geq\ 4$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\sqrt{t}=1$ οπότε t=1.

Άρα, από όλες τις καθέτους στην παραβολή σε σημεία προς τα δεξιά του άξονα η κάθετος στο $(2\alpha, \alpha)$ αποκόπτει το ελάχιστο εμβαδόν. Η αποκοπτόμενη επιφάνεια έχει εμβαδόν $\dfrac{64\alpha^2}{3}$.

Συμμετρικά, η κάθετος στο $(-2\alpha, \alpha)$ αποκόπτει την ελάχιστη επιφάνεια μεταξύ των καθέτων στα σημεία στα αριστερά του άξονα.

Οι κρίσιμες κάθετοι μπορεί να είναι εκείνες που συναντούν τον άξονα με γωνία 45°.

19. Δείξτε ότι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να έχει ένα τρίγωνο, εγγεγραμμένο σε έλλειψη, μέγιστο εμβαδόν είναι το έγκεντρό του να συμπίπτει με το κέντρο της έλλειψης.

Λύση

Έστω η εξίσωση της έλλειψης $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Εκτελούμε τον μετασχηματισμό: $u=\dfrac{x}{\alpha}$, $v=\dfrac{y}{b}$.

Τότε η έλλειψη στο επίπεδο (x, y) γίνεται ένας κύκλος στο επίπεδο (u, v) με εξίσωση $u^2+v^2=1$.

Μέσω ενός μετασχηματισμού, τρίγωνα εγγεγραμμένα σε έλλειψη μετασχηματίζονται σε τρίγωνα εγγεγραμμένα σε κύκλο. Μέσα ευθυγρ. τμημάτων σε μέσα. Έγκεντρα τριγώνων σε έγκεντρα. Το κέντρο της έλλειψης στο κέντρο του κύκλου. Και όλα τα εμβαδά είναι πολλαπλασιασμένα με μια σταθερά. Άρα χρειάζεται μόνο να αποδείξουμε:

(*) Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο να έχει μέγιστο εμβαδόν είναι το έγκεντρό του να συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου.

Τώρα, ένα τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει μέγιστο εμβαδόν $\Leftrightarrow$ είναι ισόπλευρο.

Πράγματι, εάν σταθεροποιήσουμε μια πλευρά AB ενός εγγεγραμμένου $\overset{\triangle}{ABC}$, το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν το ύψος στο AB γίνει μέγιστο κι αυτό συμβαίνει όταν AC=BC. Άρα, εάν υπάρχει τρίγωνο μεγίστου εμβαδού, πρέπει νάναι ισόπλευρο.

Η ύπαρξη των τριγώνων μεγίστου εμβαδού προκύπτει από το γεγονός ότι ο κύκλος είναι συμπαγής και από το ότι το εμβαδόν είναι μια συνεχής συνάρτηση των κορυφών.

Είναι προφανές ότι το έγκεντρο ενός ισοπλεύρου τριγώνου συμπίπτει με το περίκεντρό του. Αντίστροφα, εάν το έγκεντρο ενός τριγώνου συμπίπτει με το περίκεντρό του, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως ακολούθως. Εάν το έγκεντρο είναι το ίδιο σημείο με το περίκεντρο, τότε κάθε διάμεσος του τριγώνου έχει δύο κοινά σημεία με τη μεσοκάθετο της αντίστοιχης πλευράς, δηλαδή το μέσο της πλευράς και το έγκεντρο. Αυτά τα σημεία δεν μπορούν να συμπίπτουν αφού το έγκεντρο πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου. Άρα κάθε διάμεσος είναι κάθετος στην αντίστοιχη πλευρά και το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

20. (α) Δείξτε ότι το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων τα τετράγωνα των αποστάσεων από δύο δεδομένα σημεία A_1 και A_2 έχουν σταθερό άθροισμα είναι είτε κύκλος, είτε σημείο, είτε το κενό σύνολο.

(β) Ερευνήστε το γενικό πρόβλημα: Εάν $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι δεδομένα σημεία του επιπέδου, βρείτε τη φύση του συνόλου σημείων P για τα οποία

$$\alpha_1|PA_1|^2+\alpha_2|PA_2|^2+\ldots+\alpha_n|PA_n|^2=\beta,$$

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ και β είναι δεδομένοι αριθμοί και $|PA_i|$ είναι η απόσταση του P από το A_i.

Λύση

(α) Εισάγομε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο οποίο τα δεδομένα σημεία A_i έχουν συντεταγμένες x_i, y_i για i=1,2 και το σημείο P του γεωμ. τόπου έχει συντεταγμένες x και y.

Τότε, η συνθήκη $|PA_1|^2+|PA_2|^2=c$ μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=c$$

που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\left[x-\frac{x_1+x_2}{2}\right]^2+\left[y-\frac{y_1+y_2}{2}\right]^2=c, \qquad (1)$$

όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το c, x_1, y_1, x_2 και y_2.

Η εξίσωση (1) αντιπροσωπεύει ένα κύκλο, ένα σημείο, ή το κενό σύνολο αν C μεγαλύτερο, ίσο ή μικρότερο του 0.

(β) Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του A_i με x_i, y_i και τις συντεταγμένες του P με x, y. Τότε $|PA_1|^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$

και η εξίσωση $a_1|PA_1|^2 + a_2|PA_2|^2 + \ldots + a_n|PA_n|^2 = \beta$

μπορεί να πάρει τη μορφή $dx^2 + dy^2 + ax + by + c = 0$,

όπου a, b, c ορίζονται από τα x_i, y_i, a_i και β και $d = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

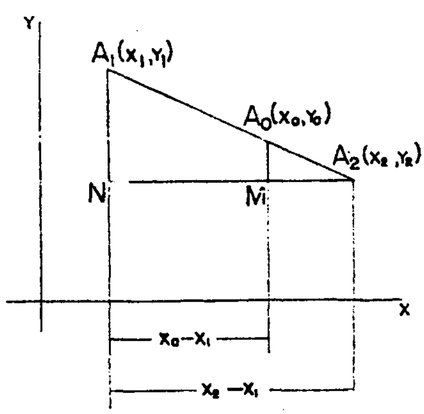
Περίπτωση 1: $d \neq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνολο των σημείων είναι κύκλος (εάν $\frac{a^2 + b^2 - 4dc}{4d^2} > 0$), αποτελείται μόνο από ένα στοιχείο (εάν $\frac{a^2 + b^2 - 4dc}{4d^2} = 0$) ή είναι το κενό (εάν $\frac{a^2 + b^2 - 4dc}{4d^2} < 0$).

Περίπτωση 2: d=0. Τότε η εξίσωση του γεωμ. τόπου γίνεται: $ax + by + c = 0$, που αντιπροσωπεύει μια ευθεία (εάν τουλάχιστον ένα από τα a και b δεν είναι 0), όλο το επίπεδο (εάν a=b=c=0), ή το κενό σύνολο (εάν a=b=0, c≠0).

21. Δεδομένων δύο διατεταγμένων ζευγών (x_1, y_1), (x_2, y_2) τα γραφήματά τους είναι $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Δείξτε ότι κάθε διατεταγμένο ζεύγος (x_0, y_0), η γραφική παράσταση του οποίου βρίσκεται στο ευθ. τμήμα $A_1 A_2$ θα έχει συντεταγμένες $[tx_2 + (1-t)x_1,\ ty_2 + (1-t)y_1]$, όπου $0 \leq t \leq 1$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\frac{\overline{A_1A_0}}{\overline{A_1A_2}} = t$, $A_0\hat{A}_2M \approx A_1\hat{A}_2N$.



Σχήμα

Άρα $\dfrac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} = t \Leftrightarrow x_0 - x_1 = tx_2 - tx_1 \Leftrightarrow x_0 = tx_2 + (1-t)x_1$.

Με τον ίδιο τρόπο, φέροντας μια παράλληλο στον άξονα των x από το σημείο A_0, αποδεικνύουμε ότι $y_0 = ty_2 + (1-t)y_1$. Καθώς το A_0 βρίσκεται στο ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 έχουμε: $0 \le \dfrac{\overline{A_1A_0}}{\overline{A_1A_2}} \le 1$.

Άρα εξασφαλίζεται η ανισότητα $0 \le t \le 1$.

Το αντίστροφο επίσης ισχύει και αποδεικνύεται απλά.

22. Δίδεται μια έκφραση $ax + by$ ορισμένη σ' ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών, η γραφική παράσταση της οποίας, στο επίπεδο, είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$. Δείξτε ότι η τιμή της έκφρασης για οποιοδήποτε σημείο του A_1A_2 βρίσκεται μεταξύ των τιμών των άκρων.

Απόδειξη

Από το θέμα 21, κάθε σημείο A_0 του A_1A_2 έχει συντεταγμένες

$$\left(tx_2 + (1-t)x_1,\ ty_2 + (1-t)y_1\right).$$

Έστω ότι η τιμή για το A_1 είναι $m_1 = ax_1 + by_1$ και η τιμή για το A_2 είναι $m_2 = ax_2 + by_2$. Η τιμή για το A_0 θα είναι

$$m_0 = a\left[tx_2 + (1-t)x_1\right] + b\left[ty_2 + (1-t)y_1\right] = t(ax_2 + by_2) + (1-t)(ax_1 + by_1) =$$

$$= ax_1 + by_1 + t\left[(ax_2 + by_2) - (ax_1 + by_1)\right] = m_1 + t(m_2 - m_1).$$

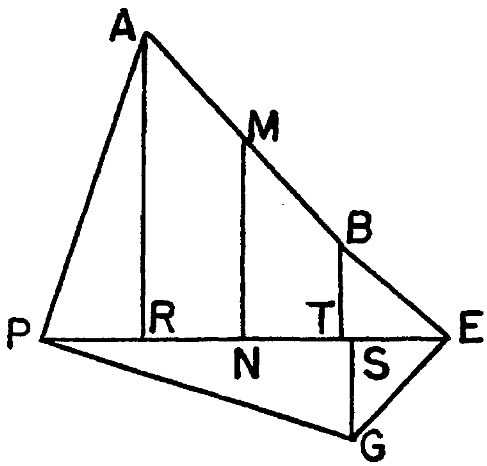
Καθώς $0 \le t \le 1$, το m_0 βρίσκεται μεταξύ των m_1 και m_2.

23. Το κυνήγι του θησαυρού.

Κάποιος ψάχνει να κρύψει ένα θησαυρό χρησιμοποιώντας ως σημάδια μια φτελιά E, ένα πεύκο P που είναι λίγο πιο δυτικά και μια αγχόνη G κοντά στα δύο δένδρα. Εντοπίζει δύο σημεία A και B ως εξής: Για το A, έρχεται από το G στο P, γυρίζει δεξιά κατά 90° και συνεχίζει στο A, έτσι ώστε GP=PA. Για το B, έρχεται από το G στο E, γυρίζει αριστερά 90° και συνεχίζει στο B, έτσι ώστε GE=EB. Κατόπιν θάβει το θησαυρό του στο M, το μέσον του AB. Όταν γυρίζει μερικούς μήνες αργότερα για να ξαναβρεί το θησαυρό του, έπαθε σοκ όταν βρήκε ότι η αγχόνη είχε μετακινηθεί χωρίς νάχει μείνει κανένα ίχνος. Δείξτε ότι είναι ακόμη δυνατόν γι' αυτόν να εντοπίσει το θησαυρό του.

Λύση

Για να λυθεί το πρόβλημα που αναφέρθηκε παραπάνω, αρχικά εκτελούμε τις οδηγίες, έτσι ώστε AP=PG, AP⊥PG, GE=BE, GE⊥BE και AM=MB. Πρέπει να δείξουμε ότι η θέση του M δεν εξαρτάται από τη θέση του G. Φέρομε AR, BT και SG όλες ⊥PE. Παίρνουμε το N μέσον του PE και φέρομε το MN. Μπορούμε να δείξουμε ότι $MN\perp = \frac{PE}{2}$ ανεξάρτητα από τη θέση του G.



Σχήμα

Περίπτωση 1: Το G στο τμήμα PE. Σ' αυτή την περίπτωση, P και R ταυτίζονται όπως και T με E. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι MN είναι διάμεσος του τραπεζίου APEB. Άρα $MN \perp PE$ και $MN = \frac{1}{2}(AP + EB) = \frac{1}{2}PE$.

Περίπτωση 2: Το G στην προέκταση του PE. Σ' αυτή την περίπτωση θα βρεθεί ότι MN ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου APEB και οπότε ισούται με το μισό της διαφοράς των βάσεών του. Αυτό δεν αλλάζει το γεγονός ότι $MN = \frac{1}{2}PE$.

Περίπτωση 3: Το G δεν βρίσκεται στο PE ούτε στην προέκτασή του. Για κάθε τέτοιο εντοπισμό του G, έχουμε $P\hat{A}R = P\hat{S}G$ και $B\hat{T}E = S\hat{E}G$. Άρα PR=SG=TE. Επίσης PN=NE ή RN=NT. Άρα MN είναι η διάμεσος του τραπεζίου ARTB οπότε $MN = \frac{1}{2}(AR + TB)$.

Εντούτοις AR=PS και BT=SE, οπότε $MN = \frac{1}{2}(PS + SE) = \frac{1}{2}PE$. Αφού $MN \parallel RA$, έχομε $MN \perp PE$.

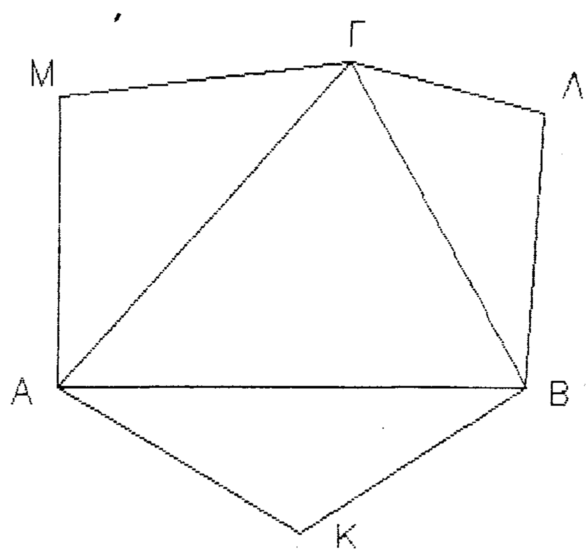
Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να εντοπίσουμε το σημείο όπου μπορεί να ταφεί ο θησαυρός στο μέσον του ΡΕ με τη φτελιά στα δεξιά και σε μια απόσταση ίση με το μισό του ΡΕ και κατά μήκος μιας ευθείας καθέτου.

Εκείνοι που έχουν δουλέψει λίγο με γεωμετρία συντεταγμένων, θα προτιμήσουν την ακόλουθη αντιμετώπιση που είναι πιο γενική γιατί δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε ειδικές περιπτώσεις. Έστω ΡΕ στον άξονα των Χ με το μέσον του ΡΕ ως αρχή και συντεταγμένες του Ρ $(-\alpha, 0)$ και του Ε $(\alpha, 0)$. Ας είναι (x, y) οι συντεταγμένες του G. Χρησιμοποιώντας ίσα τρίγωνα όπως πριν, εύκολα βλέπομε ότι οι συντεταγμένες του Α είναι $(-\alpha - y,\ \alpha + x)$ και του Β είναι $(\alpha + y,\ \alpha - x)$. Τώρα οι συντεταγμένες του μέσου ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι $\left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\right]$. Άρα οι συντεταγμένες του μέσου του ΑΒ είναι

$$x = \frac{1}{2}\left[(-\alpha - y) + (\alpha + y)\right] \quad \text{και} \quad x = \frac{1}{2}\left[(\alpha + x) + (\alpha - x)\right] \quad \text{ή} \quad (0, \alpha).$$

23. **Με πλευρές τις πλευρές δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ, κατασκευάζουμε τρίγωνα ΑΒΚ, ΒΓΛ, ΓΑΜ, όμοια μεταξύ τους, $\frac{AB}{KA} = \frac{B\Gamma}{\Lambda B} = \frac{\Gamma A}{M\Gamma}$, όλα εξωτερικά ή όλα εσωτερικά. Δείξτε ότι τα κέντρα βάρους των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΛΜ συμπίπτουν (θεώρημα του Πάππου).**

Απόδειξη



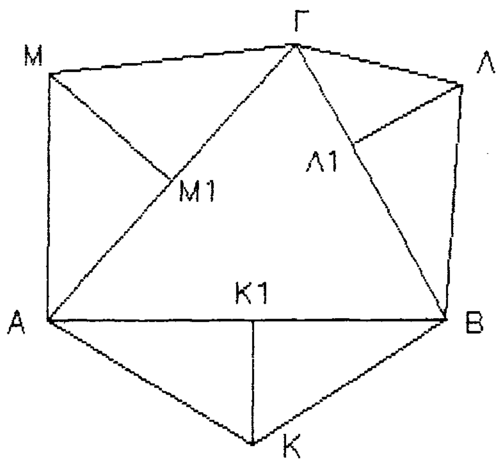
Σχήμα

Ας είναι α, β, γ, κ, λ, μ, οι μιγαδικοί αριθμοί που αντιστοιχούν στο επίπεδο του Gauss στα σημεία Α, Β, Γ, Κ, Λ, Μ. Το σημείο Κ προκύπτει από το σημείο Β με περιστροφή γύρω από το Α και ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο Α. Επομένως υπάρχει μιγαδικός αριθμός ω, τέτοιος ώστε $\kappa-\alpha=\omega(\beta-\alpha)$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΚ, ΒΓΛ και ΓΑΜ προκύπτει ότι $\lambda-\beta=\omega(\gamma-\beta)$, $\mu-\gamma=\omega(\alpha-\gamma)$. Αν προσθέσουμε τις παραπάνω τρεις ισότητες παίρνουμε:

$$\kappa+\lambda+\mu=\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow \frac{1}{3}(\kappa+\lambda+\mu)=\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Όμως ο μιγαδικός $\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)$ αντιστοιχεί στο κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ ο $\frac{1}{3}(\kappa+\lambda+\mu)$ στο κέντρο βάρους του $\overset{\triangle}{\text{ΚΛΜ}}$. Επομένως τα δύο βαρύκεντρα συμπίπτουν.

Διαφορετική αντιμετώπιση



Σχήμα

Φέρνουμε τα ύψη KK_1, $\Lambda\Lambda_1$, MM_1 και θεωρούμε το τυχαίο σημείο Ο. Για τα βαρύκεντρα G και Η των τριγώνων ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουμε:

$$\vec{OG}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}),\qquad \vec{OH}=\frac{1}{3}(\vec{OK}+\vec{O\Lambda}+\vec{OM}).$$

Όμως $\vec{OK}=\vec{OA}+\vec{AK_1}+\vec{K_1K}$, $\vec{O\Lambda}=\vec{OB}+\vec{B\Lambda_1}+\vec{\Lambda_1\Lambda}$, $\vec{OM}=\vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma M_1}+\vec{M_1M}$

δηλαδή $\vec{OK}+\vec{O\Lambda}+\vec{OM}=(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma})+(\vec{AK_1}+\vec{B\Lambda_1}+\vec{\Gamma M_1})+(\vec{K_1K}+\vec{\Lambda_1\Lambda}+\vec{M_1M})$

Είναι φανερό ότι: $\vec{AK_1}=\alpha\vec{AB}$, $\vec{B\Lambda_1}=\alpha\vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma M_1}=\alpha\vec{\Gamma A}$, όπου $\alpha=\dfrac{\vec{AK_1}}{\vec{AB}}$.

Άρα $\vec{AK_1}+\vec{BΛ_1}+\vec{ΓM_1}=α\,(\vec{AB}+\vec{BΓ}+\vec{ΓA})=\vec{0}$.

Τα διανύσματα $\vec{K_1K}$, $\vec{Λ_1Λ}$, και $\vec{M_1M}$ προκύπτουν με περιστροφή των $\vec{AB}$, $\vec{BΓ}$ και $\vec{ΓA}$ κατά γωνία $\frac{π}{2}$ και ομοιότητα με λόγο ομοιότητας $\frac{KK_1}{AB}$.

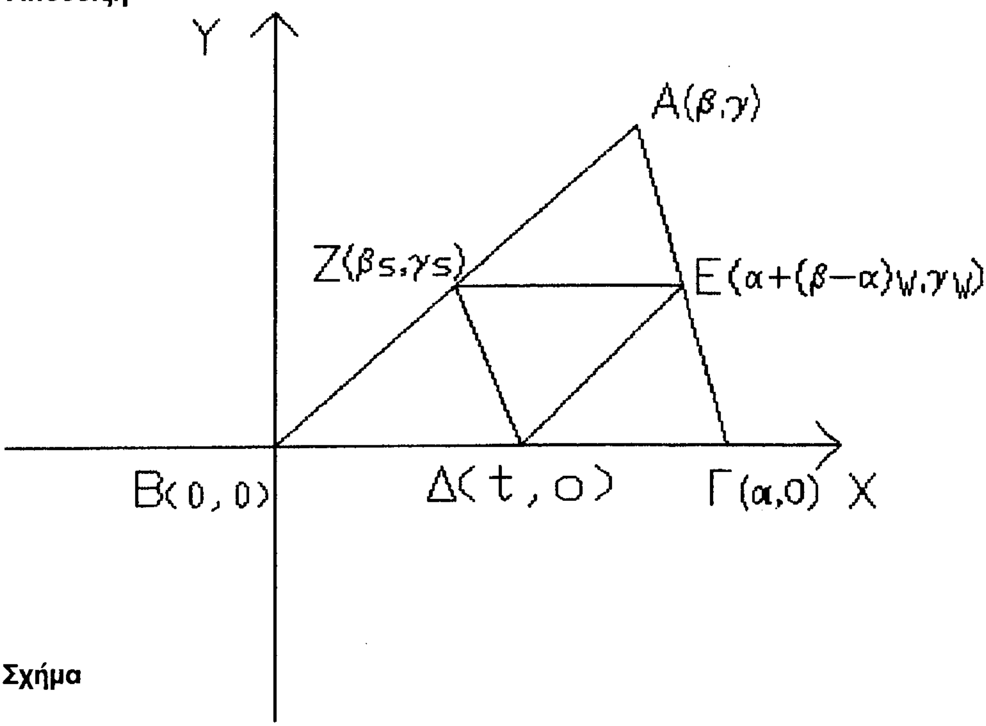
Συνεπώς $\vec{K_1K}+\vec{Λ_1Λ}+\vec{M_1M}=\vec{0}$ απ' όπου τελικά έχουμε:

$$\vec{OH}=\frac{1}{3}(\vec{OK}+\vec{OΛ}+\vec{OM})=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OΓ})=\vec{OG},$$

δηλαδή τα σημεία G και H συμπίπτουν.

25. Στο πιο κάτω σχήμα, τα σημεία Δ, Ε, Ζ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ (και όχι στις προεκτάσεις τους). Δείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΖΒΔ, ΔΕΓ έχει εμβαδόν μικρότερο ή ίσο από το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη



Σχήμα

Επειδή σε κάθε τρίγωνο υπάρχει μία (τουλάχιστον) οξεία γωνία, μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι διαλέξαμε έτσι το σύστημα αξόνων, ώστε να έχουμε

$\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$. Στο σχήμα, η εξίσωση της ΑΒ είναι: $\gamma x-\beta y=0$ και η εξίσωση της ΑΓ είναι : $\gamma x+(\alpha-\beta)y-\alpha\gamma=0$.

Επειδή η εξίσωση της ΒΓ είναι $y=0$, μπορούμε να διαλέξουμε σαν παραμετρικές της εξισώσεις τις $x=t$, $y=0$. Έτσι μπορούμε να θέσουμε $\Delta=(t,0)$. Με ανάλογες σκέψεις βλέπουμε ότι μπορούμε να θέσουμε $E\left(\alpha+(\beta-\alpha)w,\ \gamma w\right)$ όπου στην εξίσωση της ΑΓ θέσαμε $y=\gamma w$ και $Z=(\beta s,\gamma s)$.

Τότε $(AB\Gamma)=\frac{1}{2}\left|B\Gamma\right|\cdot$ (απόσταση του Α από την ΒΓ) $=\frac{1}{2}\alpha\cdot\gamma$ (1).

Ανάλογα βρίσκουμε:

$(BZ\Delta)=\frac{1}{2}\left|B\Delta\right|\cdot$ (απόσταση του Ζ από την ΒΔ) $=\frac{1}{2}t\cdot\gamma s$ (2)

$(E\Delta\Gamma)=\frac{1}{2}\left|\Delta\Gamma\right|\cdot$ (απόσταση του Ε από την ΔΓ) $=\frac{1}{2}(\alpha-t)\cdot\gamma w$ (3)

$(AEZ)=\frac{1}{2}\left|AZ\right|\cdot$(απόσταση του Ε από την ΑΖ) $=$

$$=\frac{1}{2}\left(\left|1-s\right|\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\right)\cdot\left(\left|1-w\right|\frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\right),$$

οπότε $(AEZ)=\frac{1}{2}\alpha\gamma\left|1-s\right|\left|1-w\right|$. Επειδή όμως $\gamma>\gamma w$ και $\gamma>\gamma s$, έχουμε $w<1$, $s<1$. Επομένως $(AEZ)=\frac{1}{2}\alpha\gamma(1-s)(1-w)$ (4)

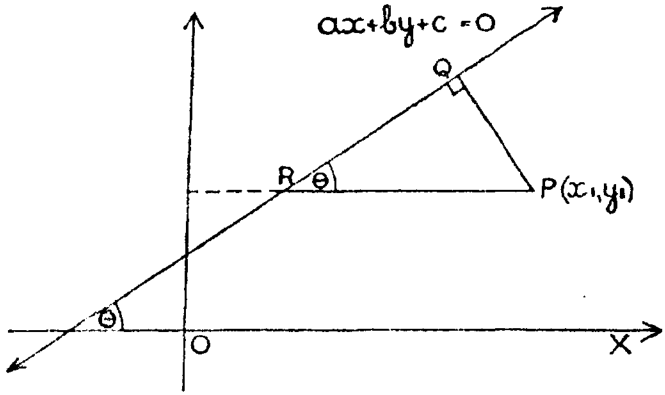
Τώρα ή θα ισχύει $(BZ\Delta)\le\frac{1}{4}(AB\Gamma)$ ή $(E\Delta\Gamma)\le\frac{1}{4}(AB\Gamma)$, οπότε το ζητούμενο απεδείχθη. Αν ισχύει $(BZ\Delta)>\frac{1}{4}(AB\Gamma)$ και $(E\Delta\Gamma)>\frac{1}{4}(AB\Gamma)$, λόγω (1), (2), (3) θα έχουμε: $ts>\frac{\alpha}{4}$, $(\alpha-t)w>\frac{\alpha}{4}$, από τις οποίες βρίσκουμε μετά τις πράξεις: $1-s<\frac{4t-\alpha}{4t}$, $1-w<\frac{3\alpha-4t}{4(\alpha-t)}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες αυτές για να δείξουμε ότι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, ισχύει $(AZE)\le\frac{1}{4}(AB\Gamma)$ ή βάσει των (1), (4) ότι ισχύει $(1-s)(1-w)\le\frac{1}{4}$. Έχουμε

$$(1-s)(1-w)-\frac{1}{4}<\frac{4t-\alpha}{4t}\cdot\frac{3\alpha-4t}{4(\alpha-t)}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{-3\alpha^2+12\alpha t-12t^2}{4t(\alpha-t)}=-\frac{3(\alpha-2t)^2}{16t(\alpha-t)}\le 0$$

26*. Απόσταση σημείου από ευθεία.

Λύση



Σχήμα

Η κλίση της ευθείας $ax + by + c = 0$ είναι θ. Φέρνουμε PR παράλληλη προς τον άξονα των x που συναντά την ευθεία στο R. Έστω ότι η κάθετος από το P στην ευθεία είναι η PQ=d. Το σημείο R έχει $y = y_1$ και επομένως $x = -\left(\dfrac{by_1 + c}{a}\right)$.

Συνεπώς $RP = x_1 - \left[-\dfrac{(by_1 + c)}{a}\right] = \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{a}$. Επειδή το PR μπορεί νάναι αρνητικό, έχουμε $d = |PR\ \eta\mu\theta|$.

Επειδή $\varepsilon\varphi\theta = -\dfrac{a}{b} \Rightarrow \eta\mu\theta = \pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

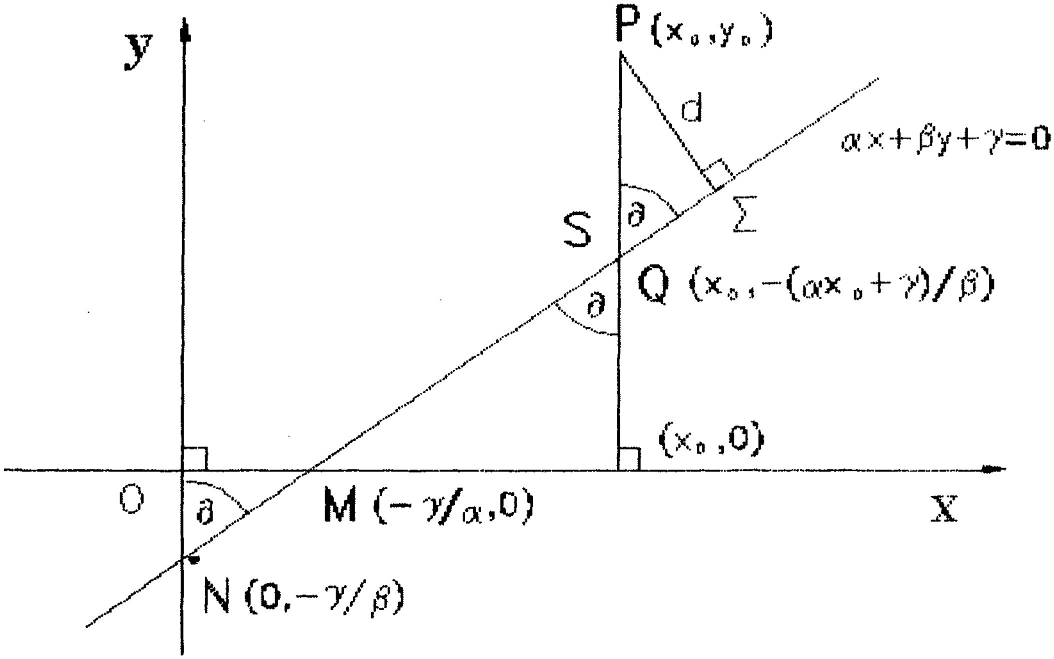
Επομένως $d = |PR\ \eta\mu\theta| = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{a} \cdot \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Άρα, η απόσταση ενός σημείου (x_1, y_1) από μια ευθεία με εξίσωση $ax + by + c = 0$ είναι $\dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

*** Στα θεωρητικά θέματα που παρουσιάζουν αυξημένο μαθητικό ενδιαφέρον, δίνουμε αποδείξεις διαφορετικές απ' αυτές που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο. Κρίνουμε ότι είναι τελείως απαραίτητες για τη βαθύτερη γνώση των εννοιών στις οποίες αναφέρονται και συχνά για τη δικαιολόγηση αυτών των εννοιών.**

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε την ευθεία $y = -\dfrac{\alpha}{\beta}x - \dfrac{\gamma}{\beta}$ και το σημείο $P(x_0, y_0)$.



Σχήμα

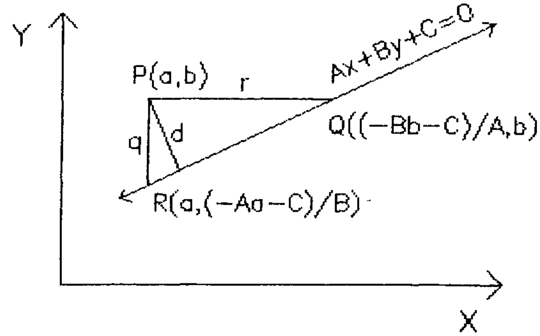
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΣPQ, έχουμε:

$$d = s\ \eta\mu\theta = \sqrt{(x_0 - y_0)^2 + \left(y_0 + \frac{\alpha x_0 + \gamma}{\beta}\right)^2} \cdot \frac{\left|-\dfrac{\gamma}{\alpha}\right|}{\sqrt{\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} + \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}}} = \left|y_0 + \frac{\alpha x_0 + \gamma}{\beta}\right| \cdot \frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} =$$

$$= \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Εκφράζοντας το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου PQR με δύο διαφορετικούς τρόπους έχομε τα ακόλουθα:



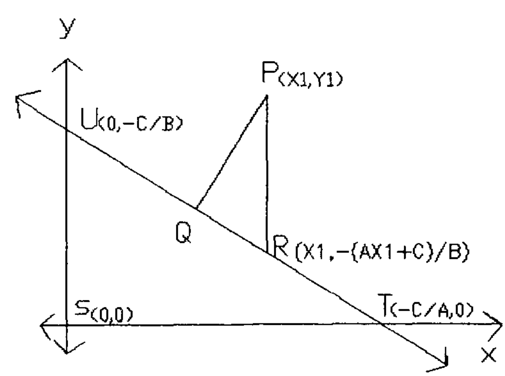
Σχήμα

$$\frac{d\sqrt{(r^2+q^2)}}{2}=\frac{rq}{2} \quad \text{ή} \quad d=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{q^2}+\frac{1}{r^2}}}.$$

Επειδή οι αποστάσεις: $q=\left|\frac{S}{B}\right|$ και $r=\left|\frac{S}{A}\right|$, όπου $S=Aa+Bb+c$ βλέπουμε αμέσως ότι $d=\frac{|Aa+Bb+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Από την ομοιότητα των τριγώνων PQR, UST, παίρνουμε:

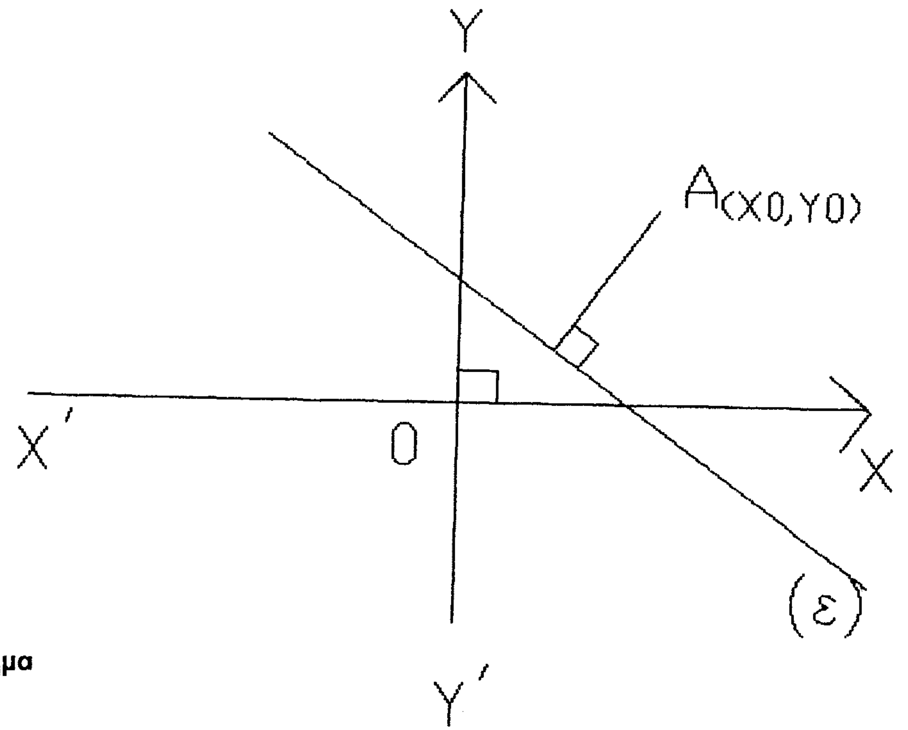


Σχήμα

$$PQ = PR\,\frac{TS}{TU} = \frac{\left|y_1 + \dfrac{Ax_1 + C}{B}\right| \left|\dfrac{C}{A}\right|}{\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{C^2}{A^2} + \dfrac{C^2}{B^2}}}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (T)$$

Σχόλιο: Η παραπάνω απόδειξη δεν ισχύει, όταν η ευθεία $Ax+By+C=0$ περιέχει την αρχή των αξόνων. Ο τύπος όμως (T) ισχύει και σ' αυτήν την περίπτωση.

Διαφορετική αντιμετώπιση



Σχήμα

Θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο $A(x_0, y_0)$ και ακτίνα $R = d(A, \varepsilon)$. Τότε ο κύκλος εφάπτεται της (ε), που σημαίνει ότι το σύστημα των εξισώσεων (Σ) έχει μοναδική λύση.

$$\begin{aligned} &(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ &Ax + By + \Gamma = 0 \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η:. $A \neq 0$. Τότε: $x = -\dfrac{By + \Gamma}{A}$ και με απαλοιφή του x από την πρώτη σχέση, έχουμε:

$$\left(\frac{By+\Gamma}{A}+x_0\right)^2+(y-y_0)^2=R^2 \Leftrightarrow (By+\Gamma+Ax_0)^2+A^2(y-y_0)^2=A^2\cdot R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[By+(\Gamma+Ax_0)\right]^2+A^2(y-y_0)^2=A^2\cdot R^2 \Leftrightarrow B^2y^2+(\Gamma+Ax_0)^2+$$

$$+2By(\Gamma+Ax_0)+A^2\cdot y^2+A^2y_0^2-2A^2yy_0-A^2R^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(A^2+B^2)+y\left[2B(\Gamma+Ax_0)-2A^2y_0\right]+\left[(\Gamma+Ax_0)^2+A^2y_0^2-A^2R^2\right]=0.$$

Θα πρέπει επομένως $\Delta=0 \Leftrightarrow$

$$\left[B(\Gamma+Ax_0)-A^2y_0\right]^2-(A^2+B^2)\left[(\Gamma+Ax_0)^2+A^2y_0^2-A^2R^2\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B^2(\Gamma+Ax_0)^2+A^4y_0^2-2BA^2y_0(\Gamma+Ax_0)-A^2(\Gamma+Ax_0)^2-$$

$$-B^2(\Gamma+Ax_0)^2-A^4y_0^2-B^2A^2y_0^2+(A^2+B^2)A^2R^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A^2(\Gamma+Ax_0)^2+2BA^2y_0(\Gamma+Ax_0)+B^2A^2y_0^2=(A^2+B^2)A^2R^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R^2(A^2+B^2)A^2=A^2\left[(\Gamma+Ax_0)+By_0\right]^2 \overset{A\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow R^2(A^2+B^2)=\left[(\Gamma+Ax_0)+By_0\right]^2 \Leftrightarrow R=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=d(A,\varepsilon) \quad (1)$$

Περίπτωση 2η: Αν $A=0$ τότε:

$$\left.\begin{aligned} &By+\Gamma=0 \\ &(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} &y=-\frac{\Gamma}{B} \quad (\alpha) \\ &x^2-2xx_0+\left[x_0^2+\left(y_0+\frac{\Gamma}{B}\right)^2-R^2\right]=0 \quad (\beta) \end{aligned}\right.$$

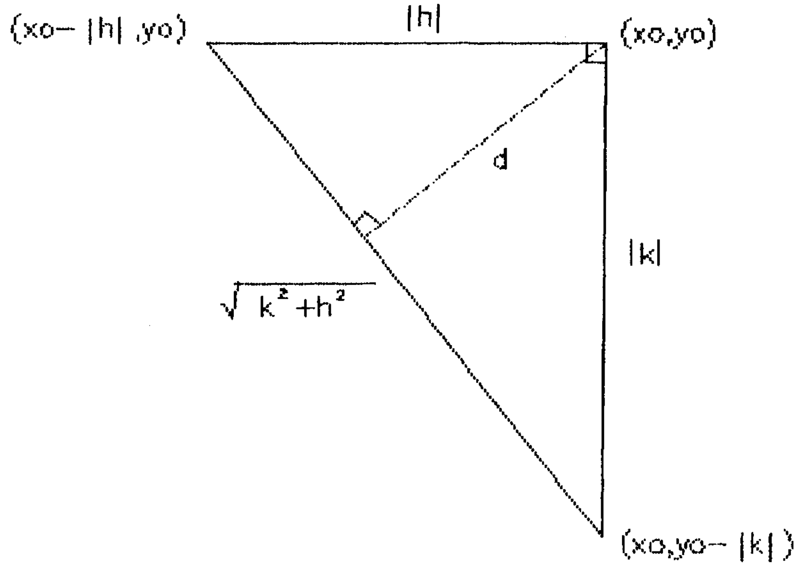
Πρέπει για την (β): $\Delta=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0^2-\left[x_0^2+\left(y_0+\frac{\Gamma}{B}\right)^2-R^2\right]=0 \Leftrightarrow R^2=\left(y_0+\frac{\Gamma}{B}\right)^2 \Leftrightarrow R=\left|y_0+\frac{\Gamma}{B}\right| \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι η (1) περιλαμβάνει και την (2) καθώς αυτή προκύπτει από την (1) για $A=0$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Ο τύπος $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ισχύει όταν η ευθεία $Ax+By+C=0$ είναι οριζόντια ή κάθετη. Συνεπώς, θα υποθέσουμε ότι η ευθεία δεν είναι ούτε κάθετη ούτε οριζόντια.



Σχήμα

Σχηματίζουμε τρίγωνο που να έχει μια κάθετη πλευρά οριζόντια και την υποτείνουσά του στην δεδομένη ευθεία. Τότε οι κορυφές του δίνονται από τα ζεύγη (x_0, y_0), $\left(x_0 - |h|,\ y_0\right)$ και $\left(x_0,\ y_0 - |\kappa|\right)$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς h και κ. Άρα οι πλευρές του έχουν μήκη $|h|$, $|\kappa|$ και $\sqrt{\kappa^2+h^2}$. Αφού d είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\, d\sqrt{\kappa^2+h^2} = \frac{1}{2}\ |h| \cdot |\kappa|,$$

που προκύπτει από τον υπολογισμό του εμβαδού του τριγώνου με δύο διαφορετικούς τρόπους. Άρα $d = \dfrac{|h \cdot \kappa|}{\sqrt{\kappa^2 + h^2}}$.

Επειδή τα σημεία $\left(x_0 - |h|,\ y_0\right)$ και $\left(x_0,\ y_0 - |\kappa|\right)$ βρίσκονται στην ευθεία, συνεπάγεται ότι $\begin{cases} A\,(x_0 - h) + By_0 + C = 0 \\ Ax_0 + B(y_0 - \kappa) + C = 0 \end{cases}$

από τις οποίες παίρνουμε

(1) $\quad Ah = Ax_0 + By_0 + C = B\kappa$. Άρα

$$d = \frac{|h \cdot \kappa|}{\sqrt{h^2 + \kappa^2}} = \frac{|Ah \cdot B\kappa|}{|AB|\ \sqrt{h^2 + \kappa^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C| \cdot |B\kappa|}{\sqrt{A^2 (B\kappa)^2 + B^2 (Ah)^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

εφαρμόζοντάς την (1) δύο φορές.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Το πρόβλημα ζητά να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων Μ (x_0, y_0) και Ν, όπου Ν είναι το ίχνος της καθέτου που φέρομε από το σημείο Μ στη δεδομένη ευθεία. Η κλίση της ευθείας $Ax + By + C = 0$ είναι ίση με $-\dfrac{A}{B}$.

Η κλίση της ευθείας ΜΝ είναι ίση με $\dfrac{B}{A}$ και η εξίσωσή της είναι της μορφής:

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0) \quad \text{ή} \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}$$

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου Ν (δηλαδή Ν (x, y)), λύνομε το σύστημα των εξισώσεων:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{και} \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

Θέτομε $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = t$, οπότε $x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt$.

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην εξίσωση της δεδομένης ευθείας, παίρνομε

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C = 0$$

απ' όπου

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή του t στις ισότητες

$$x = x_0 + At, \qquad y = y_0 + Bt$$

υπολογίζουμε τις συντεταγμένες του σημείου $N(x, y)$:

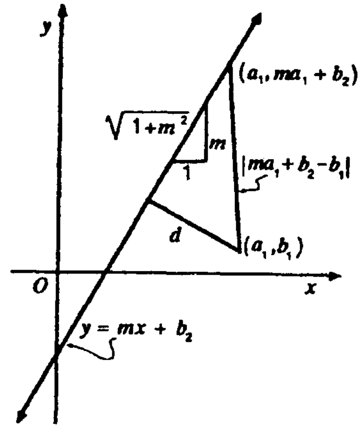
$$x = x_0 - A\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}, \qquad y = y_0 - B\,\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$$

Απομένει να υπολογίσομε την απόσταση μεταξύ των σημείων Μ (x_0, y_0) και $N(x, y)$:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\left(A \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(B \cdot \frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση



Σχήμα

Αν $Ax+By+C=0$ με $|A|+|B|\neq 0$, έχουμε $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$, απ' όπου $m=-\frac{A}{B}$ και $C=-b_2B$. Από τα όμοια τρίγωνα έχουμε:

$$\frac{d}{1}=\frac{|ma_1+b_2-b_1|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\left|-\frac{A}{B}a_1+b_2-b_1\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{A}{B}\right)^2}}=\frac{|-Aa_1+Bb_2-b_1B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-Aa_1+Bb_1-Bb_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Επομένως $d=\frac{|Aa_1+Bb_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Εφαρμογή 1. Θεωρούμε δύο ευθείες που σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουν εξίσωση $x+\mu y+1=0$ και $2\mu x+2y+\lambda=0$, αντίστοιχα, (όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί). Να προσδιορίσετε για ποια ζεύγη τιμών των λ, μ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση μεταξύ τους $2\sqrt{2}$.

(Γενικές Εξετάσεις 1985).

Λύση

Το διάνυσμα $\vec{r}_1\ (\mu,-1)$ είναι παράλληλο στην ευθεία (ε_1): $x+\mu y+1=0$ και το $\vec{r}_2\ (2,-2\mu)$ παράλληλο στην (ε_2): $2\mu x+2y+\lambda=0$. Για νάναι

$$(\varepsilon_1)\parallel(\varepsilon_2)\ \Leftrightarrow\ \vec{r}_1\parallel\vec{r}_2\ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix}\mu & 2\\ -1 & -2\mu\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ -2\mu^2+2=0\ \Leftrightarrow\ \mu=1\ \text{ ή }\ \mu=-1$$

α) Για $\mu=1$ οι εξισώσεις των ευθειών γίνονται:

$$(\varepsilon_1):\ x+y+1=0, \qquad (\varepsilon_2):\ 2x+2y+\lambda=0$$

Επειδή $(\varepsilon_1)\parallel(\varepsilon_2)$, η απόστασή τους συμπίπτει με την απόσταση τυχαίου σημείου P της (ε_1) από την (ε_2) ή αντιστρόφως. Παίρνομε ως P το σημείο $(0,-1)$. Τότε:

$$d(P,\varepsilon_2)=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|2\cdot 0+2(-1)+\lambda|}{\sqrt{2^2+2^2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\lambda-2|=8 \Leftrightarrow \lambda=10 \ \text{ ή } \ \lambda=-6.$$

β) Για $\mu=-1$ έχουμε: (ε_1): $x-y+1=0$, (ε_2): $-2x+2y+\lambda=0$.

Παίρνομε ως P το σημείο (0, 1). Τότε

$$d(P,\varepsilon_2)=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-2\cdot 0+2\cdot 1+\lambda|}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\lambda+2|=8 \Leftrightarrow \lambda=6 \ \text{ ή } \ \lambda=-10.$$

Συμπέρασμα. Τα ζητούμενα ζεύγη των λ και μ είναι:
$(10,1)$, $(-6,1)$, $(6,-1)$, $(-10,-1)$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Για νάναι οι ευθείες παράλληλες, πρέπει και αρκεί νάναι αδύνατο το σύστημα:

$$\begin{cases} x+\mu y=-1 \\ 2\mu x+2y=-\lambda \end{cases}$$

Άρα $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \mu \\ 2\mu & 2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2-2\mu^2=0 \Leftrightarrow \mu=\pm 1$ και $|\Delta_x|+|\Delta_y|\neq 0$

Επειδή $\Delta_x=\begin{vmatrix} -1 & \mu \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix}=-2+\lambda\mu$ και $\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2\mu & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda+2\mu$, πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} \mu=\pm 1 \\ |-2+\lambda\mu|+|-\lambda+2\mu|\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=1 \\ |-2+\lambda|+|-\lambda+2|\neq 0 \end{cases} \text{ ή }$$

$$\begin{cases} \mu=-1 \\ |-2-\lambda|+|-\lambda-2|\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=1 \\ \lambda\neq 2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} \mu=-1 \\ \lambda\neq -2 \end{cases}$$

Τότε για να προσδιορίσομε τα ζεύγη τιμών των λ, μ που οι ευθείες είναι παράλληλες και έχουν απόσταση $2\sqrt{2}$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $\mu=1$, $\lambda\neq 2$ β) $\mu=-1$, $\lambda\neq -2$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αν $\mu=0$, τότε έχουμε τις ευθείες $x+1=0$ και $2y+\lambda=0$, που είναι κάθετες μεταξύ τους (ως παράλληλες στους άξονες Oy και Ox αντίστοιχα) και έτσι κατ' ανάγκη πρέπει $\mu \neq 0$.

Οι συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών είναι $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\mu}$, $\lambda_2 = -\mu$. Για να είναι παράλληλες πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\mu} = -\mu \Leftrightarrow \mu = \pm 1$.

α) Για $\mu=1$ είναι: $\{(\varepsilon_1):\ x+y+1=0 \ \text{ και } \ (\varepsilon_2):\ 2x+2y+\lambda=0\}$, (Σ_1)

β) Για $\mu=-1$ είναι: $\{(\varepsilon_1):\ x-y+1=0 \ \text{ και } \ (\varepsilon_2):\ -2x+2y+\lambda=0\}$, (Σ_2)

Προσδιορίζουμε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε η απόσταση των ευθειών του (Σ_1) να είναι $2\sqrt{2}$.

Το $A(0,-1)$ ανήκει στην (ε_1). Είναι τότε

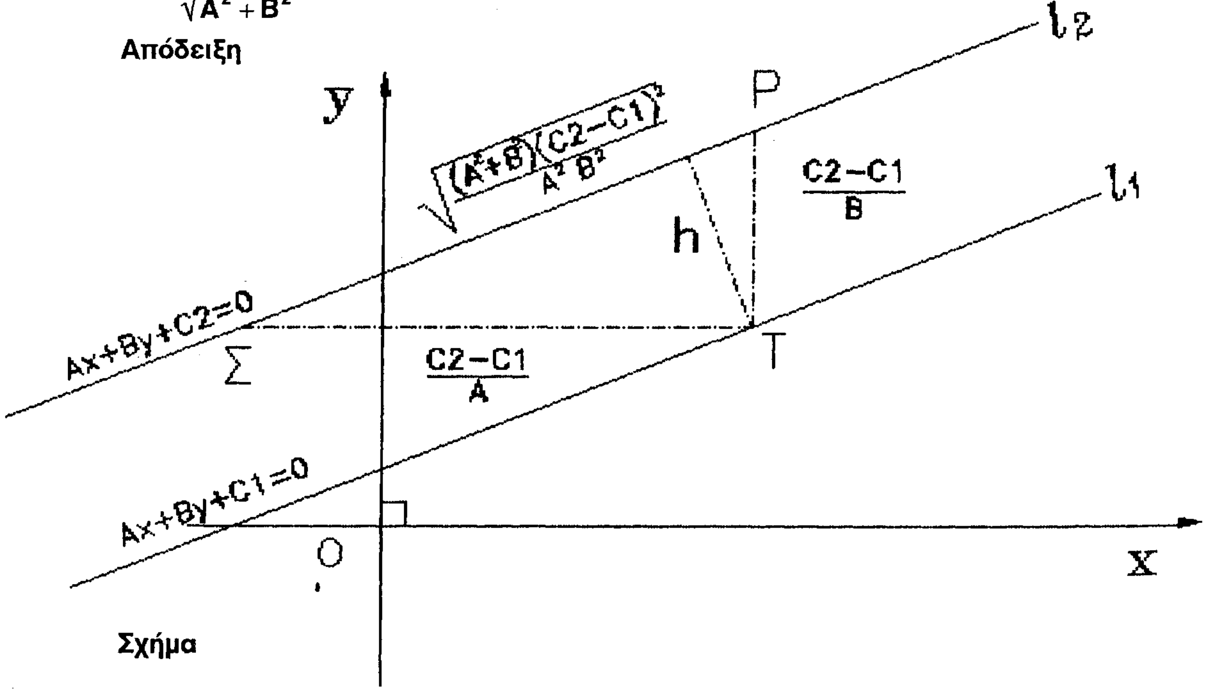
$$d\left(A,(\varepsilon_2)\right) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\lambda-2\right| = 8 \Leftrightarrow \lambda = 10 \ \text{ ή } \ \lambda = -6.$$

Ομοίως εργαζόμαστε για το (Σ_2) και βρίσκουμε $\lambda=6$ ή $\lambda=-10$.

Εφαρμογή 2. Δείξτε ότι η απόσταση των παραλλήλων ευθειών ℓ_1: $Ax+By+C_1=0$ και ℓ_2: $Ax+By+C_2=0$ δίνεται από τον τύπο

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Απόδειξη



Σχήμα

Οι τομές με τον άξονα των x των ευθειών ℓ_1 και ℓ_2 είναι $-\frac{C_1}{A}$ και $-\frac{C_2}{A}$, αντίστοιχα. Η απόσταση των δύο αυτών σημείων τομής είναι $\frac{|C_2 - C_1|}{A}$.

Οι τομές με τον άξονα των y είναι $-\frac{C_1}{B}$ και $-\frac{C_2}{B}$. Η απόσταση των δύο αυτών σημείων είναι $\frac{|C_2 - C_1|}{B}$.

Από το τυχαίο σημείο Τ της ℓ_1 φέρνομε μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των x μέχρι την ℓ_2 και μια παράλληλη στον άξονα των y μέχρι την ℓ_2. Τα τμήματα ΣΤ και ΡΤ έχουν μήκη $\frac{|C_2 - C_1|}{A}$ και $\frac{|C_2 - C_1|}{B}$, αντίστοιχα.

Το μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου ΣΡΤ είναι

$(\Sigma P) = \sqrt{\frac{(C_2 - C_1)^2 \, (A^2 + B^2)}{(AB)^2}}$.

Το $(\Sigma P T) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)\,(C_2 - C_1)^2}{(AB)^2}} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{C_2 - C_1}{A}\right| \cdot \left|\frac{C_2 - C_1}{B}\right|$

και συνεπώς $h = d(\ell_1, \ell_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε το σημείο $\left(0, -\frac{C_1}{B}\right)$ της ευθείας (ℓ_1) και βρίσκομε την απόστασή του από την (ℓ_2), που είναι η απόσταση d των (ℓ_1) και (ℓ_2).

$$d = \frac{\left|A \cdot 0 + B\left(-\frac{C_1}{B}\right) + C_2\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

VII. ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ Α΄ ΔΕΣΜΗΣ

Μια πλευρά των πραγμάτων με ξένιζε στη διδασκαλία του λυκείου. Ήταν ο στεγανός διαχωρισμός των κλάδων, η απομόνωση κάθε μαθήματος. Οι μαθητές πήγαιναν από τη μια τάξη στην άλλη σαν να εξερευνούσαν ένα αρχιπέλαγος. Σαν να επισκέπτονταν μια σειρά χώρες, από τις οποίες η καθεμιά ήταν κυβερνημένη από έναν κύριο που αδιαφορούσε ολωσδιόλου για ό,τι συνέβαινε αλλού. Για μια ώρα, μεταφράζαμε Σενέκα. Την επόμενη ώρα, μελετούσαμε λεπτομερώς τα κάλλη της ατμομηχανής. Ύστερα, σκύβαμε πάνω στη φυσική διαμόρφωση της αμερικανικής ηπείρου. Μόλις είχαμε καταπιεί το μεσημεριανό φαγητό μας, τρέχαμε να ασχοληθούμε με τη χλωροφυλλική λειτουργία των φυτών, προτού τελειώσουμε τη σχολική μας μέρα ανάμεσα στις μάγισσες του Μάκβεθ. Τίποτε δεν συνδεόταν με τίποτε. Δεν γινόταν λόγος να εξετάσουμε τη δυνατότητα έστω κάποιας σχέσης ανάμεσα στην ιστορία και στα μαθηματικά, το ενδεχόμενο μιας συσχέτισης ανάμεσα στις φυσικές επιστήμες και στη γεωγραφία. Όσο αρμόδιος κι αν ήταν κάθε καθηγητής, όσο κι αν ενδιαφερόταν για τη δουλειά του, όσο κι αν ήταν καλός δάσκαλος, δεν είχε ποτέ σκεφτεί να βγει έξω από τα σύνορά του, να μας δείξει πως ο κόσμος ειναι ένα όλον, πως η ζωή είναι ένα σύνολο. Κάθε περιοχή έμενε ένα στεγανό δοχείο. Κάθε κλάδος λειτουργούσε ως κλειστό κύκλωμα, αγνοώντας τους άλλους. Οι μαθητές έπρεπε να τα βγάλουν οι ίδιοι πέρα για να κατασκευάσουν το δικό τους μικρό σύμπαν και να του δώσουν συνοχή! Καθένας έπρεπε να κάνει τη δική του σύνθεση, αν αισθανόταν αυτή την ανάγκη. Για πολύν καιρό, ο παππούς Φρανκ μου είχε δείξει τους δρόμους της συνοχής και της σύνθεσης. Μ' αυτόν, οι Έλληνες ενδιαφέρονταν για τα μαθηματικά και οι ήρωες του Σαίξπηρ για τη γεωγραφία. Μ' αυτόν, είχα μάθει να τοποθετώ τα μυθιστορηματικά πρόσωπα στο ιστορικό τους περιβάλλον. Να αναζητώ τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα σ' αυτό που μελετούσε η φυσική και σ' εκείνο που ενδιέφερε τη φυσική ιστορία. Πίσω από την ποικιλία των μαθημάτων και τη διαφορά των προτιμήσεων διαγραφόταν μια δυνατότητα ενότητας, μια απαρχή συνοχής. Από τη στιγμή που ο παππούς μου είχε χαθεί, έπρεπε να κατασκευάσω ο ίδιος τη δική μου συνοχή και τις δικές μου συνθέσεις.

...Η σύντομη παραμονή στη Σχολή φυσικών επιστημών αναζωπύρωσε μέσα μου μιαν εντύπωση που είχα ήδη δοκιμάσει στο λύκειο, όπως και στην Ιατρική

Σχολή: μιαν εντύπωση στεγανά αποκλεισμένων χώρων. Ανάμεσα στους κλάδους, ανάμεσα στους κύκλους σπουδών, συχνά μάλιστα ανάμεσα στα μαθήματα του ίδιου κύκλου, δεν υπήρχε ούτε σύνδεσμος ούτε σύνθεση. Η ετοιμασία ενός πτυχίου έμοιαζε με επίσκεψη ενός αρχιπελάγους, όπου, σε κάθε νησί, ένας αρχιερέας γύρευε να κάνει κήρυγμα για το δικό του ξωκλήσι. Συγχρόνως, ανακάλυψα πόσο συναρπαστική ή και προκλητική μπορεί να γίνει μια διδασκαλία, όταν αφορά όχι γνώσεις από καιρό αποκτημένες και ήδη απολιθωμένες, αλλά μιαν επιστήμη ακόμα αβέβαιη, ημιτελή, εν τω γίγνεσθαι. Τις περισσότερες φορές, ένα μάθημα δεν γινόταν ερεθιστικό, δεν σου έδινε αληθινά την επιθυμία να μάθεις περισσότερα, ή ακόμα και να δουλέψεις σ' αυτόν τον χώρο, παρά μονάχα στο μέτρο που ο καθηγητής ήταν προσωπικά δοσμένος στην έρευνα. Στο μέτρο που όσα διηγόταν ήταν η ζωή του, το πάθος του, ο καθημερινός του αγώνας. Κατάσταση, αλίμονο, πάρα πολύ σπάνια. Οι φυσιολόγοι, π.χ., ανέδιδαν μιαν τόσο βαθιά ανία, που δεν φαινόταν να αφήνει απείραχτους ούτε αυτούς τους ίδιους. Προφανώς, επαναλάμβαναν χωρίς τροποποιήσεις μιαν ιστορία μαθημένη εδώ και πολύν καιρό, μιαν ιστορία που δεν τους αφορούσε άμεσα. Μιλούσαν χωρίς ευχαρίστηση. Τους άκουγες χωρίς ενδιαφέρον. Ευτυχώς. Ωστόσο, η Συζάν δεν έχανε το θάρρος της. Τα κατάπινε όλα. Έξυνε το χαρτί της. Αντέγραφε. Υπογράμμιζε. Καθαρόγραφε. Και μου δάνειζε ευγενικά τις παραδόσεις φυσιολογίας.

(Από το βιβλίο του **ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΖΑΚΟΜΠ:** Σμιλεύοντας το εσώτερο άγαλμα, σελ. 76 και σελ. 284)

Όταν ένας μαθητής αρχίζει στα σοβαρά να μελετά τα μαθηματικά, πιστεύει ότι ξέρει τι είναι κλάσμα, τι είναι συνέχεια και τι είναι το εμβαδόν μιας καμπυλόγραμμης επιφάνειας. Θεωρεί προφανές, λόγου χάρη, ότι μια συνεχής συνάρτηση δεν μπορεί ν' αλλάξει πρόσημο χωρίς να μηδενιστεί. Αν, χωρίς να τον προετοιμάσεις καθόλου, του πεις: «Όχι, αυτό δεν είναι καθόλου προφανές. Θα πρέπει να σου το αποδείξω». Κι αν η απόδειξη βασίζεται σε αρχές που δεν φαίνονται σ' αυτόν πιο προφανείς από το συμπέρασμα, τότε τι θα σκεφτεί ο δύστυχος ο μαθητής; Θα σκεφτεί ότι η επιστήμη των μαθηματικών είναι απλούστατα μια αυθαίρετη συσσώρευση άρχηστων ακριβολογιών. Είτε θα τον αηδιάσει αυτό, είτε θα το γλεντήσει σαν παιχνιδάκι και θ' αποκτήσει νοοτροπία αντίστοιχη με των αρχαίων Ελλήνων σοφιστών.

Από την άλλη μεριά, όταν είναι πιο προχωρημένος, όταν εξοικειώνεται με τη μαθηματική συλλογιστική και το μυαλό του έχει ωριμάσει από την ίδια του την πείρα, οι απορίες θα γεννιούνται μόνες τους και τότε οι αποδείξεις σας θα είναι ευπρόσδεκτες. Θα προκαλούν καινούργιες απορίες και τα ερωτήματα θα γεννιούνται στο παιδί με τη σειρά, όπως με τη σειρά γεννήθηκαν και μέσα στους πατεράδες μας, που έφτασαν πια σ' ένα τέτοιο σημείο που μόνον η τέλεια αυστηρότητα μπορεί να τους ικανοποιήσει. Δεν αρκεί ν' αμφιβάλλουμε για το καθετί. Είναι ανάγκη να ξέρουμε γιατί αμφιβάλλουμε.

ΑΝΡΙ ΠΟΥΑΝΚΑΡΕ

Έχω την τάση να θεωρώ τον εαυτό μου όχι τόσο σαν κάποιον που λύνει προβλήματα (εννοώ θεωρίες), μολονότι το κάνω κι αυτό, αλλά σαν κάποιον που φτιάχνει προβλήματα. Φαντάζομαι τον εαυτό μου περισσότερο σαν επιπλοποιό - ξυλουργό παρά σαν κάποιον που παίρνει ένα πρόβλημα, το λύνει κι ύστερα περιμένει την επόμενη «παραγγελία».

Όταν συγκροτείτε μια μαθηματική θεωρία για κάποιο φαινόμενο, μοιάζετε αρκετά μ' έναν ξυλουργό που διαμορφώνει τα αντικείμενά του. Τρίβετε λίγο από τη μια, κόβετε κάτι από την άλλη, στη συνέχεια λέτε «από δω το κομμάτι θέλει κι άλλο τρίψιμο, η μπροστινή μεριά θέλει κι άλλο φινίρισμα» και ούτω καθεξής. Το τελικό αποτέλεσμα έχει δύο όψεις: Πρώτον την εσωτερική όψη, δηλαδή τη συνοχή του, αν μένουμε ευχαριστημένοι με τη δομή του κ.τ.λ. και δεύτερον την εξωτερική, τη σχέση του δηλαδή με το πρόβλημα που μας παρακίνησε να το επεξεργαστούμε και στο οποίο, στην καλύτερη περίπτωση, μπορεί να προσφέρει κάτι, με την έννοια της δυνατότητας να προβλέπει γι' αυτό κάτι ή να εξηγεί κάτι. Υπάρχει σε πολύ μεγάλο βαθμό αυτό το είδος της αισθητικής και δημιουργικής προσπάθειας να εξαχθούν συμπεράσματα, που μαντεύω ότι δεν βρίσκεται σε φοβερά μεγάλη εκτίμηση.

MICHAEL BERRY

Τα μάτια μου τα πρωτάνοιξε ο καθηγητής κύριος Love, ο οποίος με δίδαξε για μερικά τρίμηνα και μου μετέδωσε την πρώτη μου σοβαρή αντίληψη της ανάλυσης. Αλλά η μεγάλη μου οφειλή (γιατί στο κάτω - κάτω ήταν εφαρμοσμένος μαθηματικός) ήταν η συμβουλή του να διαβάσω τη διάσημη Cours d' Analyse του Jordan. Ποτέ δεν θα ξεχάσω τον θαυμασμό με τον οποίο ανέγνωσα το περίφημο αυτό βιβλίο που ενέπνευσε τόσο πολλούς μαθηματικούς της γενιάς μου και από όπου διδάχθηκα για πρώτη φορά καθώς το διάβαζα τι πραγματικά θα πει Μαθηματικά. Από εκείνη τη στιγμή ήμουν κατά κάποιο τρόπο πραγματικός μαθηματικός, με ορθές μαθηματικές φιλοδοξίες και γνήσιο πάθος για τα Μαθηματικά.

(G.H. HARDY: Η απολογία ενός μαθηματικού, σελ. 13, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.)

Η επιστημονική πρόοδος είναι πριν απ' όλα υπόθεση εγκεφάλων και όχι ένα ζήτημα εργαστηρίων ή πειραματισμού. Από την άποψη αυτή, είναι καλό να επισημάνουμε ένα γεγονός που πολύ λίγοι επιστήμονες έχουν συνειδητοποιήσει: είναι η έσχατη θεωρητική δυστυχία των περισσότερων επιστημών. Δεν ξέρω παρά μια πραγματικά δύσκολη επιστήμη: τα μαθηματικά. Ακόμα, η δυσκολία των μαθηματικών προέρχεται συχνότερα από μια εξωτερική περιπλοκή, ρητορική κατά κάποιον τρόπο (την τεχνική της απόδειξης), παρά από την εσώτερη περιπλοκότητα των αντικειμένων τους. Με την έννοια αυτή, η δυσκολία των μαθηματικών είναι συχνότατα «ανήκεστη» όταν θέλουμε να τα εφαρμόσουμε στην ερμηνεία των πραγματικών φαινομένων. Μπορούμε όντως να θέσουμε το ερώτημα. Ποιο είναι το βαθύτερο, το δυσκολότερο μαθηματικό θεώρημα για το οποίο υπάρχει μια συγκεκριμένη και αναμφίβολη φυσική ερμηνεία; Ορισμένοι θα σκεφτούν μερικά θεωρήματα χιλμπερτιανής τεχνικής (όπως το φασματικό θεώρημα) για την κβαντική μηχανική. Για μένα, το θεώρημα του Stokes είναι ο πρώτος υποψήφιος. Κι αυτό μαρτυρεί ένα γεγονός: το εξωτερικό διαφορικό είναι μια πολύ μυστηριώδης έννοια, η αληθινή φύση της οποίας, νομίζω, αποκαλύπτει περισσότερα ακόμη αινίγματα και τούτο παρά την απλότητα του τυπικού της ορισμού.

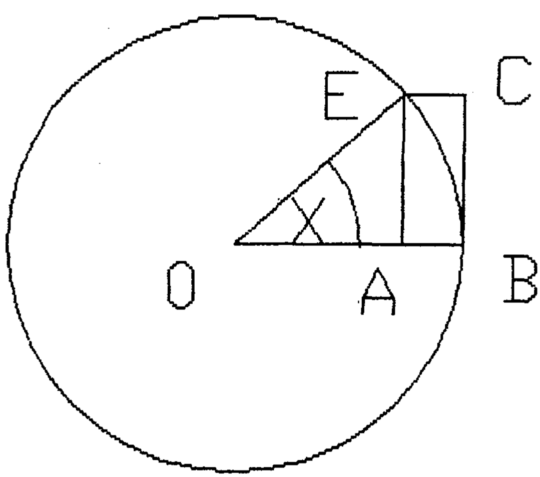
(René Thom: Μαθηματικά πρότυπα της μορφογένεσης)

«Προτού να ενθαρρύνουμε τον κολυμβητή να καταδυθεί, πρέπει πρώτα - πρώτα να γεμίσουμε τη λίμνη με νερό».
(Αποδίδεται στον Κομφούκιο)

Η ενότητα αυτή εδώ, αποτελείται από μια ακολουθία λυμένων θεμάτων, που έχουν δοθεί στις εξετάσεις ή που είναι πρωτότυπα.
Τα παρακάτω λυμένα θέματα αφορούν στον υποψήφιο Θετικών Επιστημών και δεν είναι απαραίτητο να κατανοηθούν πλήρως στο πρώτο διάβασμα.
Αποβλέπουν να διδάξουν στον υποψήφιο τι σημαίνει ορθή λύση και όχι *κάποια λύση*. Η *κάποια λύση*, που δεν θάναι λεπτομερής, εμπεριστατωμένη και επιστημονικώς αυστηρή, τον οδηγεί στην ημιμάθεια και συνεπώς στην αποτελμάτωση.
Προϋποθέτουν κατανόηση της θεωρίας και αυξημένο μαθηματικό ενδιαφέρον.

1. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ημx}{x} = 1$ **(** $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, x **σε ακτίνια).**

Απόδειξη



Σχήμα

$E_{OAE} < E_{OBE} < E_{OBCE}$ ή $E_{OAE} < E_{OBE} < E_{OAE} + E_{ABCE}$.

Οπότε $\quad \frac{1}{2}\etaμx \cdot συνx < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\etaμx \cdot συνx + (1-συνx)\cdot \etaμx$

και $\quad \frac{1}{2}\etaμx \cdot συνx < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}(2-συνx)\cdot \etaμx$

Συνεπώς $συνx < \frac{x}{\etaμx} < 2-συνx$ ή $συνx-1 < \frac{x}{\etaμx}-1 < 1-συνx$.

Καθώς $x \to 0^+ \Rightarrow συνx \to 1$. Παίρνοντας το όριο και των τριών όρων, έχουμε:

$$0 \le \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\etaμx}-1\right) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x} = 1.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Έχουμε:

Τόξο $PQ = |x|$.

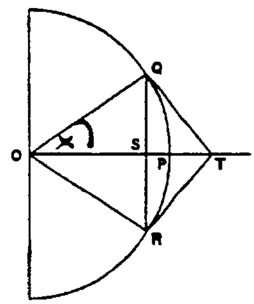
Τόξο $QR = 2|x|$.

Τμήμα $QS = |\etaμx|$.

Τμήμα $QR = 2|\etaμx|$.

Τμήμα $QT = |εφx|$.

$QT + RT = 2|εφx|$.



Σχήμα

Ακόμη ισχύει: Τμήμα QR < Τόξο QR < QT+RT.

$$\text{ή} \quad 2|\etaμx| < 2|x| < 2|εφx| \quad \text{ή} \quad 1 < \left|\frac{x}{\etaμx}\right| < \left|\frac{1}{συνx}\right|.$$

Επειδή $\lim_{x\to 0}|συνx| = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{συνx}\right| = 1$. Συνεπώς, λόγω του θεωρήματος των ισοσυγκλινουσών συναρτήσεων, $\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\etaμx}\right| = 1$. Αφού, όταν το x είναι μικρό, x και ημx έχουν το ίδιο πρόσημο, τελικώς έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\etaμx} = 1 \quad \text{ή} \quad \text{ότι} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x} = 1$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Οι συναρτήσεις $f: f(x) = \etaμx$ και $g: g(x) = x$, ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του L' Hospital και συνεπώς

$$\lim_{x\to 0}\frac{\etaμx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\etaμx)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{συνx}{1} = συν0 = 1.$$

Παρατήρηση 1. Επειδή $\eta\mu x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, έχουμε

$$\frac{\eta\mu x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Είναι φανερό ότι $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{8} - \dots < \frac{\eta\mu x}{x} < 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \dots$

ή $1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \dots\right) < \frac{\eta\mu x}{x} < 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{8} + \dots$

ή $\frac{1-x^2}{1-\frac{1}{2}x^2} < \frac{\eta\mu x}{x} < \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-x^2}{1-\frac{1}{2}x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1-\frac{1}{2}x^2} = 1$, παίρνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Παρατήρηση 2. Επειδή $e^x = \exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \dots$,

για $x > 0$, έχουμε $e^x > \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$.

Άρα $\frac{e^x}{x^\nu} > \frac{1}{x^\nu} \cdot \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} = \frac{x}{(\nu+1)!} \to +\infty$, καθώς το $x \to +\infty$ και επομένως

$\frac{e^x}{x^\nu} \to +\infty$, όταν $x \to +\infty$.

Σχόλιο. Αντί του θετικού ακεραίου ν, μπορούμε να πάρουμε τυχαίο πραγματικό αριθμό.

Συμπέρασμα: Καθώς το $x \to +\infty$, το e^x απειρίζεται γρηγορότερα από οποιαδήποτε θετική δύναμη του x.

Παρατήρηση 3. Από τη σχέση:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$, για $x \neq 0$, παίρνουμε $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots$

Άρα έχουμε:

$$1 - \frac{|x|}{2} - \frac{|x|^2}{4} - \frac{|x|^3}{8} - \dots < \frac{e^x - 1}{x} < 1 + \frac{|x|}{2} + \frac{|x|^2}{4} + \frac{|x|^3}{8} + \dots$$

ή $\dfrac{1-|x|}{1-\frac{1}{2}|x|} < \dfrac{e^x-1}{x} < \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}|x|}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-|x|}{1-\frac{1}{2}|x|} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}|x|} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Παρατήρηση 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x} = 0$.

Αλλιώτικα: Για κάθε $x>0$ ισχύει $e^x = \sum\limits_{v=0}^{+\infty}\dfrac{x^v}{v!} > \dfrac{x^3}{6}$ και συνεπώς $0 < \dfrac{x^2}{e^x} < \dfrac{6}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = 0$.

2. Αν η συνάρτηση $f: [0,1]\to[0,1]$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbf{R}$ με $g(x)=f(x)-x$.

Η g είναι προφανώς συνεχής και ισχύει:

$$g(0)\cdot g(1) = [f(0)-0][f(1)-1] = f(0)(f(1)-1) \le 0$$

i) Αν $f(0)(f(1)-1)=0 \Rightarrow f(0)=0$ ή $f(1)=1 \Rightarrow x_0=0$ ή $x_0=1$.

ii) Αν $f(0)\cdot(f(1)-1)<0$, τότε από το θέωρημα των: Bolzano - Weierstrass, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Rightarrow f(x_0)-x_0=0 \Rightarrow f(x_0)=x_0$.

3. Να λυθεί στο $(0,+\infty)$ η ανίσωση:

$$\textbf{(A)}:\quad \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+20}+\sqrt[3]{x+57} \ge 9$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+20}+\sqrt[3]{x+57} \Rightarrow f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

$\Rightarrow f\uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f(7)=9 \Rightarrow (A) \Leftrightarrow f(x)\ge f(7) \Leftrightarrow x\ge 7$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^{25} t}{\sigma\upsilon\nu^{25} t + \eta\mu^{25} t}\, dt$$

Λύση

Αν $I_1 = \int_0^{\alpha} f(t)\,dt$ και $I_2 = \int_0^{\alpha} f(\alpha - t)\,dt$ είναι φανερό ότι:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \qquad (1)$$

Άρα, για $\alpha = \frac{\pi}{2}$ και $f(t) = \frac{\eta\mu^{25} t}{\sigma\upsilon\nu^{25} t + \eta\mu^{25} t}$, από την (1) έχουμε $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Για $t = \frac{\pi}{2} - y \Rightarrow dt = -dy$ και

t	0	$\frac{\pi}{2}$
y	$\frac{\pi}{2}$	0

παίρνουμε $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sigma\upsilon\nu^{25} y}{\eta\mu^{25} y + \sigma\upsilon\nu^{25} y}(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^{25} y}{\eta\mu^{25} y + \sigma\upsilon\nu^{25} y}\, dy$

Συνεπώς $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$.

Εφαρμογή: Δείξτε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu x} + \sqrt{\eta\mu x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$.

5. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x \cdot \int_0^x e^{t^2 - x^2}\, dt\right)$.

Λύση

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x \cdot \int_0^x e^{t^2 - x^2}\right) dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2}\, dt}{\frac{e^{x^2}}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{x e^{x^2} \cdot 2x - e^{x^2}}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

6. Αν $\vec{u}=(b,c,a)$ και $\vec{\upsilon}=(c,a,b)$ είναι δύο διανύσματα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, ποια είναι η μέγιστη τιμή της γωνίας $(\vec{u},\vec{\upsilon})$; Πότε πραγματοποιείται;

Λύση

Αν $\vec{\theta}=(\vec{u},\vec{\upsilon})$ έχουμε:

$$\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}=|\vec{u}|\cdot|\vec{\upsilon}|\,\text{συν}\theta \Rightarrow bc+ca+ab=(a^2+b^2+c^2)\,\text{συν}\theta .$$

Οπότε

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab)=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2(a^2+b^2+c^2)\,\text{συν}\theta=(a^2+b^2+c^2)(1+2\,\text{συν}\theta).$$

Συνεπώς $1+2\,\text{συν}\theta\geq 0 \Rightarrow \text{συν}\theta\geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta\leq 120^\circ$, δηλαδή η μέγιστη τιμή της $\hat{\theta}$ είναι 120° και πραγματοποιείται όταν $1+2\,\text{συν}\theta=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$.

7. Δείξτε ότι $2\,\text{ημ}a+\text{εφ}a\geq 3a$ για κάθε $a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Απόδειξη

Θέτουμε $f(a)=2\,\text{ημ}a+\text{εφ}a-3a$, $0\leq a\leq\frac{\pi}{2}$.

Επειδή $f(0)=0$ και $f'(a)=2\,\text{συν}a+\text{τεμ}^2a-3=\dfrac{(\text{συν}a-1)^2\,(2\,\text{συν}a+1)}{\text{συν}^2a}\geq 0$

η f είναι αύξουσα στο πεδίον ορισμού της και $f(a)\geq 0$.

8. Για $x>0$, δείξτε ότι: $\left|\int_x^{x+1}\text{ημ}(t^2)\,dt\right| < \frac{1}{x}$.

Απόδειξη

Αν θέσομε: $f(x)=\int_x^{x+1}\text{ημ}(t^2)\,dt=\int_x^{x+1}\frac{1}{2t}\text{ημ}\,t^2\,2t\,dt$,

τότε η κατά παράγοντας ολοκλήρωση μας δίνει

$$f(x)=-\frac{\text{συν}(t^2)}{2t}\Bigg|_x^{x+1}-\frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\text{συν}(t^2)}{t^2}dt=\frac{-\text{συν}(x+1)^2}{2(x+1)}+\frac{\text{συν}x^2}{2x}-\frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\text{συν}t^2}{t^2}dt$$

Άρα

$$\left|f(x)\right| \le \left|\frac{-\sigma\upsilon\nu(x+1)^2}{2(x+1)}\right| + \left|\frac{\sigma\upsilon\nu x^2}{2x}\right| + \frac{1}{2}\left|\int_x^{x+1}\frac{\sigma\upsilon\nu t^2}{t^2}dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

9. Αν $\log_8 3 = p$ και $\log_3 5 = q$, να εκφραστεί ο $\log_{10} 5$ και ο $\log_{10} 6$ συναρτήσει των p και q.

Λύση

Από την υπόθεση έχουμε $2^{3p} = 3$ και $3^q = 5$. Αν $\log_{10} 5 = x \Rightarrow 10^x = 5$, οπότε

$$2^x \cdot 2^{3pqx} = 2^{3pq} \Rightarrow (3pq+1)x = 3pq \quad \text{και} \quad x = \frac{3pq}{3pq+1}.$$

Όμοια, αν $\log_{10} 6 = y \Rightarrow 10^y = 6$, οπότε

$$2^y \cdot 2^{3pqy} = 2^{3p+1} \Rightarrow (3pq+1)y = 3p+1 \quad \text{και} \quad y = \frac{3p+1}{3pq+1}.$$

10. Αν σ' ένα τετράεδρο, δύο ζεύγη απέναντι ακμών είναι ορθογώνια, τότε και το τρίτο ζεύγος των απέναντι ακμών είναι κατ' ανάγκη ορθογώνιο.

Απόδειξη

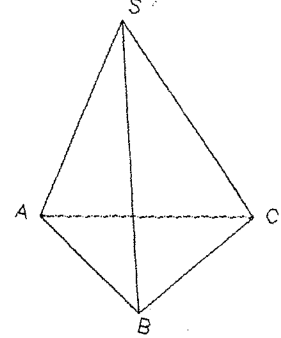
Αρκεί να δείξουμε ότι:

$\vec{SA} \cdot \vec{BC} + \vec{SB} \cdot \vec{CA} + \vec{SC} \cdot \vec{AB} = 0$ (1)

Θέτουμε $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$,

οπότε το αριστερό μέλος της (1) ισούται με

$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) + \vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0.$



Σχήμα

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αν υποθέσουμε ότι $SA \perp BC$ και $SB \perp CA$, τότε $\vec{SA} \cdot \vec{BC} = 0$ και $\vec{SB} \cdot \vec{CA} = 0$, οπότε

$$\vec{SC} \cdot \vec{AB} = \left(\vec{SA} + \vec{AC}\right) \cdot \left(\vec{AS} + \vec{SB}\right) = \vec{AS} \cdot \left(\vec{SA} + \vec{AC}\right) + \vec{SA} \cdot \vec{SB} + 0 =$$

$$= \vec{AS} \cdot \vec{SC} + \vec{AS} \cdot \vec{BS} = \vec{AS} \cdot \left(\vec{BS} + \vec{SC}\right) = \vec{AS} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow SC \perp AB.$$

11. Αν $0 < a < b \Rightarrow \ln\frac{b^2}{a^2} < \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$.

Λύση

Θέτουμε $\frac{b}{a} = p > 1$ και έστω ότι $f(p) = \ln p^2 - p + p^{-1}$.

Τότε $f'(p) = -p^{-2}(p-1)^2 < 0$ για $p > 1$.

Αφού η f είναι συνεχής στο [1, p] και παραγωγίσιμη στο (1, p) και $f(1) = 0$, το θεώρημα της μέσης τιμής δίνει:

$$f(p) = 0 + \left[-c^{-2}(c-1)^2\right](p-1) < 0, \quad 1 < c < p.$$

Άρα $\ln p^2 < p - p^{-1}$ ή $\ln\frac{b^2}{a^2} < \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$.

12. Ας είναι A, B, C τρία διακεκριμένα σημεία σε μια ισοσκελή υπερβολή. Δείξτε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC βρίσκεται στην υπερβολή.

Απόδειξη

Σ' ένα κατάλληλα επιλεγμένο σύστημα συντεταγμένων, η εξίσωση της ισοσκελούς (ή ορθογώνιας) υπερβολής θα είναι $y = \frac{\kappa}{x}$ όπου κ είναι μια σταθερά. Ας είναι a, b, c οι τετμημένες των A, B, C αντίστοιχα. Η κλίση του AB είναι:

$$\lambda_{AB} = \frac{\frac{\kappa}{b} - \frac{\kappa}{a}}{b-a} = -\frac{\kappa}{ab}$$

Έστω $H\left(h, \frac{\kappa}{h}\right)$ το σημείο που συναντά την υπερβολή το ύψος από το C.

Η κλίση του CH είναι $\lambda_{CH} = \frac{\frac{\kappa}{h} - \frac{\kappa}{c}}{h-c} = -\frac{\kappa}{ch}$ και η καθετότητα των AB και CH δίνει

$\frac{\kappa^2}{abch} = -1$, δηλαδή $h = -\frac{\kappa^2}{abc}$.

Η συμμετρία αυτού του αποτελέσματος δείχνει ότι τα υπόλοιπα δύο ύψη θα τέμνουν την υπερβολή στο ίδιο σημείο H, το οποίο ως εκ τούτου, είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC. Οι συντεταγμένες του είναι:

$$\left(-\frac{\kappa^2}{abc}, \ -\frac{abc}{\kappa}\right).$$

Διαφορετική διατύπωση του θέματος

Τα σημεία $A\left(x_1, \frac{\alpha^2}{x_1}\right)$, $B\left(x_2, \frac{\alpha^2}{x_2}\right)$, $C\left(x_3, \frac{\alpha^2}{x_3}\right)$ βρίσκονται στην ισοσκελή υπερβολή $xy = \alpha^2$. Δείξτε ότι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC είναι σημείο της υπερβολής αυτής.

Απόδειξη

Εξισώσεις υψών: $h_A = y - \frac{\alpha^2}{x_1} = K_A(x - x_1)$, $h_B = y - \frac{\alpha^2}{x_2} = K_B(x - x_2)$

όπου είναι: $K_A = -\frac{x_2 - x_3}{\frac{\alpha^2}{x_2} - \frac{\alpha^2}{x_3}} = \frac{x_2 x_3}{\alpha^2}$, $K_B = -\frac{x_1 - x_3}{\frac{\alpha^2}{x_1} - \frac{\alpha^2}{x_3}} = \frac{x_1 x_3}{\alpha^2}$.

Δηλαδή
$$\begin{cases} h_A:\ y - \frac{\alpha^2}{x_1} = \frac{x_2 x_3}{\alpha^2}(x - x_1), & (1) \\ h_B:\ y - \frac{\alpha^2}{x_2} = \frac{x_1 x_3}{\alpha^2}(x - x_2), & (2) \end{cases}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $-\frac{\alpha^2}{x_1} + \frac{\alpha^2}{x_2} = \frac{x_3}{\alpha^2}(x_2 - x_1)x$

και μετά από πράξεις, $x_p = -\frac{\alpha^4}{x_1 x_2 x_3}$, όπου το P είναι το ορθόκεντρο. Αυτό το αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε:

$$y_p = \frac{\alpha^2}{x_1} + \frac{x_2 x_3}{\alpha^2}\left(-\frac{\alpha^4}{x_1 x_2 x_3} - x_1\right) = -\frac{x_1 x_2 x_3}{\alpha^2}.$$

Το $x_p y_p = \left(-\frac{\alpha^4}{x_1 x_2 x_3}\right)\left(-\frac{x_1 x_2 x_3}{\alpha^2}\right) = \alpha^2$, που σημαίνει ότι και το σημείο P ανήκει στην υπερβολή.

13. Δείξτε ότι η μόνη ακέραιη θετική ρίζα της εξίσωσης $\alpha^\beta = \beta^\alpha$ με $\alpha < \beta$ είναι η $\alpha=2$, $\beta=4$.

Απόδειξη

Έστω $\beta = \alpha(1+t)$, όπου t θετικός ρητός. Τότε η δεδομένη εξίσωση καταλήγει στην $\alpha^t = 1 + t < e^t < 3^t$, οπότε $\alpha<3$. Αφού η $\alpha=1$ δίνει $t=0$, πρέπει να έχουμε $\alpha=2$ και συνεπώς $\beta=4$.

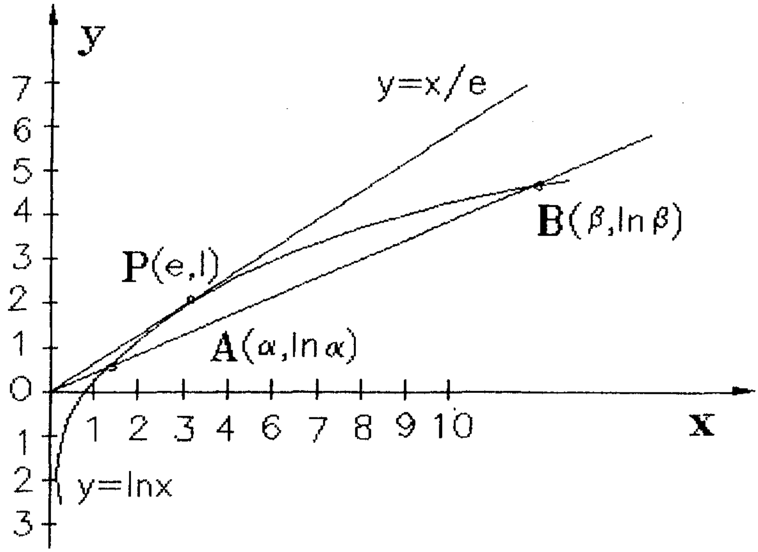
Παρατήρηση. Η δεδομένη εξίσωση ισοδυναμεί προς την $\sqrt[\alpha]{\alpha}=\sqrt[\beta]{\beta}$. Επειδή η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt[x]{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα για x > e και τείνει στο 1 καθώς $x \to +\infty$, παίρνουμε ότι:

$$\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}=\sqrt[2]{2}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[6]{6}>\ldots>\sqrt[1]{1}$$

Συνεπώς, πρέπει να έχουμε α=2 και β=4.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Η εξίσωση $\alpha^\beta=\beta^\alpha$ είναι ισοδύναμη με την $\beta\ln\alpha=\alpha\ln\beta$. Αν $\alpha\neq1$ και $\beta\neq1$, έχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$. Θεωρούμε τώρα, στο παρακάτω σχήμα, τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$.



Σχήμα

Η εφαπτόμενη στο P (e, 1) έχει την εξίσωση $y=\frac{x}{e}$, οπότε περνά από το O. Αφού η γραφική παράσταση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω για όλα τα x>0, βρίσκεται κάτω από το τμήμα OP. Έστω β > e και ας είναι B το σημείο (β, lnβ). Η ευθεία OB συναντά τη γραφική παράσταση σ' ένα δεύτερο σημείο A (α, lnα) όπου 1 < α < e. Από τα όμοια τρίγωνα παίρνουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$, δηλαδή $\alpha^\beta=\beta^\alpha$.

Η μοναδικότητα του α προκύπτει από την κοιλότητα της γραφικής παράστασης. Αφού 1 < α < e, είναι φανερό ότι α=2, β=4 είναι η μοναδική ακέραιη λύση.

14. Δείξτε ότι $\left(\sqrt{\nu}^{\sqrt{\nu+1}}\right) > \left(\sqrt{\nu+1}^{\sqrt{\nu}}\right)$ **για** $\nu > 8$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$. Η παράγωγός της είναι $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και είναι αρνητική για $x > e$.

Συνεπώς, αν $e \le x < y$, έχουμε $f(x) > f(y)$ και $xy\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) > xy\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)$,

δηλαδή $e^{y\ln x} > e^{x\ln y}$ ή $x^y > y^x$.

Επομένως: Αν $e \le x < y \Rightarrow x^y > y^x$.

Αν $\nu > 8$, τότε $e < \sqrt{\nu} < \sqrt{\nu+1}$ και συνεπώς $\left(\sqrt{\nu}\right)^{\sqrt{\nu+1}} > \left(\sqrt{\nu+1}\right)^{\sqrt{\nu}}$.

15. i) Οι α, β είναι πραγματικοί αριθμοί. Βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους $(x+yi)^2 = \alpha + \beta i$.

ii) Υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα της $-7-24i$.

Λύση

i) Αφού $x^2 - y^2 = \alpha$, $2xy = \beta$ παίρνουμε ότι x^2 και $-y^2$ είναι οι ρίζες της $t^2 - \alpha t - \dfrac{\beta^2}{4} = 0$. Έστω $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2, \gamma > 0$. Τότε $x^2 = \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ και $y^2 = \dfrac{\gamma-\alpha}{2}$.

Αν $\beta > 0$, $(x,y) = \left(\pm\sqrt{\dfrac{\gamma+\alpha}{2}},\ \pm\sqrt{\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}\right)$.

Αν $\beta < 0$, $(x,y) = \left(\pm\sqrt{\dfrac{\gamma+\alpha}{2}},\ \mp\sqrt{\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}\right)$.

Στην περίπτωση που $\beta=0$, $\gamma = |\alpha|$ και $x=0$ ή $y=0$.

ii) $3-4i$ και $-3+4i$.

16. Υπολογίστε όλους τους μιγαδικούς z για τους οποίους:

(α) $z^3 = 1$ **(β)** $z^4 = 1$

(γ) $z^6 = 1$ **(δ)** $z^8 = 1$

Λύση

Κάθε εξίσωση συνεπάγεται ότι $|z| = 1$, οπότε $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta$ για κάποιο θ.

(α) $\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\,\eta\mu 3\theta = 1 \Rightarrow 3\theta$ είναι πολλαπλάσιο του 2π, άρα οι λύσεις είναι:

$1, \quad συν\frac{2π}{3}+i\,ημ\frac{2π}{3}=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \quad συν\frac{2π}{3}-i\,ημ\frac{2π}{3}=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$

(β) $1,\ i,\ -1,\ -i.$

(γ) $1,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ -1,\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$

(δ) $1,\ \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ i,\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ -1,\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ -i,\ \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$

17. Έστω κ μια θετική σταθερά. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων που ικανοποιούν την ισότητα: $|z|=κ|z+1|$, όπου z μιγαδικός.

Λύση

Έστω $z=x+yi$. Για κ=1, ο γεωμετρικός τόπος είναι μια ευθεία με εξίσωση $2x=-1$. Για $κ\neq 1$, η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου είναι

$$x^2+y^2=κ^2(x^2+2x+1+y^2)$$

Για κ>1, ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $\left(\frac{κ^2}{1-κ^2},\ 0\right)$ και ακτίνα $\frac{κ}{κ^2-1}$.

Για κ<1, ο γεωμετρικός τόπος είναι ένας κύκλος με κέντρο $\left(\frac{κ^2}{1-κ^2},\ 0\right)$ και ακτίνα $\frac{κ}{1-κ^2}$.

18. Αποδείξτε το θεώρημα του De Moivre: Για κάθε ακέραιο ν,

$$\left(ρ\,(συνθ+iημθ)\right)^ν=ρ^ν\left(συν(νθ)+iημ(νθ)\right).$$

Λύση

i) Για θετικό ακέραιο ν, χρησιμοποιούμε επαγωγή.

ii) Για $ν=-1$, παρατηρούμε ότι $(συνx-iημx)(συνx+iημx)=1$.

iii) Για $ν=-κ<0$, έχουμε:

$$(συνx+iημx)^{-κ}=(συνκx+iημκx)^{-1}=συν(-κ)x+iημ(-κ)x.$$

19. Δεδομένου ότι το τετράγωνο κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός, δείξτε ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί μ' ένα ακριβώς τρόπο στη μορφή $x+yi$ με x και y πραγματικούς.

Λύση

Υποθέτουμε ότι x, y, u, v είναι πραγματικοί και $x+yi=u+ui$.

Οπότε $x-u=(u-y)i$ απ' όπου: $(x-u)^2=-(u-y)^2$ και συνεπώς

$$x-u=u-y=0.$$

20. Η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ έχει τύπο $f(x)=x^5+x-1$.

(α) Δείξτε ότι $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι αμφιμονοσήμαντη.

(β) Δείξτε ότι $f(1001^{999}) < (1000^{1000})$.

(c) Υπολογίστε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$.

Λύση

(α) Αφού f συνεχής, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, η f είναι **επί.**

Αφού $f'(x)=5x^4+1>0$, η f είναι γνησίως αύξουσα και επομένως αμφιμονοσήμαντη.

(β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να δείξουμε ότι: $1001^{999}<1000^{1000}$.

Αυτό ισοδυναμεί με το $\dfrac{\ln 1001}{1000}<\dfrac{\ln 1000}{999}$, (1).

Η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$, έχει παράγωγο $\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}$ που είναι αρνητική για $x \geq 2$ και άρα η (1) ισχύει.

(c) Αν $x>1$ τότε $f(x)=(x^5-1)+x>x$, επομένως $f\big(f(x)\big)>f(x)>x$ και $f(x)>f^{-1}(x)$, αφού οι f και f^{-1} είναι γνησίως αύξουσες.

Όμοια, αν $x<1$, $f(x)<x$, $f\big(f(x)\big)<f(x)<x$ και $f(x)<f^{-1}(x)$.

Άρα η μόνη πιθανή λύση είναι η $x=1$. Αυτό ισχύει αφού $f(1)=f^{-1}(1)=1$.

21. Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f τέτοιες ώστε $f'(x)=f(3)+f(6)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x.

Λύση

Έστω $\kappa=f(3)+f(6)$. Τότε βλέπουμε ότι $f(x)=\kappa x+c$, για κάποια σταθερά c.

Αφού $\kappa=f(3)+f(6)=9\kappa+2c$, έχουμε $c=-4\kappa$.

Συνεπώς η απάντηση είναι $f(x)=\kappa(x-4)$, $\kappa \in \mathbf{R}$.

22. Εάν $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση $\frac{\alpha_0}{1} + \frac{\alpha_1}{2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{n+1} = 0$, δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρητή ρίζα.

Λύση

Εάν $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, τότε

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\alpha_0}{1} + \frac{\alpha_1}{2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{n+1} = 0$$

Άρα, από το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα, υπάρχει ένας αριθμός ξ (το ξ δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικό) μεταξύ του 0 και 1 τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

23. Έστω ένα πολυώνυμο $f(x) \neq 0$. Ισχύει: ρ απλή ρίζα του f(x), τότε και μόνο αν, ρ ρίζα του f(x) και ρ όχι ρίζα του $f'(x)$.

Απόδειξη

$\Rightarrow$) Έστω ότι ρ είναι απλή ρίζα του f(x). Τότε, κατ' αρχήν, ο ρ είναι ρίζα του f(x). Εξάλλου, τότε, υπάρχει πολυώνυμο Π(x) με $f(x) = (x-\rho)\,\Pi(x)$ και $\Pi(\rho) \neq 0$.

Έτσι έχουμε $f'(x) = \Pi(x) + (x-\rho)\,\Pi'(x)$ και συνεπώς $f'(\rho) = \Pi(\rho) \neq 0$.

Επομένως, ο ρ δεν είναι ρίζα του $f'(x)$.

$\Leftarrow$) Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα του f(x) και δεν είναι ρίζα του $f'(x)$. Θα δείξουμε ότι ο ρ είναι απλή ρίζα του f(x).

Πραγματικά, έστω ότι ο ρ είναι ρίζα του f(x) βαθμού πολλαπλότητας $\mu \geq 2$. Τότε, υπάρχει πολυώνυμο Π(x) με

$$f(x) = (x-\rho)^{\mu}\,\Pi(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \mu(x-\rho)^{\mu-1}\,\Pi(x) + (x-\rho)^{\mu}\,\Pi'(x) \;\Rightarrow\; f'(\rho) = 0$$

πράγμα άτοπον.

24. Έστω ένα πολυώνυμο $f(x) \neq 0$. Ισχύει: ρ ρίζα του f(x) βαθμού πολλαπλότητας μ τότε και μόνον αν ρ ρίζα του $f'(x)$ βαθμού πολλαπλότητας $\mu - 1$ και ρ ρίζα του f(x).

Απόδειξη

$\Rightarrow$) Έστω ότι ρ είναι ρίζα του f(x) βαθμού πολλαπλότητας $\mu \geq 2$. Τότε, κατ' αρχήν, ο ρ είναι ρίζα του f(x). Εξάλλου, τότε, υπάρχει πολυώνυμο Π(x) με $f(x) = (x-\rho)^{\mu}\,\Pi(x)$ και $\Pi(\rho) \neq 0$. Έχουμε

$$f'(x)=\mu(x-p)^{\mu-1}\cdot\Pi(x)+(x-p)^{\mu}\Pi'(x)=(x-p)^{\mu-1}\left[\mu\Pi(x)+(x-p)\Pi'(x)\right]$$

και θέτοντας $P(x)=\mu\Pi(x)+(x-p)\Pi'(x)$, έχουμε: $f'(x)=(x-p)^{\mu-1}P(x)$.
Λόγω αυτής και επειδή $P(p)=\mu\Pi(p)\neq 0$, έπεται ότι ο p είναι ρίζα του $f'(x)$ βαθμού πολλαπλότητας $\mu-1$.

$\Leftarrow$) Έστω ότι ο p είναι ρίζα του $f(x)$ και ακόμη ότι ο p είναι ρίζα του $f'(x)$ βαθμού πολλαπλότητας $\mu-1$. Επειδή $\mu\geq 2$ έχουμε $\mu-1\geq 1$. Έστω, τώρα, ότι λ είναι ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας p στο $f(x)$.
Δεν γίνεται να είναι $\lambda=1$, διότι τότε $f'(p)\neq 0$ άτοπον. Άρα $\lambda\geq 2$ και συνεπώς, βάσει του πρώτου μέρους, ο p είναι ρίζα του $f'(x)$ βαθμού πολλαπλότητας $\lambda-1$. Επομένως ισχύει $\lambda-1=\mu-1 \Rightarrow \lambda=\mu$.

25. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha>0$, δεν μπορεί να έχει περισσότερες από 2 πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι συμβαίνει το αντίθετο, ότι δηλαδή η $f(x)=x^4+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες τις x_1, x_2, x_3. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

i) Όλες οι ρίζες είναι απλές.

Τότε η παράγωγος της $f(x)$, η $f'(x)=4x^3+2\alpha x+\beta$ θα είχε τουλάχιστον δύο ρίζες και η δεύτερη παράγωγος $f''(x)=12x^2+2\alpha$ θα είχε τουλάχιστον μια ρίζα. Το τελευταίο είναι άτοπο, αφού $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Μια ρίζα διπλή και μια απλή. Έστω x_1 διπλή ρίζα και x_2 απλή. Τότε η $f'(x)$ θα έχει ρίζα την x_1 και μια δεύτερη μεταξύ των x_1 και x_2 (προκύπτει αμέσως από το θεώρημα του Rolle). Άρα η $f''(x)$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα, πράγμα άτοπο.

iii) Μια τριπλή ρίζα. Έστω x_1 η τριπλή ρίζα της $f(x)$. Τότε η $f'(x)$ έχει την x_1 διπλή ρίζα και η $f''(x)$ την έχει απλή, πράγμα άτοπο.

Αφού σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

26. Έστω Α ένας $n\times n$ πίνακας, τέτοιος ώστε:
$A^2-3A+2I=O$ όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας και O ο μηδενικός πίνακας. Δείξτε ότι: $A^{2\kappa}-(2^{\kappa}+1)A^{\kappa}+2^{\kappa}I=O$ για κάθε φυσικό αριθμό $\kappa\geq 1$.

Απόδειξη

Αφού $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$ για όλους τους θετικούς ακεραίους, m, n, βλέπουμε ότι αν $f(x) = p(x) \cdot q(x)$, όπου p(x), q(x) είναι πολυώνυμα του x, τότε

$$f(A) = p(A) \cdot q(A).$$

Έστω $f(x) = x^{2\kappa} - (2^\kappa + 1)x^\kappa + 2^\kappa$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = f(2) = 0$.

Συνεπώς $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot q(x)$ για κάποιο πολυώνυμο q(x).

Άρα $f(A) = (A^2 - 3A + 2I) \cdot q(A) = O \cdot q(A) = O$.

27. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Λύση

Με $\bar{z}$ συμβολίζουμε τον συζυγή μιγαδικό του z. Έχουμε $\bar{z}_i = \dfrac{1}{z_i}$ για i=1, 2, 3.

Επομένως

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$$

Θεωρούμε το τριτοβάθμιο πολυώνυμο:

$$(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = x^3 - x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$

Αφού 1, $\pm i$ είναι οι ρίζες, έπεται ότι οι z_1, z_2, z_3 είναι οι 1, i, $-i$ με οποιαδήποτε διάταξη.

28. Δίνεται η f που ορίζεται από τον τύπο $f(x) = \sqrt{4 + \sqrt{16x^2 - 8x^3 + x^4}}$.

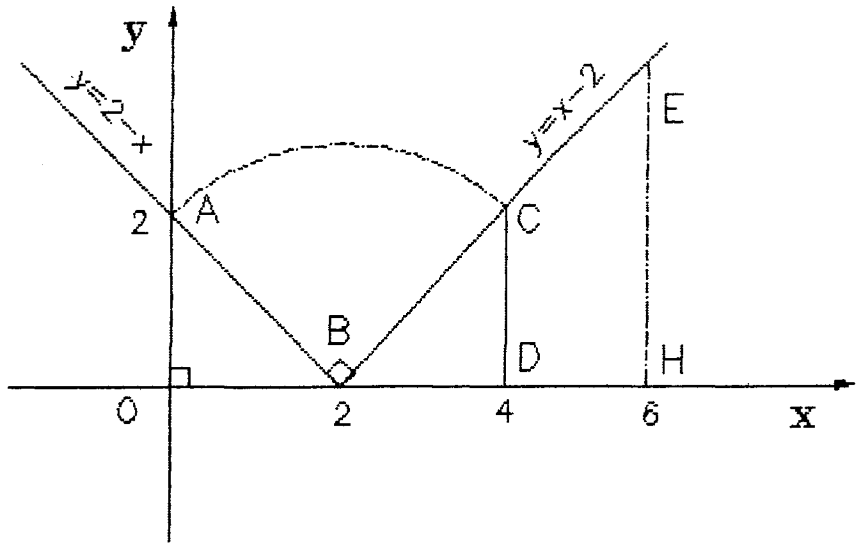
(α) Να γίνει η γραφική παράσταση της $y = f(x)$.

(β) Βρείτε, χωρίς χρήση ολοκληρωτικού λογισμού, το εμβαδόν της περιοχής που φράσσεται από τις ευθείες x=0, x=6, y=0 και την καμπύλη $y = f(x)$.

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι $f(x) = \sqrt{4 + |x^2 - 4x|}$.

Αν $x > 4$ ή $x < 0 \Rightarrow f(x) = |x - 2|$. Αν $0 \le x \le 4$ προκύπτει ότι η $y = f(x)$ μπορεί να γραφεί ως $(x - 2)^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ που είναι κύκλος.



Σχήμα

(β) Το εμβαδόν του $\hat{AOB}$ και του $\hat{BCD}$ είναι 2, το εμβαδόν του τομέα ABC είναι $\frac{1}{4}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$ και το εμβαδόν του τραπεζίου CDHE είναι $\frac{1}{2}(2+4)\cdot 2 = 6$. Άρα το εμβαδόν της περιοχής είναι $8+2\pi$.

29. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

Έστω $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$. Θα δείξουμε ότι $f(x) > 0$ για όλα τα x. Τώρα

$$f(x) + f(-x) = 2\left(x^6 + x^4 + x^2 + \frac{3}{4}\right) \qquad (1)$$

και $\qquad f(x) - f(-x) = -2(x^5 + x^3 + x) \qquad (2)$

Βλέπουμε ότι εάν $x \leq 0$ η (1) είναι θετική και η (2) είναι μη αρνητική οπότε το άθροισμα $2f(x)$ είναι θετικό. Τώρα γράφοντας

$$f(x) = (x^6 - x^5) + (x^4 - x^3) + (x^2 - x) + \frac{3}{4}$$

είναι εύκολο να δούμε ότι για $x \geq 1$, κάθε παρένθεση είναι μη αρνητική, οπότε $f(x) > 0$ για $x \geq 1$. Η περίπτωση $x \in (0, 1)$ παραμένει. Αλλά εάν $0 < x < 1$ τότε

$$f(x) = -x(1-x)(x^4+x^2+1)+\frac{3}{4} > 0,$$

αφού $0 < x(1-x) \le \frac{1}{4}$ και $x^4+x^2+1 < 3$. Άρα $f(x) > 0$ για όλα τα x.

30. Για ποιους πραγματικούς αριθμούς α η γραφική παράσταση της

$$y = x^{x^{x^{\alpha}}}, \quad x > 0$$

έχει ένα σημείο καμπής $\left(x_0, f(x_0)\right)$ με την εφαπτομένη στο x_0 παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ (δηλαδή όπου $y' = 0$);

Λύση

Έστω $z = x^{x^{\alpha}}$, έτσι ώστε $\ln z = x^{\alpha}\ln x$ και $\ln y = z\ln x$. Διαφορίζοντας ως προς x, παίρνουμε

$$\frac{z}{z'} = \frac{x^{\alpha}}{x}(1+\alpha\ln x) \text{ και } \frac{y'}{y} = \frac{z}{x} + z'\ln x = \frac{z}{x}\, f(x) \qquad (1)$$

όπου $\qquad f(x) = 1 + x^{\alpha}(1+\alpha\ln x)\ln x \qquad (2)$

και παραγωγίζοντας την (1) έχουμε

$$\frac{yy''-(y')^2}{y^2} = \frac{xz'-z}{x^2}\, f(x) + \frac{z}{x}\, f'(x) \qquad (3)$$

Αφού y>0 και z>0 για όλα τα x>0, από την (1) παίρνουμε $y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ και άρα από την (3)

$$y'' = y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = f'(x) = 0.$$

Τώρα $f'(x) = x^{\alpha-1}\, g(x)$, όπου $g(x) = (\alpha\ln x)^2 + 3(\alpha\ln x) + 1$.

Άρα $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha\ln x = \kappa \Leftrightarrow x = e^{\frac{\kappa}{\alpha}}$, όπου $\kappa = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Τώρα από τη (2)

$$f'(x) = f(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{\frac{\kappa}{\alpha}} = 1 + e^{\kappa}(1+\kappa)\frac{\kappa}{\alpha} = 0 \qquad (4)$$

Επιπλέον, από την $f''(x) = x^{\alpha-1}g'(x) + (\alpha-1)x^{\alpha-2}g(x)$ παίρνουμε

$$f''\left(e^{\frac{\kappa}{\alpha}}\right) = \alpha e^{\kappa-\frac{2\kappa}{\alpha}}(2\kappa+3) \neq 0$$

και αυτό συνεπάγεται ότι $y''' \neq 0$ για $x = e^{\frac{\kappa}{\alpha}}$. Η καμπύλη έχει ένα σημείο καμπής με την οριζόντια εφαπτομένη ακριβώς όταν $y' = y'' = 0$ αλλά $y''' \neq 0$

δηλαδή ακριβώς όταν $x = e^{\frac{\kappa}{\alpha}}$ όπου $\kappa = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ και από την (4), $\alpha = -\kappa(1+\kappa)e^{\kappa}$.

Άρα οι ζητούμενες τιμές του α είναι

$$-\left(2-\sqrt{5}\right)\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{και} \quad -\left(2+\sqrt{5}\right)\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

31. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν και κάθε πραγματικό αριθμό x, ισχύει: $\left[\dfrac{[\nu x]}{\nu}\right] = [x]$.

Λύση

Θέτουμε $x = [x] + \varepsilon$ όπου $0 \le \varepsilon < 1$. Τότε $[\nu x] = \nu[x] + [\nu\varepsilon]$.

Συνεπώς $\left[\dfrac{[\nu x]}{\nu}\right] = [x] + \left[\dfrac{[\nu\varepsilon]}{\nu}\right] = [x]$, διότι $[\nu\varepsilon] \le \nu\varepsilon < \nu$.

32. Δείξτε ότι όλες οι χορδές της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ που υποτείνουν ορθή γωνία στην κορυφή της παραβολής, περνούν από το ίδιο σημείο.

Λύση

Εάν το σύνολο των χορδών περνά από το ίδιο σημείο, τότε, συμμετρικά, θα περιμέναμε το κοινό σημείο να βρίσκεται στον άξονα της παραβολής, δηλαδή στον x-άξονα. Άρα πρέπει να εξετάσουμε αν η τετμημένη x των χορδών είναι ανεξάρτητη από τα άκρα τους.

Υποθέτουμε ότι τα άκρα χορδής που υποτείνει ορθή γωνία στην κορυφή (0, 0) είναι (x_1, y_1) και (x_2, y_2) και ότι η τετμημένη x της τομής είναι $(x_0, 0)$.

Από το θεώρημα του Πυθαγόρα,

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \qquad (1)$$

Επειδή τα άκρα βρίσκονται στην παραβολή,

$$y_1^2 = 4\alpha x_1, \qquad y_2^2 = 4\alpha x_2 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), έχουμε

$$\frac{y_1^2\, y_2^2}{16\alpha^2} + y_1 y_2 = 0 \quad \text{ή} \quad y_2 = -\frac{16\alpha^2}{y_1}.$$

Άρα $x_2 = \dfrac{64\alpha^3}{y_1^2}$ και $x_1 = \dfrac{y_1^2}{4\alpha}$.

Από τη $\dfrac{y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{x_1-x_0}{x_1-x_2}$, παίρνουμε $x_0=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}=\dfrac{\dfrac{64a^3}{y_1}+4ay_1}{y_1+\dfrac{16a^2}{y_1}}=4a.$

Άρα όλες οι χορδές περιέχουν το σημείο (4α, 0).

Διαφορετική αντιμετώπιση

Ας είναι (x_1, y_1) και (x_2, y_2) τα άκρα της χορδής, όπως παραπάνω. Αφού οι κλίσεις των ευθειών από την αρχή σ' αυτά τα σημεία είναι αντιθετοαντίστροφες, τότε $x_1x_2+y_1y_2=0$, (1).

Εάν η εξίσωση της χορδής είναι y=mx+b, τότε x_1 και x_2 είναι ρίζες της β΄θμιας εξίσωσης $(mx+b)^2=4ax$, δηλαδή $m^2x^2+(2bm-4a)x+b^2=0$.

Άρα $x_1x_2=\dfrac{b^2}{m^2}$

και $y_1y_2=(mx_1+b)(mx_2+b)=m^2x_1x_2+mb(x_1+x_2)+b^2=\dfrac{4ab}{m}$.

Άρα, από την (1), $\dfrac{b^2}{m^2}+\dfrac{4ab}{m}=0$ ή $b=-4am$.

Άρα κάθε χορδή που υποτείνει ορθή γωνία στην κορυφή έχει μια εξίσωση της μορφής $y=mx-4am=m(x-4a)$ και προφανώς αυτή η ευθεία περνά από το σημείο (4α, 0).

33. Δείξτε ότι για n=1, 2, 3, ... ,

(i) $(n+1)^n \geq 2^n n!$

(ii) $(n+1)^n(2n+1)^n \geq 6^n (n!)^2$.

Λύση

(i) Επαναλαμβανόμενη χρήση της ανισότητας $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$, για $a\geq 0$, $b\geq 0$,

δίνει
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \geq n\cdot 1$$
$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\left(\frac{n-1+2}{2}\right)^2 \geq (n-1)\cdot 2$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n-2+3}{2}\right)^2 \geq (n-2)\cdot 3$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+n-1}{2}\right)^2 \geq 2(n-1)$$

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1+n}{2}\right)^2 \geq 1\cdot n$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες αυτές κατά μέλη, έχουμε

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} \geq (n!)^2 \quad \text{ή} \quad (n+1)^n \geq 2^n n!\,.$$

(ii) Από την (i) έχουμε

$$6^n (n!)^2 \leq 6^n \left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right\}^2 = 2^n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \cdot 3^n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^n =$$

$$= (n+1)^n \left(\frac{3n+3}{2}\right)^n \leq (n+1)^n \left(\frac{4n+2}{2}\right)^n = (n+1)^n (2n+1)^n$$

Αυτή η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την προφανή σχέση $3n+3 \leq 4n+2$ για $n=1, 2, 3, \ldots$.

Το «=» και στην (i) και στην (ii) μόνο εάν $n=1$.

Η ανισότητα (i) μπορεί να αποδειχθεί και με επαγωγή. Υποθέτοντας ότι αληθεύει για n, τότε αφού $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 2$ (από το Διωνυμικό θεώρημα), έχουμε $(n+2)^{n+1} \geq 2(n+1)^{n+1} \geq 2(n+1)\, 2^n \cdot n! = 2^{n+1}(n+1)!\,.$

34. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x\, dx}{\eta\mu x + \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x}$.

Λύση

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x\, dx}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \eta\mu\frac{\pi}{3}\,\sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{\eta\mu\left(t-\frac{\pi}{3}\right)}{\eta\mu t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t}\right)dt =$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\ \ln\eta\mu t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\ \ln\frac{1}{2}+\sqrt{3}\ \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi+\sqrt{3}\ \ln 3}{8}.$$

35. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^m x\,dx,\ \ m\in\mathbf{N}$.

α) Δείξτε ότι $mI_m=(m-1)I_{m-2}$.

β) Δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{2\nu}x\,dx=0$.

Απόδειξη

α) $I_m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^m x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{m-1}x\,d(\sigma\upsilon\nu x)=$

$$=-\eta\mu^{m-1}x\ \sigma\upsilon\nu x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(m-1)\eta\mu^{m-2}x\ \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx=$$

$$=(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{m-2}x\,(1-\eta\mu^2x)\,dx=(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{m-2}x\ dx-(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{m-2}x\ dx.$$

Επομένως: $I_m=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m$ ή $I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}$, (Κ)

β) Από τον τύπο (Κ) για $m=2\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$, έχουμε:

$$I_2=\frac{1}{2}I_0,\quad I_4=\frac{3}{4}I_2,\ldots,\quad I_{2\nu}=\frac{2\nu-1}{2\nu}I_{2\nu-2}$$

κι επειδή $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu x)^0\,dx=\frac{\pi}{2}$, τελικά παίρνουμε:

$$I_{2\nu}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^{2\nu}x\ dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2\nu)}\ \frac{\pi}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι:

$$(\mathrm{T})\qquad \lim_{\nu\to+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2\nu)}=0,$$

οπότε $\lim\limits_{\nu\to+\infty}I_{2\nu}=0$.

Πραγματικά, είναι φανερό ότι:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\quad \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{2\nu-1}{2\nu}<\frac{2\nu}{2\nu+1}$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2\nu}{2\nu+1}$$

και πολλαπλασιάζοντας τα μέλη επί $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}$, έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}\right)^2 < \frac{1}{2\nu+1} \quad \text{ή} \quad 0 < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu} < \frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$$

ή $\lim\limits_{\nu\to+\infty} 0 \le \lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}\right) \le \lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2\nu+1}}$.

Τελικά έχουμε ότι: $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2\nu-1}{2\nu}=0$

και επομένως $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^{2\nu}x\,dx = 0$.

ΣΧΟΛΙΑ. 1) Στο θέμα 167, σελ. 123. του τεύχους 1 του περιοδικού «Θεαίτητος» έχουμε αποδείξει με δύο τρόπος ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\nu}} < \frac{1\cdot 3\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdots 2\nu} < \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\nu}},$$ **όπου ν φυσικός με ν > 1.**

2) Για μια διαφορετική αντιμετώπιση του (T) ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

Από την ανισότητα

$$\alpha+\beta > 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow (2\nu-1)+(2\nu+1) > 2\sqrt{(2\nu-1)(2\nu+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\nu > 2\sqrt{(2\nu-1)(2\nu+1)} \Leftrightarrow 2\nu > \sqrt{(2\nu-1)(2\nu+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\nu-1}\cdot\sqrt{2\nu+1} < 2\nu \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{2\nu+1}\right)^2\cdot\sqrt{2\nu+1}}{2\nu} < \sqrt{2\nu-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\nu-1}{2\nu} < \sqrt{\frac{2\nu-1}{2\nu+1}} \qquad (1)$$

Όμοια

$$\frac{2\nu-3}{2(\nu-1)} < \sqrt{\frac{2\nu-3}{2\nu-1}} \qquad (2)$$

....

$$\frac{5}{2\cdot 3} < \sqrt{\frac{5}{7}} \qquad (\nu-2)$$

$$\frac{3}{2\cdot 2} < \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad (\,\nu-1)$$

$$\frac{1}{2\cdot 1} < \sqrt{\frac{1}{3}} \qquad (\,\nu)$$

πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη, παίρνουμε:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu} < \frac{1}{\sqrt{2\nu+1}} \qquad (A)$$

Ανάλογα παίρνουμε

$$\nu+(\nu+1) > 2\sqrt{\nu(\nu+1)} \text{ δηλαδή } 2\nu+1 > 2\sqrt{\nu(\nu+1)}$$

Άρα έχουμε τις παρακάτω ανισότητες

$$\frac{2\nu+1}{2\nu} > \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu}} \qquad (1')$$

$$\frac{2\nu-1}{2(\nu-1)} > \sqrt{\frac{\nu}{\nu-1}} \qquad (2')$$

....

$$\frac{7}{2\cdot 3} > \sqrt{\frac{4}{3}} \qquad (\,\nu-2)'$$

$$\frac{5}{2\cdot 2} > \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad (\,\nu-1)'$$

$$\frac{3}{2\cdot 1} > \sqrt{\frac{2}{1}} \qquad (\,\nu)'$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη, παίρνουμε

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu} > \sqrt{\nu+1} \quad \text{ή} \quad \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu} > \frac{\sqrt{\nu+1}}{2\nu+1} \qquad (B)$$

Οι σχέσεις (A) και (B) αποδεικνύουν το (T). Επειδή

$$\sqrt{\frac{\nu+1}{2\nu+1}} > \sqrt{\frac{\nu+1}{2\nu+2}} > \frac{1}{2}\sqrt{\nu+1},$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}} > \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu} > \frac{1}{2\sqrt{\nu+1}}$$

Βλέπε: CHRYSTAL, Algebra Vol. II, σελ. 40, παράδειγμα 8.

***Διαφορετική αντιμετώπιση του (Τ)**

$$a_\nu = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2\nu} < \frac{1}{\sqrt{3\nu}}$$

Η φυσική υπόθεση της επαγωγής είναι S_κ: $a_\kappa < \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}$.

Η S_1 είναι προφανώς αληθής $\left(\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3\cdot 1}}\right)$, οπότε ας προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι $S_\kappa \Rightarrow S_{\kappa+1}$:

$$a_{\kappa+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2\kappa+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2\kappa+2)} = a_\kappa \cdot \frac{2\kappa+1}{2\kappa+2} < \frac{1}{\sqrt{3\kappa}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2},$$

από την υπόθεση της επαγωγής.

Γράφουμε την τελική έκφραση του δεξιού μέλους ως

$$\frac{1}{\sqrt{3(\kappa+1)}}\cdot\underline{\frac{\sqrt{3(\kappa+1)}}{\sqrt{3\kappa}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}}$$

και αφού πρέπει να αποδείξουμε ότι όλη αυτή η έκφραση είναι $<\frac{1}{\sqrt{3(\kappa+1)}}$, ελπίζουμε το υπογεγραμμένο τμήμα να αποδειχθεί ότι είναι μικρότερο του 1.

Αλλά ο υπογεγραμμένος παράγοντας είναι $\sqrt{\frac{4\kappa^2+4\kappa+1}{4\kappa^2+4\kappa}}$ που προφανώς δεν είναι μικρότερος του 1 οπότε η προσπάθειά μας απέτυχε. Τώρα θα κάνουμε το ανάποδο και θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε μια ακόμη πιο αυστηρή συνθήκη, δηλαδή $(\forall\ \nu)\ \left[a_\nu < \frac{1}{\sqrt{3\nu+1}}\right]$

πάλι με τη φυσική επαγωγική υπόθεση, S_κ: $a_\kappa < \frac{1}{\sqrt{3\kappa+1}}$.

Τώρα, όπως πριν, προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι $S_\kappa \Rightarrow S_{\kappa+1}$:

$$a_{\kappa+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2\kappa+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot (2\kappa+2)} = a_\kappa \cdot \frac{2\kappa+1}{2\kappa+2} < \frac{1}{\sqrt{3\kappa+1}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3(\kappa+1)+1}}\cdot\underline{\sqrt{\frac{3(\kappa+1)+1}{3\kappa+1}}\cdot\frac{2\kappa+1}{2\kappa+2}}$$

Με διάφορες πράξεις στον υπογεγραμμένο παράγοντα βλέπουμε ότι πράγματι είναι μικρότερος του 1.

Παράδοξο το ότι, αν και η $(\forall\, \nu)$ $\left[\alpha_\nu < \dfrac{1}{\sqrt{3\nu}}\right]$ είναι ασθενέστερη υπόθεση από τη $(\forall\, \nu)$ $\left[\alpha_\nu < \dfrac{1}{\sqrt{3\nu+1}}\right]$, είναι ευκολότερο να αποδείξουμε την ισχυρότερη.

Αυτό το φαινόμενο το έκανε γνωστό στο μαθητικό κοινό ο **George Polya** στο βιβλίο του «**Mathematics and Plausible Reasoning, Volume I,** με το συνοδευτικό μήνυμα ότι εάν μια απόδειξη δεν προχωρεί αρκετά καλά με επαγωγή, μερικές φορές είναι καλύτερο να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο.

Διαφορετική απόδειξη της σχέσης:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2\nu-1}{2\nu}=\prod_{\kappa=1}^{\nu}\frac{2\kappa-1}{2\kappa}\le\frac{1}{\sqrt{3\nu+1}}$$

Για ν=2 : $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\le\frac{1}{\sqrt{6+1}} \Leftrightarrow \frac{3}{8}\le\frac{1}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow 3\sqrt{7}\le 8 \Leftrightarrow 63\le 64$.

Δεχόμαστε ότι ισχύει για ν=m, δηλαδή ότι

$$(T_1):\ \prod_{\kappa=1}^{m}\frac{2\kappa-1}{2\kappa}\le\frac{1}{\sqrt{3m+1}}$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει και για ν=m+1.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (T_1) επί $\dfrac{2(m+1)-1}{2(m+1)}$ και παίρνουμε

$$\prod_{\kappa=1}^{m}\frac{2\kappa-1}{2\kappa}\cdot\frac{2(m+1)-1}{2(m+1)}\le\frac{1}{\sqrt{3m+1}}\cdot\frac{2(m+1)-1}{2(m+1)}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι: (T_2): $\dfrac{1}{\sqrt{3m+1}}\cdot\dfrac{2m+1}{2m+2}\le\dfrac{1}{\sqrt{3(m+1)+1}}$

Υποθέτουμε ότι

$$\frac{2m+1}{(2m+2)\sqrt{3m+1}}>\frac{1}{\sqrt{3(m+1)+1}}\Leftrightarrow\frac{(2m+1)^2}{(2m+2)^2(3m+1)}>\frac{1}{3m+4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)^2(3m+4)>(2m+2)^2(3m+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4m^2+4m+1)(3m+4)>(4m^2+8m+4)(3m+1)\Leftrightarrow 19m>20m,$$

άτοπο, αφού $m\ge 0$. Συνεπώς η (T_2) είναι αληθής.

36. Δείξτε ότι:

$$I=\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\,dx=0,\qquad (\forall)\ (m,n)\in\mathbb{N}^2$$

Απόδειξη

$$I=\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\ \ dx=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\ \ dx+\int_{\pi}^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\ \ dx.$$

Επειδή

$$\int_{\pi}^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\ \ dx=\left\{\begin{matrix}x=t+\pi\\ dx=dt\end{matrix}\right\}=\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}(t+\pi)\ \eta\mu^{2n+1}(t+\pi)\ \ dt=$$

$$=-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}t\ \eta\mu^{2n+1}t\ \cdot dt=-\int_0^{\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\ \ dx,$$

τελικά παίρνουμε:

$$I=\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^{2m}x\ \eta\mu^{2n+1}x\ \ dx=0$$

37. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu^2x\,dx}{\eta\mu x+\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^2x\,dx}{\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{\eta\mu^2\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right)dt}{\eta\mu t}=\frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{\eta\mu^2t-2\sqrt{3}\,\eta\mu t\ \sigma\upsilon\nu t}{\eta\mu t}dt=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\ln\varepsilon\varphi\frac{t}{2}-2\sqrt{3}\ \eta\mu t\ +2\sigma\upsilon\nu t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{8}\left(3\ln\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{12}+\frac{3}{2}\ln3+2\right).$$

38. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu2x$.

Αν $x\in[-\pi,\pi]$ **δείξτε ότι** $\min f(x)>-\dfrac{7}{9}$.

Απόδειξη

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot 2\eta\mu\, x\,\sigma\upsilon\nu x=2\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu\, x=2\,(1-\eta\mu^2x)\,\eta\mu\, x\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f(x)=2\eta\mu\, x-2\eta\mu^3x\ \Rightarrow\ f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x-6\eta\mu^2x\,\sigma\upsilon\nu x=2\sigma\upsilon\nu x\,(1-3\eta\mu^2x)$

Εάν $f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ 2\sigma\upsilon\nu x\,(1-3\eta\mu^2x)=0\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \sigma\upsilon\nu x=0,\ \ \eta\mu^2x=\dfrac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \ \eta\mu x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

I. Έστω $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Από τη συνθήκη $x \in [-\pi, \pi]$ προκύπει ότι $x = \pm\frac{\pi}{2}$ και $f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0 > -\frac{7}{9}$.

II. Για τα $x \in [-\pi, \pi]$ και ικανοποιούν την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ισχύει:

$$f(x) = 2\eta\mu x - 2\eta\mu^3 x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} - 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{27} = 2\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}.$$

III. Για τα $x \in [-\pi, \pi]$ και ικανοποιούν την εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, ισχύει:

$$f(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{27} = -\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}$$

$$\left(-\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9} \Leftrightarrow 4\sqrt{3} < 7 \Leftrightarrow 48 < 49\right)$$

ΣΧΟΛΙΟ. Δεν είναι άγνωστο ότι για να εντοπίσουμε το μέγιστο και το ελάχιστο της f που είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α, β], πρέπει να εξετάσουμε τρία είδη σημείων:

(1) Τα κρίσιμα (στάσιμα) σημεία της f στο [α, β].

(2) Τα άκρα α και β.

(3) Τα σημεία x στο [α, β], όπου η f δεν παραγωγίζεται.

Αν υπάρχουν πολλά σημεία σ' αυτές τις τρεις κατηγορίες ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Βρίσκουμε το f(x) για κάθε x που ικανοποιεί την $f'(x) = 0$ και το f(x) για κάθε x στο οποίο η f δεν είναι παραγωγίσιμη και τέλος τα f(α) και f(β). Ο μεγαλύτερος απ' αυτούς τους αριθμούς θα είναι η μέγιστη τιμή της f και ο μικρότερος θα είναι η ελάχιστη.

Στο παραπάνω θέμα θα έχουμε:

$$\min_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9},$$

Εφαρμογή. Αν $f: f(x) = \eta\mu x \cdot \eta\mu 2x$, δείξτε ότι

$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) < 0{,}77.$$

39. **Έστω $\varphi: \varphi(x)=\dfrac{\eta\mu\pi x}{x(1-x)}$, $0<x<1$. Δείξτε ότι η φ είναι αύξουσα για $0<x<\dfrac{1}{2}$ και φθίνουσα για $\dfrac{1}{2}<x<1$.**

Απόδειξη

Επειδή $\varphi(1-x)=\varphi(x)$ για $0<x<1$ το διάγραμμα της φ είναι συμμετρικό ως προς την ευθεία $x=\dfrac{1}{2}$. Αρκεί επομένως να δείξουμε ότι η φ είναι αύξουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ή ότι $\varphi'(x)\geq 0$, $0<x<\dfrac{1}{2}$ (1).

Ο περιορισμός $0<x<\dfrac{1}{2}$ εξυπακούεται στην ανάλυση που ακολουθεί.

Αφού $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\,\pi x}{x^2(1-x)^2}>0$, η διαφόριση δείχνει ότι

πρόσημο $\varphi'(x)$ = πρόσημο$\{\pi x(1-x)-(1-2x)\,\varepsilon\varphi\pi x\}$ = πρόσημο $f(x)$

και αφού $\varepsilon\varphi^2\pi x>0$ παραπέρα διαφόριση δείχνει ότι

πρόσημο $f'(x)$ = πρόσημο $\{(2x-1)\pi+2\sigma\varphi\pi x\}$ = πρόσημο $g(x)$.

Τώρα $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ και $g'(x)=-2\pi\sigma\varphi^2\pi x<0 \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow f(0)=0$ και

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)>0$ και η (1) προκύπτει.

40. Δείξτε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{\dfrac{1}{\nu!}}=0$.

Απόδειξη

Είναι $(\nu!)^2=(1\cdot\nu)\left[2(\nu-1)\right]\cdots(\nu\cdot 1)$.

Όμως $\kappa(\nu-\kappa+1)\geq\nu$, αφού $\kappa(\nu-\kappa+1)-\nu=(\nu-\kappa)(\kappa-1)\geq 0$. Επομένως

$$\left.\begin{array}{l} 1\cdot\nu=\nu \\ 2(\nu-1)\geq\nu \\ 3(\nu-2)\geq\nu \\ \dots\dots\dots\dots \\ \nu\cdot 1=\nu \end{array}\right\} \Rightarrow (\nu!)^2\geq\nu^\nu \Rightarrow \sqrt[\nu]{\nu!}\geq\sqrt{\nu} \Rightarrow 0<\sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!}}\leq\frac{1}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow \sqrt[\nu]{\frac{1}{\nu!}}\to 0$$

41. Έστω συνάρτηση f ορισμένη για κάθε $x \in R$. Υποθέτουμε ότι ισχύει γι' αυτήν:

$$|f(x) - f(y)| \le |x - y|^{a}, \quad 1 < a \le 2$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Απόδειξη

$$|f(x)-f(y)| \le |x-y|^{a} \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le |x-y|^{a-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x-y|^{a-1} \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le |x-y|^{a-1}, \quad \text{όπου } a-1>0.$$

Παίρνοντας τα όρια των μελών της τελευταίας σχέσης για $x \to y$ έχουμε:

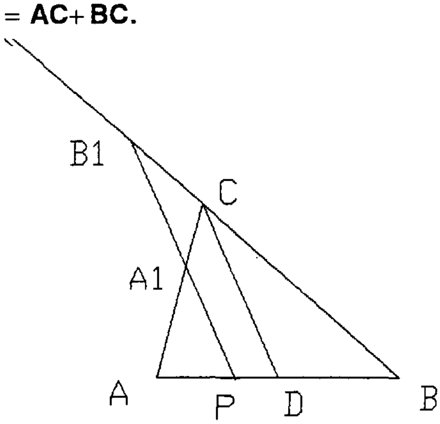
$$\lim_{x\to y}\left[-|x-y|^{a-1}\right] \le \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \lim_{x\to y}|x-y|^{a-1} \Rightarrow \lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0,$$

δηλαδή $f'(y)=0$ για κάθε $y \in \mathbf{R}$ ή $f'(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο **R**.

42. Από αυθαίρετο σημείο P της πλευράς AB του τριγώνου ABC, έχει κατασκευαστεί ευθεία παράλληλη προς την CD (όπου D είναι το μέσο του τμήματος AB) που τέμνει τις AC και BC στα σημεία A_1 και B_1 αντίστοιχα.

Δείξτε ότι $\vec{PA_1}+\vec{PB_1} = \vec{AC}+\vec{BC}$.

Απόδειξη



Σχήμα

Ας είναι D το μέσο του AB και έστω $\frac{\vec{AP}}{\vec{AB}} = \kappa$. Από την ομοιότητα των τριγώνων

APA_1 και ADC, παίρνουμε $\frac{\vec{PA_1}}{\vec{DC}} = \frac{\vec{AP}}{\vec{AD}}$ και συνεπώς

$$\vec{PA_1} = \frac{\vec{AP}}{\vec{AD}} \cdot \vec{DC} = \frac{\kappa \cdot \vec{AB}}{\frac{\vec{AB}}{2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right) = \kappa\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right) \qquad (1)$$

Επίσης είναι

$$\vec{PB_1} = \frac{\vec{BP}}{\vec{BD}} \cdot \vec{DC} = \frac{\vec{BA}+\vec{AP}}{-\frac{\vec{AB}}{2}} \cdot \vec{DC} = \frac{(\kappa-1)\vec{AB}}{-\frac{\vec{AB}}{2}} \cdot \vec{DC} =$$

$$= 2(1-\kappa) \cdot \frac{1}{2}\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right) = (1-\kappa)\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right) \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) συνεπάγεται ότι

$$\vec{PA_1}+\vec{PB_1} = \kappa\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right) + (1-\kappa)\left(\vec{AC}+\vec{BC}\right) = \vec{AC}+\vec{BC}.$$

43. Αν a και b είναι δεδομένα μη παράλληλα διανύσματα, λύσετε ως προς x την εξίσωση

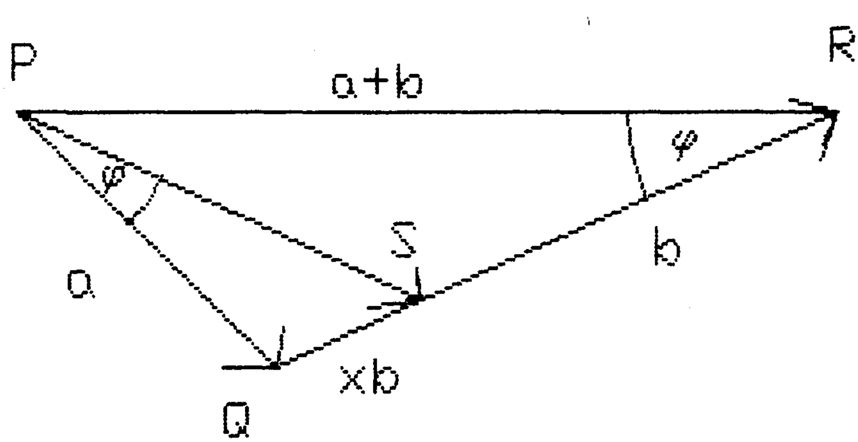
$$\frac{\mathbf{a}^2 + x\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}+x\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}+\mathbf{b}|}$$

Λύση

Αναφερόμενοι στο παρακάτω σχήμα, η δεδομένη εξίσωση απαιτεί:

$$S\hat{P}Q = P\hat{R}Q \ (=\varphi, \text{ ας πούμε}).$$

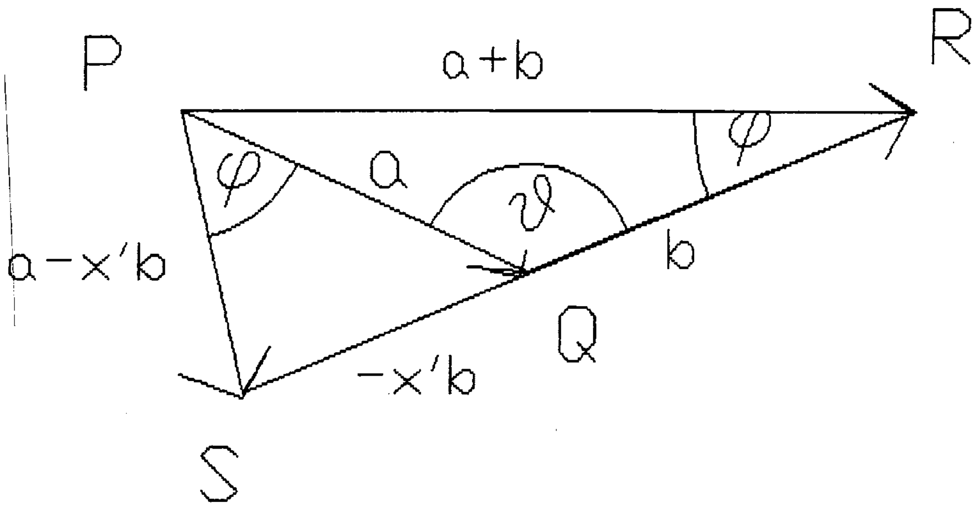
Συνεπώς $P\hat{Q}S \approx R\hat{Q}P$



Σχήμα

Επομένως, θέτοντας $\kappa = |a|$ και $\lambda = |b|$, $\frac{x\lambda}{\kappa} = \frac{\kappa}{\lambda}$ ή $x = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$.

Επίσης, $x = -x'$ μπορεί νάναι αρνητικός όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα

Από τον νόμο των ημιτόνων, παίρνουμε:

$$\frac{\kappa}{\eta\mu(\theta-\varphi)} = \frac{x'\lambda}{\eta\mu\varphi} \quad \text{και} \quad \frac{\kappa}{\eta\mu\varphi} = \frac{\lambda}{\eta\mu(\theta+\varphi)}.$$

Συνεπώς, $\eta\mu(\theta+\varphi) - \eta\mu(\theta-\varphi) = \frac{\lambda\eta\mu\varphi}{\kappa} - \frac{\kappa\eta\mu\varphi}{x'\lambda}$ ή $2\,\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\lambda}{\kappa} - \frac{\kappa}{x'\lambda}$.

Τελικά έχουμε

$$x = -x' = \frac{-\kappa^2}{\lambda(\lambda - 2\kappa\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{-a^2}{b^2 + 2a\cdot b}.$$

44. Βρείτε όλες τις τιμές της παραμέτρου α, έτσι ώστε όλες οι ρίζες της εξίσωσης

$$\mathbf{x^6 + 3x^5 + (6-\alpha)x^4 + (1-2\alpha)x^3 + (6-\alpha)x^2 + 3x + 1 = 0}$$

να είναι πραγματικοί αριθμοί.

Λύση

Γράφουμε τη δεδομένη εξίσωση έτσι: $\frac{(x^2+x+1)^3}{x^2(x+1)^2} = \alpha$.

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{(x^2+x+1)^3}{x^2(x+1)^2}$, στο διάστημα $\Delta=(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

Η f έχει τρία τοπικά ελάχιστα για $x=-2$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=1$ και μάλιστα οι τιμές και των τριών τοπικών ελαχίστων είναι ίσες με $\dfrac{27}{4}$. Είναι πια φανερό ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι πραγματικές, τότε και μόνο τότε, αν $\alpha\ge\dfrac{27}{4}$.

45. Δίνονται μια συνάρτηση f και μια σταθερά $c\neq 0$ έτσι ώστε:

(i) f είναι άρτια.

(ii) g: $g(x)=f(x-c)$ είναι περιττή.

Δείξτε ότι η f είναι περιοδική και υπολογίστε την περίοδο.

Λύση

Έστω x ένα τυχαίο στοιχείο του πεδίου ορισμού της f. Τότε

$f(x-4c)=g(x-3c)=-g(3c-x)$ (γιατί g είναι περιττή)

$=-f(2c-x)=-f(x-2c)$ (αφού f είναι άρτια)

$=-g(x-c)=g(c-x)=f(-x)=f(x)$.

Προκύπτει ότι f περιοδική με περίοδο $4|c|$.

Οι συνθήκες οι παραπάνω δεν εγγυώνται ότι η f έχει ελάχιστη θετική περίοδο. Όταν f είναι η μηδενική σταθερή συνάρτηση, τότε και η g είναι η μηδενική σταθερή συνάρτηση. Η μηδενική σταθερή συνάρτηση είναι και περιττή κι άρτια. Κάθε θετικός πραγματικός είναι μια περίοδος, οπότε δεν υπάρχει ελάχιστη θετική περίοδος.

46. Εάν $z_1, z_2, \dots, z_n$ και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\left|\sum_{\kappa=1}^{n} z_\kappa \overline{w}_\kappa\right|^2 \le \sum_{\kappa=1}^{n}|z_\kappa|^2\sum_{\kappa=1}^{n}|w_\kappa|^2=\sum_{\kappa=1}^{n} z_\kappa\overline{z}_\kappa\sum_{\kappa=1}^{n} w_\kappa\overline{w}_\kappa .$$

Απόδειξη

Θέτουμε $A=\sum_{\kappa=1}^{n}|z_\kappa|^2$, $B=\sum_{\kappa=1}^{n} z_\kappa\overline{w}_\kappa$, $C=\sum_{\kappa=1}^{n}|w_\kappa|^2$.

Τότε A και C είναι πραγματικοί. Πράγματι $A\ge 0$ και $C\ge 0$ αλλά B όχι πραγματικός. Άρα $\overline{A}=A$ και $\overline{B}=\sum_{\kappa=1}^{n}\overline{z}_\kappa w_\kappa$. Τότε

$$0 \le \sum_{\kappa=1}^{n} \left|\overline{B}_{z_\kappa} - A_{w_\kappa}\right|^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} \left(\overline{B}_{z_\kappa} - A_{w_\kappa}\right)\overline{\left(\overline{B}_{z_\kappa} - A_{w_\kappa}\right)} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{n} \left(\overline{B}_{z_\kappa} - A_{w_\kappa}\right)\sum_{\kappa=1}^{n} \left(B_{\bar{z}_\kappa} - A_{\bar{w}_\kappa}\right) = \sum_{\kappa=1}^{n} \left(B\overline{B}_{z_\kappa \bar{z}_\kappa} - A\overline{B}_{z_\kappa \bar{w}_\kappa} - AB_{\bar{z}_\kappa w_\kappa} + A^2{}_{w_\kappa \bar{w}_\kappa}\right) =$$

$$= B\overline{B}A - A\overline{B}B - AB\overline{B} + A^2C = -A|B|^2 + A^2C = A\left(AC - |B|^2\right)$$

που δείχνει ότι εάν $A > 0$ τότε $|B|^2 \le AC$ που είναι η αποδεικτέα. Εάν όμως $A=0$, τότε για κάθε κ, $|z_\kappa| = 0$, $z_\kappa = 0$ και η αποδεικτέα ισχύει αφού όλα τα μέλη της είναι μηδέν.

47. Προσδιορίστε εκείνους τους περιττούς φυσικούς αριθμούς n, έτσι ώστε οι κοινές ρίζες των $f(x) = (x+1)^n - x^n - 1$ και $h(x) = (x+1)^{n-1} - x^{n-1}$ να περιέχουν τις ρίζες του $x^2 + x + 1$.

Λύση

Οι ρίζες του πολυωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι οι μιγαδικές κυβικές ρίζες του 1, δηλαδή $\omega_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ και $\omega_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, όπου

$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 1$, $\omega_1 = \omega_2^2$, $\omega_2 = \omega_1^2$, $\omega_1 + \omega_2 = -1$, $\omega_1\,\omega_2 = 1$

Για να βρούμε για ποιους περιττούς φυσικούς αριθμούς n, ω_1 και ω_2 είναι και οι δύο ρίζες των $f(x)$ και $h(x)$, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$f(\omega_1) = (\omega_1 + 1) - \omega_1^n - 1 = (-\omega_1^2)^n - \omega_1^n - 1 = (-1)^n\,\omega_1^{2n} - \omega_1^n - 1$$

και $$h(\omega_1) = (\omega_1 + 1)^{n-1} - \omega_1^{n-1} - 1 = (-\omega_1^2)^{n-1} - \omega_1^{n-1} = (-1)^{n-1}\,\omega_1^{2n-2} - \omega_1^{n-1}.$$

Κατόπιν διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για τιμές του n:

(i) $n = 6\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbf{N}$. Τότε

$$f(\omega_1) = -\omega_1^{12\kappa+2} - \omega_1^{6\kappa+1} - 1 = -\omega_1^2 - \omega_1 - 1 = -(\omega_1^2 + \omega_1 + 1) = 0,$$

$$h(\omega_1) = \omega_1^{12\kappa} - \omega_1^{6\kappa} = 1 - 1 = 0.$$

(ii) $v = 6\kappa + 3$, $\kappa \in \mathbf{N}$. Τότε

$$f(\omega_1) = -\omega_1^{12\kappa+6} - \omega_1^{6\kappa+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \ne 0,$$

$$h(\omega_1) = \omega_1^{12\kappa+4} - \omega_1^{6\kappa+2} = \omega_1 - \omega_1^2 \ne 0.$$

(iii) $v = 6\kappa + 5$, $\kappa \in \mathbf{N}$. Τότε

$$f(\omega_1) = -\omega_1^{12\kappa+10} - \omega_1^{6\kappa+5} - 1 = -\omega_1 - \omega_1^2 - 1 = 0,$$

$$h(\omega_1) = \omega_1^{12\kappa+8} - \omega_1^{6\kappa+4} = \omega_1^2 - \omega_1 \ne 0.$$

Έχουμε τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα και για την ω_2 και συνεπώς οι ρίζες του x^2+x+1 είναι επίσης ρίζες των $f(x)$ και $h(x)$, τότε και μόνο τότε όταν $\nu=6\kappa+1$, για κάποια τιμή του κ.

48. (α) Δείξτε ότι το ακέραιο πολυώνυμο:

$$\sigma_\nu(x) = x^\nu \eta\mu\alpha - x\,\eta\mu(\nu\alpha) + \eta\mu(\nu-1)\,\alpha$$

όπου α κάποιος πραγματικός αριθμός και ν κάποιος φυσικός $\nu \geq 2$, διαιρείται δια του πολυωνύμου: $\varphi(x) = x^2 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\alpha + 1$.

(β) Δείξτε ότι τα πολυώνυμα:

$$F(x) \equiv 1 - x\,\sigma\upsilon\nu\varphi - x^\nu \sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + x^{\nu+1}\,\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\,\varphi,$$

$$P(x) \equiv x\eta\mu\varphi - x^\nu \eta\mu(\nu\varphi) + x^{\nu+1}\,\eta\mu(\nu-1)\,\varphi$$

διαιρούνται δια του πολυωνύμου $\Phi(x) \equiv 1 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\varphi + x^2$ και να βρεθούν τα αντίστοιχα πηλίκα.

Απόδειξη

(α) Το $\varphi(x) = x^2 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\alpha + 1 = (x^2 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) + \eta\mu^2\alpha =$

$$= (x - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + \eta\mu^2\alpha \Rightarrow \varphi(x) = (x - \sigma\upsilon\nu\alpha + i\,\eta\mu\,\alpha)(x - \sigma\upsilon\nu\alpha - i\,\eta\mu\,\alpha), \quad (\mathrm{I}).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $\sigma_\nu(x)$ διαιρείται με κάθε παράγοντα* του γινομένου (Ι).

Κατ' αρχήν, βάσει του τύπου του Moivre, για $x = \sigma\upsilon\nu\alpha \pm i\eta\mu\alpha$, προκύπτει ότι:

$$x^\nu = \sigma\upsilon\nu\,(\nu\alpha) \pm i\eta\mu(\nu\alpha), \qquad (\mathrm{II}).$$

Επομένως:

$$\sigma_\nu(\sigma\upsilon\nu\alpha \pm i\,\eta\mu\alpha) \overset{(\mathrm{II})}{=} \left[\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha) \pm i\eta\mu(\nu\alpha)\right]\eta\mu\alpha - (\sigma\upsilon\nu\alpha \pm i\,\eta\mu\alpha)\,\eta\mu\,(\nu\alpha) +$$

$$+ \eta\mu\,(\nu\alpha - \alpha) = \sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)\,\eta\mu\alpha \pm i\eta\mu(\nu\alpha)\,\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu(\nu\alpha) \mp \eta\mu\alpha \cdot i\eta\mu(\nu\alpha) +$$

$$+ \eta\mu(\nu\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\,\alpha - \sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)\cdot\eta\mu\alpha = 0.$$

Συμπέρασμα. Το $\varphi(x)$ διαιρεί το $\sigma_\nu(x)$.

(β) Οι ρίζες του $\Phi(x)$ είναι $p = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi$ και $\overline{p} = \sigma\upsilon\nu\varphi - i\eta\mu\varphi$.

Θέτουμε $\Pi(x) \equiv F(x) + iP(x)$ και έχουμε:

$$\Pi(x) \equiv 1 - x\,\sigma\upsilon\nu\varphi - x^\nu\,\sigma\upsilon\nu\,(\nu\varphi) + x^{\nu+1}\sigma\upsilon\nu\,(\nu-1)\,\varphi + ix\,\eta\mu\varphi - ix^\nu\,\eta\mu(\nu\varphi) +$$

$$+ ix^{\nu+1}\,\eta\mu(\nu-1)\,\varphi = 1 - x\,(\sigma\upsilon\nu\varphi - i\eta\mu\varphi) - x^\nu\left[\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi)\right] +$$

$$+ x^{\nu+1}\left[\sigma\upsilon\nu\,(\nu-1)\,\varphi + i\eta\mu\,(\nu-1)\,\varphi\right].$$

(*) Πρέπει απαραιτήτως οι ρίζες του $\varphi(x)$ νάναι διακεκριμένες.

Όμως $\sigma\upsilon\nu\varphi - i\eta\mu\varphi = \overline{p}$, $\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\eta\mu(\nu\varphi) = p^{\nu}$,
$\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\varphi + i\eta\mu(\nu-1)\varphi = p^{\nu-1}$.
Επομένως $\Pi(x) \equiv 1 - \overline{p}x - p^{\nu}x^{\nu} + p^{\nu-1}x^{\nu+1}$ ή
$$\Pi(x) \equiv 1 - \overline{p}x - p^{\nu}x^{\nu} + p^{\nu}\cdot\overline{p}\cdot x^{\nu+1} = 1 - \overline{p}x - p^{\nu}x^{\nu}(1-\overline{p}x) = (1-\overline{p}x)\cdot(1-p^{\nu}x^{\nu}) =$$
$$= (1-\overline{p}x)\cdot(1-px)\cdot(1+px+p^2x^2+\ldots+p^{\nu-1}x^{\nu-1}).$$
Όμως $(1-\overline{p}x)\cdot(1-px) \equiv \Phi(x)$. Επομένως
$$\Pi(x) \equiv \Phi(x)\,(1+px+p^2x^2+\ldots+p^{\nu-1}x^{\nu-1}) =$$
$$= \Phi(x)\left\{1+(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)x+(\sigma\upsilon\nu2\varphi+i\eta\mu2\varphi)x^2+\ldots+\left[\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\varphi+i\eta\mu(\nu-1)\varphi\right]\right\} =$$
$$= \Phi(x)\left[1+x\,\sigma\upsilon\nu\varphi+x^2\sigma\upsilon\nu2\varphi+\ldots+x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\varphi+i\,(x\,\eta\mu\varphi+x^2\eta\mu2\varphi+\ldots+\right.$$
$$\left.+x^{\nu-1}\eta\mu(\nu-1)\varphi\right]$$
και αν θέσουμε $Q(x) \equiv 1+x\,\sigma\upsilon\nu\varphi+x^2\sigma\upsilon\nu2\varphi+\ldots+x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\varphi$
και $Q'(x) \equiv x\,\eta\mu\varphi+x^2\eta\mu2\varphi+\ldots+x^{\nu-1}\eta\mu(\nu-1)\varphi$, έχουμε
$$F(x)+iP(x) = \Phi(x)\left[Q(x)+iQ'(x)\right] = \Phi(x)\,Q(x)+i\Phi(x)\,Q'(x) \Rightarrow F(x) = \Phi(x)\,Q(x)$$
και $P(x) = \Phi(x)\,Q'(x) \Rightarrow \Phi(x)/F(x)$ και $\Phi(x)/P(x)$.
Τα πηλίκα των διαιρέσεων είναι αντίστοιχα τα $Q(x)$, $Q'(x)$.

49. Εάν η συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to R$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\,e^{f(x)} = x$, για όλα τα x του πεδίου ορισμού της, δείξτε ότι:
(α) Η συνάρτηση f είναι μονότονος σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της.
(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} = 1$.

Λύση
(α) Αφού $f(x)\,e^{f(x)} = x \geq 0$, έχουμε $f(x) \geq 0$. Η συνάρτηση με τιμή $y e^{y}$ είναι προφανώς αύξουσα για $y \geq 0$ και αυξάνει από το 0 στο $+\infty$ στο $[0, +\infty)$. Άρα η f ορίζεται μοναδικά για κάθε x.
Τώρα $f(x) < f(x_1) \Rightarrow x = f(x)\,e^{f(x)} < f(x_1)\,e^{f(x_1)} = x_1$.
Επίσης $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Απ' αυτό συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Η ανισότητα $e^{x} \geq x+1$ ισχύει για όλα τα $x \geq 0$. Άρα

$x = f(x)\, e^{f(x)} \le \left(e^{f(x)} - 1\right) e^{f(x)} < e^{2f(x)}$ και άρα $f(x) > \frac{1}{2}\ln x$ για $x>0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Παρατηρούμε ότι $\dfrac{f(x)}{\ln x} = \dfrac{f(x)}{f(x)+\ln f(x)} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}}$, οπότε για να δείξουμε ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\ln x} = 1$ αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln f(x)}{f(x)} = 0$.

Αλλά $f(x) \to +\infty$ όταν $x \to +\infty$ και $\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y} = 0$.

Άρα, προκύπτει ότι $f(x) \approx \ln x$.

50. Για όλους τους φυσικούς αριθμούς n, έχουμε το πολυώνυμο:

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση $P_n(x) = 0$ έχει μία και μόνο μία ρίζα C_n στα (0 , 1).

(β) Βρείτε το $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n$.

Λύση

(α) Αφού $P_n'(x) = (n+2)x^{n+1} - 2$, το μόνο κρίσιμο σημείο του $P_n(x)$ στο (0, 1) είναι το $K_n = \left(\dfrac{2}{n+2}\right)^{\frac{1}{n+1}}$.

Επιπλέον, $P_n(K_n)$ είναι το απόλυτο ελάχιστο του $P_n(x)$ στο [0, 1], αφού $P_n(x)$ είναι φθίνουσα στο $(0,\ K_n)$ και αύξουσα στο $(K_n,\ 1)$.

Αλλά $P_n(1) = 0$ και άρα πρέπει να έχουμε $P_n(K_n)<0$.

Αφού $P_n(0) = 1$, από το θεώρημα της Μέσης τιμής έχουμε ότι υπάρχει $C_n \in (0,\ K_n)$ έτσι ώστε $P_n(C_n) = 0$. Το ότι το C_n είναι μοναδικό προκύπτει από την παραπάνω ανάλυση που αφορά τη μονοτονία του $P_n(x)$ στο [0, 1].

(β) Έστω α έτσι ώστε $0 < \alpha < 1$. Τότε

$$\lim_{n\to+\infty} P_n\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{n+2} - \alpha = -\alpha < 0.$$

Αφού $P_n\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}>0$, πρέπει να είναι αληθές ότι $\frac{1}{2}<C_n<\frac{1+\alpha}{2}$ για όλα τα αρκετά μεγάλα n.

Για $\alpha\to 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} C_n=\frac{1}{2}$.

Παρατήρηση. Χρησιμοποιώντας ακριβώς το ίδιο επιχείρημα, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $\kappa\geq 2$, το πολυώνυμο $P_n(x)=x^{n+\kappa}-\kappa x+(\kappa-1)$ έχει μια μοναδική ρίζα C_n στο (0, 1) και $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n=\frac{1}{\kappa}$.

51. Να λυθεί η εξίσωση $x^3-[x]=3$, όπου, ως συνήθως, το [x] συμβολίζει το ακέραιο μέρος του αριθμού x.

Λύση

Θα συμβολίσουμε με {x} το «δεκαδικό μέρος» ή «κλασματικό μέρος» του αριθμού x: $\{x\}=x-[x]$. Είναι προφανές ότι $0\leq\{x\}<1$ και $[x]=x-\{x\}$. Άρα η αρχική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$x^3-\left(x-\{x\}\right)=3 \quad \text{δηλ.} \quad x^3-x=3-\{x\}$$

απ' όπου έχουμε ότι $2<x^3-x\leq 3$.

Για $x\geq 2$, έχουμε $x^3-x=x\,(x^2-1)\geq 2(4-1)=6>3$.

Για $x=-1$, έχουμε $x^3-x=0<2$.

Για $-1<x\leq 0$, έχουμε $x^3-x\leq -x<1$ και

για $0<x\leq 1$, έχουμε $x^3-x<x^3\leq 1$.

Άρα πρέπει $1<x<2 \Rightarrow [x]=1$.

Τώρα η αρχική εξίσωση μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$x^3-1=3 \Leftrightarrow x^3=4$ δηλαδή $x=\sqrt[3]{4}$.

Άρα, $x=\sqrt[3]{4}$ δεν είναι τίποτ' άλλο παρά η μοναδική λύση του προβλήματος.

52. Υπολογίστε τον αριθμό των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$\mathbf{x^2+2x\,\eta\mu x-3\,\sigma\upsilon\nu x=0}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $x^2+2x\,\eta\mu x-3\,\sigma\upsilon\nu x$ είναι μια άρτια συνάρτηση του x, άρα περιοριζόμαστε σε μη αρνητικούς πραγματικούς. Έστω x μια λύση της εξίσωσης. Αφού $\left|\alpha\,\eta\mu x+\beta\,\sigma\upsilon\nu x\right|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\left|\eta\mu\,(x+\theta)\right|\leq\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, όπου $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ και $\eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, έχουμε

$x^4 = \left|2x\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x\right|^2 \le (2x)^2 + 3^2$, οπότε $(x^2-2)^2 \le 13 < 6$ και $x^2 < 2+4 < 9$.

Άρα $\left|x\right| < 3 < \pi$.

Τώρα εάν $\dfrac{\pi}{2} \le x < \pi$, τότε για $\dfrac{\pi}{2} \le x < \pi$, $x^2 + 2x\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x \ge \dfrac{\pi}{2} + 0 + 0 > 0$ δηλαδή 0>0, άτοπο.

Συνεπώς $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Θέτουμε $f(x) = x^2 + 2x\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x$.

Τότε $f'(x) = 2x + 5\eta\mu x + 2x\sigma\upsilon\nu x > 0$ για $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Αφού $f(0) = -3 < 0 < \dfrac{\pi^2}{4} + \pi = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ και η f είναι συνεχής, βρίσκουμε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Άρα, η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, μία στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ και μία στο $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

53. PQ είναι μια μεταβλητή χορδή της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ και O είναι η αρχή. Εάν η $\widehat{POQ}$ είναι πάντα ορθή και ON κάθετος στην PQ, βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του N.

Λύση

Έστω ότι η εξίσωση της PQ σε μια από τις θέσεις της είναι $x\sigma\upsilon\nu\alpha + y\eta\mu\alpha = p$, έτσι ώστε ON=p. Θεωρούμε τις συντεταγμένες του P· αυτές ικανοποιούν τη συνθήκη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ γιατί P ανήκει στην έλλειψη και επίσης ικανοποιείται η $\dfrac{x\sigma\upsilon\nu\alpha + y\eta\mu\alpha}{p} = 1$, γιατί P βρίσκεται στην ευθεία $x\sigma\upsilon\nu\alpha + y\eta\mu\alpha = p$. Άρα οι συντεταγμένες του P, και όμοια εκείνες του Q, ικανοποιούν αυτή την ομογενή εξίσωση β′ βαθμού ως προς x και y:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{x\sigma\upsilon\nu\alpha+y\eta\mu\alpha}{p}\right)^2$$

ή $$\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{p^2}\right)x^2-\frac{2xy\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\alpha}{p^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\eta\mu^2\alpha}{p^2}\right)y^2=0. \qquad (1)$$

Αυτή έχει παράγοντα της μορφής:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\eta\mu^2\alpha}{p^2}\right)(y-m_1x)\;(y-m_2x)=0 \qquad (2)$$

που αντιπροσωπεύει ένα ζεύγος ευθειών που περνούν από την αρχή O, ας πούμε OP και OQ. Αλλά OP και OQ βρίσκονται σε ορθή γωνία $\Rightarrow\; m_1\cdot m_2=-1$.

Άρα, εξισώνοντας τους συντελεστές του x^2 στις (1) και (2), παίρνουμε:

$$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{p^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\eta\mu^2\alpha}{p^2}\right)m_1m_2=-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\eta\mu^2\alpha}{p^2}\right)$$

δηλαδή $\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{b^2}\right)=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{p^2}=\frac{1}{p^2}$. Άρα $p^2=\frac{\alpha^2b^2}{\alpha^2+b^2}$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος του N είναι ο κύκλος $X^2+Y^2=\frac{\alpha^2b^2}{\alpha^2+b^2}$.

54. Έστω f μια άρτια, παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $f'(0)=0$.

Απόδειξη

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

και αυτό το όριο υπάρχει. Κάνουμε την αλλαγή της μεταβλητής $h=-t$ Τότε, καθώς $h\to 0$ και $t\to 0$, μπορούμε να γράψομε

$$f'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(-t)-f(0)}{-t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-f'(0)$$

και συνεπώς $f'(0)=0$.

55. Αν $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ και $\alpha,\beta\geq 0$ τότε $\alpha^{\frac{1}{p}}\cdot\beta^{\frac{1}{q}}\leq\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}$ (1)

Απόδειξη

Έστω $f\colon [0,+\infty)\to\mathbf{R}$ με $f(t)=t^u-ut+u-1$, όπου $0<u<1$.

Τότε $f'(t)=u\,(t^{u-1}-1)$, έτσι ώστε $f(1)=0$, $f'(1)=0$, $f'(t)>0$ αν $0<t<1$ και $f'(t)<0$ αν $t>1$. Συνεπώς $f(t)\leq 0$ για $t\geq 0$.

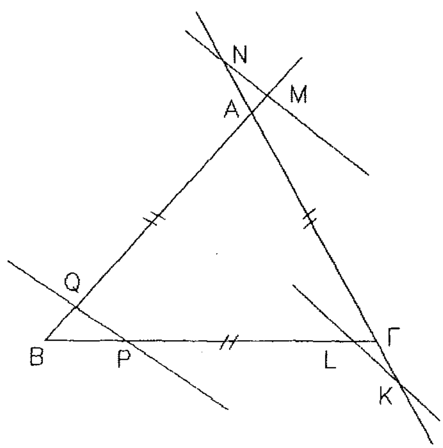
Η ανισότητα (1) προφανώς ισχύει για $\beta=0$. Για $\beta>0$ θέτουμε $t=\frac{\alpha}{\beta}$ και $u=\frac{1}{p}$.

Τότε, $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{p}}-\frac{1}{p}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{p}-1\le 0$.

Πολλαπλασιάζοντας με β και χρησιμοποιώντας την $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ παίρνουμε την (1).

56. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις ημιευθείες ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, ΒΑ, ΓΑ και ΓΒ παίρνομε αντίστοιχα τα σημεία Q, K, L, M, N και P έτσι ώστε AQ=ΓΡ=ΑΓ, AK=BL=AB και BM=ΓΝ=ΒΓ. Δείξτε ότι οι ευθείες MN, PQ και LK είναι παράλληλες.

Απόδειξη



Σχήμα

Συμβολίζουμε με a, b και c τα τμήματα ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ. Τότε έχουμε

$$\vec{MN}=\vec{MB}+\vec{B\Gamma}+\vec{\Gamma N}=\frac{a}{c}\vec{AB}+\vec{B\Gamma}+\frac{a}{b}\vec{\Gamma A}=a\left(\frac{1}{c}\vec{AB}+\frac{1}{a}\vec{B\Gamma}+\frac{1}{b}\vec{\Gamma A}\right)=a\vec{P}.$$

Όμοια παίρνουμε: $\vec{PQ}=b\vec{P}$ και $\vec{KL}=c\vec{P}$, απ' όπου προκύπτει το αποδεικτέο.

57. Δείξτε ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2$ εφάπτεται της υπερβολής xy=pq στα σημεία (p, q), (-p, -q). Εάν η εφαπτομένη στην έλλειψη σ' ένα σημείο αυτής P

συναντά την υπερβολή στα R και S, δείξτε ότι οι εφαπτόμενες στην υπερβολή στα R και S συναντώνται σ' ένα σημείο Q της έλλειψης.

Δείξτε επίσης ότι εάν η εφαπτομένη στο Q προς την έλλειψη συναντά την υπερβολή στα U και V, τότε PU και PV είναι οι εφαπτόμενες στην υπερβολή στα U και V.

Απόδειξη

Λύνοντας ως προς x τις εξισώσεις, έχουμε:

$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=2$ και xy=pq, συνεπώς $\frac{x^2}{p^2}+\frac{p^2}{x^2}=2$ δηλαδή x=p ή -p και y=q ή -q,

δηλαδή η καμπύλη εφάπτεται στα (p, q), (-p, -q).

Κάθε σημείο της υπερβολής μπορεί να εκφραστεί στη μορφή: $x = pt,\quad y=\frac{q}{t}$.

Παίρνουμε το σημείο P στην έλλειψη ως $\left(\sqrt{2}\ p\,\text{συν}\alpha,\ \sqrt{2}\ q\,\text{ημ}\alpha\right)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο P θα είναι:

$$\frac{x\sqrt{2}\ \text{συν}\alpha}{p}+\frac{y\sqrt{2}\ \text{ημ}\alpha}{q}=2 \quad \text{ή} \quad \frac{x\,\text{συν}\alpha}{p}+\frac{y\,\text{ημ}\alpha}{q}=\sqrt{2}.$$

Αυτή θα συναντά την υπερβολή στα σημεία:

$R\left(pt_1,\ \frac{q}{t_1}\right)$ και $S\left(pt_2,\ \frac{q}{t_2}\right)$, όπου t_1 και t_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$\frac{pt\,\text{συν}\alpha}{p}+\frac{q\ \text{ημ}\alpha}{tq}=\sqrt{2} \quad \text{ή} \quad t^2\text{συν}\alpha-\sqrt{2}\ t+\text{ημ}\alpha=0. \qquad (1)$$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής στα R και S βρίσκουμε ότι είναι:

$$x\frac{q}{t_1}+y\ pt_1=2pq \quad \text{και} \quad x\frac{q}{t_2}+y\ pt_2=2pq.$$

Λύνοντάς τις για να βρούμε το σημείο τομής τους Q (X, Y), παίρνουμε:

$$X=\frac{2pt_1t_2}{t_1+t_2},\qquad Y=\frac{2q}{t_1+t_2}. \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι το Q βρίσκεται στην έλλειψη. Από την (1), έχουμε

$t_1+t_2=\frac{\sqrt{2}}{\text{συν}\alpha}$, $\quad t_1t_2=\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}$, οπότε από τη (2) παίρνουμε:

$$X=\sqrt{2}\ p\,\text{ημ}\alpha,\qquad Y=\sqrt{2}\ q\,\text{συν}\alpha,\qquad \frac{X^2}{p^2}+\frac{Y^2}{q^2}=2$$

δηλαδή το Q βρίσκεται στην έλλειψη. Η εφαπτομένη στην έλλειψη στο Q είναι:

$$\frac{x\sqrt{2}\ \text{ημ}\alpha}{p}+\frac{y\sqrt{2}\ \text{συν}\alpha}{q}=2 \quad \text{ή} \quad \frac{x\ \text{ημ}\alpha}{p}+\frac{y\ \text{συν}\alpha}{q}=\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Για να βρούμε πού συναντά αυτή την υπερβολή, θέτουμε: $x = pu$, $y = \frac{q}{u}$ στην (3) και παίρνουμε την β'θμια εξίσωση:

$$u^2 \eta\mu\alpha - \sqrt{2}\, u + \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \qquad (4)$$

με ρίζες u_1 και u_2. Οπότε η εφαπτομένη στο Q της έλλειψης συναντά την υπερβολή σε δύο σημεία:

$U\left(pu_1, \frac{q}{u_1}\right)$, $V\left(pu_2, \frac{q}{u_2}\right)$, όπου από την (4) θα έχουμε

$$u_1 + u_2 = \frac{\sqrt{2}}{\eta\mu\alpha}, \qquad u_1 u_2 = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}. \qquad (5)$$

Τώρα, όπως προηγουμένως, οι εφαπτόμενες στην υπερβολή στα σημεία U και V τέμνονται στο σημείο: $\left(\frac{2pu_1u_2}{u_1+u_2}, \frac{2q}{u_1+u_2}\right)$ που από την (5) είναι το σημείο: $\left(\sqrt{2}\ p\, \sigma\upsilon\nu\alpha, \ \sqrt{2}\ q\, \eta\mu\alpha\right)$ δηλαδή το P.

Άρα PU και PV είναι εφαπτόμενες στην υπερβολή στα U και V.

58. Α, Β είναι δύο σημεία στην ορθογώνια υπερβολή $xy = c^2$. Ο κύκλος με διάμετρο ΑΒ τέμνει την υπερβολή ξανά στα C, D. Δείξτε ότι CD περνά από την αρχή. Η ΑΒ συναντά τη CD στο P. Δείξτε ότι εάν ΑΒ μεταβάλλεται αλλά περνά πάντα από ένα σταθερό σημείο (h, κ) τότε το P βρίσκεται στην υπερβολή:

$$x(x-h) - y(y-\kappa) = 0.$$

Απόδειξη

Ας είναι Α, Β τα σημεία: $\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right)$, $\left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$ στην υπερβολή. Υποθέτουμε ότι C είναι το σημείο: $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$.

Τότε από τις δοσμένες συνθήκες, CA και CB τέμνονται καθέτως, έτσι ώστε:

$$\frac{\frac{c}{t} - \frac{c}{t_1}}{ct - ct_1} \cdot \frac{\frac{c}{t} - \frac{c}{t_2}}{ct - ct_2} = -1$$ που μετά από απλοποίηση γίνεται: $t^2 = -\frac{1}{t_1 t_2}$ (1).

Έστω ότι παίρνουμε τις τιμές του t απ' αυτή και ας είναι αυτές T_1 και T_2, έτσι ώστε C θα είναι το σημείο $\left(cT_1, \frac{c}{T_1}\right)$ και D το σημείο $\left(cT_2, \frac{c}{T_2}\right)$.

Η ευθεία CD θα περνά από την αρχή O εάν OC και OD έχουν την ίδια κλίση.

Αυτό θα είναι αληθές εάν: $\dfrac{\frac{c}{T_1}}{cT_1} = \dfrac{\frac{c}{T_2}}{cT_2}$ δηλαδή εάν $T_1^2 = T_2^2$, το αληθές του οποίου προκύπτει από την (1).

Άρα η εξίσωση της CD θα είναι: $y = \dfrac{x}{T_1^2} = -t_1 t_2 x$. (2)

Η εξίσωση της AB είναι: $\dfrac{y - \frac{c}{t_1}}{\frac{c}{t_1} - \frac{c}{t_2}} = \dfrac{x - ct_1}{ct_1 - ct_2}$, που καταλήγει στην

$yt_1t_2 + x - c(t_1 + t_2) = 0$. (3)

Αφού η AB περνά από το σταθερό σημείο (h, κ):

$\kappa t_1 t_2 + h - c(t_1 + t_2) = 0$. (4)

Λύνοντας τις (2) και (3) ως προς x και y παίρνουμε X και Y τις συντεταγμένες του P, που είναι το σημείο όπου η AB συναντά τη CD. Αυτές είναι:

$X = \dfrac{c(t_1 + t_2)}{1 - t_1^2 t_2^2}$ (5) , $Y = -t_1 t_2 X$ (6).

Παίρνουμε τον γεωμετρικό τόπο του P με απαλοιφή των $t_1 t_2$ και $t_1 + t_2$ από τις (4), (5) και (6).

Από την (5): $c(t_1 + t_2) = X(1 - t_1^2 t_2^2) \overset{(6)}{=} X\left(1 - \dfrac{Y^2}{X^2}\right) = X - \dfrac{Y^2}{X}$.

Αντικαθιστώντας στην (4), έχουμε: $-\kappa\dfrac{Y}{X} + h - \left(X - \dfrac{Y^2}{X}\right) = 0$,

δηλαδή $X^2 - Y^2 - Xh + Y\kappa = 0$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος του P είναι η υπερβολή: $x(x - h) - y(y - \kappa) = 0$.

59. Η παραβολή $y^2 = 4ax$ και η υπερβολή $4xy = a^2$ τέμνονται στο P. Η κοινή τους εφαπτομένη εφάπτεται της παραβολής στο Q και της υπερβολής στο R. Δείξτε ότι PR είναι εφαπτομένη της παραβολής στο P και ότι QP είναι εφαπτομένη της υπερβολής στο P.

Απόδειξη

Κάθε σημείο της παραβολής έχει συντεταγμένες $(at^2, 2at)$ και κάθε σημείο της υπερβολής έχει συντεταγμένες $\left(a\dfrac{T}{2}, \dfrac{a}{2T}\right)$.

Εύκολα βλέπομε ότι P είναι το σημείο $\left(\frac{\alpha}{4}, \alpha\right)$. Έστω ότι η κοινή εφαπτομένη στην παραβολή κι υπερβολή τις συναντά στα σημεία "t" και "T", αντίστοιχα. Τότε, από την παραβολή, η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης θα είναι:

$y - \frac{1}{t} \cdot x - \alpha t = 0.$

Αλλά από την υπερβολή, η εξίσωση θα είναι: $y + \frac{x}{T^2} - \frac{\alpha}{T} = 0.$

Καθώς αυτές ταυτίζονται $\Rightarrow$ $-\frac{1}{t} = \frac{1}{T^2}$ και $t = \frac{1}{T}$, συνεπώς $T^2 = -\frac{1}{T}$ δηλαδή $T = -1 \Rightarrow t = -1.$

Άρα Q είναι το σημείο $(\alpha, -2\alpha)$ και R το σημείο $\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2}\right)$, επομένως η εξίσωση της PR είναι: $\frac{y-\alpha}{\alpha+\frac{\alpha}{2}} = \frac{x-\frac{\alpha}{4}}{\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{2}}$ ή $y = 2x + \frac{\alpha}{2}$, η εξίσωση της εφαπτομένης στο P της παραβολής.

Τώρα η εξίσωση της QP είναι: $\frac{x-\alpha}{\alpha-\frac{\alpha}{4}} = \frac{y+2\alpha}{-2\alpha-\alpha}$ ή $y + 4x - 2\alpha = 0$ θα είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο P.

60. Εάν f συμβολίζει τη συνάρτηση που δίνει το συν17x συναρτήσει του συνx, δηλαδή συν17x=f (συνx), δείξτε ότι είναι η ίδια συνάρτηση f που δίνει το ημ17x συναρτήσει του ημx, δηλαδή ημ17x=f (ημx).

Απόδειξη

Έστω $x = \frac{\pi}{2} - y$. Τότε ημx=συνy και

$ημ17x = ημ\left[17\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right] = ημ\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - 17y\right) = ημ\left(\frac{\pi}{2} - 17y\right) =$

$= συν17y = f(συνy) = f(ημx).$

Σχόλιο

Παρατηρούμε ότι εδώ το 17 μπορεί να αντικατασταθεί με έναν οποιονδήποτε ακέραιο της μορφής 4κ+1.

Πραγματικά:

$$\eta\mu(4\kappa+1)x = \eta\mu\left[(4\kappa+1)\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right] = \eta\mu\left(2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-(4\kappa+1)y\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-(4\kappa+1)y\right) =$$
$$= \sigma\upsilon\nu(4\kappa+1)y = f(\sigma\upsilon\nu y) = f(\eta\mu x).$$

61. Δείξτε ότι $3^{\nu} > \nu^4$ $(\nu = 8, 9, \ldots)$.

Απόδειξη

Για ν=8, πράγματι ισχύει $3^8 > 8^4$ γιατί 6561 > 4096. Υποθέτουμε ότι είναι αληθής η ανισότητα (1) : $3^{\kappa} > \kappa^4$, $(\kappa \geq 8)$.

Αν είναι αληθής και η ανισότητα (2) : $3 > \dfrac{(\kappa+1)^4}{\kappa^4}$, $(\kappa \geq 8)$,

τότε, πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες (1) και (2) κατά μέλη, παίρνουμε $3^{\kappa+1} > (\kappa+1)^4$, $(\kappa \geq 8)$.

Αποδεικνύουμε τώρα την ανισότητα (2). Για το λόγο αυτό ξεκινάμε από την ταυτότητα $\dfrac{(\kappa+1)^4}{\kappa^4} = \left(1+\dfrac{1}{\kappa}\right)^4 = 1+\dfrac{4}{\kappa}+\dfrac{6}{\kappa^2}+\dfrac{4}{\kappa^3}+\dfrac{1}{\kappa^4}$.

Επειδή είναι $\dfrac{4}{\kappa}+\dfrac{6}{\kappa^2}+\dfrac{4}{\kappa^3} < 1$ (όταν κ=6, 7, ...), παίρνουμε ότι $\dfrac{(\kappa+1)^4}{\kappa^4} < 3$ (κ=6, 7, ...). Άρα η ανισότητα (2) ισχύει για $\kappa \geq 6$ και συνεπώς η δεδομένη σχέση ισχύει για κ=8, 9, ...

62. Εκφράστε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix}$$

ως γινόμενο δύο αλγεβρικών παραγόντων. Εάν a, b και c είναι πραγματικοί αριθμοί έτσι ώστε a+b+c=0, δείξτε ότι η ορίζουσα είναι μηδέν. Αντίστροφα, δείξτε ότι εάν a, b και c είναι πραγματικοί, όχι όλοι ίσοι και αν η ορίζουσα είναι μηδέν, τότε a+b+c=0.

Απόδειξη

Προσθέτοντας τη β′ και γ′ γραμμή στην α′, παίρνουμε:

$$\begin{vmatrix} 2a+2b+2c & 2a+2b+2c & 2a+2b+2c \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} =$$

$$= (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ b+c & a-b & a-c \\ c+a & b-c & b-a \end{vmatrix} = \left(\begin{matrix}\text{αφαιρώντας την α΄ στήλη} \\ \text{από τις άλλες δύο}\end{matrix}\right)$$

$$= (2a+2b+2c)\begin{vmatrix} a-b & a-c \\ b-c & b-a \end{vmatrix} = (2a+2b+2c)\ (ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$$

$$= -(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

Εάν a+b+c=0, ο πρώτος απ' αυτούς τους δύο παράγοντες είναι μηδέν και άρα η ορίζουσα είναι μηδέν. Αντίστροφα, εάν η ορίζουσα είναι μηδέν, τότε είτε a+b+c=0, είτε $\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0$.

Εάν $\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]=0 \iff a=b=c$, αδύνατο γιατί $a \neq b \neq c \neq a$, οπότε a+b+c=0.

63. (i) Δείξτε ότι $2\eta\mu h^2 x = \sigma\upsilon\nu h2x - 1$(*) και χρησιμοποιήστε αυτή τη σχέση για να ολοκληρώσετε την $\eta\mu h^4 x$ ως προς x.

(ii) Υπολογίστε τα $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ και $I_2 = \int_0^2 xe^x\,dx$.

Λύση

(i) $2\eta\mu h^2 x = 2\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]^2 = \frac{1}{2}(e^{2x}-2+e^{-2x}) = \frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})-1 = \sigma\upsilon\nu h2x - 1.$

(*) Υπενθύμιση

$\sinh x = \text{sh}x \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\ x\in R$, $\cosh x = \text{ch}x \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\ x\in R$

$\tanh x = \text{tg}hx \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} \equiv \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\ x\in R$, $\coth x = \text{ctg}hx \underset{\text{ορσ}}{=} \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} \equiv \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},\ x\in R^*$.

$$\int \eta\mu h^4 x = \int \left[\frac{1}{2}\ (\sigma\upsilon\nu h2x - 1)\right]^2\ dx = \left(\begin{matrix}\text{χρησιμοποιώντας}\\ \text{την παραπάνω σχέση}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \int \left(\sigma\upsilon\nu h^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu h2x + 1\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ \int \left(\eta\mu h^2 2x - 2\sigma\upsilon\nu h2x + 2\right)\ dx = \left(\begin{matrix}\text{αφού}\\ \sigma\upsilon\nu h^2 x - \eta\mu h^2 x = 1\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \int \left[\frac{1}{2}\ \left(\sigma\upsilon\nu h4x - 1\right) - 2\sigma\upsilon\nu h2x + 2\right]\ dx = \left(\begin{matrix}\text{ξανά χρησιμοποιώντας}\\ \text{την παραπάνω σχέση}\end{matrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ \int \left(\frac{1}{2}\ \sigma\upsilon\nu h4x - 2\sigma\upsilon\nu h2x + \frac{3}{2}\right)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\ \eta\mu h4x - \eta\mu h2x + \frac{3x}{2}\right) + c, \quad \text{όπου } c = \text{σταθερά}.$$

Συνεπώς: $\int \eta\mu h^4 x\, dx = \frac{1}{32}\ \eta\mu h4x - \frac{1}{4}\ \eta\mu h2x + \frac{3x}{8} + c$.

(ii) Έστω $x = \alpha\,\eta\mu\theta \Rightarrow dx = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$ και όταν $x=0$ τότε $\theta=0$ και όταν $x = \frac{1}{2} \cdot \alpha$ τότε $\theta = \frac{\pi}{6}$. Άρα:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\alpha} x^2\ \sqrt{\alpha^2 - x^2}\ \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \alpha^2 \eta\mu^2\theta \cdot \alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\alpha \cdot \alpha\,\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta =$$

$$= \alpha^4\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta\, d\theta = \frac{\alpha^4}{4}\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2 2\theta\, d\theta = \frac{\alpha^4}{4}\ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 4\theta}{2}\ d\theta =$$

$$= \frac{\alpha^4}{8}\ \left[\theta - \frac{\eta\mu 4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\alpha^4}{8}\ \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{\alpha^4}{192}\ \left(4\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

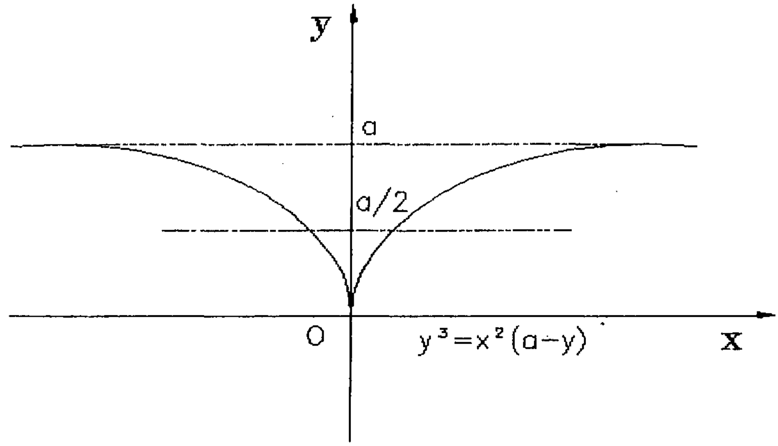
Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε:

$$I_2 = \int_0^2\ xe^x\ \ dx = \left[xe^x - \int 1e^x\, dx\right]_0^2 = \left[xe^x - e^x\right]_0^2 = e^2 - (-1) = e^2 + 1.$$

64. Να γίνει περίπου η γραφική παράσταση της καμπύλης $y^3 = x^2(\alpha - y)$ και να υπολογιστεί το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και της ευθείας y=α. Επίσης να βρεθεί ο λόγος που διαιρείται αυτό το εμβαδόν από την ευθεία 2y=α.

Λύση

$$\text{Εμβαδόν} = 2\int_0^{y=\alpha} x\,dy = 2\int_0^{\alpha} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\alpha - y}}\,dy.$$



Σχήμα

Έστω $y = \alpha\eta\mu^2\theta$· τότε $dy = 2\alpha\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta\,d\theta$ και όταν y=0 τότε θ=0 και όταν y=α τότε $\theta = \frac{\pi}{2}$. Επομένως,

$$\text{Εμβαδόν} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\alpha^2\eta\mu^4\theta\,d\theta = \alpha^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 - 2\sigma\upsilon\nu2\theta + \frac{1}{2}\left(\sigma\upsilon\nu4\theta + 1\right)\right]d\theta =$$

$$= \alpha^2\left[\frac{3\theta}{2} - \eta\mu2\theta + \frac{1}{8}\eta\mu4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \alpha^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi\alpha^2}{4}.$$

Όταν $y = \frac{\alpha}{2}$ τότε $\theta = \frac{\pi}{4}$. Άρα το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και της ευθείας 2y=α είναι $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\alpha^2\eta\mu^4\theta\,d\theta$.

Άρα το εμβαδόν μεταξύ της καμπύλης και της ευθείας 2y=α είναι

$$\alpha^2\left[\frac{3\theta}{2} - \eta\mu2\theta + \frac{1}{8}\eta\mu4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \alpha^2\left(\frac{3\pi}{8} - 1\right).$$

Συνεπώς η ευθεία 2y=α διαιρεί το σχηματισμένο εμβαδόν σε λόγο

$$\left[\frac{\alpha^2}{8}(3\pi - 8)\right] : \left[\frac{3\pi\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{8}(3\pi - 8)\right] \text{ δηλαδή } (3\pi - 8) : (3\pi + 8).$$

65. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που ορίζεται από τις ρίζες (στο διάγραμμα Argand) της εξίσωσης

$$\mathbf{z^3 + (-1+i)\,z^2 + (1-i)\,z + i = 0}$$

Λύση

Παρατηρώντας, βλέπουμε ότι $z_1 = -i$ είναι μια ρίζα, αφού

$(-i)^3 + (-1+i)(-i)^2 + (1-i)(-i) + i = -i^3 + (-1+i)(-i) - i + i^2 + i = i + 1 - i - i - 1 + i = 0.$

Διαιρώντας δια $z+i$ βρίσκουμε ότι:

$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = (z+i)\ (z^2 - z + 1).$

Άρα οι άλλες δύο ρίζες είναι $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$, $z_3 = \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$. Οι ρίζες z_1, z_2, z_3 έχουν όλες απόλυτη τιμή 1. Άρα ο κύκλος είναι ο $|z| = 1$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$z^3 + (-1+i)z^2 + (1-i)z + i = 0 \iff z^3 - z^2 + z + iz^2 - iz + i = 0 \iff$

$\iff z\,(z^2 - z + 1) + i\,(z^2 - z + 1) = 0 \iff (z+i)\,(z^2 - z + 1) = 0 \iff$

$\iff z_1 = -i,\ z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\ z_3 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}.$

Παρατηρούμε ότι $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, άρα τα αντίστοιχα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο θα ανήκουν στον κύκλο (c): $x^2 + y^2 = 1$.

66. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} - \varepsilon\varphi\sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}}{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_2 x + \beta_2} - \varepsilon\varphi\sqrt{\beta_2 x + \alpha_2}} = \frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_2 - \beta_2} \cdot \frac{\sqrt{\alpha_2 + \beta_2}}{\sqrt{\alpha_1 + \beta_1}} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_2 + \beta_2}}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1 + \beta_1}}.$$

Απόδειξη

Έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} - \varepsilon\varphi\sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\eta\mu\left(\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} - \sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}\right)}{(x-1)\ \sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} \cdot \sigma\upsilon\nu\sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\eta\mu\left(\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} - \sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}\right)}{\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} - \sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} - \sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}}{(x-1)} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\sqrt{\alpha_1 x + \beta_1} \cdot \sigma\upsilon\nu\sqrt{\beta_1 x + \alpha_1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\alpha_1 x+\beta_1)-(\beta_1 x+\alpha_1)}{(x-1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}+\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}} =$$

$$= \frac{\alpha_1-\beta_1}{2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}\cdot \sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}.$$

Ανάλογα, βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_2 x+\beta_2}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_2 x+\alpha_2}} = \frac{2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}\ \sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\alpha_2-\beta_2}.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_1 x+\beta_1}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_1 x+\alpha_1}}{\varepsilon\varphi\sqrt{\alpha_2 x+\beta_2}-\varepsilon\varphi\sqrt{\beta_2 x+\alpha_2}} = \frac{\alpha_1-\beta_1}{\alpha_2-\beta_2}\cdot\frac{\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_2+\beta_2}}{\sigma\upsilon\nu^2\sqrt{\alpha_1+\beta_1}}.$$

67. Για κάθε $\nu \in N^*$ δείξτε ότι:

$$\mathbf{I_\nu = \int_0^1 \frac{4x^3-6x^2+8x-3}{(x^2-x+1)^\nu}\,dx = 0}$$

Απόδειξη

Επειδή $4x^3-6x^2+8x-3=(4x-2)\ (x^2-x+1)+(2x-1)$, έχομε:

$$\frac{4x^3-6x^2+8x-3}{(x^2-x+1)^\nu} = \frac{(4x-2)\ (x^2-x+1)+(2x-1)}{(x^2-x+1)^\nu} = \frac{2\ (2x-1)}{(x^2-x+1)^{\nu-1}} + \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^\nu}$$

Για ν=1, παίρνομε:

$$I_1 = \int_0^1 (4x-2)\ dx + \int_0^1 \frac{(2x-1)\ dx}{x^2-x+1} = 2x^2\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 + \ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 = 0.$$

Για ν=2, παίρνομε:

$$I_2 = 2\int_0^1 \frac{(2x-1)\ dx}{(x^2-x+1)} + \int_0^1 \frac{(2x-1)\ dx}{(x^2-x+1)^2} = 2\ln(x^2-x+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{x^2-x+1}\Big|_0^1 = 0.$$

Για $\nu \geq 3$ έχομε:

$$I_\nu = 2\int_0^1 \frac{(2x-1)\ dx}{(x^2-x+1)^{\nu-1}} + \int_0^1 \frac{(2x-1)\ dx}{(x^2-x+1)^\nu} =$$

$$= \frac{-2}{(\nu-2)\ (x^2-x+1)^{\nu-2}}\Bigg|_0^1 + \frac{-1}{(\nu-1)\ (x^2-x+1)^{\nu-1}}\Bigg|_0^1 = 0$$

Συνεπώς $I_\nu = 0$, για κάθε $\nu \in N^*$.

68. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\eta\mu\, \alpha x}{\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x} dx$ **για** $\alpha \neq \pm \beta$.

Λύση

Θέτομε $I = \int \frac{\eta\mu\, \alpha x}{\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x} dx$ και $J = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\, \beta x}{\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x} dx$.

Ισχύει:

$$\beta J - \alpha I = \int \frac{\beta\, \sigma\upsilon\nu\, \beta x - \alpha\, \eta\mu\, \alpha x}{\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x} dx = \int \frac{d(\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x)}{\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x} = \ln\left|\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x\right|.$$

Συνεπώς $\beta J - \alpha I = \ln\left|\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x\right|$.

Ακόμη, ισχύει:

$$I + J = \int \frac{\eta\mu\, \alpha x + \sigma\upsilon\nu\, \beta x}{\eta\mu\, \beta x + \sigma\upsilon\nu\, \alpha x} dx = \int \frac{\eta\mu\, \alpha x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right)}{\eta\mu\, \beta x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right)} dx =$$

$$= \int \frac{2\eta\mu \frac{\alpha x - \beta x + \frac{\pi}{2}}{2}\, \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha x + \beta x - \frac{\pi}{2}}{2}}{2\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}\, \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha x + \beta x - \frac{\pi}{2}}{2}} dx = \int \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha x - \beta x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}} dx =$$

$$= \int \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}}{\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}} dx = \frac{2}{\beta - \alpha} \int \frac{d\left(\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}{\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\beta - \alpha} \ln\left|\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}\right|, \qquad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha x + \beta x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \neq 0.$$

Συνεπώς $I + J = \frac{2}{\beta - \alpha} \ln\left|\eta\mu \frac{\beta x - \alpha x + \frac{\pi}{2}}{2}\right|$.

Από (1) και (2) παίρνομε

$$I = \frac{1}{\alpha+\beta}\left[\frac{2\beta}{\beta-\alpha}\ln\left|\eta\mu\frac{\beta x-\alpha x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| - \ln\left|\eta\mu\beta x+\sigma\upsilon\nu\alpha x\right|\right].$$

Επομένως $\int \frac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x+\sigma\upsilon\nu\alpha x}\,dx = I + C$ (C=σταθερά).

69. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}}$.

Λύση

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)\left(2+\sqrt{5-x^2}\right)}{2^2-\left(\sqrt{5-x^2}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)\left(2+\sqrt{5-x^2}\right)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{2+\sqrt{5-x^2}}{x+1} = 1\cdot 2 = 2.$$

70. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Λύση

Θέτουμε $x-\frac{\pi}{4}=t$ με $t\to 0$ καθώς $x\to\frac{\pi}{4}$. Άρα

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2}-2\,\sigma\upsilon\nu\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu t} = 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sigma\upsilon\nu\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu t} = 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\eta\mu t} =$$

$$= 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\eta\mu\frac{t}{2}}{2\eta\mu\frac{t}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}} = 2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\eta\mu\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sigma\upsilon\nu\frac{t}{2}} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Είναι: $$\frac{\sqrt{2}-2\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=2\,\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=2\,\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=2\,\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}{2\,\eta\mu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{2\,\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Επομένως, το $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}-2\,\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\eta\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}=2\,\frac{\eta\mu\frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu 0^0}=\sqrt{2}.$$

71. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Λύση

Είναι $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(5-x-4\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(2-x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(1-x)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2-1}+1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{2}.$$

72. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x+2^{3-x}-6}{\sqrt{2^{-x}-2^{1-x}}}$.

Λύση

Θέτουμε $2^{\frac{x}{2}}=y$, οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x+2^{3-x}-6}{2^{-\frac{x}{2}}-2^{1-x}}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2+\dfrac{8}{y^2}-6}{\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{y^2}}=\lim_{y\to 2}\frac{y^4-6y^2+8}{y-2}=$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)\ (y+2)\ (y^2-2)}{y-2}=\lim_{y\to 2}(y+2)\ \ (y^2-2)=4\cdot 2=8.$$

73. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax\right)$.

Λύση

Επειδή $x\neq 0$, θέτουμε $x=\dfrac{1}{z}$, οπότε

$$y=\sqrt{x^2+x+1}-ax=\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1}-\frac{a}{z}=\frac{\sqrt{z^2+z+1}}{|z|}-\frac{a}{z}.$$

i) Καθώς $x\to-\infty$ το $z\to 0^-$ και το $|z|=-z$.

Επομένως $y=-\dfrac{\sqrt{z^2+z+1}+a}{z}=-\dfrac{A}{z}$.

Αν $a<-1$, $A\to(1+a)<0$, $z\to 0^-$, οπότε $y\to-\infty$.

Αν $a>-1$, $A\to(1+a)>0$, $z\to 0^-$, οπότε $y\to+\infty$.

Αν $a=-1$, $y=-\dfrac{\sqrt{z^2+z+1}-1}{z}=-\dfrac{z+1}{\sqrt{z^2+z+1}+1}\underset{(z\to 0^-)}{\longrightarrow}-\dfrac{1}{2}$.

ii) Καθώς $x\to+\infty$ το $z\to 0^+$ και το $|z|=z$.

Επομένως $y=\dfrac{\sqrt{z^2+z+1}-a}{z}=\dfrac{B}{z}$.

Αν $a<1$, $B\to(1-a)>0$, $z\to 0^+$, οπότε $y\to+\infty$.

Αν $a>1$, $B\to(1-a)<0$, $z\to 0^+$, οπότε $y\to-\infty$.

Αν $a=1$, $y=\dfrac{\sqrt{z^2+z+1}-1}{z}=\dfrac{z+1}{\sqrt{z^2+z+1}+1}\underset{(z\to 0^+)}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}$.

74. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

Απόδειξη

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\ \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-x\ \sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=[+\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-\frac{3}{x^2}}{3\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}-\dfrac{\frac{2}{x^2}}{2\sqrt{1-\frac{2}{x}}}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{-1}{x^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{2}{x}}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}\right)=2$$

Σχόλιο: Για μια διαφορετική αντιμετώπιση, έχομε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+3x^2} + x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} + 1} + \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = 2.$$

75. Υπολογίστε τα όρια:

α) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \nu\left(\sqrt[\nu]{\alpha}-1\right)$, $\alpha>0$. β) $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \nu^2\left(\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu+1]{\alpha}\right)$, $\alpha>0$.

γ) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu^{\sqrt{2}} x}{x^2}$. δ) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu^{\sqrt{2}} x}{x^2}$.

Λύση

α) $$\lim_{\nu\to+\infty} \nu\left(\sqrt[\nu]{\alpha}-1\right) = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}-1}{\frac{1}{\nu}} = \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\alpha^x-1}{x} = \ln\alpha.$$

β) $$\lim_{\nu\to+\infty} \nu^2\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\frac{1}{\nu+1}}\right) = \lim_{\nu\to+\infty} \nu^2\cdot\alpha^{\frac{1}{\nu+1}}\left(\alpha^{\frac{1}{\nu(\nu+1)}}-1\right) =$$

$$= \lim_{\nu\to+\infty} \frac{\nu^2\,\alpha^{\frac{1}{\nu+1}}}{\nu(\nu+1)} \cdot \lim_{\nu\to+\infty} \nu(\nu+1)\left(\alpha^{\frac{1}{\nu(\nu+1)}}-1\right) = \ln\alpha.$$

γ) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\left[1+(\sigma\upsilon\nu x-1)\right]^{\sqrt{2}}-1}{\sigma\upsilon\nu x-1} \cdot \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, δεδομένου ότι $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$.

δ) $$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-\sigma\upsilon\nu^{\sqrt{2}} x}{x^2} = \lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\sigma\upsilon\nu^{\sqrt{2}} x}{x^2}\right) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

76. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int \tau\varepsilon\mu x\,dx$ και $\int \sigma\tau\varepsilon\mu x\,dx$.

Λύση

Βρίσκουμε συναρτήσεις που είναι πιο εύκολο να ολοκληρωθούν:

(1) $\tau\varepsilon\mu x - \varepsilon\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$.

(2) $\sigma\tau\varepsilon\mu x - \sigma\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

Από την (1) έχομε:

(3) $$\int \tau\varepsilon\mu x\,dx = \int \varepsilon\varphi x\,dx + \int \frac{\sigma\upsilon\nu x\,dx}{1+\eta\mu x} = -\ln\left|\sigma\upsilon\nu x\right| + \ln\left|1+\eta\mu x\right| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right| + c = \ln\left|\tau\varepsilon\mu x + \varepsilon\varphi x\right| + c, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Ανάλογα, από την (2) έχομε:

(4) $$\int \sigma\tau\varepsilon\mu x\,dx = \int \sigma\varphi x\,dx + \int \frac{\eta\mu x\,dx}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left|\eta\mu x\right| - \ln\left|1+\sigma\upsilon\nu x\right| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\right| + c = \ln\left|\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right| + c = \ln\left|\sigma\tau\varepsilon\mu x - \sigma\varphi x\right| + c, \quad x \neq \rho\pi, \quad \rho \in \mathbf{Z}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$\int \sigma\tau\varepsilon\mu x\,dx = \int \tau\varepsilon\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = -\ln\left|\tau\varepsilon\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right| + c =$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\tau\varepsilon\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right| + c = \ln\left|\tau\varepsilon\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right| + c =$$

$$= \ln\left|\sigma\tau\varepsilon\mu x - \sigma\varphi x\right| + c.$$

Σχόλιο: Για τρεις ακόμη διαφορετικές λύσεις βλέπε: «Θεαίτητος» Τεύχος 2-3, σελ. 272, Άσκηση 339.

77. Δίνεται η ακολουθία

$$x_1 = \sqrt{\frac{\alpha\beta^2 + x_0^2}{\alpha+1}}, \ \ldots, \ x_{\nu+1} = \sqrt{\frac{\alpha\beta^2 + x_\nu^2}{\alpha+1}}$$

όπου $0 < x_0 < \beta$ και $\alpha > 0$ (α, β, x_0 δεδομένοι). Δείξτε ότι η ακολουθία αυτή είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} x_{\nu+1}$.

Απόδειξη

Εξετάζομε αν $x_0 < x_1$, δηλαδή αν $x_0 < \sqrt{\dfrac{\alpha\beta^2+x_0^2}{\alpha+1}}$.

Υποθέτομε ότι ισχύει $x_0 \geq \sqrt{\dfrac{\alpha\beta^2+x_0^2}{\alpha+1}}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνομε

$(\alpha+1)\cdot x_0^2 \geq \alpha\beta^2+x_0^2 \Leftrightarrow \alpha x_0^2 \geq \alpha\beta^2 \Leftrightarrow x_0^2 \geq \beta^2$ (αφού είναι $\alpha>0$).
Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη δεδομένη σχέση $x_0 < \beta$ και επομένως ισχύει $x_0 < x_1$. Υποθέτομε τώρα ότι για κάποιο $\nu \in N^*$ ισχύει $x_{\nu-1} < x_\nu$. Τότε είναι:

$$\frac{\alpha\beta^2+x_{\nu-1}^2}{\alpha+1} < \frac{\alpha\beta^2+x_\nu^2}{\alpha+1} \Rightarrow \sqrt{\frac{\alpha\beta^2+x_{\nu-1}^2}{\alpha+1}} < \sqrt{\frac{\alpha\beta^2+x_\nu^2}{\alpha+1}} \Rightarrow x_\nu < x_{\nu+1}.$$

Επομένως, με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, αποδείξαμε ότι η ακολουθία: $x_0, x_1, \dots, x_{\nu+1}, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα.
Θα δείξομε τώρα ότι είναι $x_\nu < \beta$ $(\nu = 1,2,\dots)$.

Για $\nu=1$, αυτό είναι αληθές, επειδή $\dfrac{\alpha\beta^2+x_0^2}{\alpha+1} < \beta^2$, δηλαδή $x_0^2 < \beta^2$ (από τα δεδομένα της άσκησης). Αν για κάποιο ν ισχύει η σχέση $x_\nu < \beta$, τότε ισχύει και η σχέση $\dfrac{\alpha\beta^2+x_\nu^2}{\alpha+1} < \dfrac{\alpha\beta^2+\beta^2}{\alpha+1} = \beta^2$, δηλαδή $x_{\nu+1} < \beta$. Επομένως αποδείξαμε ότι $x_\nu < \beta$ $(\nu = 1,2,\dots)$. Η δεδομένη ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη. Συνεπώς συγκλίνει. Για να βρούμε το όριό της, θεωρούμε τις ισότητες:

$$x_1^2\cdot(\alpha+1) = \alpha\beta^2+x_0^2,$$
$$x_2^2\cdot(\alpha+1) = \alpha\beta^2+x_1^2,$$
$$\vdots$$
$$x_{\nu+1}^2\cdot(\alpha+1) = \alpha\beta^2+x_\nu^2.$$

Μετά από πολλαπλασιασμό της δεύτερης ισότητας επί $\alpha+1$, της τρίτης επί $(\alpha+1)^2$, ..., της τελευταίας επί $(\alpha+1)^\nu$ και πρόσθεση των αντιστοίχων όρων των ισοτήτων, παίρνομε:

$$x_{\nu+1}^2\cdot(\alpha+1)^{\nu+1} = x_0^2+\alpha\beta^2\left[1+(\alpha+1)+(\alpha+1)^2+\dots+(\alpha+1)^\nu\right] =$$

$$= x_0^2+\alpha\beta^2\,\frac{(\alpha+1)^{\nu+1}-1}{(\alpha+1)-1} = x_0^2+\beta^2\left[(\alpha+1)^{\nu+1}-1\right],$$

απ' όπου προκύπτει ότι: $x_{\nu+1}^2 = \beta^2 - \dfrac{\beta^2-x_0^2}{(\alpha+1)^{\nu+1}}$, δηλαδή $\lim\limits_{\nu\to+\infty} x_{\nu+1} = \lim\limits_{\nu\to+\infty} x_\nu = \beta$.

Σχόλιο: Για μια διαφορετικη λύση βλέπε: Σπ. Γ. Κανέλλου, Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, Σελ. 8 και Σελ. 38.

78. Ας είναι α και β ρητοί. Μπορούν ποτέ τα τριώνυμα $t^5 - t - 1$ και $t^2 + \alpha t + \beta$ να έχουν μια κοινή μιγαδική ρίζα;

Λύση

Υποθέτομε ότι z είναι μια κοινή ρίζα των δύο τριωνύμων. Τότε:

$z + 1 = z^5 = z\ (\alpha z + \beta)^2 = (\alpha^4 - 3\alpha^2\beta + \beta^2)\,z + (\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^2)$.

Αφού ο z δεν είναι ρητός πρέπει:

$\alpha^4 - 3\alpha^2\beta + \beta^2 = 1 \qquad (1)$

$\alpha^3\beta - 2\alpha\beta^2 = 1 \qquad (2)$

Απαλείφομε το β^2 από τις (1) και (2) και παίρνομε:

$5\alpha^3\beta = 2\alpha^5 - 2\alpha - 1 \qquad (3)$

Υψώνοντας στο τετράγωνο την (3) και χρησιμοποιώντας την (2) για να απαλείψομε το β^2, έχομε

$25\alpha^5\ (\alpha^3\beta - 1) = 8\alpha^{10} - 16\alpha^6 - 8\alpha^5 + 8\alpha^2 + 8\alpha + 2. \qquad (4)$

Χρησιμοποιούμε την (3) για να απαλείψομε το β και έχομε:

$\alpha^{10} + 3\alpha^6 - 11\alpha^5 - 4\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0. \qquad (5)$

Αλλά η (5) δεν έχει ρητές ρίζες. Συνεπώς, η υπόθεση μιας κοινής ρίζας, οδηγεί σε αντίφαση.

79. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων με τύπους:

(i) $f(x) = \eta\mu^4\ (5x^2 + 4x + 1)^2$

(ii) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$

(iii) $f(x) = 3^{\sigma\varphi\frac{1}{x}}$

(iv) $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x^2$

(v) $f(x) = 4^{1-\sqrt{x}}$

(vi) $f(x) = 1 + \sqrt[5]{(x+2)^4}$

Λύση

(i) $f'(x) = 4\left(\eta\mu^3\ (5x^2 + 4x + 1)^2\right) \cdot \left(\eta\mu\ (5x^2 + 4x + 1)^2\right)' =$

$= 4\ \eta\mu^3\ (5x^2 + 4x + 1)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\ (5x^2 + 4x + 1)^2 \cdot 2\,(5x^2 + 4x + 1)\ (5x^2 + 4x + 1)' =$

$= 8\,(5x^2 + 4x + 1)\ (10x + 4)\ \eta\mu^3\ (5x^2 + 4x + 1)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\ (5x^2 + 4x + 1)^2$

$$\text{(ii)}\ f'(x) = \left((x^4)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\,(x^4)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (x^4)' = -\frac{1}{3}\,(x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x^3, \quad x \neq 0.$$

iii) $f'(x)=3^{\sigma\varphi\frac{1}{x}}\cdot\ln3\cdot\left(\sigma\varphi\frac{1}{x}\right)'=3^{\sigma\varphi\frac{1}{x}}\cdot\ln3\cdot\left(-\dfrac{1}{\eta\mu^2\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=$

$=3^{\sigma\varphi\frac{1}{x}}\cdot\ln3\cdot\dfrac{1}{\eta\mu^2\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{x^2},\qquad x\neq\dfrac{1}{\rho\pi},\ \rho\in Z^*.$

(iv) $f'(x)=3\,\sigma\upsilon\nu x^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x^2)'=3\,\sigma\upsilon\nu x^2\cdot(-\eta\mu x^2)\cdot 2x.$

(v) $f'(x)=4^{1-\sqrt{x}}\cdot\ln4\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)'=4^{1-\sqrt{x}}\cdot\ln4\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right),\quad x>0.$

(vi) $f(x)=1+\left((x+2)^2\right)^{\frac{2}{5}}\ \Rightarrow\ f'(x)=\dfrac{2}{5}\left((x+2)^2\right)^{\frac{2}{5}-1}\cdot\left((x+2)^2\right)'=$

$=\dfrac{2}{5}\left((x+2)^2\right)^{-\frac{3}{5}}\cdot 2(x+2)=\dfrac{4}{5}\left((x+2)^2\right)^{-\frac{3}{5}}\cdot(x+2),\quad x\neq-2.$

80. Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε $f'(x)>K>0$ $\forall\ x\in R$, όπου K σταθερός. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Απόδειξη

Έστω x>0. Από το Θ.Μ.Τ.

$\exists\ \xi\in(0,\ x):\ f(x)-f(0)=xf'(\xi)\ \Rightarrow\ f(x)=f(0)+xf'(\xi)\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ f(x)>\underbrace{f(0)+xK}_{\downarrow\ +\infty}\ \Rightarrow\ f(x)\to+\infty.$

81. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο R, με παράγωγο f′ περιοδική συνάρτηση με περίοδο T>0. Αν $f(T)=f(0)$, δείξτε ότι η f είναι περιοδική.

Απόδειξη

Ισχύει

$f'(x+T)=f'(x),\ \forall\ x\in R\ \Rightarrow\ \left(f(x+T)\right)'=\left(f(x)\right)'\ \Rightarrow\ \exists\, c\in R:$

$f(x+T)=f(x)+c\ \overset{x=0}{\Rightarrow}\ f(T)=f(0)+c\ \Rightarrow\ c=0\ \Rightarrow\ f(x+T)=f(x).$

82. Έστω η συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to R$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και μονότονη. Αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$, δείξτε ότι το πεδίο τιμών της f είναι $\left[f(\alpha),\ f(\beta)\right]$ ή το $\left[f(\beta),\ f(\alpha)\right]$ με $f \uparrow$ ή $\downarrow$, αντίστοιχα.

Εφαρμογή.

Δίνεται η συνάρτηση f: $[-3, 3] \to R$ με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$. Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της f.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι είναι $f \uparrow$. Επομένως θα είναι $f(\alpha) \leq f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$, αφού $\alpha<\beta$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Θα δείξομε ότι $\left[f(\alpha),\ f(\beta)\right] = R(f)$, όπου $R(f)$ είναι το πεδίο τιμών της f.

(α) Αν $y \in R(f) \Rightarrow \exists\ x \in [\alpha, \beta]$: $f(x) = y$.

Εξάλλου, επειδή $\alpha < x < \beta \overset{f \uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \Rightarrow f(\alpha) \leq y \leq f(\beta) \Rightarrow$
$y \in \left[f(\alpha),\ f(\beta)\right] \Rightarrow R(f) \subseteq \left[f(\alpha),\ f(\beta)\right]$ (1)

(β) Από το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών (θεώρημα του Darboux) θα έχομε:
$\left[f(\alpha),\ f(\beta)\right] \subseteq R(f)$, (2)

Από (1), (2) παίρνομε ότι $R(f) = \left[f(\alpha),\ f(\beta)\right]$.

Όμοια αντιμετωπίζεται με $f \downarrow$. Σημειώνομε ακόμη ότι, αν το πεδίο ορισμού της f είναι το (α, β), τότε θα είναι: $R(f) = \left(f(\alpha),\ f(\beta)\right)$.

Εφαρμογή. Εξετάζομε με παράγωγο τη μονοτονία της f. Προκύπτει:

$$\begin{array}{ll} f \uparrow & \text{στο } [-3, -2] \\ f \downarrow & \text{στο } [-2, -1] \\ f \uparrow & \text{στο } [1, 3] \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{cases} f(-3) = 10, \\ f(-2) = 21, \\ f(1) = -6, \\ f(3) = 46. \end{cases}$$

Συνεπώς $R(f) = [-6, 46]$, όπου $\mu = -6$ είναι το ελάχιστο και $M=46$ είναι το μέγιστο.

83. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να υπολογιστεί το

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^2(x+3h) - f^2(x+h)}{h}.$$

Λύση

Έχομε

$$\frac{f^2(x+3h) - f^2(x+h)}{h} = \left(f(x+3h) + f(x+h)\right) \frac{f(x+3h) - f(x+h)}{h}.$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και συνεπώς συνεχής. Επομένως

$\lim_{h\to 0}\left(f(x+3h)+f(x+h)\right)=2f(x)$.

Γράφομε

$$\frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h}=\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}+\frac{f(x)-f(x+h)}{h}$$

και επομένως $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x+h)}{h}=3f'(x)-f'(x)=2f'(x)$.

Συνεπώς το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(x+3h)-f^2(x+h)}{h}=2f(x)\cdot 2f'(x)=4f(x)\cdot f'(x).$$

84. (α) Να λυθούν στο C οι εξισώσεις: (i) $t^2+3t+3-i=0$.

(ii) $t^2+(2i-1)t+(5i+1)=0$.

(β) Να λυθεί στο R, η εξίσωση $3^x+4^x=2^x+5^x$.

(γ) Να λυθεί στο R, η εξίσωση (E): $x^2+\dfrac{x^2}{(x+1)^2}=3$.

Λύση

(α) (i) Έχομε $2t=-3\pm\sqrt{-3+4i}$.

Επειδή $\sqrt{-3+4i}=\pm(1+2i)$, οι ρίζες είναι $-2-i$ και $-1+i$.

(ii) Παρατηρουμε ότι η διακρίνουσα είναι $-7-24i=(3-4i)^2$. Οι ρίζες είναι $2-3i$ και $-1+i$.

(β) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την $3^x-2^x=5^x-4^x$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f: $[2,\ 3]\to\mathbf{R}$, g: $[4,\ 5]\to\mathbf{R}$, με $f(y)=y^x$ και $g(y)=y^x$. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει για την f, $\xi_1\in[2,\ 3]$ και αντίστοιχα για την g, $\xi_2\in[4,\ 5]$ έτσι ώστε $3^x-2^x=x\,\xi_1^{x-1}$ και $5^x-4^x=x\,\xi_2^{x-1}$.

Η εξίσωση $3^x-2^x=5^x-4^x$ είναι ισοδύναμη με την

$x\,\xi_1^{x-1}=x\,\xi_2^{x-1} \iff x(\xi_1^{x-1}-\xi_2^{x-1})=0 \Rightarrow x=0$ ή $x=1$.

(γ) $0=x^4+2x^3-x^2-6x-3 \iff (x^2+x+1)^2-4(x+1)^2=0 \iff$

$(x^2+3x+3)(x^2-x-1)=0 \Rightarrow$

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-3\pm i\sqrt{3}\right) \text{ ή } x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{5}\right).$$

85. (α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο A, δείξτε ότι η $|f|$ είναι συνεχής στο A.

(β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], τότε
$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx.$$

Απόδειξη

(α) Για κάθε $x_0 \in A$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right| = |f(x_0)|$ προκύπτει ότι η $|f|$ είναι συνεχής στο x_0.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Επειδή $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$, έχομε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \sqrt{\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)} = \sqrt{f^2(x_0)} = |f(x_0)|$, δηλαδή $|f|$ συνεχής στο x_0.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$\forall\ x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Συνεπώς $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, τέτοιο ώστε:

$\forall\ x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \Rightarrow$

$\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| < \varepsilon$, διότι $\big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \le |f(x) - f(x_0)|$

Επομένως $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, δηλαδή η $|f|$ είναι συνεχής στο A.

(β) Από την ολοκλήρωση* της διπλής ανισότητας

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, παίρνομε

$$\int_{\alpha}^{\beta} -|f(x)|\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$$

ή $$-\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$$

ή $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$, εφόσον η ανισότητα $-u \le u \le u$ συνεπάγεται την $|u| \le u$.

– – – – – – – –

(*) Το ολοκλήρωμα υπάρχει γιατί η $|f|$ είναι συνεχής στο [α, β] και επομένως ολοκληρώσιμη. Βλέπε: KAZIMIERZ KURATOWSKI, Ολοκληρώματα, σελ. 39.

86. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α. Υπολογίστε το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha+h)}{h}.$$

Λύση

Επειδή f παραγωγίσιμη στο α, το πηλίκο διαφορών $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ τείνει στο $f'(\alpha)$ καθώς το $h\to 0$. Θα προσπαθήσομε να εμφανίσομε αυτή τη σχέση στην έκφραση

$$A(h)=\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha+h)}{h}=\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha)}{h}-\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)$, αρκεί να μελετήσουμε το

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha)}{h^2}$. Έχομε $\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha)}{h}=h\,\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha)}{h^2}$ και καθώς

$\lim\limits_{h^2\to 0}\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha)}{h^2}=f'(\alpha)$, συμπεραίνομε ότι

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h^2)-f(\alpha)}{h^2}=0\cdot f'(\alpha)=0.$

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}A(h)=0-f'(\alpha)=-f'(\alpha)$.

87. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0. Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x\,f(x_0)-x_0\,f(x)}{x-x_0}.$$

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\,\text{συν}x}{x-\frac{\pi}{3}}=\;;$

Λύση

Προσπαθούμε να εμφανίσομε στο $\frac{x\,f(x_0)-x_0\,f(x)}{x-x_0}$ τη σχέση $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Έχομε

$$\frac{x\,f(x_0)-x_0\,f(x)}{x-x_0}=\frac{x\,f(x_0)-x\,f(x)+x\,f(x)-x_0\,f(x)}{x-x_0}=-x\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x).$$

Επομένως

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x\,f(x_0)-x_0\,f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(-x\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x)\right)=-x_0\,f'(x_0)+f(x_0).$$

ΣΧΟΛΙΟ. Χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της f στο x_0, που είναι συνέπεια του γεγονότος ότι είναι παραγωγίσιμη, για να πάρομε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Εφαρμογή. $f(x)=\text{συν}x$, $f'(x)=-\text{ημ}x$.

$$\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\,\text{συν}x}{x-\frac{\pi}{3}}=\frac{x\,f\left(\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\,f(x)}{x-\frac{\pi}{2}},\ \text{απ' όπου}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\,\text{συν}x}{x-\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}\left(-\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)+\text{συν}\frac{\pi}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

88. Ας είναι f και g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x_0.

Αν $f(x_0)=g(x_0)=0$ και $g'(x_0)\neq 0$, υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Εφαρμογή: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{\sqrt{x+6}-3}=$;

Λύση

Εφόσον $f(x_0)=g(x_0)=0$, έχομε $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$. Θεωρούμε τις σχέσεις

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \text{και}\ \frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Έχομε $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\dfrac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)}$.

Καθώς $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=g'(x_0)$ με $g'(x_0)\neq 0$,

έχομε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=f'(x_0)\,\dfrac{1}{g'(x_0)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Εφαρμογή. $f(x)=\sqrt{x+13}-4$, $g(x)=\sqrt{x+6}-3$, $f(3)=g(3)=0$.

Έχομε $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+13}}$, $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+6}}$ και $g'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}\neq 0$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(3)}{g'(3)} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{16}}}{\frac{1}{2\sqrt{9}}} = \dfrac{3}{4}$.

89. Έστω F μια συνάρτηση αποτελούμενη από τρεις συναρτήσεις h, g, f:

$$F(x) = (h \circ g \circ f)(x) = h\left[g\left(f(x)\right)\right].$$

Με την υπόθεση ότι οι τρεις αυτές συναρτήσεις είναι δύο φορές παραγωγίσιμες, εκφράσετε τη δεύτερη παράγωγο, με τη βοήθεια των παραγώγων των h, g, f.

Εφαρμογή.

Υπολογίστε τη δεύτερη παράγωγο της F: $x \to e^{\sqrt{1+\ln(x-1)}}$ εισάγοντας $h(v) = e^v$, $g(u) = \sqrt{1+u}$, $f(x) = \ln(x-1)$.

Λύση

Έχομε $F' = \left(h' \circ (g \circ f)\right) \cdot (g \circ f)'$ και καθώς $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$, παίρνομε $F' = (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f'$.

Παραγωγίζοντας αυτό το γινόμενο των τριών συναρτήσεων, έχομε:

$F'' = (h' \circ g \circ f)' \cdot (g' \circ f)\, f' + (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f)' \cdot f' + (h' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f''$,

δηλαδή $F'' = A + B + C$.

Καθώς $(h' \circ g \circ f)' = (h'' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f) \cdot f'$ και $(g' \circ f)' = (g'' \circ f) \cdot f'$,

έχομε $A = (h'' \circ g \circ f) \cdot (g' \circ f)^2 \cdot (f')^2$ $\quad B = (h' \circ g \circ f) \cdot (g'' \circ f) \cdot (f')^2$.

Θέτοντας $u = f(x)$, $v = g(u)$, παίρνομε

$A(x) = h''(v) \cdot (g')^2(u) \cdot (f')^2(x)$,

$B(x) = h'(v) \cdot g''(u) \cdot (f')^2(x)$,

$C(x) = h'(v) \cdot (g')(u) \cdot f''(x)$, απ' όπου

$F''(x) = h''(v) \cdot (g')^2(u) \cdot (f')^2(x) + h'(v) \cdot g''(u) \cdot (f')^2(x) + h'(v) \cdot g'(u) \cdot f''(x)$

Εφαρμογή

$F = h \circ g \circ f$ με $h(v) = e^v$, $g(u) = (1+u)^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = \ln(x-1)$.

Με διαδοχικές παραγωγίσεις, παίρνομε:

$h'(v) = e^v$, $h''(v) = e^v$, $g'(u) = \dfrac{1}{2}(1+u)^{-\frac{1}{2}}$, $g''(u) = -\dfrac{1}{4}(1+u)^{-\frac{3}{2}}$,

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Επομένως:

$$F''(x) = e^{v}\left(\frac{1}{4}(1+u)^{-1}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)^{2} + e^{v}\left(-\frac{1}{4}(1+u)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)^{2} +$$

$$+\ e^{v}\left(\frac{1}{2}(1+u)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(-\frac{1}{(x-1)^{2}}\right) = \frac{e^{v}}{4\ (x-1)^{2}}\left[(1+u)^{-1} - (1+u)^{-\frac{3}{2}} - 2\,(1+u)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

άρα $\quad F''(x) = \dfrac{e^{v}}{4\ (x-1)^{2}\ (1+u)^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{1+u} - 2u - 3\right)$,

με $u = \ln(x-1)$ και $v = \sqrt{1+\ln(x-1)}$.

90. Αν $\alpha \in R_{+}^{*}$ και $x, y \in C$, δείξτε ότι: $(1+\alpha)\,|x|^{2} + \left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)|y|^{2} \geq |x+y|^{2}$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(1+\alpha)\ |x|^{2} + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|y|^{2} \geq \left(|x|+|y|\right)^{2} \Leftrightarrow \alpha\ |x|^{2} + \frac{1}{\alpha}\ |y|^{2} - 2\ |x|\ |y| \ \geq\ 0 \ \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha^{2}\ |x|^{2} + |y|^{2} - 2\alpha\ |x|\ |y| \ \geq\ 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\alpha\ |x| - |y|\right)^{2} \ \geq\ 0,$$ που ισχύει.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Επειδή $|z|^{2} = z\bar{z}$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(x+y)\ \overline{(x+y)} \ \leq\ (1+\alpha)\ x\bar{x} + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)y\bar{y} \quad\Leftrightarrow\quad (x+y)\ (\bar{x}+\bar{y}) \ \leq$$

$$\leq\ (1+\alpha)\ x\bar{x} + \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)y\bar{y} \quad\Leftrightarrow\quad x\bar{x} + y\bar{x} + x\bar{y} + y\bar{y} \ \leq\ x\bar{x} + \alpha x\bar{x} + y\bar{y} + \frac{1}{\alpha}\ y\bar{y} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad y\bar{x} + x\bar{y} \ \leq\ \alpha x\bar{x} + \frac{1}{\alpha}\ y\bar{y} \quad\Leftrightarrow\quad 0 \ \leq\ (\alpha x - y)\ \bar{x} + \frac{1}{\alpha}\ (y - \alpha x)\ \bar{y} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 0 \ \leq\ \frac{1}{\alpha}\ (\alpha x - y)\ (\alpha\bar{x} - \bar{y}) \quad\Leftrightarrow\quad 0 \ \leq\ \frac{1}{\alpha}\ |\alpha x - y|^{2}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αν x=0, είναι φανερό, ότι η ανισότητα για απόδειξη ισχύει. Ας είναι $x \neq 0$· τότε η σχέση για απόδειξη γράφεται:

$$\left|1+\frac{y}{x}\right|^2 \le (1+\alpha)+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left|\frac{y}{x}\right|^2 \overset{\frac{y}{x}=z=\alpha_1+\beta_1 i}{\Longleftrightarrow} \left|1+\alpha_1+i\beta_1\right|^2 \le$$

$$\le (1+\alpha)+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left|\alpha_1+i\beta_1\right|^2 \Leftrightarrow (1+\alpha_1)^2+\beta_1^2 \le 1+\alpha+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+2\alpha_1+\alpha_1^2+\beta_1^2 \le 1+\alpha+\alpha_1^2+\beta_1^2+\frac{1}{\alpha}\alpha_1^2+\frac{1}{\alpha}\beta_1^2 \Leftrightarrow 2\alpha_1\alpha \le \alpha^2+\alpha_1^2+\beta_1^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad (\alpha-\alpha_1)^2+\beta_1^2 \ge 0$, που ισχύει.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Έχομε $|x|^2+\alpha|x|^2+|y|^2+\dfrac{|y|^2}{\alpha}=\left(|x|^2+\dfrac{|y|^2}{\alpha}\right)+\alpha\left(|x|^2+\dfrac{|y|^2}{\alpha}\right)\overset{\alpha>0}{=}$

$$=\left[|x|^2+\left(\frac{|y|}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right]\left[1^2+\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\right]\overset{(*)}{\ge}\left(|x|+\frac{|y|\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\left(|x|+|y|\right)^2 \ge |x+y|^2.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θέτουμε: $x=\kappa+\lambda i,\quad y=\rho+\mu i \,\big|\, \kappa,\lambda,\rho,\mu \in \mathbf{R}$.

Έτσι η σχέση για απόδειξη γίνεται:

$$|\kappa+\lambda i+\rho+\mu i|^2 \le (1+\alpha)\,|\kappa+\lambda i|^2+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)|\rho+\mu i|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa+\rho)^2+(\lambda+\mu)^2 \le (1+\alpha)\,(\kappa^2+\lambda^2)+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)(\rho^2+\mu^2) \Leftrightarrow$$

$$2\kappa\rho+2\lambda\mu \le \alpha\kappa^2+\alpha\lambda^2+\frac{\rho^2}{\alpha}+\frac{\mu^2}{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$2\kappa\rho\alpha+2\lambda\mu\alpha \le \alpha^2\kappa^2+\alpha^2\lambda^2+\rho^2+\mu^2 \Leftrightarrow$$

$(\kappa\alpha-\rho)^2+(\lambda\alpha-\mu)^2 \ge 0$, που ισχύει.

(*) Ανισότητα των: Cauchy - Schwarz - Buniakowski.

91. (i) Δίνεται το σύστημα: $x+2y+3\omega=0$

$$4x+(3+\lambda)\,y+6\omega=0$$

$$5x+4y+(1+\lambda)\,\omega=0.$$

(α) Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

(β) Να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος στην περίπτωση που ο λ ισούται με τη μικρότερη από τις τιμές.

(ii) Η ακολουθία (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}$ έχει θετικούς όρους. Ας είναι ω_1, ω_2 θετικοί αριθμοί με $\omega_2<\omega_1$. Αν ισχύει (1): $\omega_1\alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu<\omega_2\alpha_\nu$ για όλα τα $\nu\in\mathbb{N}$, τότε $\alpha_\nu\to 0$.

(iii) (α) Αν Α και Β είναι πίνακες $\nu\times\nu$ και ισχύουν οι σχέσεις $A^2=A$ και $AB+BA=O$, όπου O είναι ο μηδενικός πίνακας $\nu\times\nu$, τότε αποδείξετε ότι θα είναι $AB=BA=O$.

(β) Έστωσαν Α, Β, Γ πίνακες $\nu\times\nu$ και I ο μοναδιαίος πίνακας $\nu\times\nu$. Αν ισχύει ότι $AB=\Gamma A=I$, τότε να αποδείξετε ότι ο Α αντιστρέψιμος και ότι είναι $A^{-1}=B=\Gamma$.

(γ) Έστω σαν Α και Β πίνακες $\nu\times\nu$, όπου ο Β είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι για κάθε k θετικό ακέραιο ισχύει η σχέση $(BAB^{-1})^k=BA^kB^{-1}$.

(iv) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x+\dfrac{1}{2x^2}$.

(α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της ευθείας με εξίσωση $y=3x$, εκ των ευθειών με εξισώσεις $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha>1$.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού Ε(α) του ανωτέρω χωρίου, όταν το α τείνει στο άπειρο.

(v) Να λυθεί στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών, η εξίσωση:
$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0.$

Λύση

(i) (α) Για να έχει το σύστημα και μη μηδενικές λύσεις πρέπει και αρκεί

$$D=0\iff\begin{vmatrix}1&2&3\\4&3+\lambda&6\\5&4&1+\lambda\end{vmatrix}=0\iff\lambda^2-19\lambda+34=0\iff\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=17.$$

(β) Για $\lambda=2$ που είναι η μικρότερη από τις τιμές του λ, το σύστημα γίνεται:

$$x + 2\psi + 3\omega = 0 \quad (1)$$
$$4x + 5\psi + 6\omega = 0 \quad (2)$$
$$5x + 4\psi + 3\omega = 0 \quad (3)$$

Τότε $\Gamma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$, άρα το σύστημα των (1), (2) με αγνώστους τα x, y έχει μοναδική λύση την:

$$\left(x = \frac{D_x}{\Gamma_3}, \quad \psi = \frac{D_\psi}{\Gamma_3} \right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{-3\omega}{-3}, \quad \psi = \frac{6\omega}{-3} \right) \Leftrightarrow (x = \omega, \quad \psi = -2\omega).$$

Επομένως το αρχικό σύστημα λ=2 έχει, με ελεύθερο τον άγνωστο ω, τις άπειρες λύσεις: $(x = \omega, \quad \psi = -2\omega, \quad \omega \in \mathbf{R})$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Πολλαπλασιάζοντας την (1) επί (-4) και προσθέτοντάς την στη (2), έχομε

$-3y - 6\omega = 0 \Leftrightarrow y = -2\omega \quad (4)$

Η (1) λόγω της (4) γίνεται $x - 4\omega + 3\omega = 0 \Leftrightarrow x = \omega \quad (5)$.

Η (3) επαληθεύεται λόγω των (4) και (5) για κάθε $\omega \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς οι άπειρες λύσεις του δεδομένου συστήματος για λ=2 είναι:

$(x, \ y, \ \omega) = (\omega, \ -2\omega, \ \omega)$, όπου $\omega \in \mathbf{R}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 4 & 5 & 6 & \vdots & 0 \\ 5 & 4 & 3 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 4\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & -3 & -6 & \vdots & 0 \\ 0 & -6 & -12 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \Gamma_2 \to -\frac{1}{3}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \to -\frac{1}{6}\Gamma_3 \end{matrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 2\Gamma_2 \\ \\ \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x - \omega = 0 \\ y + 2\omega = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \omega \\ y = -2\omega \end{matrix}$$

Επομένως οι άπειρες λύσεις (εκτός της (0, 0, 0)) του συστήματος για λ=2 είναι οι: $(x, \ y, \ \omega) = (\omega, \ -2\omega, \ \omega)$, με $\omega \in \mathbf{R}$.

(ii) Από (1): έχομε $\omega_1 \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu < \omega_2 \alpha_\nu \Leftrightarrow \omega_1 \alpha_{\nu+1} < \omega_2 \alpha_\nu - \alpha_\nu < \omega_2 \alpha_\nu$.

Άρα $\omega_1 \alpha_{\nu+1} < \omega_2 \alpha_\nu \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \omega < 1$.

Έτσι είναι $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < \omega \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\omega} < \alpha_\nu \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\omega^{\nu+1}} < \dfrac{\alpha_\nu}{\omega^\nu}$ για όλα τα $\nu \in \mathbf{N}$.

Ώστε η ακολουθία $\left(\dfrac{\alpha_\nu}{\omega^\nu}\right)$ με πρώτο όρο $\dfrac{\alpha_1}{\omega}$ είναι γνησίως φθίνουσα και

επομένως: $\dfrac{\alpha_\nu}{\omega^\nu} < \dfrac{\alpha_1}{\omega}$ ή $0 < \alpha_\nu < \dfrac{\alpha_1}{\omega} \cdot \omega^\nu$.

Αλλά $\omega^\nu \to 0$ διότι $|\omega| = \omega < 1$ και έτσι $\dfrac{\alpha_1}{\omega} \cdot \omega^\nu \to 0$, οπότε η $\alpha_\nu \to 0$.

Σημείωση

Τέτοιες ακολουθίες υπάρχουν π.χ. $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, $\omega_1 = 2(\theta + \theta^* + 1)$,

$\omega_2 = \theta + 2\theta^* + 2$, όπου $\theta, \theta^* > 0$.

(iii) (α) Από τη σχέση $AB+BA=O$ έχουμε

$\begin{Bmatrix} A \cdot (AB+BA) = A \cdot O \\ (AB+BA) \cdot A = O \cdot A \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A^2B + ABA = O \\ ABA + BA^2 = O \end{Bmatrix}$ και επειδή είναι

$A^2 = A$ έχουμε $\begin{Bmatrix} AB + ABA = O \\ ABA + BA = O \end{Bmatrix}$ οπότε $AB=BA=-ABA$.

Τότε η σχέση $AB+BA=O$ δίνει $2AB = 2BA = O \Rightarrow AB = BA = O$.

(β) Είναι $B=I \cdot B=(\Gamma A)B=\Gamma(AB)=\Gamma \cdot I=\Gamma$. Επιπλέον η σχέση $AB=\Gamma A=I$ γράφεται $AB=BA=I$. Άρα ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A^{-1} = B = \Gamma$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$AB = I \Rightarrow (AB)A = A \Rightarrow A(BA) = A \Rightarrow \Gamma\,[A(BA)] = \Gamma A \Rightarrow$

$\Rightarrow (\Gamma A)(BA) = \Gamma A \Rightarrow I(BA) = I \Rightarrow BA = I$.

Συνεπώς $AB=BA=I$, δηλαδή $A^{-1} = B$.

Από την $\Gamma A = I \Rightarrow (\Gamma A)A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow \Gamma = A^{-1}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Ισχύει: $D(I) = D(AB) = D(A)\, D(B)$.

Αλλά $D(I)=1$ και συνεπώς $D(A)\neq 0$ και $D(B)\neq 0$ που σημαίνει ότι ο Α καθώς και ο Β είναι αντιστρέψιμοι. Όμοια συνάγεται ότι και ο Γ είναι αντιστρέψιμος. Επειδή Α, Β, Γ αντιστρέψιμοι και ΑΒ=ΓΑ=Ι και δεδομένου ότι ο αντίστροφος ενός Α είναι μοναδικός, συμπεραίνουμε ότι κατ' ανάγκη είναι: $A^{-1}=B=\Gamma$.

(γ) Η σχέση $(\rho)=(BAB^{-1})^k=BA^kB^{-1}$ προφανώς ισχύει για k=1. Υποθέτουμε ότι ισχύει για k=ρ, δηλαδή υποθέτουμε ότι είναι αληθής η $(BAB^{-1})^{\rho}=BA^{\rho}B^{-1}$ (1).

Τότε $(BAB^{-1})^{\rho+1}=(BAB^{-1})^{\rho}\,(BAB^{-1})\overset{(1)}{=}(BA^{\rho}B^{-1})\,(BAB^{-1})=BA^{\rho}\,(B^{-1}B)\,AB^{-1}=$ $=BA^{\rho}IAB^{-1}=BA^{\rho+1}B^{-1}$. Συνεπώς η πρόταση (ρ) ισχύει και για k=ρ+1, άρα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο k.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$(BAB^{-1})^k=\overbrace{(BAB^{-1})\,(BAB^{-1})\cdots(BAB^{-1})}^{k\ \text{φορές}}\ \underset{\text{ιδιότητα}}{\overset{\text{προσεταιριστική}}{=}}$$

$$=BA\,(B^{-1}B)\,A\,(BB^{-1})\,A\,(BB^{-1})\cdots A\,(BB^{-1})\,AB^{-1}=$$

$$=B\,AIAIAI\cdots AIAB^{-1}=B\ AA\cdots AB^{-1}=BA^kB^{-1}.$$

(iv) α) Η συνάρτηση f, έχει πεδίο ορισμού το R*

Επειδή ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(3x+\dfrac{1}{2x^2}\right)=+\infty$ η ευθεία (η):x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Αν υπάρχει πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, θα έχει εξίσωση της μορφής $y=\lambda x+\beta$.

Για x>0 έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^3+1}{2x^3}=3$, οπότε λ=3 και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)=0$, οπότε β=0.

Ομοίως όταν $x\to-\infty$ έχουμε και πάλι λ=3 και β=0. Άρα η ευθεία (ε): $y=3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x)=3x$.

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς και παίρνουν θετικές τιμές στο [1, α]. Επιπλέον για κάθε $x\in[1,\ \alpha]$ ισχύει $f(x)>g(x)$ αφού είναι

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{2x^2}>0.$$

Συνεπώς:

$$E(\alpha)=\int_1^{\alpha}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_1^{\alpha}\frac{1}{2x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha}=\frac{\alpha-1}{2\alpha}\ \text{τ.μ.}$$

γ) Είναι $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\alpha-1}{2\alpha}=\frac{1}{2}$ τ.μ.

(v) Έχουμε:

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^6+2z^5+z^4+z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^4(z^2+2z+1)+z^2(z^2+2z+1)+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^4(z+1)^2+z^2(z+1)^2+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)^2\ (z^4+z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z+1)^2\ (z^4+2z^2+1-z^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)^2\ [(z^2+1)^2-z^2]=0 \Leftrightarrow (z+1)^2\ (z^2+z+1)\ (z^2-z+1)=0 \Rightarrow$$

$$z=-1\ \text{(διπλή) ή } z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\ \text{ ή }\ z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+2z^2+2z+1=0 \Leftrightarrow$$

$$(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z)+(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$z(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)+(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0\quad \text{κ.λ.π.}$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+z^2+2z+1=0 \Leftrightarrow$$

$$z^6+2\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$z^6+2\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)+1-2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^6+2\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)-1=0.$$

Διαπιστώνουμε ότι το 1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης. Οπότε ισοδύναμα έχουμε:

$$z^6+2\cdot\frac{z^6-1}{z-1}-1=0 \Leftrightarrow (z^6-1)+2\cdot\frac{z^6-1}{z-1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^6-1)\left[1+\frac{2}{z-1}\right]=0 \Leftrightarrow (z^6-1)\ \frac{z+1}{z-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^6-1=0 \\ \dfrac{z+1}{z-1}=0 \\ z\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^6=1 \\ z=-1 \\ z\neq 1\end{cases}$$

Οπότε οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι έκτες ρίζες της μονάδας εκτός της J_0 και η $z=-1$, δηλαδή

$$J_\kappa = \sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{6} + i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{6}, \quad \kappa=1,2,3,4,5$$

και η $z=-1$ είναι διπλή προκύπτει για $\kappa=3$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+2z^2+2z+1=0 \overset{z+\frac{1}{z}=\omega}{\Leftrightarrow} \omega^3+2\omega^2-\omega-2=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\omega+2)\ (\omega^2-1)=0$ κ.λ.π.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+z^2+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow z^2\ (z^4+2z^3+2z^2+2z+1)+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^2\ (z^4+2z^3+z^2+z^2+2z+1)+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow z^2\left[z^2\ (z^2+2z+1)+(z+1)^2\right]+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$z^2\left[z^2\ (z+1)^2+(z+1)^2\right]+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow z^2\ (z+1)^2\ (z^2+1)+(z+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)^2\left[z^2\ (z^2+1)+1\right]=0 \Leftrightarrow (z+1)^2\ (z^4+z^2+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$(z+1)^2=0 \lor z^4+z^2+1=0 \Leftrightarrow$$

$z=-1$ διπλή ρίζα $\lor\ z^4+z^2+1=0 \qquad (1)$

Λύση της (1):

$$z^4+z^2+1=0 \Leftrightarrow (z-1)^2\ (z^4+z^2+1)=0 \land z^2\neq 1 \Leftrightarrow z^6-1=0 \land z\neq 1 \Leftrightarrow$$

$$z^6=1 \land z\neq 1 \Leftrightarrow z=\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa\pi}{6}+i\eta\mu\frac{2\kappa\pi}{6}, \quad \kappa=1,2,3,4,5$$

(Για $\kappa=3$ έχομε τη διπλή ρίζα $z=-1$).

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$z^6+2z^5+2z^4+2z^3+2z^2+2z+1=0 \Leftrightarrow$$

$$(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z)+(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$z\cdot\frac{z^6-1}{z-1}+\frac{z^6-1}{z-1}=0 \land z\neq 1 \Leftrightarrow (z^6-1)\ (z+1)=0 \land z\neq 1 \quad \text{κ.λ.π.}$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(z^6+z^5)+(z^5+z^4)+(z^4+z^3)+(z^3+z^2)+(z+1)^2=0 \iff$$
$$z^5(z+1)+z^4(z+1)+z^3(z+1)+z^2(z+1)+(z+1)^2=0 \iff$$
$$(z+1)\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \iff$$
$$\left.\begin{cases} z+1=0 & (1) \\ z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0 & (2) \end{cases}\right\}$$

Η (1) δίνει $z=-1$ και η (2), επειδή δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1, θα είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} (z-1)\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \\ z\neq 1 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} z^6-1=0 \\ z\neq 1 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} z^6=1 \\ z\neq 1 \end{matrix}\right\} \iff$$

$$z=\text{συν}\,\frac{2\kappa\pi}{6}+i\,\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{6} \quad \text{με} \quad \kappa=1,2,3,4,5.$$

Έτσι η δεδομένη εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς: $z_1=-1$ (διπλή ρίζα),

$$z_2=\text{συν}\,\frac{\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_3=\text{συν}\,\frac{2\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_4=\text{συν}\,\frac{4\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_5=\text{συν}\,\frac{5\pi}{3}+i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner η εξίσωση γίνεται:

$$(z+1)\ (z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0 \iff$$
$$\iff (z+1)\left(\frac{z^6-1}{z-1}\right)=0, \quad z\neq 1 \quad \text{κ.λ.π.}$$

ΣΧΟΛΙΑ

1) Τα θέματα 91 (i), (iii), (iv), (v) έχουν τεθεί στις γενικές εξετάσεις. Ακριβέστερα, βέβαια, δεν αποτελούν εξετάσεις στις οποίες κρίνεται ένα ορισμένο επίπεδο γνώσεων. Αποτελούν, ουσιαστικά, διαγωνισμό για την κατάληψη ενός προκαθορισμένου αριθμού θέσεων σε κάθε ανωτάτη σχολή. Έτσι, η επιτυχία δεν εξαρτάται από την απόλυτη βαθμολογία του υποψηφίου, αλλά από τη βαθμολογία που θα συγκεντρώσει σε σύγκριση με τους άλλους υποψηφίους, δηλαδή από τη σειρά που θα έχει στην κλίμακα της βαθμολογίας.

2) Στις «εξετάσεις» 1989, '90, '91, '92, διαφαίνεται η τάση να δυσκολέψουν τα θέματα. Προϋπόθεση, βέβαια, αυτής της στροφής σε δυσκολότερα

θέματα είναι να γνωρίζουν με σαφήνεια οι υποψήφιοι, πριν από τις «εξετάσεις», τι πρόκειται να αντιμετωπίσουν και όχι να βρίσκονται προ εκπλήξεως την ημέρα των «εξετάσεων». Η άποψη, που διατυπώθηκε από τα μέλη της «Κεντρικής Επιτροπής Γενικών Εξετάσεων», ότι σκοπός του συστήματος είναι η επιλογή των καλυτέρων υποψηφίων και για τον λόγο αυτό θα πρέπει τα θέματα να είναι δύσκολα, ώστε να κρίνεται και η ταχύτητα των υποψηφίων στο ν' απαντούν στα θέματα, είναι άδικη και αντιπαιδαγωγική. Άδικη διότι υπάρχει άνιση μεταχείριση των σημερινών υποψηφίων σε σχέση με τους υποψηφίους παλαιοτέρων ετών, οι οποίοι έχουν κατοχυρώσει βαθμολογία, από εξετάσεις με ευκολότερα θέματα. Είναι αντιπαιδαγωγική διότι δικαιολογημένα οι υποψήφιοι πρέπει να γνωρίζουν εγκαίρως το επίπεδο των θεμάτων και τις δυσκολίες που τους περιμένουν, για να προετοιμαστούν σωστότερα και πληρέστερα.

Πρέπει να υπάρξει χρόνος για να επισημανθούν οι δυσκολίες και να καλυφθούν τα κενά της ύλης διότι τρομοκρατούν τον υποψήφιο και του δημιουργούν αισθήματα άγχους και μειονεξίας.

Πρέπει να υπάρξει χρόνος για να μάθει ο υποψήφιος τους τρόπους για την απόκτηση στέρεης γνώσης, που είναι μια στάση ζωής.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ: Όταν δεν τηρούνται οι παραπάνω στοιχειώδεις προϋποθέσεις, είναι ακριβές, ότι ο διαγωνισμός που αποβλέπει στην επιλογή των υποψηφίων, μοιάζει παιγνίδι με σημαδεμένη τράπουλα.

92. (α) Να υπολογιστεί το $\lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu$ με $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu}$.

(Υπενθυμίζεται ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$, αν $\alpha>0$).

(β) (i) Αν η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι συνεχής και α, β, γ, δ $\in$ R, να δειχτεί ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\delta f(x)\,dx + \int_\delta^\beta f(x)\,dx$.

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ που είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο Τ. Να δειχτεί ότι $\forall\ \alpha \in R$ θα είναι: $\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.

(γ) Στο επίπεδο θεωρούμε το ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy και σταθερό σημείο Α αυτού με $|\vec{OA}| = 3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|\vec{OA}| \cdot (\vec{OA} - 2\cdot\vec{OA}) = 7$;

Λύση

(α) $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} = 7\sqrt[\nu]{\left(\frac{3}{7}\right)^\nu + \left(\frac{5}{7}\right)^\nu + 1} \to 7$,

διότι $\left(\frac{3}{7}\right)^\nu \to 0$, $\left(\frac{5}{7}\right)^\nu \to 0$ και $\left(\frac{3}{7}\right)^\nu + \left(\frac{5}{7}\right)^\nu \to 0$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$\sqrt[\nu]{7^\nu} < \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} < 7\sqrt[\nu]{3}$ ή $7 < \sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} < 7\cdot\sqrt[\nu]{3}$

και επειδή $\sqrt[\nu]{3} \to 1$ θα ισχύει $\sqrt[\nu]{3^\nu + 5^\nu + 7^\nu} \to 7$.

Γενίκευση. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa > 0$, όπου κ συγκεκριμένος φυσικός αριθμός, να βρείτε το όριο της ακολουθίας $\beta_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \ \ldots\ + \alpha_\kappa^\nu}$.

Λύση

Έστω $\alpha_\mu = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\}$.

Τότε $\beta_\nu = \alpha_\mu \cdot \sqrt[\nu]{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_\mu}\right)^\nu + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_\mu}\right)^\nu + \ldots + \left(\frac{\alpha_\mu}{\alpha_\mu}\right)^\nu + \ldots + \left(\frac{\alpha_\kappa}{\alpha_\mu}\right)^\nu}$, δηλαδή

$\beta_\nu = \alpha_\mu \cdot \sqrt[\nu]{1 + \lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu + \ldots + \lambda_{\kappa-1}^\nu}$, $0 < \lambda_\rho \le 1$, για κάθε ρ=1, 2, ..., κ−1.

Άλλωστε ισχύει: $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{1 + \lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu + \ldots + \lambda_{\kappa-1}^\nu} = 1$.

Πραγματικά, αν θέσομε

$\sqrt[\nu]{1 + \lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu + \ldots + \lambda_{\kappa-1}^\nu} = 1 + \alpha_\nu$, $\alpha_\nu > 0 \Rightarrow 1 + \lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu + \ldots + \lambda_{\kappa-1}^\nu =$

$= (1 + \alpha_\nu)^\nu > 1 + \nu\alpha_\nu > \nu\alpha_\nu$, δηλαδή $0 < \alpha_\nu < \frac{1}{\nu}\left(1 + \lambda_1^\nu + \ldots + \lambda_{\kappa-1}^\nu\right) \le \frac{\kappa}{\nu}$,

άρα $\alpha_\nu \to 0$ και συνεπώς $\sqrt[\nu]{1 + \lambda_1^\nu + \ldots + \lambda_{\kappa-1}^\nu} \to 1$.

Τελικά παίρνομε $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \beta_\nu = \alpha_\mu \cdot 1 = \alpha_\mu$.

(β) (i) Ας είναι F μια παράγουσα της f. Τότε θα είναι:

$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = F(\gamma) - F(\alpha)$, $\int_\gamma^\delta f(x)\,dx = F(\delta) - F(\gamma)$ και $\int_\delta^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\delta)$.

Άρα

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)\,dx + \int_{\delta}^{\beta} f(x)\,dx = F(\gamma) - F(\alpha) + F(\delta) - F(\gamma) + F(\beta) - F(\delta) =$$

$$= F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i), έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{o} f(x)\,dx + \int_{o}^{T} f(x)\,dx + \int_{T}^{\alpha+T} f(x)\,dx \qquad (1)$$

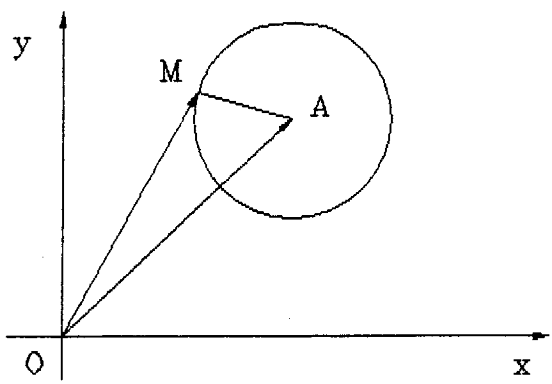
Αλλά $\int_{T}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{T}^{\alpha+T} f(y)\,dy = \int_{0+T}^{\alpha+T} f(y)\,dy \overset{*}{=} \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{o}^{T} f(x+T)\,dx$, (2)

Επειδή όμως η f είναι περιοδική με περίοδο T, θα είναι: $f(x+T) = f(x)$, οπότε από τη (2) έχουμε: $\int_{T}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{o}^{\alpha} f(x)\,dx$ και τότε η (1) δίνει:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{o} f(x)\,dx + \int_{o}^{T} f(x)\,dx + \int_{o}^{\alpha} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{\alpha}^{o} f(x)\,dx + \int_{o}^{T} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{o} f(x)\,dx = \int_{o}^{T} f(x)\,dx.$$

(γ) Έστω M (x, y) σημείο του επιπέδου τέτοιο, ώστε να είναι:



Σχήμα

$\vec{OM} \cdot (\vec{OM} - 2\cdot\vec{OA}) = 7 \Leftrightarrow (\vec{OA} + \vec{AM}) \cdot [(\vec{OA} + \vec{AM}) - 2\cdot\vec{OA}] = 7 \Leftrightarrow$

$(\vec{OA} + \vec{AM}) \cdot (\vec{AM} - \vec{OA}) = 7 \Leftrightarrow \vec{AM}^2 - \vec{OA}^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{AM}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 7 \Leftrightarrow$

$|\vec{AM}|^2 - 3^2 = 7 \Leftrightarrow |\vec{AM}|^2 = 16 \Leftrightarrow |\vec{AM}| = 4$ και άρα τα σημεία M γράφουν περιφέρεια με κέντρο το σταθερό σημείο A και ακτίνα R=4.

*** Βλέπε: Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ, σελ. 137, θέμα 40 (iii), ΑΘΗΝΑ 1986.**

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Αν $A(\alpha, \beta)$ και $M(x, y)$ τότε:

$\vec{OA} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ και $|\vec{OA}| = 3 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 3 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 9$.

Ακόμη $\vec{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ οπότε $\vec{OM} - 2\vec{OA} = \begin{bmatrix} x - 2\alpha \\ y - 2\beta \end{bmatrix}$ και

$\vec{OM}(\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 7 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(\alpha x + \beta y) = 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 7 \Leftrightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = 4 \Leftrightarrow |\vec{AM}| = 4$.

Είναι λοιπόν ο γ.τ. του M κύκλος με κέντρο το $A(\alpha, \beta)$ και ακτίνα $R=4$.

Σχόλιο. Έχουμε διατηρήσει την ισοδυναμία κι έτσι έχει αποδειχθεί ευθύ και αντίστροφο συγχρόνως.

93. Να βρεθούν:

(α) Η εξίσωση της εφαπτομένης κύκλου σε δεδομένο σημείο του.

(β) Οι εφαπτόμενες στον κύκλο $x^2 + y^2 = \alpha^2$, που είναι παράλληλες στην $y = mx + c$.

(γ) Η χορδή επαφής εφαπτομένων σε κύκλο από σημείο εκτός του κύκλου.

Λύση

(α) Έστω (x_1, y_1) ένα σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

Διαφορίζοντας ως προς x, έχομε: $2x + 2y\dfrac{dy}{dx} + 2g + 2f\dfrac{dy}{dx} = 0$,

οπότε η κλίση του κύκλου στο σημείο (x, y) δίνεται από τον τύπο $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+g}{y+f}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο (x_1, y_1) είναι

$y - y_1 = -\dfrac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$ ή $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$.

Συνεπώς $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$, δηλαδή $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ αφού το (x_1, y_1) ανήκει στον κύκλο.

(β) Η ευθεία $y = mx + c$ (E_1) τέμνει τον κύκλο $x^2 + y^2 = \alpha^2$ σε σημεία των οποίων οι τετμημένες είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + (mx + c)^2 = \alpha^2$ ή

(E_2): $x^2 (1 + m^2) + 2cmx + (c^2 - \alpha^2) = 0$.

Επειδή η (E_1) είναι εφαπτομένη στον κύκλο, οι ρίζες της (E_2) πρέπει να είναι ίσες, δηλαδή πρέπει $4c^2m^2 = 4(1 + m^2)(c^2 - \alpha^2)$ ή $c^2 = \alpha^2 (1 + m^2)$ ή $c = \pm\alpha \sqrt{1 + m^2}$.

Συνεπώς οι δύο εφαπτόμενες στον κύκλο $x^2 + y^2 = \alpha^2$ με κλίση m είναι $y = mx \pm \alpha \sqrt{1 + m^2}$.

(γ) Οι εφαπτόμενες από το $T(x_1, y_1)$, εφάπτονται στον κύκλο: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ στα $P(x_2, y_2)$ και $Q(x_3, y_3)$. Η εξίσωση της PT είναι $xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0$ και το T ανήκει σ' αυτή την ευθεία, συνεπώς $x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0$. Όμοια, θεωρώντας την εφαπτομένη QT, έχομε $x_1x_3 + y_1y_3 + g(x_1 + x_3) + f(y_1 + y_3) + c = 0$. Επομένως και τα δύο σημεία $P(x_2, y_2)$, $Q(x_3, y_3)$ ικανοποιούν την εξίσωση (E_3): $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ και αυτή είναι η εξίσωση της ζητουμένης ευθείας. Άρα είναι η εξίσωση της ευθείας που ενώνει το P με το Q. Η PQ ως γνωστόν λέγεται **πολική του T ως προς τον κύκλο** και το T καλείται **πόλος** της PQ.

93. (α) Αν A, B $\in \Pi_{\nu\times\nu}$ και AB=BA, δείξτε ότι (T_1): $A^r \cdot B^s = B^s \cdot A^r$ (r, s $\in$ N*).

(β) Αν οι $\nu\times\nu$ πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και $A^T = A^{-1}$, $B^T = B^{-1}$ δείξτε ότι: $\left|(A + B)(A - B)\right| = \left|A^TB - B^TA\right|$.

(γ) Θεωρούμε τους πίνακες A, B του τύπου νxν, για τους οποίους ισχύει ότι $ABA = I_\nu$, (1).

(i) Δείξτε ότι AB=BA. (ii) Δείξτε ότι οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι.

(iii) Δείξτε ότι $AXB = AB + AB^2 \Leftrightarrow X = I_\nu + B$.

Απόδειξη

(α) Εξετάζουμε, κατ' αρχήν, αν ο τύπος (T_1) αληθεύει για r=1, δηλαδή αν ισχύει ότι (T_2): $A \cdot B^s = B^s \cdot A$.

Ο τύπος (T_2) για s=1, βάσει της σχέσης AB=BA, ισχύει. Υποθέτουμε ότι ο τύπος (T_2) ισχύει για s=κ (κ αυθαίρετος φυσικός αριθμός) δηλαδή $AB^\kappa = B^\kappa A$, (T_3).

Αν από δεξιά πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (T_3) επί B, παίρνουμε

$AB^{\kappa+1} = (B^{\kappa} A) B \Rightarrow AB^{\kappa+1} = B^{\kappa} (AB) \Rightarrow AB^{\kappa+1} = B^{\kappa} (BA) \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^{\kappa+1} = (B^{\kappa} B) A \Rightarrow AB^{\kappa+1} = B^{\kappa+1} A.$

Συνεπώς, με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής, αποδείξαμε ότι:

$(AB = BA) \Rightarrow (AB^s = B^s A) \quad (s \in N).$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι ο τύπος (T_1) ισχύει για ν=1 και για $s \in N$, αν ισχύει AB=BA.

Υποθέτομε τώρα ότι ο τύπος (T_1) είναι αληθής για r=ν (ν αυθαίρετος φυσικός αριθμός) δηλαδή ότι (T_4): $A^{\nu} B^s = B^s A^{\nu}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε με A από αριστερά και τα δύο μέλη της (T_4), παίρνομε

$A^{\nu+1} B^s = A (B^s A^{\nu}) \Rightarrow (T_5): A^{\nu+1} B^s = (A B^s) A^{\nu}.$

Επειδή η (T_2) ισχύει όταν ο s είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, η (T_5) γίνεται $A^{\nu+1} B^s = (B^s A) A^{\nu} \Rightarrow A^{\nu+1} B^s = B^s A^{\nu+1}$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η (T_1) ισχύει όταν οι r και s είναι οποιοιδήποτε φυσικοί αριθμοί. Ακόμη ισχύει και στην περίπτωση που ο r ή ο s ή και οι δύο είναι μηδέν.

Σχόλιο. Αν ισχύει η AB=BA και αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες (δηλαδή αν $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$) τότε

$(T_6) \quad A^{-r} B^s = B^s A^{-r}$

$(T_7) \quad A^r B^{-s} = B^{-s} A^r \quad (r, s \in N)$

$(T_8) \quad A^{-r} B^{-s} = B^{-s} A^{-r}$

Η (T_7) προκύπτει αμέσως από την (T_6) και η (T_8) από την (T_1).

Πραγματικά από την (T_1) προκύπτει

$A^r B^s = B^s A^r \Rightarrow (A^r B^s) = (B^s A^r)^{-1} \Rightarrow B^{-s} A^{-r} = A^{-r} B^{-s}$, δηλαδή (T_8).

Η (T_6) προκύπτει από την (T_1) εάν πολλαπλασιαστεί αριστερά και δεξιά επί A^{-r}.

(β) Έχομε $A^T B - B^T A = A^{-1} B - B^{-1} A = A^{-1} B + I - (B^{-1} A + I) =$

$= A^{-1} B + A^{-1} A - (B^{-1} A + B^{-1} B) = A^{-1} (B + A) - B^{-1} (A + B) = (A^{-1} - B^{-1}) (A + B) =$

$= (A^T - B^T) (A + B) = (A - B)^T (A + B).$

Συνεπώς $\left| A^T B - B^T A \right| = \left| (A - B)^T (A + B) \right| = \left| (A - B)^T \right| \left| (A + B) \right| =$

$= \left| A - B \right| \left| A + B \right| = \left| A + B \right| \left| A - B \right| = \left| (A + B) (A - B) \right|.$

Υπενθυμίσεις

(1) Αν $A \in \Pi_{\nu\times\nu}$ τότε $\left|A^T\right| = \left|A\right|$.

(2) Αν A, $B \in \Pi_\nu$ και $A=B$, τότε $\left|A\right| = \left|B\right|$ (το αντίστροφο δεν ισχύει).

(3) Αν A, $B \in \Pi_{\nu\times\nu}$, τότε $\left|AB\right| = \left|A\right| \cdot \left|B\right| = \left|B\right| \cdot \left|A\right|$.

(4) Αν $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ είναι πίνακες τύπου $\mu \times \nu$, τότε $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$.

Πραγματικά $(A \pm B)^T = [\alpha_{ij} \pm \beta_{ij}]^T = [\alpha_{ji} \pm \beta_{ji}] = [\alpha_{ji}] \pm [\beta_{ji}] = [\alpha_{ij}]^T \pm [\beta_{ij}]^T = A^T \pm B^T$.

(γ) (i) $AB = (AB)\, I_\nu \overset{(1)}{=} (AB)\ (ABA) = (ABA)\ (BA) \overset{(1)}{=} I_\nu\ (BA) = BA$.

(ii) $ABA = I_\nu \ \Rightarrow\ (AB)\ A = A\ (BA)\ I_\nu \overset{AB=BA}{\Rightarrow} (AB)\ A = A\ (AB) = I_\nu \ \Rightarrow$ υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του A και είναι $A^{-1} = AB$.

Ακόμη $ABA = I_\nu \overset{AB=BA}{\Rightarrow} AAB = BAA = I_\nu \ \Rightarrow\ A^2B = BA^2 = I_\nu \ \Rightarrow\ B^{-1} = A^2$.

(iii) $AXB = AB + AB^2 \ \Leftrightarrow AXB = A\ (I_\nu + B)\ B \ \Leftrightarrow\ X = I_\nu + B$.

95. Υπολογίστε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2\nu+1} + \dfrac{1}{2\nu+3} + \ldots + \dfrac{1}{4\nu-1}\right)$.

Λύση

Για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει η ταυτότητα του **E. Catalan:**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ \ldots\ - \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ \ldots\ + \frac{1}{2\nu}.$$

(Για δύο αποδείξεις αυτής βλέπε: **Μ.Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ, ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ,** θέμα 2, σελ. 30, Αθήνα 1981).

Θέτομε: $S_\nu = \dfrac{1}{2\nu+1} + \dfrac{1}{2\nu+3} + \ \ldots\ + \dfrac{1}{4\nu-1}$.

Συνεπώς έχομε:

$$1 - \frac{1}{2} + \ \ldots\ - \frac{1}{4\nu} = \frac{1}{2\nu+1} + \frac{1}{2\nu+2} + \ \ldots\ + \frac{1}{4\nu} =$$

$$= S_\nu + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ \ldots\ + \frac{1}{2\nu}\right) = S_\nu + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ \ldots\ - \frac{1}{2\nu}\right)$$

και με διάβαση στο όριο, καθώς το $\nu \to +\infty$, παίρνομε

$$\ln 2 = \lim_{\nu\to+\infty} S_\nu + \frac{1}{2}\ln 2 \quad \text{ή} \quad \lim_{\nu\to+\infty} S_\nu = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Σχόλιο. Αποδεικνύεται ότι:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \ldots\ + (-1)^{\nu-1}\frac{x^\nu}{\nu} + T_\nu(x),$$

όπου $T_\nu(x) = (-1) \int_0^x \frac{t^\nu}{1+t}\,dt$. Ακόμη, αποδεικνύεται ότι $T_\nu(x) \to 0$ για $-1 < x \leq 1$. Συνεπώς $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ για $-1 < x \leq 1$.

Για x=1 παίρνομε $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$.

96. Ερμηνεύσετε τα παρακάτω σχήματα. Με τη βοήθεια των σχημάτων της περίπτωσης (γ) μπορούμε να βρούμε το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 4ης τάξης.

(α)
$$\begin{array}{c} + \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ - \end{array}$$

(β)
$$\begin{array}{l} + \quad + \quad + \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ - \quad - \quad - \end{array}$$

(γ)
$$\begin{array}{l} + \quad - \quad + \quad - \\ \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{matrix} \\ + \quad - \quad + \quad - \end{array},$$

ΣΧΟΛΙΟ. Για το θέμα 96 βλέπε: D.S. MITRINOVIC • D. MIHAILOVIC • P. M. VASIC, LINEARNA ALGEBRA POLINOMI ANALITICKA GEOMTRIJA § 2.3, σελ. 102, UNIVERZITET U BEOGRADU, 1979.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \end{array} \\ \begin{array}{|cccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{22} & \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{32} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{42} & \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ + & - & + & - \end{array} \end{array},$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ \searrow & \searrow & \searrow & \searrow \end{array} \\ \begin{array}{|cccc|ccc} \alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{24} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{24} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{34} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{34} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{44} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{41} & \alpha_{44} & \alpha_{42} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ + & - & + & - \end{array} \end{array}.$$

Απάντηση

Το σχήμα (α) μας υποδεικνύει το γνωστό ανάπτυγμα της δευτεροτάξιας ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21} \quad \text{και σχηματικά} \quad \begin{array}{ccc} & \alpha_{11} \quad \alpha_{12} & \\ & \times & \\ & \alpha_{21} \quad \alpha_{22} & \\ \swarrow & & \searrow \\ - & & + \end{array}$$

Το σχήμα (β) μας υποδεικνύει τον πρακτικό κανόνα του Pierre F. Sarrus (1798-1861), βάσει του οποίου βρίσκουμε το ανάπτυγμα μιας τριτοτάξιας ορίζουσας, δηλαδή το: $\det(A) = \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{23} + \alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{31} + \alpha_{13}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32} - \alpha_{13}\,\alpha_{22}\,\alpha_{31} - {}$
$-\alpha_{11}\,\alpha_{23}\,\alpha_{32} - \alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\alpha_{33}$
και σχηματικά:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

ή

ή
$$\begin{array}{ccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13}}^{+}} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\alpha_{31} \quad \alpha_{32} \quad \alpha_{33}}_{-}} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{array}$$

ή
$$+ \left\{ \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix} \right\} -$$
$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{matrix}$$

Το σχήμα (γ) μας υποδεικνύει τον παρακάτω πρακτικό κανόνα, προκειμένου να βρούμε το ανάπτυγμα μιας ορίζουσας 4ης τάξης.

Βήμα 1ον. Επισυνάπτουμε τις πρώτες τρεις στήλες στην ορίζουσα, με τρόπο όμοιο μ' αυτόν που χρησιμοποιούμε στην ορίζουσα τρίτης τάξης. Το αποτέλεσμα του υπολογισμού ας είναι S_1. Σχηματικά έχουμε:

$$S_1 = \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{42} & \alpha_{42} & \alpha_{43} \end{array}$$

$$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$$

δηλαδή

$$
\begin{aligned}
S_1 = {} & \alpha_{14}\,\alpha_{23}\,\alpha_{32}\,\alpha_{41} - \alpha_{11}\,\alpha_{24}\,\alpha_{33}\,\alpha_{42} \\
& + \alpha_{12}\,\alpha_{21}\,\alpha_{34}\,\alpha_{43} - \alpha_{13}\,\alpha_{22}\,\alpha_{31}\,\alpha_{44} \\
& + \alpha_{11}\,\alpha_{22}\,\alpha_{33}\,\alpha_{44} - \alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{34}\,\alpha_{41} \\
& + \alpha_{13}\,\alpha_{24}\,\alpha_{31}\,\alpha_{42} - \alpha_{14}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32}\,\alpha_{43}
\end{aligned}
$$

Βήμα 2ον. Μεταθέτουμε κυκλικά τις στήλες 2, 3 και 4 της αρχικής ορίζουσας. Επισυνάπτουμε τις τρεις πρώτες στήλες αυτής της νέας ορίζουσας και υπολογίζουμε όπως πριν. Επαναλαμβάνομε αυτό για τρίτη φορά. Οι κυκλικές μεταθέσεις είναι (2, 3, 4), (3, 4, 2) και (4, 2, 3). Έτσι βρίσκουμε τα S_2 και S_3, δηλαδή:

$$
S_2 = \begin{array}{ccccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\
\alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{22} & \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\
\alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{32} & \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\
\alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{42} & \alpha_{41} & \alpha_{43} & \alpha_{44}
\end{array}
$$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$

$$
S_3 = \begin{array}{ccccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{14} & \alpha_{12} \\
\alpha_{21} & \alpha_{24} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{24} & \alpha_{22} \\
\alpha_{31} & \alpha_{34} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{34} & \alpha_{32} \\
\alpha_{41} & \alpha_{44} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{41} & \alpha_{44} & \alpha_{42}
\end{array}
$$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad -$

Τότε $\det(A) = S_1 + S_2 + S_3$.

Η παραπάνω τεχνική, για την εύρεση του αναπτύγματος ορίζουσας 4ης τάξης, κατανοείται καλύτερα με τη βοήθεια ενός αριθμητικού παραδείγματος.

$$
\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 7 & 11 \\ 13 & 9 & 12 & 4 \\ 7 & 10 & 3 & 5 \\ 14 & 1 & 6 & 15 \end{vmatrix}
$$

Υπολογίζομε τα S_1, S_2, S_3.

$$S_1 = \begin{array}{ccccccc} 6 & 8 & 7 & 11 & 6 & 8 & 7 \\ 13 & 9 & 12 & 4 & 13 & 9 & 12 \\ 7 & 10 & 3 & 5 & 7 & 10 & 3 \\ 14 & 1 & 6 & 15 & 14 & 1 & 6 \end{array} = 2239$$

$$+(18480)-(72)+(3120)-(6615)+(2430)-(6720)+(196)-(8580)$$

$$S_2 = \begin{array}{ccccccc} 6 & 7 & 11 & 8 & 6 & 7 & 11 \\ 13 & 12 & 4 & 9 & 13 & 12 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 10 & 7 & 3 & 5 \\ 14 & 6 & 15 & 1 & 14 & 6 & 15 \end{array} = 8368$$

$$+(1344)-(1620)+(13650)-(924)+(360)-(3920)+(4158)-(4680)$$

$$S_3 = \begin{array}{ccccccc} 6 & 11 & 8 & 7 & 6 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 12 & 13 & 4 & 9 \\ 7 & 5 & 10 & 3 & 7 & 5 & 10 \\ 14 & 15 & 1 & 6 & 14 & 15 & 1 \end{array} = -398$$

$$+(4410)-(10800)+(429)-(1344)+(1440)-(4158)+(10080)-(455)$$

Άρα $\det(B) = 2239 + 8368 - 398 = 10209$.

Σχόλιο 1. Αν σ' ένα γινόμενο, χρειάζεται ένας περιττός αριθμός αντιμεταθέσεων στοιχείων για να γυρίσουν οι δείκτες των στηλών στη φυσική τους διάταξη, προηγείται του γινομένου το −. Αν ο αριθμός τέτοιων αντιμετα-

θέσεων είναι άρτιος, προηγείται του γινομένου το +. Για παράδειγμα, εάν το γινόμενο που σχηματίζεται από μια διαγώνιο δίνει $\alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \alpha_{31}$, οι δείκτες των στηλών είναι 3, 2 και 1. Αλλάζοντας το 1 και το 3 $(1 \leftrightarrow 3)$ θα τα βάλουμε στη φυσική τους διάταξη 1, 3. Αφού χρειάστηκε μια αλλαγή και το 1 είναι περιττός αριθμός, αυτό το γινόμενο στον υπολογισμό γίνεται $(-1)\ \alpha_{13}\ \alpha_{22}\ \alpha_{31}$. Όμως, το γινόμενο $\alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{31}$ έχει ως διάταξη στηλών την 2, 3, 1. Αφού δύο μεταθέσεις $(2 \leftrightarrow 1)$ και $(3 \leftrightarrow 2)$ χρειάζονται για να πραγματοποιηθεί η φυσική διάταξη, το γινόμενο γίνεται $(+1)\ \alpha_{12}\ \alpha_{23}\ \alpha_{31}$.

Σχόλιο 2. Ο τύπος για την ορίζουσα ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}]$ τάξης $\nu \times \nu$ είναι:

$$\det(A) = \left(\frac{1}{\alpha_{11}}\right)^{r-2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{24} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{2\nu} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{31} & \alpha_{34} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{3\nu} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{41} & \alpha_{43} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{41} & \alpha_{44} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{41} & \alpha_{4\nu} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 4} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

97. (α) Αν το όριο της ακολουθίας (α_ν) είναι το $+\infty$ και το όριο της ακολουθίας (β_ν) είναι το $+\infty$, να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας του αθροίσματος $(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ είναι το $+\infty$.

(β) Αν f είναι συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και έχει πεπερασμένη παράγωγο σ' ένα σημείο $\xi \in \Delta$, τότε η f είναι συνεχής στο σημείο ξ.

Απάντηση

(α) Έστω $M>0$.

$\alpha_\nu \to +\infty \Leftrightarrow$ για κάθε $M>0$, άρα και για το $\dfrac{M}{2}$, υπάρχει $\nu_1 \in N$: για κάθε $\nu \in N$, $\nu > \nu_1 \Rightarrow \alpha_\nu > \dfrac{M}{2}$, (1).

$\beta_\nu \to +\infty \Leftrightarrow$ για κάθε M>0, άρα και για το $\frac{M}{2}$, υπάρχει $\nu_2 \in N$: για κάθε $\nu \in N$, $\nu > \nu_2 \Rightarrow \beta_\nu > \frac{M}{2}$, (2).

Αν ν_0 είναι ο μεγαλύτερος (μη μικρότερος) των ν_1, ν_2 (αλλιώτικα: $\nu_0 = \max(\nu_1, \nu_2)$) τότε για κάθε $\nu > \nu_0$ συναληθεύουν οι (1) και (2) δηλαδή: $a_\nu + \beta_\nu > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$ για κάθε $\nu > \nu_0$, επομένως $\lim\limits_{\nu \to +\infty} (a_\nu + \beta_\nu) = +\infty$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Για κάθε ε >0 υπάρχουν δείκτες $\nu_1(\varepsilon)$, $\nu_2(\varepsilon)$ ώστε

$a_\nu > \frac{1}{2\varepsilon}$ για κάθε $\nu > \nu_1(\varepsilon)$

$\beta_\nu > \frac{1}{2\varepsilon}$ για κάθε $\nu > \nu_2(\varepsilon)$.

Άρα για κάθε $\nu > \nu_0 = \max(\nu_1, \nu_2)$ ισχύει: $a_\nu + \beta_\nu > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$, δηλαδή $\lim\limits_{\nu \to +\infty} (a_\nu + \beta_\nu) = +\infty$.

ΣΧΟΛΙΟ. $\lim a_\nu = +\infty \Leftrightarrow$ για κάθε M>0 υπάρχει $\nu_0(M)$: $a_\nu > M$ για κάθε $\nu > \nu_0$. Αντί του M>0, χρησιμοποιείται η έκφραση: Για κάθε ε >0 υπάρχει $\nu_0(\varepsilon)$: $a_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ για κάθε $\nu > \nu_0$. Το σύμβολο ε >0 χρησιμοποιείται για να δηλώσει θετική ποσότητα, οσοδήποτε μικρή, οπότε βεβαίως το $\frac{1}{\varepsilon}$ δηλώνει θετική ποσότητα οσοδήποτε μεγάλη.

Ακριβώς για λόγους απλοποίησης, αντί του $\frac{1}{\varepsilon}$ χρησιμοποιούμε το για κάθε M >0, με την έννοια ότι θεωρούμε το M θετική ποσότητα που μπορεί να είναι ορισμένη, αλλά οσοδήποτε μεγάλη.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$a_\nu \to +\infty \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$: $a_\nu > \varepsilon\ \ \forall\ \nu > N$

$\beta_\nu \to +\infty \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$: $\beta_\nu > \varepsilon\ \ \forall\ \nu > N$

(Παίρνουμε το ίδιο N, διότι για διαφορετικά N_1, N_2 παίρνουμε $N = \max(N_1, N_2)$).
Επομένως $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$: $\alpha_\nu + \beta_\nu > 2\varepsilon \equiv \varepsilon^*\ \ \forall\ \nu > N$ και συνεπώς $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Θεωρούμε τυχόν ε >0. Δηλαδή το ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θετική τιμή.

Αν $\varepsilon^* = \varepsilon \cdot \lambda\ (\lambda > 0)$ ή $\varepsilon^* = \varepsilon^{\frac{\mu}{\nu}}\ (\mu, \nu \in \mathbb{N})$, τότε το ε* μπορεί να λάβει οποιαδήποτε θετική τιμή, έστω τη θ >0. Πραγματικά

$$\varepsilon^* = \theta = \lambda \cdot \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{\theta}{\lambda} > 0 \qquad \varepsilon^* = \theta = \varepsilon^{\frac{\mu}{\nu}} \Leftrightarrow \varepsilon = \theta^{\frac{\nu}{\mu}} > 0.$$

Επομένως, στον ορισμό του ορίου αντί για τυχόν ε >0 μπορουμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω ε*.

(β) $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi + h) - f(\xi) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \cdot h = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \cdot \lim\limits_{h\to 0} h = f'(\xi) \cdot 0 = 0.$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi + h) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Υπενθύμιση. Ως γνωστόν ισχύει η πρόταση:
f συνεχής στο $\xi \in \Delta \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(\xi + h) = f(\xi)$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Θεωρούμε τώρα ένα σταθερό ξ, τέτοιο ώστε να υπάρχει η $f'(\xi)$. Ορίζεται τότε μια συνάρτηση σ με $\sigma(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - f'(\xi)$. Καθώς $h \to 0$ το $\sigma(h) \to 0$.

Θέτουμε x=ξ+h, οπότε:
$f(x) = f(\xi) + hf'(\xi) + h \cdot \sigma(h)$ και $\lim\limits_{x\to\xi} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\big(f(\xi) + hf'(\xi) + h \cdot \sigma(h)\big) = f(\xi)$,
δηλαδή η f είναι συνεχής στη θέση ξ.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Επειδή f παραγωγίσιμη στη θέση ξ, έχομε ότι:
$\lim\limits_{x\to\xi} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'(\xi) \neq \pm\infty \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, υπάρχει ένας δ>0 τέτοιος, ώστε να ισχύει: $\left|\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} - f'(\xi)\right| < \varepsilon$ όταν $0 < |x - \xi| < \delta$.

Επομένως $\left|f(x)-f(\xi)-(x-\xi)\,f'(\xi)\right| < \varepsilon \left|x-\xi\right|$ όταν $0<\left|x-\xi\right|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|f(x)-f(\xi)\right|-\left|x-\xi\right| \left|f'(\xi)\right|<\varepsilon \left|x-\xi\right| \Rightarrow \left|f(x)-f(\xi)\right|<\left|x-\xi\right| \left(\varepsilon+f'(\xi)\right)$,

όταν $0<\left|x-\xi\right|<\delta$.

Για δεδομένο $\varepsilon'>0$ οσοδήποτε μικρό, οι δύο ανισότητες

$\left|x-\xi\right| \left(\varepsilon+f'(\xi)\right) < \varepsilon'$ και $\left|x-\xi\right| < \delta$, δηλαδή οι $\left|x-\xi\right| < \dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon+f'(\xi)}$ και $\left|x-\xi\right| < \delta$ συναληθεύουν όταν $\left|x-\xi\right| < \delta'$ όπου δ' ο μικρότερος από τους αριθμούς δ και $\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon+f'(\xi)}$.

Τελικά έχομε ότι για δεδομένο $\varepsilon'>0$ υπάρχει $\delta'>0$, τέτοιο ώστε:

$\left|f(x)-f(\xi)\right| < \varepsilon'$ όταν $0<\left|x-\xi\right|<\delta' \Rightarrow \lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi) \Rightarrow$ η f είναι συνεχής στη θέση $x=\xi$.

ΥΠΟΜΝΗΣΗ. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο ξ όταν, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει ένας $\delta>0$ τέτοιος, ώστε να συμβαίνει $\left|f(x)-f(\xi)\right| < \varepsilon$ όταν $0<\left|x-\xi\right|<\delta$.

ΑΛΛΙΩΤΙΚΑ. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο ξ όταν:

(i) Η f είναι ορισμένη (έχει πεπερασμένη τιμή) για $x=\xi$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$ ή $\lim\limits_{x\to\xi} f(x)=f(\lim\limits_{x\to\xi} x)$ γιατί $\lim\limits_{x\to\xi} x=\xi$.

ΣΧΟΛΙΟ 1. Κάθε φορά που διαπιστώνομε την ύπαρξη της παραγώγου $f'(\xi)$ μιας συνάρτησης f, διαπιστώνομε ταυτόχρονα και τη συνέχεια της συνάρτησης στο ίδιο σημείο ξ. Το αντίστροφο δεν ισχύει· η συνέχεια στο σημείο ξ, δεν εγγυάται την ύπαρξη της παραγώγου στο σημείο αυτό.

Π.χ. Η f με $f(x)=\left|x\right|$, $x\in R$ είναι συνεχής στο 0, όχι όμως και παραγωγίσιμη στο 0. Αν η παράγωγος μιας συνάρτησης σ' ένα σημείο ξ απειρίζεται θετικά ή αρνητικά, τότε η συνάρτηση δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο σημείο αυτό. Π.χ. Η f με $f(x)=\begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x\geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x<0 \end{cases}$ στο σημείο $\xi=0$ είναι συνεχής, ενώ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$.

ΣΧΟΛΙΟ 2. Η πρόταση «η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β)» δεν είναι ισοδύναμη με την πρόταση «η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β]». Π.χ. Η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ είναι συνεχής στο [-1, 1] και παραγωγίσιμη στο (-1, 1) ενώ δεν είναι παραγωγίσιμη στο [-1, 1], αφού $f'_+(-1)=+\infty$ και $f'_-(1)=-\infty$.

98. Σε κάθε σημείο $P(x_0, y_0)$ της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, οι εστιακές ακτίνες F_1P και F_2P σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη στο P, όπου $F_1(-c, 0)$ και $F_2(c, 0)$.

Απόδειξη

Για να δείξομε ότι οι ακτίνες F_1P, F_2P σχηματίζουν ίσες γωνίες με την εφαπτομένη στο P, αρκεί να δείξομε ότι τα τρίγωνα PT_1F_1 και PT_2F_2 είναι όμοια. Αρκεί δηλαδή να δείξομε ότι:

$$\frac{d(T_1,F_1)}{d(F_1P)}=\frac{d(T_2,F_2)}{d(F_2P)} \Leftrightarrow \frac{\left|-b^2x_0c-\alpha^2b^2\right|}{\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}}=\frac{\left|b^2x_0c-\alpha^2b^2\right|}{\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}} \Leftrightarrow \frac{(x_0c+\alpha^2)^2}{(x_0+c)^2+y_0^2}=$$

$$=\frac{(x_0c-\alpha^2)^2}{(x_0-c)^2+y_0^2} \Leftrightarrow (\alpha^2-c^2)\,x_0^2+\alpha^2y_0^2=\alpha^2(\alpha^2-c^2) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{\alpha^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

που ισχύει γιατί το σημείο $P(x_0, y_0)$ βρίσκεται πάνω στην έλλειψη.

Συμπέρασμα. Αν σ' ελλειπτικό κάτοπτρο προσπέσει ακτίνα φωτός ή ήχος προερχόμενος από τη μια εστία, αυτή μετά την ανάκλασή της επάνω στο κάτοπτρο θα περάσει από την άλλη εστία. (Κατοπτρική ιδιότητα της έλλειψης)

Σχόλια

(1) Από την $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, διαφορίζοντας ως προς x, έχομε

$$\frac{2x}{\alpha^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{\alpha^2y}.$$

Η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο (x_0, y_0) είναι $-\frac{b^2x_0}{\alpha^2y_0}$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης που περιέχει το σημείο (x_0, y_0) είναι

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{\alpha^2y_0}(x-x_0) \quad ή \quad (b^2x_0)x+(\alpha^2y_0)y-\alpha^2b^2=0.$$

2) Προορισμός της Αναλυτικής Γεωμετρίας δεν είναι η «αλγεβροποίηση» της Γεωμετρίας, δηλαδή να λύνει Γεωμετρικά προβλήματα με τη βοήθεια της Άλγεβρας. Αλλά, με την εισαγωγή των συντεταγμένων διαμόρφωσε το χώρο έτσι ώστε μέσα σ' αυτόν μπόρεσαν ν' αναπτυχθούν διάφοροι κλάδοι των Μαθηματικών (Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Θεωρητική Μηχανική και Διαφορική Γεωμετρία Γραμμών και Επιφανειών). Ακόμη, η Αναλυτική Γεωμετρία ανεκάλυψε και διερεύνησε, αλγεβρικά, νέες γραμμές και επιφάνειες.

ΠΗΓΕΣ

[1] Διονύσης Αναπολιτάνος: Αναλυτική Γεωμετρία, Πανεπιστήμιο Κρήτης 1978-79, σελ. 58-59.

[2] Στυλιανού Α. Ανδρεαδάκη: Μαθήματα Αναλυτικής Γεωμετρίας, σελ. 173, Αθήνα 1977.

[3] Εκδόσεις Παγουλάτος: Εγκυκλοπαίδεια Μαθηματικών, Τόμος Γ, σελ. 443-444.

[4] S.L. Salas - Einar Hille: Calculus, One and Several Variables with Analytic Geometry, Part one, Third Edition, σελ. 382.

99. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ δείξτε ότι ισχύει:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\,\beta\gamma\ \text{συν}A \\ \beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\,\alpha\gamma\ \text{συν}B \\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\,\alpha\beta\ \text{συν}\Gamma \end{matrix}\right\} \quad \textbf{(Νόμος των συνημιτόνων).}$$

Απόδειξη

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει, ως γνωστόν, **ο νόμος των προβολών:**

$$\left\{\begin{matrix} \beta\ \text{συν}\Gamma + \gamma\ \text{συν}B = \alpha \\ \gamma\ \text{συν}A + \alpha\ \text{συν}\Gamma = \beta \\ \alpha\ \text{συν}B + \beta\ \text{συν}A = \gamma \end{matrix}\right\}, \quad (\Pi).$$

Οι σχέσεις (Π) γράφονται:

$$\begin{matrix} 0 + \gamma\ \text{συν}B + \beta\ \text{συν}\Gamma = \alpha \\ \gamma\ \text{συν}A + 0 + \alpha\ \text{συν}\Gamma = \beta \\ \beta\ \text{συν}A + \alpha\ \text{συν}B + 0 = \gamma \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{συν}A \\ \text{συν}B \\ \text{συν}\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

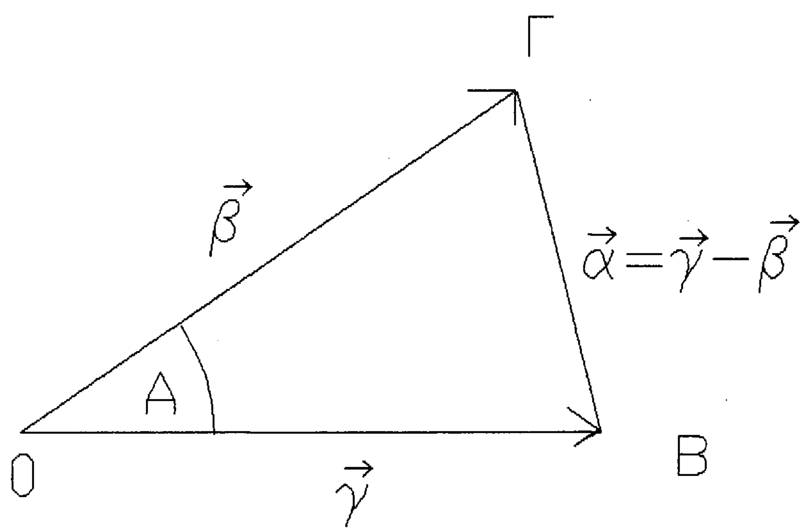
(*) Βλέπε: Ο.Ε.Δ.Β. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, α' τεύχος, πρόλογος, σειρά 13$^+$.

Συνεπώς:

$$\begin{bmatrix} \text{συν}A \\ \text{συν}B \\ \text{συν}\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{2\alpha\beta\gamma} \begin{bmatrix} -\alpha^2 & \alpha\beta & \gamma\alpha \\ \alpha\beta & -\beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \beta\gamma & -\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

ή $\begin{bmatrix} \text{συν}A \\ \text{συν}B \\ \text{συν}\Gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\beta\gamma}(-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \\ \frac{1}{2\gamma\alpha}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2) \\ \frac{1}{2\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2) \end{bmatrix}$ ή $2\beta\gamma\,\text{συν}A = \beta^2+\gamma^2-\alpha^2$ κ.λ.π.

Διαφορετική αντιμετώπιση



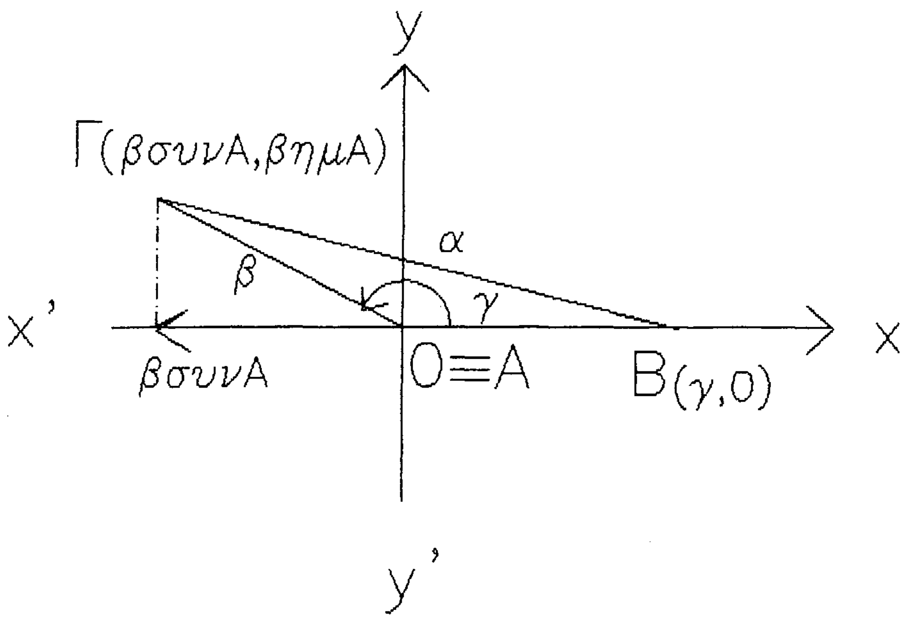
Σχήμα

Από το τρίγωνο ΟΒΓ έχομε:

$$\left|\vec{\alpha}\right|^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = (\vec{\gamma}-\vec{\beta})\cdot(\vec{\gamma}-\vec{\beta}) = \left|\vec{\gamma}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} =$$

$$= \left|\vec{\gamma}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 - 2\left|\vec{\beta}\right|\cdot\left|\vec{\gamma}\right|\,\text{συν}A \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\text{συν}A.$$

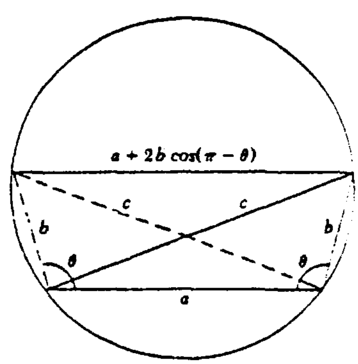
Διαφορετική αντιμετώπιση



Σχήμα

Έχομε $\alpha^2 = (\gamma - \beta\sigma\upsilon\nu A)^2 + (0 - \beta\,\eta\mu A)^2 =$
$= \gamma^2 + \beta^2\sigma\upsilon\nu^2 A - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A + \beta^2\,\eta\mu^2 A \;\Rightarrow\; \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A$.

Διαφορετική αντιμετώπιση
(Βάσει του θεωρήματος του Πτολεμαίου)



Σχήμα

$c \cdot c = b \cdot b + \big(a + 2b\cos(\pi - \theta)\big) \cdot a$ ή $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\theta$.

100. (α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $J=\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$.

(β) Αν $I_\nu=\int_0^1 \frac{x^\nu dx}{\sqrt{x^2+1}}$ δείξτε ότι $I_\nu=\frac{1}{\nu}\sqrt{2}-\frac{\nu-1}{\nu}I_{\nu-2}$.

Εφαρμογή. Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Λύση

(α) $$J=\int (xe^x)\,d\left(-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{-xe^x}{x+1}+\int\frac{1}{x+1}\,d(xe^x)=$$

$$=\frac{-xe^x}{x+1}+\int e^x\,dx=\frac{-xe^x}{x+1}+e^x+c=\frac{e^x}{x+1}+c.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$J=\int d\left(\frac{e^x}{x+1}\right)=\frac{e^x}{x+1}+c.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$\frac{x}{(x+1)^2}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \quad \text{ή} \quad x\equiv A(x+1)+B \Rightarrow A=1,\ B=-1.$$

Άρα $$J=\int\frac{e^x}{x+1}\,dx-\int\frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx=\int\frac{e^x}{x+1}\,dx+\int e^x\,d\left(\frac{1}{x+1}\right)=$$

$$=\int\frac{e^x}{x+1}\,dx+e^x\cdot\frac{1}{x+1}-\int\frac{e^x}{x+1}\,dx=\frac{e^x}{x+1}+c\,.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$J=\int xe^x\,d\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{x^2e^x}{x+1}-\int\frac{x}{x+1}\,d(xe^x)=\frac{x^2e^x}{x+1}-\int\frac{x}{x+1}(e^x+xe^x)\,dx=$$

$$=\frac{x^2e^x}{x+1}-\int\frac{x}{x+1}e^x(x+1)\,dx=\frac{x^2e^x}{x+1}-\int xe^x\,dx=\frac{x^2e^x}{x+1}-\int x\,de^x=$$

$$=\frac{x^2e^x}{x+1}-xe^x+\int e^x\,dx=\frac{x^2e^x}{x+1}-xe^x+e^x+c=\frac{e^x}{x+1}+c.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{(1+x-1)\,e^x}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{(1+x)\,e^x}{(1+x)^2}\,dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx =$$

$$= \int \frac{e^x}{1+x}\,dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx, \qquad (1).$$

Το $\displaystyle \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx = -\int e^x\, d\left(\frac{1}{1+x}\right) = -e^x \cdot \frac{1}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}\, e^x\,dx =$

$$= -\frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{1+x}\,dx, \quad (2).$$

Από (1), (2) παίρνουμε $\displaystyle \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx = \frac{e^x}{1+x} + c.$

(β) $\displaystyle I_v = \int_0^1 \frac{x^v}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_0^1 x^{v-1}\, d\sqrt{x^2+1} =$

$$= x^{v-1}\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^1 - (v-1)\int_0^1 x^{v-2}\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$= \sqrt{2} - (v-1)\int_0^1 \frac{x^{v-2}\,(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{2} - (v-1)\,I_v - (v-1)\,I_{v-2}.$$

Συνεπώς $\displaystyle I_v = \frac{1}{v}\sqrt{2} - \frac{v-1}{v}\,I_{v-2}.$

Εφαρμογή.

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,I_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right],$$

$$I_4 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}\,I_2 = \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{3}{8}\left[\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left[-\sqrt{2} + 3\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right],$$

$$I_6 = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{5}{6}\,I_4 = \frac{1}{48}\left[13\sqrt{2} - 15\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right].$$

101. Αν $\alpha_i \geq 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε ότι

$\displaystyle \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$ (Ανισότητα του A.L. Cauchy (1789-1857)).

Απόδειξη

Θέτομε: $A=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\ \dots\ +\alpha_n}{n}$ και $G=\sqrt[n]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ \dots\ \cdot\alpha_n}$.

Αντικαθιστούμε με $x=\dfrac{\alpha_1}{A}$, $x=\dfrac{\alpha_2}{A}$, ..., $x=\dfrac{\alpha_n}{A}$, διαδοχικά, στην $e^x \ge ex$ και πολλαπλασιάζομε τις ανισότητες που παίρνομε κατ' αυτό τον τρόπο. Αφού $\alpha_1+\alpha_2+\ \dots\ +\alpha_n=nA$, το συμπέρασμα είναι:

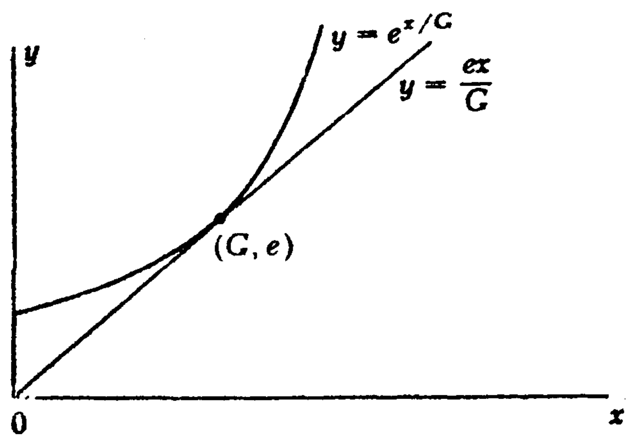
$$e^n \ge e^n\left(\frac{\alpha_1}{A}\right)\left(\frac{\alpha_2}{A}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(\frac{\alpha_n}{A}\right)=\frac{e^n G^n}{A^n}.$$

Απαλείφοντας τον παράγοντα e^n, παίρνομε $1\ge\dfrac{G^n}{A^n}$, οπότε $A\ge G$. Επιπλέον, υπάρχει η ισότητα στην $A\ge G$ $\Leftrightarrow$ εάν κάθε μια από τις τιμές του x που αντικαθίστανται είναι 1. Δηλαδή $\dfrac{\alpha_1}{A}=1$, $\dfrac{\alpha_2}{A}=1$, ... , $\dfrac{\alpha_n}{A}=1$. Αυτό οδηγεί αμέσως στη συνθήκη $\alpha_1=\alpha_2=\ \dots\ =\alpha_n$.

Σχόλιο

Για μια διαφορετική αντιμετώπιση της ανισότητας του Cauchy, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Έστωσαν α_1, α_2, ..., α_n θετικοί αριθμοί με αριθμητικό μέσο A και γεωμετρικό μέσο G. Η ανισότητα του Cauchy αναφέρει ότι $A\ge G$ με το "=" $\Leftrightarrow$ $\alpha_1=\alpha_2=\ \dots\ =\alpha_n$.

Η γραφική παράσταση της $y=e^{\frac{x}{G}}$ είναι με τα κοίλα προς τα πάνω και άρα η εφαπτομένη $y=\dfrac{ex}{G}$ στο σημείο (G, e) βρίσκεται κάτω από την καμπύλη.



Σχήμα

Για να δείξομε ότι $A \geq G$, αντικαθιστούμε το $x = \alpha_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ διαδοχικά στην $e^{\frac{x}{G}} \geq \frac{ex}{G}$ και πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη.

Άρα $e^{\frac{\alpha_1+\alpha_2+ ... +\alpha_n}{G}} \geq \left(\frac{e\alpha_1}{G}\right)\left(\frac{e\alpha_2}{G}\right) ... \left(\frac{e\alpha_n}{G}\right) = e^n$.

Άρα, έχομε $\frac{nA}{G} \geq n$ ή $A \geq G$ και "=" $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

102. (A) Ας είναι f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

ii) $f'' = g''$.

iii) $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$.

Να δειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = c \cdot x$ όπου $c \in R$.

β) Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες p_1, p_2 τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[p_1, p_2]$.

(B) Έστω ο μιγαδικός αριθμός z. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της παράστασης $|z^3 - z + 2|$ όταν $|z| = 1$.

(Γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (\alpha, \beta) \to R$ και $g: (\alpha, \beta) \to R$ παραγωγίσιμες με $f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x) \neq 0$ $\forall\, x \in (\alpha, \beta)$. Ας είναι ακόμη $p_1, p_2 \in (\alpha, \beta)$ με $f(p_1) = f(p_2) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $p \in (p_1, p_2)$ με $g(p) = 0$.

(Δ) Να αποδείξετε ότι ορίζονται πραγματικοί αριθμοί α και β έτσι ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}$, να λαμβάνει ακροτάτη τιμή -1 για x=3.

(E) Δίνεται η συνάρτηση $f: (\alpha, \beta) \to R$ συνεχής. Αν $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \beta} f(x) = +\infty$ να δειχτεί ότι η f έχει ελάχιστο στο (α, β).

(Z) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x - 1}$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

(H) Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \alpha_1\, \eta\mu x + \alpha_2\, \eta\mu 2x + ... + \alpha_\nu\, \eta\mu(\nu x)$, όπου $\alpha_i \in R$ για κάθε i=1, 2, ..., ν. Αν $\nu \in Z_+^*$ και $|f(x)| \leq |\eta\mu x|$ για κάθε $x \in R$, δείξτε ότι $|\alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + \nu\alpha_\nu| \leq 1$.

(Θ) (α) Αν η f είναι παντού παραγωγίσιμη και $f'(x) \to 0$ καθώς $x \to +\infty$, τότε $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$.

(β) Αν η f είναι παντού παραγωγίσιμη και $f'(x) \to L$ καθώς $x \to +\infty$, τότε $\dfrac{f(x)}{x} \to L$ καθώς $x \to +\infty$.

Απόδειξη

(Α) (α) Είναι $f'' = g'' \Rightarrow f' = g' + c \Rightarrow \left(f(x) - g(x)\right)' = (cx)' \Rightarrow f(x) - g(x) = c \cdot x + \kappa$, $x \in \Delta$ και $c, \kappa \in R$.

Για $x=0$ έχουμε: $f(0) - g(0) = c \cdot 0 + \kappa \Leftrightarrow 0 - 0 = \kappa \Leftrightarrow \kappa = 0$ και έτσι: (1): $f(x) - g(x) = c \cdot x$.

Διαφορετική γραφή

$$\forall\ x \in \Delta:\ f''(x) - g''(x) = 0 \ \Rightarrow\ \forall\ x \in \Delta:\ \left[f'(x) - g'(x)\right]' = 0$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c \in R\ \forall\ x \in \Delta:\ f'(x) - g'(x) = c \ \Rightarrow\ \exists\ c \in R\ \forall\ x \in \Delta:\ f'(x) - g'(x) = (cx)'$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c \in R\ \forall\ x \in \Delta:\ \left[f(x) - g(x) - cx\right]' = 0$$

$$\Rightarrow\ \exists\ c \in R\ \forall\ x \in \Delta:\ f(x) - g(x) - cx = \lambda \quad (1)$$

Για $x = 0$ η (1) δίνει: $\left.\begin{aligned} f(0) - g(0) &= \lambda \\ \text{υπόθεση: }\ f(0) &= g(0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 0 \quad (2)$

Από (1), (2) $\Rightarrow\ \exists\ c \in R\ \forall\ x \in \Delta:\ f(x) - g(x) = cx$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

$$f''(x) = g''(x) \ \Rightarrow\ f''(x) - g''(x) = 0 \ \Rightarrow\ f'(x) - g'(x) = c \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \int_0^x \left(f'(x) - g'(x)\right) dx = \int_0^x c\, dx \Rightarrow \int_0^x \left(f(x) - g(x)\right)' dx = cx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f(x) - g(x) - f(0) + g(0) = cx \ \Rightarrow\ f(x) - g(x) = cx.$$

(β) Από (α) έχουμε: $g(x) = f(x) - c \cdot x$.

1η περίπτωση

Αν $c=0$ τότε: $g(x) = f(x)$.

Οπότε για τα p_1, p_2 έχουμε $g(p_1) = g(p_2) = f(p_1) = f(p_2) = 0$.

2η περίπτωση

Αν $c \neq 0$ τότε: Η g είναι συνεχής στο $[p_1, p_2]$ $(p_1 < 0 < p_2)$ με

$g(p_1) = f(p_1) - c \cdot p_1 = 0 - c \cdot p_1 = -c \cdot p_1$

$g(p_2) = f(p_2) - c \cdot p_2 = 0 - c \cdot p_2 = -c \cdot p_2$

Οπότε: $g(p_1)\ g(p_2) = c^2 p_1 p_2 < 0$.

Άρα από γνωστό θεώρημα θα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(p_1,\ p_2)$.

Από τα παραπάνω, έχουμε το ζητούμενο.

(Β) Θεωρούμε την $f(z) = z^3 - z + 2$ και θα εξετάσουμε πότε το $|f(z)|^2$ είναι μέγιστο όταν $|z| = 1$. Έστω $z = x + yi$ με x, y πραγματικούς αριθμούς.

Από $|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$. Λόγω του ότι $y^2 \geq 0$, θα έχουμε $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Έτσι

$$|f(z)|^2 = |z^3 - z + 2|^2 = |(x + yi)^3 - (x + yi) + 2|^2 =$$

$$= |x^3 + 3x^2 yi - 3xy^2 - y^3 i - x - yi + 2|^2 = |(x^3 - 3xy^2 - x + 2) + (3x^2y - y^3 - y)i|^2 =$$

$$= (x^3 - x - 3xy^2 + 2)^2 + (3x^2y - y^3 - y)^2 =$$

$$= \left[x^3 - x - 3x\ (1 - x^2) + 2\right]^2 + y^2\ (3x^2 - y^2 - 1)^2 =$$

$$= (4x^3 - 4x + 2)^2 + (1 - x^2)\ (3x^2 - 1 + x^2 - 1)^2 = (4x^3 - 4x + 2)^2 + (1 - x^2)\ (4x^2 - 2)^2 =$$

$$= 16x^6 + 16x^2 + 4 - 32x^4 + 16x^3 - 16x + 16x^4 - 16x^2 + 4 - 16x^6 + 16x^4 - 4x^2 =$$

$$= 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = 16x^3 - 4x^2 - 16x + 8$ με $-1 \leq x \leq 1$.

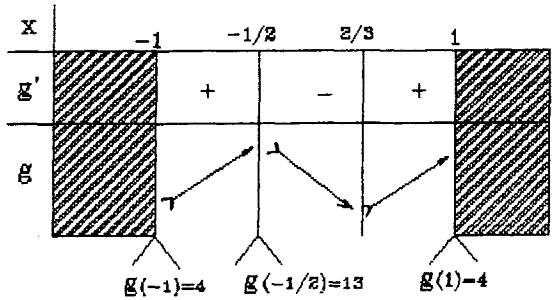
Η g ως πολυωνυμική έχει $g'(x) = 48x^2 - 8x - 16 = 8\ (6x^2 - x - 2)$ για όλα τα $x \in [-1, 1]$. Είναι

$$\begin{Bmatrix} g'(x) = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 6x^2 - x - 2 = 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = -\frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \left(x = \frac{2}{3} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2}\right)$$

και $\begin{Bmatrix} g'(x) > 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x \in \left[-1,\ -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{3},\ 1\right]$, $\begin{Bmatrix} g'(x) < 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$.

Οπότε:

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-1,\ -\frac{1}{2}\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{2}{3},\ 1\right]$. Στο $-\frac{1}{2}$ παρουσιάζει τ. μέγιστο ενώ στο $\frac{2}{3}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Είναι $g(-1) = g(1) = 4$ και $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 13$. Συνοπτικά τα βλέπουμε στον πίνακα:



Εξ αυτών συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης $g(x)$ είναι 13 και παρουσιάζεται στο $x = -\frac{1}{2}$. Οπότε η μέγιστη τιμή της παράστασης $\left|z^3 - z + 2\right|$ είναι $\sqrt{13}$.

Παρατήρηση

Η μέγιστη τιμή της $\left|z^3 - z + 2\right|$ παρουσιάζεται για τον μιγαδικό $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$ (κυβική ρίζα του 1). Αυτό βρίσκεται λόγω $x = -\frac{1}{2}$ και $y^2 = 1 - x^2$.

(Γ) Από τη σχέση $f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x) \neq 0\ \ \forall\ x \in (\alpha, \beta)$ για $x = p_1 \in (\alpha, \beta)$ και $x = p_2 \in (\alpha, \beta)$, παίρνουμε αντίστοιχα: $f'(p_1)\ g(p_1) - f(p_1)\ g'(p_1) \neq 0$, $f'(p_2)\ g(p_2) - f(p_2)\ g'(p_2) \neq 0$ και επειδή δόθηκε ότι $f(p_1) = f(p_2) = 0$, οι παραπάνω σχέσεις γίνονται $f'(p_1)\ g(p_1) \neq 0$, $f'(p_2)\ g(p_2) \neq 0$ οπότε έχουμε $g(p_1) \neq 0$ και $g(p_2) \neq 0$ (1).

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι δεν υπάρχει $p \in (p_1, p_2)$ με $g(p) = 0$. Δηλαδή ότι $\forall\ p \in (p_1, p_2)$, $g(p) \neq 0$. Τότε, όμως, λόγω και των (1) ορίζεται η συνάρτηση $\frac{f}{g}: [p_1, p_2] \to R$ που είναι παραγωγίσιμη και ακόμα, $\left[\frac{f}{g}\right](p_1) = \left[\frac{f}{g}\right](p_2) = 0$.

Έτσι η $\frac{f}{g}$ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[p_1, p_2]$.

Θα υπάρχει, λοιπόν, $\xi \in (p_1, p_2)$ ώστε να είναι

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)\ g(\xi) - f(\xi)\ g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)\ g(\xi) - f(\xi)\ g'(\xi) = 0$$

κι επειδή $\xi \in (p_1, p_2) \subset (\alpha, \beta)$, η τελευταία σχέση είναι αντίθετη με την υπόθεση της άσκησης.

Η υπόθεση, λοιπόν, $\forall\ p \in (p_1, p_2)$, $g(p) \neq 0$ μας οδήγησε σε άτοπο, άρα υπάρχει $p \in (p_1, p_2)$ με $g(p) = 0$.

(Δ) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A = R - \{-1\}$. Πρώτα απ' όλα θα πρέπει να είναι

$$f(3) = -1 \Leftrightarrow \frac{9+3\alpha+\beta}{2} = -1 \Leftrightarrow (1)\!:\ 3\alpha+\beta+9+2=0 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta+11=0.$$

Η (1) μας πληροφορεί ότι το -1 είναι τιμή της f για x=3. Σχηματίζουμε την παράγωγο της f:

$$f'(x) = \frac{(2x+\alpha)\ (x-1)-(x^2+\alpha x+\beta)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-(\alpha+\beta)}{(x-1)^2},\quad x \neq 1.$$

Στη θέση x=3 είναι $f'(3) = \dfrac{9-6-(\alpha+\beta)}{4} = \dfrac{3-(\alpha+\beta)}{4}$.

Αναγκαίως λοιπόν θα πάρουμε: (2) $f'(3) = 0 \Leftrightarrow \alpha+\beta = 3$ αφού θέλουμε το 3 να είναι θέση ακροτάτου λόγω του ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3.

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\alpha = -7$ και $\beta = 10$.

Για τις τιμές αυτές που βρέθηκαν δεν ξέρουμε ότι το σημείο x=3 είναι θέση ακροτάτου. Αν όμως είναι, τότε είναι βέβαιο ότι το τοπικό ακρότατο στη θέση αυτή είναι -1. Το εξετάζουμε με το πρόσημο της f'. Για τις τιμές των α και β που προσδιορίσαμε, η f τρέπεται: $f(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{x-1}$ με $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

Είναι $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1) \cup (1,3)$.

Γύρω από το 3 η f' αλλάζει πρόσημο. Αριστερά είναι η f' αρνητική και δεξιά θετική. Ώστε το 3 είναι θέση τοπικού ελαχίστου.

Συμπληρωματικά παρατηρούμε ότι το σημείο $x=-1$ είναι θέση τοπικού μεγίστου και το τοπικό μέγιστο είναι $f(-1) = -9$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		+		−	‖	−		+	
f		↗		↘	‖	↘		↗	

Άρα πράγματι για τα α, β που υπολογίσαμε η f λαμβάνει ακροτάτη τιμή -1 για $x=3$.

(Ε) Ας είναι $\xi \in (\alpha, \beta)$ και $f(\xi)$ η τιμή της συνάρτησης στο ξ.

Είναι $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$ άρα θα υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, \xi)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\alpha, \xi_1)$ να είναι $f(x) > f(\xi)$ (I).

Ακόμα $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = +\infty$ άρα υπάρχει $\xi_2 \in (\xi, \beta)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in (\xi_2, \beta)$ να είναι $f(x) > f(\xi)$ (II).

Η f είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subset (\alpha, \beta)$ άρα έχει ελάχιστο στο $[\xi_1, \xi_2]$ έστω το μ. Το $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, άρα $f(\xi) \geq \mu$ (III).

Από (I), (II), (III) έχουμε $f(x) \geq \mu$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Συνεπώς η f έχει ελάχιστο στο (α, β).

(Ζ) Θέτουμε $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{|x-1|}$, $x \in R - \{1\}$.

Παρατηρούμε ότι: $\lim\limits_{x\to 1} |x-1| = 0$ ενώ $|x-1| > 0$. Άρα $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$.

Εξάλλου είναι $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + \alpha x + \beta) = 1 + \alpha + \beta$.

Ώστε $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = (+\infty)\ (1 + \alpha + \beta)$.

Αν λοιπόν είναι $1 + \alpha + \beta \neq 0$ τότε το όριο θα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ αν $1 + \alpha + \beta > 0$ ή $1 + \alpha + \beta < 0$.

Αναγκαίως θα πάρουμε $1 + \alpha + \beta = 0$ και βλέπουμε. Τότε θα είναι με αντικατάσταση του $\beta = -1 - \alpha$ η $f(x) = \dfrac{x^2 + \alpha x - \alpha - 1}{|x-1|} = \dfrac{(x-1)\ (x+1+\alpha)}{|x-1|}$.

Έχουμε: για $x > 1$, $f(x) = x + 1 + \alpha$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2 + \alpha$ για $x<1$, $f(x) = -(x + 1 + \alpha)$ και άρα $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -(2 + \alpha)$.

Υπάρχει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ εάν και μόνο εάν είναι $2 + \alpha = -(2 + \alpha) \Leftrightarrow \alpha = -2$ και από $\beta = -1 - \alpha$ βρίσκουμε $\beta = 1$.

Συμπληρωματικά παρατηρούμε τώρα ότι

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{|x-1|} = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} = \frac{|x-1|^2}{|x-1|} = |x-1|, \quad x \in R - \{1\}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} |x-1| = 0$.

(Η) $\left|\alpha_1+2\alpha_2+\ \dots\ +\nu\alpha_\nu\right|=\left|f'(0)\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right|=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\right|\cdot\left|\dfrac{\eta\mu x}{x}\right|=\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\right|\ \leq\ 1.$

(Θ) (α) Επειδή $f'(x)\to 0$ καθώς $x\to+\infty$ έπεται ότι, αν δοθεί ε>0 υπάρχει M=M(ε)>0 τέτοιο ώστε $x>M\ \Rightarrow\ \left|f'(x)\right|<\varepsilon$.

Έτσι αν x>M, σύμφωνα με το θέωρημα του Lagrange, για κάποιο ξ με M<ξ<x θα έχουμε $\left|\dfrac{f(x)-f(M)}{x-M}\right|=\left|f'(\xi)\right|<\varepsilon$. Προκειμένου να δείξομε ότι $\dfrac{f(x)}{x}\to 0$ καθώς $x\to+\infty$, γράφομε

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x-M}{x}\cdot\frac{f(x)}{x-M}=\frac{x-M}{x}\left[\frac{f(x)-f(M)}{x-M}+\frac{f(M)}{x-M}\right]$$

και παρατηρούμε ότι (αν x>M)

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|\frac{x-M}{x}\right|\cdot\left|\frac{f(x)-f(M)}{x-M}+\frac{f(M)}{x-M}\right|\ \leq\ \left|\frac{f(x)-f(M)}{x-M}+\frac{f(M)}{x-M}\right|\ \leq$$

$$\leq\ \left|\frac{f(x)-f(M)}{x-M}\right|+\left|\frac{f(M)}{x-M}\right|.$$

Θεωρούμε ένα πραγματικό ε>0 και θα δείξομε ότι υπάρχει M_0 τέτοιο ώστε αν $x>M_0$ τότε $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon$. Πραγματικά εκλέγομε πρώτα το M έτσι ώστε $\left|\dfrac{f(x)-f(M)}{x-M}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ για κάθε x>M. Ονομάζομε M_0 ένα πραγματικό $M_0>M$ για τον οποίο $\left|\dfrac{f(M)}{M_0-M}\right|\ <\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Για $x>M_0$ έχομε $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\left|\dfrac{f(M)}{x-M}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

(β) Θωρούμε τη συνάρτηση φ με τύπο: $\varphi(x)=f(x)-Lx$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της $\varphi'(x)=f'(x)-L\to 0$ καθώς $x\to+\infty$. Σύμφωνα με το (α) η $\dfrac{\varphi(x)}{x}\to 0$ δηλαδή $\dfrac{\varphi(x)}{x}=\dfrac{f(x)}{x}-L\to 0$ καθώς $x\to+\infty$ άρα $\dfrac{f(x)}{x}\to L$ καθώς $x\to+\infty$.

103. **(α) Αν n φυσικός, δείξτε ότι $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n} \geq \frac{1}{2}$.**

(β) Έστω f συνάρτηση συνεχής στο σημείο x=c, με $f(c) \neq 0$. Θα υπάρχει τότε ένα ανοικτό διάστημα (c−δ, c+δ), με κέντρο το c, σε κάθε σημείο x του οποίου οι αρθμοί f(x) και f(c) θα είναι ομόσημοι.

(γ) Δείξτε ότι:

(i) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right) < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < 1$.

(ii) $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \leq 2e^2$.

(δ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \tan x \cdot \tan 2x \cdot \tan 3x\,dx$.

(ε) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d}{dx}(\eta\mu x^0)$.

(ζ) Υπολογίστε το $I_n = \int \tan^n x\,dx$.

Απόδειξη

(α) Με $z_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{n}$ θάχομε $\frac{z_{n+1}+1}{z_n} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}}$ ή $z_{n+1}^2 = \left(1+\frac{1}{4n(n+1)}\right)z_n^2$, άρα $z_{n+1} > z_n$. Αφού τώρα $z_1 = \frac{1}{2}$ τότε $z_n > \frac{1}{2}$ για n=2, 3, ... Από την $2z_{n+1}^2 = 2z_n^2 + \frac{z_n^2}{2n(n+1)}$ προκύπτει, για παράδειγμα, ότι $1-2z_2^2 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}$ ή $1-2z_3^2 = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{48}-\frac{1}{384}$, απ' όπου καταλαβαίνουμε ότι $1-2z_n^2 > 0$.

(β) Υποθέτομε ότι $f(c) > 0$. Λόγω του ότι η f είναι συνεχής στη θέση x=c, ισχύει ότι για κάθε ε>0 θα υπάρχει ένα δ>0 τέτοιο ώστε να ισχύει

(I): $f(c)-\varepsilon < f(x) < f(c)+\varepsilon$, όταν $c-\delta < x < c+\delta$.

Αν αυτό το δ το πάρουμε ως αντίστοιχο του $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$, η σχέση (I) γίνεται

$\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)$, όταν $c-\delta < x < c+\delta$.

Επομένως $f(x) > 0$ στο διάστημα αυτό και οι αριθμοί f(x) και f(c) θα έχουν το ίδιο πρόσημο. Αν f(c)<0, θεωρούμε το δ που είναι αντίστοιχο στο $\varepsilon = -\frac{1}{2}f(c)$ και καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Σχόλιο. Στις «Γενικές Εξετάσεις 1988» τέθηκε το εξής θεωρητικό θέμα: Θεωρούμε συνάρτηση g που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι εάν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \Delta$ και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{1}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και είναι $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, (T).

Τίθενται τα ερωτήματα: 1) Οι επτά συγγραφείς του σχολικού βιβλίου Μαθηματικά Ι Γ' Λυκείου, Ανάλυση, σελ. 158 § 4.11, έκδοση 1991, στην απόδειξη που παραθέτουν, αντελήφθησαν ότι δεν έχουν εξασφαλίσει $g(x_0+h) \neq 0$ για αρκετά μικρό h;

2) Η επιτροπή που επέλεξε τα θέματα, Πανεπιστημιακοί και μαχόμενοι, υποτίθεται, καθηγητές μέσης που δίδαξαν το μάθημα, είχαν υπόψη τους την εν λόγω λανθασμένη απόδειξη; Για τη νομιμότητα της γραφής του δεύτερου μέλους της (T) δεν θάπρεπε νάναι σίγουροι ότι $g(x_0+h) \neq 0$ για επαρκώς μικρές τιμές του h;

Δεν είναι βέβαια άγνωστο ότι η προϋπόθεση αυτή είναι συνέπεια γενικότερου θεωρήματος για συνεχείς συναρτήσεις, σύμφωνα με το οποίο όταν μια συνάρτηση g είναι συνεχής στο x και $g(x_0) \neq 0$, θα είναι και $g(x_0+h) \neq 0$ για καταλλήλως μικρά h. Το θεώρημα όμως αυτό – δηλαδή η παραπάνω άσκηση 102 (β) – δεν ήταν γνωστό στον υποψήφιο, δεδομένου ότι δεν ήταν στην εξεταζόμενη ύλη, ούτε καν στο σχολικό βιβλίο. Στο νέο βιβλίο Ο.Ε.Δ.Β. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Ανάλυση Β τεύχος, 1992, σελ. 26, πρόταση 3, η απόδειξη δυστυχώς παραλείπεται.

Δηλαδή, απλώς παραθέτουμε θεωρήματα με την ψευδαίσθηση ότι έτσι καλλιεργούμε τη μαθηματική σκέψη των υποψηφίων, προωθούμε τη δημιουργική τους φαντασία και συμβάλλουμε στην κατάκτηση της θεμελιωμένης και λειτουργικής γνώσης.

Δυστυχώς η παραγματικότητα είναι εντελώς διαφορετική. Είναι βέβαιο ότι δεν μπορούμε να πετύχουμε τίποτα από τα παραπάνω. Εκτός αν νομίζουμε ότι αυτό θα γίνει με τα δωρεάν διανεμόμενα λυσάρια, μοναδική σε παγκόσμια κλίμακα ελληνική εκπαιδευτική πρωτοτυπία.

Είναι σίγουρο ότι, με τον τρόπο που προσφέρονται, απομακρύνουν από τα προβλήματα την πρόκληση, την αντίσταση, το μυστήριο και τη γοητεία. Αποστερούν το λύτη από την πνευματική απόλαυση και τη χαρά που προέρχεται από την ανακάλυψη του καινούργιου. Οι συνέπειες είναι γνωστές: η

κριτική σκέψη αποκοιμίζεται, η συλλογιστική συνέπεια εξαφανίζεται και το μεράκι μαραίνεται.

Συμπερασματικά: Τα προγράμματα και τα βιβλία πρέπει να είναι έτσι δομημένα ώστε αποφεύγοντας την αποσπασματική και ελλειμματική πληροφόρηση να εστιάζουν την προσοχή των ενδιαφερομένων μαθητών σε μερικές θεμελιώδεις (κεντρικές) και πλατειά περιεκτικές ιδέες της επιστήμης. Πρέπει να βρούμε καλά κεντρικά προβλήματα και να αφήσουμε χρόνο στους μαθητές να παλαίψουν με δύσκολες ερωτήσεις, να βρουν αντιφάσεις και γνωστικές συγκρούσεις. Ταυτόχρονα θα πρέπει να τους διευκολύνουμε την πορεία προς τη σύλληψη νέων επιστημονικών εννοιών. Ακόμη, πρέπει να αναζητήσουμε τρόπους σύνδεσης των διαφόρων μαθηματικών θεωριών με την πραγματικότητα και να διδάσκονται στο σχολείο, σε στοιχειώδες επίπεδο και με τα κατάλληλα μέσα, τα διάφορα στάδια της μαθηματικοποίησης, ώστε να μπορούν οι μαθητές να εξοικειωθούν μ' αυτά.

(γ) (i) Για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $0 < x^3 < x^2$

Τότε $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} < 1$ για $x \in (0, 1)$ και συνεπώς:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < 1$$

ή $\left[\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^1 < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < 1$

ή $\ln\left(1+\sqrt{2}\right) < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < 1.$

(ii) Αν $f(x) = e^{x^2-x}$ τότε $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x}$. Άρα η $f(x)$ είναι φθίνουσα στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ και αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Επομένως η f έχει ελάχιστο στο $x = \frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ και μέγιστο στο $x=2$ το $f(2) = e^2$.

Για κάθε $x \in [0, 2]$ θα έχουμε $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}} \leq e^{x^2-x} \leq e^2$.

Συνεπώς $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le \int_0^2 e^2\,dx$ ή $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \le \int_0^2 e^{x^2-x}\,dx \le 2e^2$.

(δ) $\tan 3x = \tan(x+2x) = \dfrac{\tan x + \tan 2x}{1-\tan x\ \tan 2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan 3x - \tan x\ \tan 2x\ \tan 3x = \tan x + \tan 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan x\ \tan 2x\ \tan 3x = \tan 3x - \tan x - \tan 2x.$

Επομένως $\int \tan x\ \tan 2x\ \tan 3x\ dx = \int(-\tan x - \tan 2x + \tan 3x)\ dx =$

$= \ln|\cos x| + \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| - \frac{1}{2}\ln|\cos 3x| + c.$

ΣΧΟΛΙΟ. Ο τύπος $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$, ισχύει με τους περιορισμούς: $x \ne \dfrac{\kappa\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$ και $x \ne \lambda\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa, \lambda \in Z$ οι οποίοι συμπτύσσονται στον περιορισμό $x \ne \dfrac{\kappa\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$ διότι για $\kappa = 3p+1$, $p \in Z$, ο περιορισμός $x \ne \dfrac{\kappa\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$ περιέχει τον $x \ne \lambda\pi + \dfrac{\pi}{2}$.

(ε) $360^\circ \to 2\pi\text{rad}$, $x^0 \to \dfrac{x\pi}{180}$ rad, δηλαδή $x^0 = \dfrac{1}{180}\pi x$ rad.

Συνεπώς $\dfrac{d}{dx}(\eta\mu x^0) = \dfrac{d}{dx}\left(\eta\mu\ \dfrac{1}{180}\pi x\right) = \dfrac{1}{180}\pi\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{180}\pi x = \dfrac{1}{180}\pi\ \sigma\upsilon\nu\, x^0$.

Ο παράγοντας $\dfrac{1}{180}\cdot\pi$ που κάνει την εμφάνισή του είναι ένα μειονέκτημα που γίνεται πιο μεγάλο σε προβλήματα που επαναλαμβάνεται η παράγωγος. Γι' αυτό το λόγο προτιμούμε τη μονάδα του ακτινίου.

(ζ) $I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\ dx =$

$= \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - \int \tan^{n-2} x dx = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}.$

104. Μερικές κλασικές ανισοτικές σχέσεις.

Με το θεώρημα που ακολουθεί (το οποίο αποδεικνύεται με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος της μέσης τιμής) αποδεικνύονται αμέσως πολλές από τις κλασικές ανισοτικές σχέσεις καθώς και ένας απεριόριστος αριθμός άλλων.

1. Θεώρημα

α) Μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ έχει θετική δεύτερη παράγωγο σε κάθε θέση του Δ· να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση:

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ \dots\ +\lambda_\nu x_\nu}{\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_\nu}\right) \le \frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ \dots\ +\lambda_\nu f(x_\nu)}{\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_\nu} \qquad (\mathrm{I})$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots ,\lambda_\nu$ τυχόντες θετικοί αριθμοί και $x_1, x_2, \dots ,x_\nu$ τυχόντες αριθμοί από το Δ.

Ειδικά ισχύει: $f\left(\frac{x_1+x_2+\ \dots\ +x_\nu}{\nu}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ \dots\ +f(x_\nu)}{\nu}$.

β) Μια πραγματική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ έχει αρνητική δεύτερη παράγωγο σε κάθε θέση του Δ· να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση $f\left(\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ \dots\ +\lambda_\nu x_\nu}{\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_\nu}\right) \ge \frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ \dots\ +\lambda_\nu f(x_\nu)}{\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_\nu}$,

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots ,\lambda_\nu$ τυχόντες θετικοί αριθμοί και $x_1, x_2, \dots ,x_\nu$ τυχόντες αριθμοί από το Δ.

Ειδικά ισχύει: $f\left(\frac{x_1+x_2+\ \dots\ +x_\nu}{\nu}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ \dots\ +f(x_\nu)}{\nu}$.

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει η ισότητα, όταν $x_1=x_2=\ \dots\ =x_\nu$ και μόνο τότε.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε εν πρώτοις ότι $\frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ \dots\ +\lambda_\mu x_\mu}{\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_\mu} \in \Delta\ \forall$ με N*. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ο x_1 είναι ο ελάχιστος και ο x_μ ο μέγιστος από τους $x_1,\ x_2, \dots ,x_\mu$. Θα έχουμε

$\lambda_1 x_1=\lambda_1 x_1 \le \lambda_1 x_\mu,\ \ \lambda_2 x_1 \le \lambda_2 x_2 \le \lambda_2 x_\mu, \dots ,\lambda_\mu x_1 \le \lambda_\mu x_\mu=\lambda_\mu x_\mu$.

Με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$(\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\ \lambda_\mu)\,x_1 \le \lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ \dots\ +\lambda_\mu x_\mu \le (\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\ \lambda_\mu)\,x_\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 \le \frac{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ \dots\ +\lambda_\mu x_\mu}{\lambda_1+\lambda_2+\ \dots\ +\lambda_\mu} \le x_\mu$$

Σχόλιο του Εκδότη. Το θέμα 104 (θεώρημα - απόδειξη - εφαρμογές) ανήκει στον διακεκριμένο Μαθηματικό ΠΑΥΛΟ ΦΙΛΙΠΠΟΥ. Και από αυτή εδώ τη θέση τον ευχαριστούμε θερμότατα για την πολύτιμη συνεργασία του.

και επομένως $\dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\mu x_\mu}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\mu} \in \Delta$. (Βεβαίως όλες οι προηγούμενες σχέσεις ισχύουν ως ισότητες όταν $x_1 = x_2 = \ldots = x_\mu$ και μόνο τότε).

Θα αποδείξουμε τη σχέση (Ι), όταν ν=2. Έστω $x_1 < x_2$. Έχουμε

$$A = f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) - \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} =$$

$$= \frac{\lambda_1\left[f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) - f(x_1)\right] + \lambda_2\left[f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) - f(x_2)\right]}{\lambda_1 + \lambda_2} =$$

$$= \frac{\lambda_1\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - x_1\right) f'(\xi_1) + \lambda_2\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} - x_2\right) f'(\xi_2)}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

όπου $x_1 < \xi_1 < \dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} < \xi_2 < x_2$.

Επομένως

$$A = \frac{\frac{\lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} f'(\xi_1) - \frac{\lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} f'(\xi_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (x_2 - x_1)}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}\left[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)\right] = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}(x_2 - x_1)(\xi_1 - \xi_2) f''(\xi) < 0.$$

Δεχόμαστε ότι η σχέση (Ι) ισχύει για κάθε $\nu = \kappa \in N^*$ και θα δείξουμε ότι ισχύει και για ν=κ+1. Θέτουμε $\dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\kappa x_\kappa}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa} = y$, οπότε:

$$f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\kappa x_\kappa + \lambda_{\kappa+1} x_{\kappa+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa + \lambda_{\kappa+1}}\right) = f\left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa) y + \lambda_{\kappa+1} x_{\kappa+1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa + \lambda_{\kappa+1}}\right) \le$$

$$\le \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa) f(y) + \lambda_{\kappa+1} f(x_{\kappa+1})}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa + \lambda_{\kappa+1}} =$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa) f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\kappa x_\kappa}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa}\right) + \lambda_{\kappa+1} f(x_{\kappa+1})}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa + \lambda_{\kappa+1}} \le$$

$$\le \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa) \frac{\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_\kappa f(x_\kappa)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa} + \lambda_{\kappa+1} f(x_{\kappa+1})}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_\kappa + \lambda_{\kappa+1}} =$$

$$= \frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\ ...\ +\lambda_\kappa f(x_\kappa)+\lambda_{\kappa+1} f(x_{\kappa+1})}{\lambda_1+\lambda_2+\ ...\ +\lambda_\kappa+\lambda_{\kappa+1}}.$$

Η σχέση (Ι) ισχύει σαν ισότητα, όταν και μόνο όταν $x_1 = x_2 = \ ...\ = x_\nu$.

Η ειδική περίπτωση προκύπει από την (Ι) για $\lambda_1 = \lambda_2 = \ ...\ = \lambda_\nu$.

(β) Η απόδειξη γίνεται με όμοιο τρόπο.

2. Εφαρμογές

α) Για τυχόντες θετικούς αριθμούς να δειχθεί ότι:

I. $(x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu)^p \le \nu^{p-1}\ (x_1^p+x_2^p+\ ...\ +x_\nu^p)$, όπου $p>1$.

II. $\dfrac{x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu}{\nu} \ \ge\ \sqrt[\nu]{x_1\cdot x_2\cdot\ ...\ \cdot x_\nu}$.

III. $(x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu)\ \ln\dfrac{x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu}{\nu} \ \le\ x_1\ln x_1+x_2\ln x_2+\ ...\ +x_\nu\ln x_\nu$.

β) Για τυχόντες πραγματικούς αριθμούς να δειχθεί ότι:

I. $\dfrac{x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu}{\nu} \ \le\ \sqrt{\dfrac{x_1^2+x_2^2+\ ...\ +x_\nu^2}{\nu}}$.

II. $e^{x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu} \ \le\ \left(\dfrac{e^{x_1}+e^{x_2}+\ ...\ +e^{x_\nu}}{\nu}\right)^\nu$.

γ) Αν $x_1,\ x_2,\ ...\ ,x_\nu$ είναι τυχόντες θετικοί αριθμοί και $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\ ,\lambda_\nu$ θετικοί αριθμοί με άθροισμα 1, να δειχθεί ότι:

I. $(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ ...\ +\lambda_\nu x_\nu)^p \ \le\ \lambda_1x_1^p+\lambda_2x_2^p+\ ...\ +\lambda_\nu x_\nu^p$, όπου $p>1$.

II. $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ ...\ +\lambda_\nu x_\nu \ \ge\ x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\cdot\ ...\ \cdot x_\nu^{\lambda_\nu}$.

δ) Για τυχόντες θετικούς αριθμούς με άθροισμα α να δειχθεί ότι:

I. $\dfrac{x_1}{\alpha-x_1}+\dfrac{x_2}{\alpha-x_2}+\ ...\ +\dfrac{x_\nu}{\alpha-x_\nu} \ \ge\ \dfrac{\nu}{\nu-1}$.

II. $\dfrac{x_1}{1+x_1}+\dfrac{x_2}{1+x_2}+\ ...\ +\dfrac{x_\nu}{1+x_\nu} \ \le\ \dfrac{\nu\alpha}{\nu+\alpha}$.

ε) Για τόξα του $(0,\pi)$ να δειχθεί ότι:

I. $\eta\mu x_1+\ \eta\mu x_2+\ ...\ +\ \eta\mu x_\nu \ \le\ \nu\eta\mu\,\dfrac{x_1+x_2+\ ...\ +x_\nu}{\nu}$.

II. $\eta\mu x_1 \cdot \eta\mu x_2 \cdot \ldots \cdot \eta\mu x_\nu \ \le\ \eta\mu^\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

στ) Για τόξα του $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ να δειχθεί ότι:

I. $\sigma\upsilon\nu x_1 + \sigma\upsilon\nu x_2 + \ldots + \sigma\upsilon\nu x_\nu \ \le\ \nu\sigma\upsilon\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

II. $\sigma\upsilon\nu x_1 \cdot \sigma\upsilon\nu x_2 \cdot \ldots \cdot \sigma\upsilon\nu x_\nu \ \le\ \sigma\upsilon\nu^\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

III. $\varepsilon\varphi x_1 + \varepsilon\varphi x_2 + \ldots + \varepsilon\varphi x_\nu \ \ge\ \nu\varepsilon\varphi \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

IV. $\sigma\varphi x_1 + \sigma\varphi x_2 + \ldots + \sigma\varphi x_\nu \ \ge\ \nu\sigma\varphi \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

ζ) Για τόξα του $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ να δειχθεί ότι:

I. $\varepsilon\varphi x_1 \cdot \varepsilon\varphi x_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon\varphi x_\nu \ \le\ \varepsilon\varphi^\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

II. $\sigma\varphi x_1 \cdot \sigma\varphi x_2 \cdot \ldots \cdot \sigma\varphi x_\nu \ \ge\ \sigma\varphi^\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

η) Για τόξα του $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ να δειχθεί ότι:

I. $\varepsilon\varphi x_1 \cdot \varepsilon\varphi x_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon\varphi x_\nu \ \ge\ \varepsilon\varphi^\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

II. $\sigma\varphi x_1 \cdot \sigma\varphi x_2 \cdot \ldots \cdot \sigma\varphi x_\nu \ \le\ \sigma\varphi^\nu \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu}{\nu}$.

Υπόδειξη. Πάρτε για την:
(α)I $f(x) = x^p$, για την (α)II $f(x) = \ln x$, για την (α)III $f(x) = x\ln x$, για την (β)I $f(x) = x^2$, για την (β)II $f(x) = e^x$, για την (γ)I $f(x) = x^p$, για την (γ)II $f(x) = \ln x$, για την (δ)I $f(x) = \dfrac{x}{a - x}$, για την (δ)II $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, για την (ε)I $f(x) = \eta\mu x$, για την (ε)II $f(x) = \ln \eta\mu x$, για την (στ)I $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, για την (στ)II $f(x) = \ln \sigma\upsilon\nu x$, για την (στ)III $f(x) = \varepsilon\varphi x$, για την (στ) IV $f(x) = \sigma\varphi x$, για

την (ζ)I $f(x)=\ln εφx$, για την (ζ)II $f(x)=\ln σφx$, για την (η)I $f(x)=\ln εφx$, για την (η)II $f(x)=\ln σφx$.

Παρατήρηση I. Από τις προηγούμενες σχέσεις μπορούν να προκύψουν συμπεράσματα για διάφορες περιπτώσεις δεσμευμένων ακροτάτων. Π.χ. από τη σχέση (α)II μπορεί να προκύψει η γνωστή πρόταση: "αν θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα σταθερό, το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο, αν οι αριθμοί γίνουν ίσοι" ή "αν θετικοί αριθμοί έχουν γινόμενο σταθερό, το άθροισμά τους γίνεται ελάχιστο, αν οι αριθμοί γίνουν ίσοι".

Παρατήρηση II. Ο αναγνώστης μπορεί να σχηματίσει οσεσδήποτε παρόμοιες ανισοτικές σχέσεις χρησιμοποιώντας κάθε φορά μια συνάρτηση, της οποίας η δεύτερη παράγωγος έχει σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της ή σε οποιοδήποτε υποδιάστημα αυτού.

Κείνο που σου προσάπτουνε τα χελιδόνια είναι η άνοιξη που δεν έφερες.

ΟΔΥΣΣΕΑΣ ΕΛΥΤΗΣ

«Εκείνο ακριβώς τον καιρό, έφυγα από το Καν, όπου ζούσα, για να συμμετάσχω σε μια γεωλογική εκδρομή υπό την αιγίδα της Σχολής Μεταλλειολογίας. Τα περιστατικά του ταξιδιού μ' έκαναν να ξεχάσω τη μαθηματική μου δουλειά. Φτάνοντας στο Κουτάνς, μπήκαμε σ' ένα αυτοκίνητο για να επισκεφθούμε διάφορα μέρη. Τη στιγμή που έβαλα το πόδι μου στο σκαλοπάτι, μου ήρθε η ιδέα, χωρίς τίποτε στις προηγούμενες σκέψεις μου να φαίνεται πως της είχε ανοίξει το δρόμο, ότι δηλαδή οι μετασχηματισμοί που είχα χρησιμοποιήσει για να ορίσω τις συναρτήσεις Fuchs ήταν πανομοιότυποι με εκείνους της μη ευκλείδειας γεωμετρίας. Δεν επαλήθευσα την ιδέα· δεν είχα άλλωστε το χρόνο, αφού μόλις πήρα τη θέση μου στο αυτοκίνητο, συνέχισα μια συζήτηση που είχα ήδη αρχίσει. Ένιωθα όμως απόλυτη σιγουριά. Επιστρέφοντας στο Καν, για να βεβαιωθώ, επαλήθευσα το αποτέλεσμα με την άνεσή μου».

HENRI POINCARÉ

Όταν νιώθω κατάθλιψη και είμαι αναγκασμένος να ακούω υπερφίαλους και κουραστικούς ανθρώπους, ακόμη λέω στον εαυτό μου: «Λοιπόν, μπόρεσα να κάνω κάτι που εσύ δεν θα μπορούσες ποτέ να κάνεις, δηλαδή να συνεργαστώ με τον Littlewood και τον Ramanujan σχεδόν επί ίσοις όροις.

G. H. HARDY

Ο θεμελιακός ρόλος του δασκάλου, είναι να παρέχει μερικά αντιπαραδείγματα σε λαθεμένα συμπεράσματα και μ' αυτό τον τρόπο να δημιουργεί νέες γνωστικές συγκρούσεις (νέες «ρήξεις»).

J. PIAGET

Σήμερα τα μαθηματικά δύσκολα νοούνται ανεξάρτητα από τις εφαρμογές τους στις νοητικές ή πρακτικές δραστηριότητες που σχετίζονται γενικά με τη φύση και ειδικότερα με τον άνθρωπο και τ' ανθρώπινα. Οι Διαφορικές Εξισώσεις (Δ.Ε.) αποτελούν ένα από τους κλάδους των μαθηματικών, όπου δύσκολα διαχωρίζεται η θεωρία από την πράξη και όπου η «δυναμική άποψη», που κυριαρχεί στα σύγχρονα μαθηματικά (σε αντιδιαστολή με τη «στατικότητα» που χαρακτήριζε τα παλαιότερα μαθηματικά), βρίσκει την καλύτερη έκφρασή της. Χωρίς υπερβολή θα μπορούσαμε να πούμε πως οι Δ.Ε. είναι ο πρώτος σημαντικός σταθμός κατά την εξέλιξη από τις αρχικές έννοιες του Απειροστικού Λογισμού προς την τωρινή ωριμότητα της Ανάλυσης και της Γεωμετρίας.
Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα των Δ.Ε. είναι ότι αποτελούν το σημαντικότερο κλάδο των μαθηματικών όσον αφορά τη «μαθηματικοποίηση». Λέγοντας **μαθηματικοποίηση** εννοούμε την ακόλουθη διαδικασία: κάτι που μας απασχολεί και θέλουμε να το μελετήσουμε (π.χ. κάποιο πρόβλημα της Φυσικής, της Βιολογίας, της Ιατρικής, της Οικονομίας, της Κοινωνιολογίας, της Τεχνικής κ.τ.λ.) το «μεταφράζουμε» με τη «γλώσσα» μιας μαθηματικής θεωρίας σε κατάλληλο «μαθηματικό αντικείμενο» της θεωρίας αυτής (π.χ. σε μια συνηθισμένη εξίσωση, σε μια (Δ.Ε.) κ.ο.κ.)· με μαθηματικά κυρίως μέσα, αλλά χωρίς ν' αγνοούμε εντελώς το αρχικό πρόβλημα, «επιλύουμε» το «μαθηματικό αντικείμενο» στο οποίο καταλήξαμε και, τέλος, «μεταφράζουμε» το «μαθηματικό αποτέλεσμα» με έννοιες και στοιχεία που σχετίζονται με το αρχικό πρόβλημά μας, φτάνοντας έτσι σε κάποια λύση του. Αυτή είναι συνοπτικά η διαδικασία της μαθηματικοποίησης. Είναι, όμως, απαραίτητο να σημειωθεί εδώ πως, ακόμα και στην περίπτωση που η «μαθηματική λύση» και οι «μεταφράσεις» από τη μια «γλώσσα» στην άλλη είναι άψογες, η απάντηση στην οποία καταλήγουμε δεν είναι χωρίς άλλη διερεύνηση αποδεκτή. Για να γίνει αποδεκτή (συνήθως για ένα περιορισμένο χρονικό διάστημα) μια τέτοια απάντηση πρέπει πρώτα να δώσει συμπεράσματα που «συμφωνούν» με την «πραγματικότητα». Τυχούσες αποκλίσεις από αυτήν οφείλονται συνήθως στο ότι το «**πρότυπο**» που κατασκευάσαμε μετά τη «μετάφραση» στη «μαθηματική γλώσσα» δεν ανταποκρίνεται στο «πραγματικό πρόβλημα» από το οποίο προήλθε, επειδή κάποιος σημαντικός παράγοντας αγνοήθηκε.
(Βλέπε: Π. ΣΤΡΑΝΤΖΑΛΟΣ - Α. ΚΑΤΑΒΟΛΟΣ, Εισαγωγή στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων).

ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ

1. Αυταρχικές ή δογματικές παρουσιάσεις

Οι μαθηματικές παρουσιάσεις, είτε βρίσκονται σε βιβλία είτε γίνονται σε αίθουσες διδασκαλίας, συχνά εκλαμβάνονται σαν αυταρχικές και αυτό μπορεί να προκαλέσει τη δυσαρέσκεια του σπουδαστή. Στην πιο καλή περίπτωση, ο δάσκαλος των μαθηματικών λέει: «Ελάτε, ας σκεφτούμε μαζί». Αλλά αυτό που ακούγεται συχνά από το στόμα του είναι: «Κοιτάξτε , σας λέω ότι συμβαίνει έτσι». Αυτή είναι απόδειξη με εξαναγκασμό. Υπάρχουν αρκετοί λόγοι που συμβαίνει αυτό. Πρώτα απ' όλα υπάρχει έλλειψη χρόνου. Πρέπει (ή νομίζουμε ότι πρέπει) να καλύψουμε μια συγκεκριμένη ύλη μέσα σε ένα εξάμηνο, ώστε ο σπουδαστής να προετοιμαστεί για την επόμενη σειρά μαθημάτων στα μαθηματικά ή στη φυσική ΙΙ. Επομένως δεν μπορούμε να χρονοτριβούμε σε οποιαδήποτε δυσκολία, πρέπει να τρέχουμε ακατάπαυστα για να καλύψουμε την ύλη μας.
Μετά υπάρχει και η επιθυμία κάποιων δασκάλων να εμφανίζονται σαν λαμπρές διάνοιες. (Αυτό που σας λέω είναι για μένα αρκετά εύκολο και φανερό και, αν δεν το πιάνετε, τότε πραγματικά είστε ηλίθιοι).
Από την άλλη, μπορεί να υπάρχει άγνοια ή ελλιπής προετοιμασία από τη μεριά του δασκάλου που τον περιορίζουν να ακολουθήσει πιστά το δρόμο που χαράζει το εγχειρίδιο. Τέτοιοι δάσκαλοι μπορεί να μην ξέρουν περισσότερα πάνω στο θέμα τους. Κάποιοι, πάλι, δεν έχουν αυτοπεποίθηση ως μαθηματικοί και μπορεί κι οι ίδιοι να τρέμουν την αυθεντία του κειμένου ή της δυσνόητης μονογραφίας. Δεν ξέρουν πώς να το πουν με δικά τους λόγια και, αν μπορούν, φοβούνται να διδάξουν με αυτό τον τρόπο.

2. Αντίσταση από τη μεριά των σπουδαστών

Ποιοι είναι κάποιοι από τους λόγους για την αντίσταση, τη δυσαρέσκεια ή την άρνηση από τη μεριά των σπουδαστών;
Πρώτα απ' όλα υπάρχει μεγάλη ανυπομονησία με την ύλη. Παραδόξως, αυτό παρατηρείται συχνά στους πιο καλούς σπουδαστές. Αλλά οι καλύτεροι σπουδαστές έχουν την τάση να απαιτούν άμεση κατανόηση. Τα μαθηματικά ήταν πάντα εύκολα γι' αυτούς. Η κατανόηση και η ενόραση δε στοίχιζαν τίποτε. Τώρα, καθώς κινούνται σε ανώτερες περιοχές των μαθηματικών, η ύλη γίνεται

πιο δύσκολη. Τους λείπει η εμπειρία. Τους λείπουν οι στρατηγικές. Δεν ξέρουν να περιπλανιούνται. Η κατανόηση συνοδεύεται από κόπο. Τους προκαλεί ελάχιστη εντύπωση ότι η ύλη που τους παρουσιάζεται είναι το τελικό αποτέλεσμα αιώνων σκέψης δεκάδων χιλιάδων λαμπρών ανθρώπων. Η επιθυμία για άμεση κατανόηση είναι πολύ ισχυρή και τελικά μπορεί να είναι εξουθενωτική. (Αν δεν πρόκειται να το καταλάβω αμέσως, τότε δε θα το καταλάβω ποτέ και επομένως τα παρατάω).

Η βασική ιδέα είναι συχνά ευφυής αλλά δύσκολη. Μπορεί να έχουν μια ψυχολογική απροθυμία να δεχτούν ότι ίσως να υπάρχει στον κόσμο μια ευφυία και μια δυνατότητα κατανόησης που υπερβαίνει τη δική τους. Μπορεί να τους αποκαλύπτεται ξαφνικά ότι κάποια ανώτερα μαθηματικά είναι εντελώς πέρα από αυτούς και αυτό προκαλεί ένα σοκ και ένα χτύπημα στο εγώ τους. Η αντίστασή τους μπορεί να γίνει πιο έντονη και να εμφανιστεί σαν έλλειψη μελέτης, έλλειψη ενδιαφέροντος και απροθυμία να προσπαθήσουν να βρουν μια δική τους μέθοδο ανακάλυψης.

Γενικά θεωρείται ότι υπάρχουν «άνθρωποι με μαθηματικό μυαλό» και «άνθρωποι που δεν έχουν μαθηματικό μυαλό». Κανείς δεν ξέρει γιατί κάποιοι παίρνουν εύκολα τα μαθηματικά και άλλοι υπερβολικά δύσκολα. Για τα μη μαθηματικά μυαλά η αντίσταση μπορεί να είναι μια ειλικρινής αντίδραση σε εσωτερικούς περιορισμούς. Δε γίνονται όλοι πιανίστες ή παγοδρόμοι. Γιατί θα πρέπει να συμβαίνει κάτι διαφορετικό με τα μαθηματικά;

3. *Στην ουσία του θέματος*

Η λάμψη της ενόρασης, το ξέσπασμα, το «αχά!» δείχνουν ότι έχει επιτευχθεί κάτι που είναι γνήσια νέο, μια νέα κατανόηση για το άτομο, μια νέα ιδέα για την ευρύτερη κοινωνία. Η δημιουργικότητα υπάρχει, λειτουργεί κάθε μέρα. Δεν είναι δημοκρατικά διανεμημένη σε ολόκληρο τον πληθυσμό, αλλά είναι άφθονη. Δε γίνεται κατανοητή, αλλά, μέσα σε κάποια όρια, μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί. Μέσα σε κάποια όρια, μπορεί να διδαχτεί. Αλλά ο καθένας έχει όρια, ο καθένας ζαλίζεται και απογοητεύεται από ένα πιο λαμπρό επίτευγμα. Θα βρείτε την απόδειξη γι' αυτό αν ρίξετε απλά μια ματιά γύρω και παρατηρήσετε ότι η ζωή και τα μαθηματικά είναι γεμάτα άλυτα προβλήματα. Τι είναι λοιπόν η επίτευξη ενός νέου στοιχείου; μια διανοητική μετάλλαξη; μια κατάσταση χάριτος; ένα δώρο των θεών;

Σήμερα γίνεται αρκετή μελέτη και πειραματισμός με σκοπό να εξιχνιαστεί η ουσία της ενόρασης. Ακόμη, γίνεται προσπάθεια να αυτοματοποιηθεί με υπολογιστή, να αυξηθεί, να μετατραπεί η εποχή μας σε μια από τις μεγαλύτερες περιόδους της ιστορίας.
Είναι όμως φανερό ότι μαθαίνουμε με παραδείγματα και με διδάγματα, παρακολουθώντας πιστά τους δασκάλους και μιμούμενοι ό,τι κάνουν. Είναι επίσης φανερό ότι οι δάσκαλοι μπορούν να μεταδώσουν κάτι από τη στρατηγική και την ενόρασή τους.

4. Η Μαθηματική Απόδειξη και η Ιεράρχηση των Αξιών που επιχειρεί

Η προσέγγιση των μαθηματικών μέσα από τη διαδικασία ορισμού - θεωρήματος - απόδειξης έχει γίνει σχεδόν το μοναδικό παράδειγμα μαθηματικής έκθεσης και προχωρημένης εκπαίδευσης. Βέβαια τα μαθηματικά δε δημιουργούνται ούτε προάγονται ούτε ακόμη κατανοούνται μ' αυτό τον τρόπο. Η λογική ανάλυση των μαθηματικών που ανάγει μια απόδειξη σε μια (κατά κανόνα) μηχανιστική διαδικασία είναι μια υποθετική δυνατότητα, η οποία ποτέ δεν πραγματοποιείται πλήρως. Τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και η τυπική - λογική έκθεσή τους είναι απλά ένας μύθος, ενώ τα ίδια βρίσκονται στην αληθινή πρακτική των μαθηματικών επιστημόνων.
Σε σχέση με τις δυσκολίες στην κατανόηση της απόδειξης μπορεί να παρατηρηθεί ένα ενδιαφέρον φαινόμενο. Ένα μαθηματικό θεώρημα καλείται «βαθύ» αν η απόδειξή του είναι δύσκολη. Ως κάποια στοιχεία που συντελούν σ' αυτό το βάθος αναφέρουμε το να μην είναι διαισθητικά φανερή η πρόταση ή η απόδειξη, την πρωτοτυπία των ιδεών, την πολυπλοκότητα ή μια μεγάλη ποσότητα αποδεικτικού υλικού που το ίδιο δεν είναι βαθύ. Το αντίθετο από το βαθύ είναι το «τετριμμένο» κι αυτή η λέξη χρησιμοποιείται συχνά με την έννοια του φανερού. Αυτό όμως δε σημαίνει πως ό,τι είναι τετριμμένο δεν είναι ενδιαφέρον, χρήσιμο ή σημαντικό.
Τώρα, ενάντια σ' αυτή την ιεραρχική κατάταξη, το βαθύ είναι με μια έννοια ανεπιθύμητο, γιατί γίνεται σταθερά μια προσπάθεια για απλοποίηση, για εύρεση εναλλακτικών τρόπων στην αντιμετώπιση του θέματος, πράγμα που κάνει το βαθύ κοινότοπο. Όλοι μας νιώθουμε καλύτερα όταν περάσουμε από το αναλυτικό στο αναλογικό μέρος του πειραματικού φάσματος.
(Βλέπε: P. J. DAVIS - R. HERSH: Η μαθηματική εμπειρία, Εκδόσεις Τροχαλία, σελ. 274-275 και σελ. 294-295).

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

I. ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $\int 0 \cdot dx = c.$

2. $\int dx = x + c.$

3. $\int x^{\alpha}\, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1, \quad x > 0.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x| + c, \quad x \neq 0.$

5. $\int \alpha^{x}\, dx = \dfrac{\alpha^{x}}{\ln\alpha} + c, \quad 0 < \alpha \neq 1.$

6. $\int e^{x}\, dx = e^{x} + c.$

7. $\int \sigma\upsilon\nu x\, dx = \eta\mu x + c.$

8. $\int \eta\mu x\, dx = -\,\sigma\upsilon\nu x + c.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \varepsilon\varphi x + c, \quad x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \qquad \kappa \in Z.$

10. $\int \dfrac{dx}{\eta\mu^2 x} = -\,\sigma\varphi x + c, \quad x \neq \rho\pi, \ \rho \in Z.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Το}\xi\,\eta\mu x + c, \ x \in (-1,\ 1).$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{Το}\xi\,\sigma\upsilon\nu x + c, \ x \in (-1,\ 1).$

13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Τοξ εφ}x + c.$

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\text{Τοξ σφ}x + c.$

15. $\int shx\, dx = chx + c.$

16. $\int chx\, dx = shx + c.$

17. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c.$

18. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -\text{coth} + c, \quad x \neq 0.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c, \quad x \in R.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c, \quad |x| > 1.$

21. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c, \quad x \neq 1.$

22. $\int \frac{dx}{\text{συν}x} = \ln\left|\text{εφ}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c, \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in Z.$

23. $\int \frac{dx}{\text{ημ}x} = \ln\left|\text{εφ}\frac{x}{2}\right| + c, \quad x \neq \rho\pi, \quad \rho \in Z.$

II. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΠΟΥ ΔΕΝ ΕΚΦΡΑΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. $\int e^{x^2}\,dx$

2. $\int e^{-x^2}\,dx$

3. $\int e^{\text{Τοξεφ}x}\,dx$

4. $\int \frac{e^x}{x^\nu}\,dx \quad \left(\int \frac{e^{\alpha x}}{x}\,dx\right)$

5. $\int \eta\mu x^2\,dx$

6. $\int \sigma\upsilon\nu x^2\,dx$

7. $\int \ln\left|\sigma\upsilon\nu x\right|\,dx$

8. $\int \ln\left|\eta\mu x\right|\,dx$

9. $\int \ln\left|\ln x\right|\,dx$

10. $\int x\,\varepsilon\varphi x\,dx$

11. $\int \sqrt{x}\,\eta\mu x\,dx$

12. $\int \eta\mu\sqrt{x}\,dx$

13. $\int \sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\,dx$

14. $\int \sqrt{\eta\mu x}\,dx$

15. $\int \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}\,dx$

16. $\int \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x}}\,dx$

17. $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sqrt{x}}\,dx$

18. $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$

19. $\int e^x \ln x\,dx$

20. $\int \frac{e^x}{1+x}\,dx$

21. $\int \frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx$

22. $\int \ln\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

23. $\int \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\,dx$

24. $\int x^2 e^{\frac{x^2}{2}}\,dx$

25. $\int \sqrt{1-\kappa^2\ \eta\mu^2 x}\ dx, \quad 0<\kappa<1$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-\sigma\upsilon\nu^2 x}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\ (1-\mu x^2)}}, \quad \mu \neq 0$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\ (1-\kappa^2 x^2)}}, \quad 0<\kappa<1$

29. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)\ (1-\kappa^2 x^2)}}, \quad 0<\kappa<1$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu a - \sigma\upsilon\nu x}}$

31. $\int \frac{\eta\mu x}{x^{\nu}}\, dx \left(\int \frac{\eta\mu x}{x}\, dx \right)$

32. $\int \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^{\nu}}\, dx$

33. $\int \frac{dx}{\ln x}$

34. $\int \frac{x\, dx}{\ln x}, \quad 0<x\neq 1$

35. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad x<1$

36. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad x<1$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad -1<x<1$

38. $\int x^x\, dx$

39. $\int \sqrt{1+x^3}\ dx$

40. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\ dx$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

42. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}, \quad x>-1$

44. $\int e^{(e^x)}\, dx$

45. $\int \sqrt{1+x^4}\ dx$

46. $\int \sqrt[5]{x^7 - x^5 + x}\ dx$

47. $\int \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{συν 2x}}$, $κπ-\frac{π}{4}<x<κπ+\frac{π}{4}$, $κ\in Z$

49. $\int \frac{ημ(3e^{x}+συνx)}{e^{x}+1}\,dx$

50. $\int \frac{x\,ημx}{1+συν^{2}x}\,dx$.

51. Το ολοκλήρωμα $\int x^{α}(1-x)^{β}\,dx$ εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις μόνο αν το $α$ ή το $β$ ή το $α+β$ είναι φυσικός αριθμός.

52. Το ολοκλήρωμα $\int x^{m}(α+βx^{n})^{p}\,dx$ εκφράζεται με στοιχειώδεις συναρτήσεις μόνο στις εξής τρεις περιπτώσεις:

i) p ακέραιος, ii) $\frac{m+1}{n}+p$ ακέραιος, iii) $\frac{m+1}{n}$ ακέραιος.

VIII. ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $(y')^2-(\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x)y'+\eta\mu x=0$.

Λύση

Ως προς y' είναι δευτεροβάθμια (αλγεβρική εξίσωση). Συνεπώς

$$y=\frac{\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x\pm\sqrt{(\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x)^2-4\,\eta\mu x}}{2}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu x+\varepsilon\varphi x\pm\sqrt{(\sigma\upsilon\nu x-\varepsilon\varphi x)^2}}{2}\ \Rightarrow\ y'=\sigma\upsilon\nu x\ \text{ ή }\ y'=\varepsilon\varphi x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\eta\mu x+c_1\ \text{ ή }\ y=\int\varepsilon\varphi x\,dx=\int\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx=$$

$$=-\ln\left|\sigma\upsilon\nu x\right|+c_2,\quad x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\quad \kappa\in Z$$

2. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y'+2xy^2=0$.

Λύση

$$\frac{dy}{dx}=-2xy^2\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y^2}=-2x\,dx\ \Rightarrow\ -\frac{1}{y}=-x^2+c\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{x^2-c}.$$

Σχόλιο. Αν $y(0)=-3\ \Rightarrow\ c=\frac{1}{3}$ και συνεπώς

$$y=\frac{1}{x^2-\frac{1}{3}}=\frac{3}{3x^2-1}\ \Bigg|\ \Delta=R-\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}.$$

Αν $y(0)=3\ \Rightarrow\ c=-\frac{1}{3}$ και συνεπώς $y=\frac{1}{x^2+\frac{1}{3}}=\frac{3}{3x^2+1}\ \Big|\ \Delta=R.$

3. Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

(α) $y'-y\,\varepsilon\varphi x=\eta\mu x$.

(β) $xy'+y=xy^2\ln x$.

Λύση

(α) Έχουμε $y'\sigma\upsilon\nu x-y\,\eta\mu x=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x\ \Rightarrow y'\sigma\upsilon\nu x+y\,(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x\,(\eta\mu x)'\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ (y\,\sigma\upsilon\nu x)'=\left(\frac{1}{2}\,\eta\mu^2 x\right)'\ \Rightarrow\ y\,\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\,\eta\mu^2 x+c.$$

(β) Γράφεται $(xy)' = xy^2 \ln x \Rightarrow \dfrac{(xy)'}{(xy)^2} = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{xy}\right)' = (\ln x) \cdot (\ln x)' \Rightarrow$

$$\left(-\frac{1}{xy}\right)' = \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)' \Rightarrow -\frac{1}{xy} = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.$$

4. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $3y'(x^2-1) - 2xy = 0$.

Λύση

$$3\frac{dy}{dx}(x^2-1) = 2xy \Rightarrow 3\frac{dy}{y} = \frac{2x\,dx}{x^2-1} \Rightarrow 3\ln|y| = \ln|x^2-1| + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y|^3 = \ln|x^2-1| + \ln e^c \Rightarrow |y|^3 = |x^2-1|\,e^c \Rightarrow y^3 = \pm e^c\,(x^2-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = c_1\,(x^2-1), \qquad c_1 = \pm e^c.$$

5. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y' = \sqrt{|y|}$.

Λύση

(i) Αν $y = 0 \Rightarrow \sqrt{|y|} = 0$, δηλαδή η ευθεία y=0 είναι μια λύση της (Δ.Ε.).

(ii) Αν y>0, έχομε $y' = \sqrt{y} \Rightarrow \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int dx + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{x}{2} + c_1\right)^2.$$

(iii) Αν y<0, έχομε $y' = \sqrt{-y} \Rightarrow \int (-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int dx + c_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\int (-y)^{-\frac{1}{2}}\,d(-y) = \int dx + c_2 \Rightarrow y = -\left(\frac{x}{2} + c_3\right)^2.$$

6. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y' = xy$.

Λύση

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + c_1 \Rightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2 + c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{c_1} \Rightarrow y = \pm e^{c_1}\,e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = c\,e^{\frac{x^2}{2}}, \quad c = \pm e^{c_1}.$$

7. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1+y^3}{xy^2\,(1+x^2)}=0$.

Λύση

Έχομε $xy^2\,(1+x^2)\,dy+(1+y^3)\,dx=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{y^2}{1+y^3}\,dy+\dfrac{1}{x\,(1+x^2)}\,dx=0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \frac{y^2}{1+y^3}\,dy+\frac{dx}{x}-\frac{x\,dx}{1+x^2}=0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}\,\ln\left|1+y^3\right|+\ln\left|x\right|-\frac{1}{2}\,\ln(1+x^2)=c_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2\ln\left|1+y^3\right|+6\ln\left|x\right|-3\ln(1+x^2)=6c_1 \;\Rightarrow\; \ln\frac{x^6\,(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3}=6c_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{x^6\,(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3}=e^{6c_1}=c.$$

8. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\,\sigma\upsilon\nu y}{e^x\,\eta\mu y}\;\Big|\; y\neq \nu\pi,\ \nu$ ακέραιος.

Λύση

Έχομε $\dfrac{\eta\mu y\,dy}{\sigma\upsilon\nu y}=x\,e^{-x}\,dx \;\Rightarrow\; \displaystyle\int\frac{\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu y}\,dy=\int x\,e^{-x}\,dx-c \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; -\ln\left|\sigma\upsilon\nu y\right|\,dy=-(x+1)\,e^{-x}-c \;\Rightarrow\; \ln\left|\sigma\upsilon\nu y\right|=(x+1)\,e^{-x}+c.$$

Σχόλιο. Η λύση που ικανοποιεί π.χ. την αρχική συνθήκη $y(0)=\dfrac{\pi}{3}$ είναι:

$$\ln\left|\sigma\upsilon\nu y\right|=(x+1)\,e^{-x}+\ln\frac{1}{2}-1.$$

Πραγματικά: $\ln\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\right|=1\cdot e^0+c \;\Rightarrow\; c=\ln\dfrac{1}{2}-1.$

9. Να λυθεί η (Δ.Ε): $(1+x^2)\,(1+y^2)\,dx-xy\,dx=0$.

Λύση

Έχομε $\dfrac{(1+x^2)\,dx}{x}=\dfrac{y\,dx}{1+y^2} \;\Rightarrow\; \ln\left|x\right|+\dfrac{1}{2}\,x^2=\dfrac{1}{2}\,\ln(1+y^2)+c \;\Rightarrow$

$$\ln(1+y^2)=2\ln\left|x\right|+x^2-2c \;\Rightarrow\; 1+y^2=e^{2\ln|x|+x^2-2c} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1+y^2=e^{2\ln|x|}\cdot e^{x^2}\cdot e^{-2c} \;\Rightarrow\; 1+y^2=e^{\ln|x|^2}\cdot e^{x^2}\cdot e^{-2c} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{x^2\cdot e^{x^2}\cdot e^{-2c}-1} \quad \mu\varepsilon\quad x^2\,e^{x^2}\geq e^{2c}.$$

10. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $xy' = y\,(1+y^2)$.

Λύση

Έχομε $\quad \dfrac{dy}{y\,(1+y^2)} = \dfrac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dy}{y\,(1+y^2)} = \int \frac{dx}{x} + c_1 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \ln \frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} = \ln|x| + c_1 = \ln|x| + \ln|c| \;\Rightarrow\; \frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} = |cx| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = cx \;\Rightarrow\; y = \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}, \quad cx \neq 0, \quad \frac{cx}{y} > 0, \quad c^2x^2 < 1.$$

11. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y' = -2xy$.

Λύση

Έχομε $\dfrac{dy}{y} = -2x\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = -x^2 + c_1 \;\Rightarrow\; |y| = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1} \;\Rightarrow$

$y = \pm e^{c_1}\, e^{-x^2} \;\Rightarrow\; y = c\,e^{-x^2}$, όπου $c = \pm e^{c_1}$.

12. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $\dfrac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$, (Ε), όπου P γνωστή συνάρτηση.

Λύση

Με χωρισμό των μεταβλητών και ολοκλήρωση παίρνομε

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)\,dx + \kappa \;\Rightarrow\; \ln|y| = -\int P(x)\,dx + \kappa \;\Rightarrow\; y = c\,e^{-\int P(x)\,dx} \qquad (1)$$

Η εμφάνιση του y στον παρονομαστή απαιτεί $y \neq 0$. Απομένει τώρα να δείξουμε ότι όλες οι ρίζες της (Ε) δίνονται από τη γενική λύση (1). Αυτό γίνεται αν ονομάσομε y μια οποιαδήποτε λύση της (Ε) και χρησιμοποιήσομε τη συνάρτηση g με τύπο: $g(x) = y\,e^{\int P(x)\,dx}$ με παράγωγο

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int P(x)\,dx}\right) = y'\,e^{\int P(x)\,dx} + y\,P(x)\,e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int P(x)\,dx}\left[y' + P(x)\,y\right].$$

Επειδή η συνάρτηση y είναι λύση της (Ε), η παράσταση μέσα στις αγκύλες είναι μηδέν. Επομένως $g'(x) = 0$ και συνεπώς $g(x) = c$, δηλαδή $y = c\,e^{-\int P(x)\,dx}$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Από την (Ε) $\;\Rightarrow\; y' + P(x)\,y = 0 \;\Rightarrow\; e^{\int P(x)\,dx}\left(y' + P(x)\,y\right) = 0 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\ y' e^{\int P(x)\,dx} + y P(x)\, e^{\int P(x)\,dx} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{d}{dx}\left(y e^{\int P(x)\,dx}\right) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y e^{\int P(x)\,dx} = c, \quad (E_1).$$

Διαπίστωση: Κάθε λύση της (Ε) είναι της μορφής (E_1). Εύκολα ελέγχεται ότι κάθε συνάρτηση y που ικανοποιεί την (E_1), για κάποια αυθαίρετη τιμή της σταθεράς c, επαληθεύει και την (Ε). Συνεπώς ο τύπος (E_1) δίνει το σύνολο των λύσεων της (Ε).

13. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f για τις οποίες συμβαίνει $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$.

Λύση

Θα βρούμε κατ' αρχήν εκείνες τις λύσεις της $f'(x) = f(x)$ που δεν μηδενίζονται για κανένα x. Αν f είναι μια τέτοια συνάρτηση, μπορούμε να γράψομε τη δεδομένη εξίσωση, ας πούμε (Ε), στη μορφή $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \ln|f(x)| = x + \kappa$ όπου κ σταθερά $\Rightarrow f(x) = e^{x+\kappa}$.

Επειδή υποθέσαμε τη συνάρτηση f διάφορη από το μηδέν πάντοτε, θα πρέπει να είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Επομένως έχομε $f(x) = c\,e^x$, $c = e^\kappa$.

Άρα οι λύσεις της (Δ.Ε.): $y' = y$ που είναι διαφορετικές από το μηδέν για κάθε $x \in R$, δίνονται από τον τύπο $y = c\,e^x$, όπου c μια μη μηδενική αυθαίρετη σταθερά. Όταν c=0, ο τύπος $f(x) = c\,e^x$ δίνει y=0 που είναι βέβαια μια λύση της (Δ.Ε.). Οι προηγούμενοι συλλογισμοί δεν αποκλείουν τη δυνατότητα να υπάρχουν και άλλες λύσεις της εξίσωσης, εκτός εκείνων που δίνει ο τύπος $f(x) = c\,e^x$. Οι λύσεις αυτές μπορούν να είναι συναρτήσεις που μηδενίζονται σ' ένα ή περισσότερα σημεία του άξονα των x, όχι όμως σε όλα. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει και ότι όλες οι λύσεις της $f'(x) = f(x)$ δίνονται από τον τύπο $f(x) = c\,e^x$.

Πραγματικά: αν f είναι μια συνάρτηση που επαληθεύει τη (Δ.Ε.) $f'(x) = f(x)$ και θέσουμε $g(x) = e^{-x} f(x)$, θα έχουμε $g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = 0$ και επομένως $g(x) = c$ για όλα τα x.

Τούτο όμως σημαίνει ότι $c = e^{-x} f(x) \Rightarrow f(x) = c\,e^x$. Επειδή καμιά άλλη υπόθεση για τη συνάρτηση f δεν απαιτείται παρά μόνο να επαληθεύει την $f'(x) = f(x)$, συμπεραίνουμε ότι όλες τις λύσεις αυτής της (Δ.Ε.) τις βρίσκουμε από τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = c\,e^x$.

Σχόλιο. Αν μια συνάρτηση f έχει την ιδιότητα $f'(x) = \alpha f(x)$ τότε $f(x) = c\, e^{\alpha x}$, $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Απόδειξη

$$f'(x) = \alpha f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \Rightarrow \left(\ln\left|f(x)\right|\right)' = \alpha \Rightarrow \left(\ln\left|f(x)\right|\right)' = (\alpha x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|f(x)\right| = \alpha x + \beta \Rightarrow \ln\left|f(x)\right| = \ln e^{\alpha x} + \beta \Rightarrow \ln\left|f(x)\right| - \ln e^{\alpha x} = \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\left|f(x)\right|}{e^{\alpha x}} = \beta = \ln c_1 \Rightarrow \frac{\left|f(x)\right|}{e^{\alpha x}} = c_1 \Rightarrow \left|f(x)\right| = c_1\, e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm\, c_1\, e^{\alpha x} \Rightarrow f(x) = c\, e^{\alpha x}.$$

Σχόλιο. Αν δεν ξέρουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, δεν μπορούμε να γράψουμε $\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha$. Αντί να εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $f(x) \neq 0$ και $f(x) = 0$, εκμεταλλευόμαστε το αναμενόμενο τώρα συμπέρασμα και δείχνουμε ότι:

Αν $f'(x) = \alpha f(x)$ για κάθε $x \in R$ τότε η $f(x)e^{-\alpha x}$ είναι σταθερή δηλαδή $f(x) = c\, e^{\alpha x}$. Πραγματικά:

$$\left(f(x)\ e^{-\alpha x}\right)' = f'(x)\ e^{-\alpha x} - \alpha\, e^{-\alpha x} f(x) = \alpha\, e^{-\alpha x} f(x) - \alpha\, e^{-\alpha x} f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\ e^{-\alpha x} = c \Rightarrow f(x) = c\, e^{\alpha x}.$$

14. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y' = \sqrt{x+y+1} - 1$, (Ε).

Λύση

Θέτομε $x + y + 1 = z \Rightarrow 1 + y' = z'$ και η (Ε) γίνεται

$$z' = \sqrt{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \sqrt{z} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{z}} = dx \Rightarrow x + c = 2\sqrt{z}$$

με $x + c \geq 0 \Rightarrow x + c = 2\sqrt{x+y+1}$, με $c \geq -x \Rightarrow y = \frac{(x+c)^2}{4} - (x+1)$ με $c \geq -x$.

15. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $(x^2 + y)\,dx + (y^3 + x)\,dy = 0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$x^2\,dx + (y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^4}{4} = 0.$$

16. (α) Να λυθεί η (Δ.Ε.): $(x+e^{-x}\,\eta\mu y)\,dx-(y+e^{-x}\,\sigma\upsilon\nu y)\,dy=0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$x\,dx-y\,dy-\left(e^{-x}\,\sigma\upsilon\nu y\,dy-e^{-x}\,\eta\mu y\,dy\right)=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-e^{-x}\,\eta\mu y=c.$$

(β) Να λυθεί η (Δ.Ε.): $\left(2+\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(y-\dfrac{1}{x}\right)dy=0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται:

$$2dx+\frac{y}{x^2}\,dx+y\,dy-\frac{1}{x}\,dy=0\ \Rightarrow\ d\,(2x)+y\,d\left(-\frac{1}{x}\right)+d\left(\frac{y^2}{2}\right)+\left(-\frac{1}{x}\right)dy=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2x-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=c.$$

17. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $(3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+2y)\,dy=0$.

Λύση

Η δεδομένη για λύση (Δ.Ε.) γράφεται

$$3x^2\,dx+(4xy\,dx+2x^2\,dy)+2y\,dy=0\ \Rightarrow\ d\,(x^3)+d\,(2x^2y)+d(y^2)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ d\,(x^3+2x^2y+y^2)=0\ \Rightarrow\ x^3+2x^2y+y^2=c.$$

18. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y'\,\eta\mu x-y\ln y=0$, (Ε). Να βρεθεί η μερική λύση που για $x=\dfrac{\pi}{2}$ δίνει y=1, καθώς και η ολοκληρωτική καμπύλη που περνά από το σημείο $M\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$.

Λύση

Η (Ε) γράφεται

$$\frac{dy}{dx}\,\eta\mu x=y\ln y\ \Rightarrow\ \frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\eta\mu x}\ \Rightarrow\ \int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\eta\mu x}+c_1=\int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\int\frac{dx}{\eta\mu x}+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ln\left|\ln y\right|=\ln\left|\varepsilon\varphi\ \frac{x}{2}\right|+\ln\left|c\right|\ \Rightarrow\ \ln\left|\ln y\right|=\ln\left|c\ \varepsilon\varphi\ \frac{x}{2}\right|\Rightarrow\ \left|\ln y\right|=\left|c\ \varepsilon\varphi\ \frac{x}{2}\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ln y=\pm\,c\ \varepsilon\varphi\ \frac{x}{2}\ \Rightarrow\ \ln y=c_2\cdot\varepsilon\varphi\ \frac{x}{2}\ \Rightarrow\ y=e^{c_2\ \varepsilon\varphi\ \frac{x}{2}},\quad (E_1).$$

Η (E_1) για $x=\dfrac{\pi}{2}$ και $y=1$ δίνει: $1=e^{c_2\,\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow 1=e^{c_2} \Leftrightarrow c_2=0$.

Από την (E_1) για $c_2=0$ δίνει $y=1$ που είναι η ζητούμενη μερική λύση καθώς και η εξίσωση της ζητούμενης ολοκληρωτικής γραμμής.

19. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $(x+\eta\mu y)\,dx+(x\,\sigma\upsilon\nu y-2y)\,dy=0$.

Λύση

Η δεδομένη για λύση (Δ.Ε.) γράφεται:

$$x\,dx+\eta\mu y\,dx+x\,\sigma\upsilon\nu y\,dy-2y\,dy=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right)+\eta\mu y\,dx+x(d\,\eta\mu y)+d(-y^2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{x^2}{2}\right)+d\,(x\eta\mu y)+d(-y^2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{x^2}{2}+x\,\eta\mu y-y^2\right)=0 \Rightarrow \frac{x^2}{2}+x\,\eta\mu y-y^2=c.$$

20. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y\,(1+2xy^2)\,dx+(1+x+3x^2y^2)\,dy=0$.

Λύση

Η δεδομένη για λύση (Δ.Ε.) γράφεται:

$$y\,dx+2xy^3\,dx+dy+x\,dy+3x^2y^2\,dy=0 \Rightarrow y\,dx+y^3\,d(x^2)+dy+x\,dy+x^2\,d(y^3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(xy)+d(x^2y^3)+dy=0 \Rightarrow xy+x^2y^3+y=c.$$

21. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y'=\eta\mu\,(x+y)$, (Ε).

Λύση

Θέτουμε $x+y=u \Rightarrow 1+y'=u' \Rightarrow y'=u'-1$, οπότε η (Ε) γίνεται

$$u'-1=\eta\mu\,u \Rightarrow \frac{du}{dx}=1+\eta\mu\,u \Rightarrow \frac{du}{1+\eta\mu\,u}=dx \Rightarrow \int\frac{du}{1+\eta\mu\,u}=\int dx+c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{1-\eta\mu\,u}{1-\eta\mu^2 u}\,du=x+c \Rightarrow \int\frac{1-\eta\mu\,u}{\sigma\upsilon\nu^2 u}\,du=x+c \Rightarrow \int\frac{du}{\sigma\upsilon\nu^2 u}+\int\frac{d\,\sigma\upsilon\nu\,u}{\sigma\upsilon\nu^2 u}=x+c$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi u-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\,u}=x+c \Rightarrow \varepsilon\varphi\,(x+y)-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\,(x+y)}=x+c.$$

22. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $\dfrac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu\,(x+y)$, (Ε).

Λύση

Θέτουμε $x + y = \omega \Rightarrow 1 + \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\omega}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\omega}{dx} - 1$. Η (Ε) γίνεται:

$$\frac{d\omega}{dx} - 1 = \sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = 1 + \sigma\upsilon\nu\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{dx} = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega}{2}} = dx \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2}}{\frac{1}{2}} = x + c \Rightarrow \varepsilon\varphi\,\frac{x+y}{2} = x + c.$$

23. Να βρεθούν οι συναρτήσεις i που ικανοποιούν την εξίσωση $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$, (1), όπου R, L, E θετικές σταθερές. Να βρεθεί η συνάρτηση i με i(0)=0.

Λύση

Η (1) γράφεται ισοδύναμα έτσι: $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L}\,(E - Ri)$, (2).

Από τη (2) παρατηρούμε ότι μια από τις ζητούμενες συναρτήσεις είναι η σταθερή συνάρτηση $i\!:i = i(t) = \dfrac{E}{R}$, $-\infty < t < +\infty$, (3).

Από τη (2) για $i \neq \dfrac{E}{R}$, έχομε

$$\frac{di}{Ri - E} = -\frac{1}{L}\,dt \Rightarrow \int\frac{di}{Ri-E} = -\frac{1}{L}\int dt = -\frac{1}{L}\,t + c_1, \quad (4).$$

Επειδή $\displaystyle\int\frac{di}{Ri-E} = \frac{1}{R}\int\frac{R\,di}{Ri-E} = \frac{1}{R}\int\frac{d\,(Ri-E)}{Ri-E} = \frac{1}{R}\ln|Ri-E| + c_2$, η (4) δίνει:

$$\frac{1}{R}\ln|Ri-E| + c_2 = -\frac{1}{L}\,t + c_1 \Rightarrow \ln|Ri-E| = -\frac{R}{L}\,t + c,\ c = Rc_1 - c_2$$

ή $Ri - E = \pm e^c e^{-\frac{R}{L}t}$

ή $i = \dfrac{E}{R} \pm \dfrac{e^c}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$, $-\infty < t < +\infty$

ή $i = \dfrac{E}{R} + \kappa e^{-\frac{R}{L}t}$, $-\infty < t < +\infty$, $\kappa = \pm\dfrac{e^c}{R}$.

Ο τελευταίος τύπος δίνει όλες τις λύσεις του προβλήματος, εκτός της $i = \frac{E}{R}$.

Συνεπώς όλες οι λύσεις δίνονται από τον τύπο (Τ): $i = i(t) = \frac{E}{R} + \kappa e^{-\frac{R}{L}t}$ όπου $-\infty < t < +\infty$ και κ αυθαίρετη σταθερά.

Εφαρμογή. Για $i(0)=0$, από τον τύπο (Τ) παίρνουμε $\kappa = -\frac{E}{R}$, επομένως υπάρχει μια και μόνο λύση: $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

24. Να λυθεί η (Δ.Ε.):
$(2x^3y^2 - xy\,\sigma\upsilon\nu x + y\,\eta\mu x)\,dx + (x\,\eta\mu x - x^2y^2\,\eta\mu y)\,dy = 0$.

(Υπόδειξη. Έχει ολοκληρωτικό παράγοντα τον $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$).

Λύση

Η δεδομένη για λύση (Δ.Ε.) γίνεται:

$$\left(2x - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{xy} + \frac{\eta\mu x}{x^2y}\right)dx + \left(\frac{\eta\mu x}{xy^2} - \eta\mu y\right)dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x\,dx - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{xy}\,dx + \frac{\eta\mu x}{x^2y}\,dx + \frac{\eta\mu x}{xy^2}\,dy - \eta\mu y\,dy = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d(x^2) - \frac{d\,(\eta\mu x)}{xy} - \frac{\eta\mu x}{y}\,d\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\eta\mu x}{x}\,d\left(\frac{1}{y}\right) + d\,(\sigma\upsilon\nu y) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d(x^2) - d\left(\frac{\eta\mu x}{xy}\right) + d\,(\sigma\upsilon\nu y) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - \frac{\eta\mu x}{xy} + \sigma\upsilon\nu y = c.$$

25. (α) Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y' - e^x e^y = -1$.

(β) Κατασκευάσετε την ολοκληρωτική καμπύλη που περνά από την αρχή των αξόνων.

Λύση

(α) Η εξίσωση γράφεται $y' + 1 = e^{x+y}$. Παρατηρούμε ότι η $y'+1$ είναι η παράγωγος ως προς x, του y+x. Θέτουμε λοιπόν u=x+y. Η εξίσωση γίνεται

$$u' = e^u \;\Rightarrow\; e^{-u}\,du = dx \;\Rightarrow\; -e^{-u} = x + c \;\Rightarrow -e^{-x-y} = x + c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; e^{-x}\cdot e^{-y} = -x - c \;\Rightarrow\; e^y = \frac{e^{-x}}{-x-c},$$ σχέση που ορίζεται για $-x - c > 0$.

Συνεπώς $y=-x-\ln(-x-c)$, όπου c αυθαίρετη σταθερά. Παίρνοντας $\kappa=-c$, όπου κ αυθαίρετη σταθερά, μπορούμε να γράψουμε $y=-x-\ln(\kappa-x)$ ή $y+\kappa=\kappa-x-\ln(\kappa-x)$.

(β) Για την καμπύλη με εξίσωση $y=-x-\ln(\kappa-x)$ που περνά από την αρχή των αξόνων έχομε $0=-\ln\kappa \Rightarrow \kappa=1$ και επομένως η εξίσωση της καμπύλης είναι η $y=-x-\ln(1-x)$.

Η συνάρτηση με τύπο $y=-x-\ln(1-x)$ είναι ορισμένη και συνεχής για $1-x>0$ ή $x<1$.

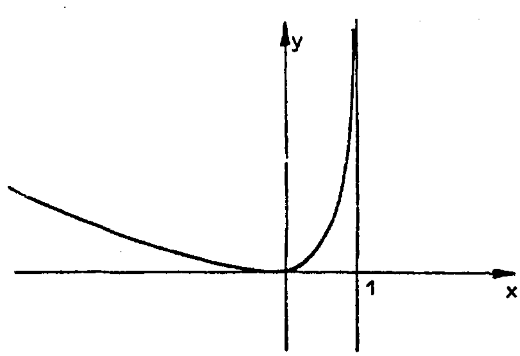
Η $y'=-1-\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{x}{1-x}$ έχει το πρόσημο του x, αφού $1-x>0$.

x	$-\infty$		0		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Όταν το $x\to-\infty$ έχομε $y=-x\left(1+\dfrac{\ln(1-x)}{x}\right)$, που τείνει στο $+\infty$, όμοια με το $-x\cdot 1$, μια και $\dfrac{\ln(1-x)}{x}=\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}\cdot\dfrac{1-x}{x}\to 0$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $\dfrac{y}{x}\to-1$, όταν το $x\to-\infty$ και ότι $y+x=-\ln(1-x)$ τείνει στο $-\infty$, όταν $x\to-\infty$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x \longrightarrow -x-\ln(1-x)$ είναι:



Σχήμα

Σχόλιο. Η γενική λύση της δεδομένης (Δ.Ε.) είναι $y=-x-\ln(\kappa-x)$ που μπορεί να γραφεί $y+\kappa=\kappa-x-\ln(\kappa-x)$.

Με αλλαγή αξόνων $X=\kappa-x$, $\quad Y=y+\kappa$, η εξίσωση γράφεται $Y=X-\ln X$.

Βλέπομε έτσι ότι, όλες οι ολοκληρωτικές καμπύλες προκύπτουν από μία με παράλληλη μετατόπιση.

26. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{dy}{dx}$, **(Ε).**

Λύση

Θέτουμε $\dfrac{y}{x}=u \Rightarrow y=ux \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ και η εξίσωση γίνεται

$$u+\sqrt{1+u^2}=u+x\frac{du}{dx} \Rightarrow \sqrt{1+u^2}=x\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}+\ln c \Rightarrow \ln x=\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)+\ln c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x=\ln c\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) \Rightarrow x=c\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) \Rightarrow x=c\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=c\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Σχόλιο. Το $\displaystyle\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ **βρίσκεται αν θέσομε**

$$\sqrt{1+u^2}=t-u \Rightarrow 1+u^2=t^2-2tu+u^2 \Rightarrow 1=t^2-2tu \Rightarrow 2tu=t^2-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=\frac{t^2-1}{2t} \Rightarrow du=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt.$$

Οπότε $$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt}{t-\frac{t^2-1}{2t}}=\int\frac{\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{t^2+1}{2t}}\,dt=\int\frac{dt}{t}=\ln t=\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right).$$

27. (α) Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y'=\dfrac{1+y^2}{\sqrt{1+y^2}\,\eta\mu y-xy}$.

Λύση

Με μια πρώτη ματιά δεν θάβλεπε κανείς ότι πρόκειται για γραμμική (Δ.Ε.). Γράφοντας όμως την εξίσωση αυτή σαν

$$(1+y^2)\,dx=\left(\sqrt{1+y^2}\cdot \etaμy-xy\right)dy \quad \text{τότε} \quad \frac{dx}{dy}+\frac{y}{1+y^2}\,x-\frac{\etaμy}{\sqrt{1+y^2}}=0.$$

Τελικά βλέπουμε ότι έχουμε γραμμική (Δ.Ε.) με άγνωστη τη συνάρτηση $x=x(y)$. Έτσι έχομε

$$x=\left[c+\int\frac{\etaμy}{\sqrt{1+y^2}}\,e^{\int\frac{y\,dy}{1+y^2}}\,dy\right]e^{-\int\frac{y\,dy}{1+y^2}} \Rightarrow x=\frac{c-συνy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

27. (β) Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y'+xy-x^3y^3=0$ (Ε).

Λύση

Η (Ε) είναι (Δ.Ε.) Bernoulli με α=3. Θέτουμε $y=z^{-\frac{1}{2}}$ $(z>0)$ και καταλήγουμε στη γραμμική εξίσωση $z'-2xz+2x^3=0$ της οποίας γενική λύση είναι η $z=ce^{x^2}+1+x^2 \;\big|\; z>0$ και επομένως γενική λύση της (Ε) είναι η

$$y=\frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}+1+x^2}} \;\Big|\; ce^{x^2}+1+x^2>0.$$

ΣΧΟΛΙΟ 1. Προσέχουμε πάντα νάχει έννοια η δύναμη $y^α$. Έτσι π.χ. για y>0 η $y^α$ έχει έννοια για όλες τις πραγματικές τιμές που μπορεί να πάρει το α. Αν το $α\in Z$, το $y^α$ ορίζεται $\forall x\in R^*$. Αν όμως $α=\frac{1}{2}$, η δύναμη $y^α$ ορίζεται μόνο για y>0 και μάλιστα $y^α=y^{\frac{1}{2}}=\sqrt{y}>0$.

ΣΧΟΛΙΟ 2. Στη (Δ.Ε.) του Bernoulli οδηγεί το πρόβλημα της κίνησης ενός σώματος, εάν η αντίσταση του μέσου εντός του οποίου κινείται εξαρτάται από την ταχύτητά του.

Αν η αντίσταση F δίνεται από τον τύπο $F=λ_1U+λ_2U^ν$, όπου $λ_1, λ_2, ν$ σταθεροί εξαρτώμενοι από το μέσο, τότε η (Δ.Ε.) της κίνησης είναι η:

$$m\frac{dU}{dt}=-λ_1U+λ_2U^ν \Rightarrow \frac{dU}{dt}+\frac{λ_1}{m}U=-\frac{λ_2}{m}U^ν \quad \big(\text{(Δ.Ε) Bernoulli}\big).$$

28. (α) Να λυθεί η (Δ.Ε.): $xy'-3y=2x^2$.

(β) Να βρεθεί ο γ. τόπος των σημείων της ολοκληρωτικής καμπύλης που ικανοποιούν τη σχέση $y''(x) = 0$ (γενικά σημεία καμπής).

Λύση

(α) Η προτεινόμενη (Δ.Ε.) είναι γραμμική. Ολοκληρώνουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση: $xy' - 3y = 0$. Έχομε $\frac{y'}{y} = \frac{3}{x}$ ή $\frac{dy}{y} = \frac{3dx}{x}$, $x \neq 0$

και έτσι $\ln|y| = 3\ln|x| - \ln\kappa \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{\kappa}\right| = \ln|x|^3 \Rightarrow |y| = |\kappa x^3|$ και επειδή το

κ είναι αυθαίρετο, το ίδιο θα συμβαίνει και με το πρόσημό του, άρα $y = \kappa x^3$.

Αυτές οι λύσεις είναι ορισμένες στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Ακόμη, μπορούν να οριστούν στο $x=0$, αφού τα $x=0$, $y=0$ ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση.

Αν y είναι της μορφής αx^2 τότε xy' και $2x^2$ είναι της ίδιας μορφής: $y = \alpha x^2$, $y' = 2\alpha x$ και αντικαθιστώντας στην (1) $xy' - 3y = 2x^2$ παίρνομε

$2\alpha x^2 - 3\alpha x^2 = 2x^2$, $\alpha = -2$.

Επομένως η λύση της (1) είναι η $y = -2x^2$. Η γενική λύση της (1) είναι τότε η $y = \kappa x^3 - 2x^2$.

(β) Έχομε $y' = 3\kappa x^2 - 4x$ και $y'' = 6\kappa x - 4$, $y'' = 0 \Leftrightarrow 3\kappa x - 2 = 0$.

Τα σημεία καμπής επαληθεύουν τις συνθήκες $y = \kappa x^3 - 2x^2$, $3\kappa x - 2 = 0$.

Απαλείφοντας το κ, βλέπομε ότι ικανοποιούν τη σχέση $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x^2$, (γιατί $\kappa = \frac{2}{3x}$) $\Rightarrow y = -\frac{4}{3}x^2$. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι παραβολή με εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x^2$.

29. Να λυθεί η (Δ.Ε.): $y'\,\text{συν}^3 x + y\,\text{συν}\,3x = e^{-4x}\,\text{ημ}x$, (Ε).

Λύση

Όταν $\text{συν}\,x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$, λύση δεν υπάρχει. Επομένως οι λύσεις που ζητάμε δεν ορίζονται για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$. Η (Ε) είναι γραμμική. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση γράφεται:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{\text{συν}\,3x}{\text{συν}^3 x}\,dx = -\frac{4\,\text{συν}^3 x - 3\,\text{συν}\,x}{\text{συν}^3 x}\,dx \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{y} = \left(-4 + \frac{3}{\text{συν}^2 x}\right)dx, \quad (E_1).$$

Η λύση της (E_1) είναι $\ln\left|\dfrac{y}{\kappa}\right| = -4x + 3\,\varepsilon\varphi x$ ή $y = \kappa\, e^{-4x}\, e^{3\,\varepsilon\varphi x}$.

Ψάχνομε τώρα μια μερική λύση της (Ε), δηλαδή μια λύση της μορφής $y = \kappa(x)\; e^{-4x}\; e^{3\,\varepsilon\varphi x}$ (μέθοδος μεταβολής της σταθεράς).

Παραγωγίζοντας και μεταφέροντας στην (Ε), έχομε

$$\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \kappa' \cdot e^{-4x} \cdot e^{3\,\varepsilon\varphi x} = e^{-4x}\,\eta\mu x \quad \text{ή} \quad \kappa' = e^{-3\,\varepsilon\varphi x} \cdot \varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

Για να ολοκληρώσουμε, θέτουμε $\varepsilon\varphi x = u$ και $du = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$ και παίρνομε

$$\kappa = \int e^{-3\,\varepsilon\varphi x} \cdot \varepsilon\varphi x \cdot \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \int e^{-3u} \cdot u \cdot du.$$

Με ταυτοποίηση έχομε $\int u\,e^{-3u}\,du \equiv (\alpha u + \beta)\,e^{-3u} + c$ και παραγωγίζοντας,

$u\,e^{-3u} \equiv (-3\alpha u - 3\beta + \alpha)\;e^{-3u}$, δηλαδή $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, $\beta = -\dfrac{1}{9}$ και

$\kappa = \left(-\dfrac{1}{3}u - \dfrac{1}{9}\right) e^{-3u} + c = -\left(\dfrac{\varepsilon\varphi x}{3} + \dfrac{1}{9}\right) \cdot e^{-3\varepsilon\varphi x} + c$. Μια μερική λύση της (Ε)

έχομε για c=0, την $y = -\left(\dfrac{\varepsilon\varphi x}{3} + \dfrac{1}{9}\right) \cdot e^{-3\varepsilon\varphi x} \cdot e^{-4x} \cdot e^{3\varepsilon\varphi x} = -\left(\dfrac{\varepsilon\varphi x}{3} + \dfrac{1}{9}\right) e^{-4x}$.

Η γενική λύση της (Ε) είναι τότε η $y = \kappa \cdot e^{-4x} \cdot e^{3\varepsilon\varphi x} - \dfrac{1}{9}\,(3\,\varepsilon\varphi x + 1)\;e^{-4x}$.

Η γενική λύση ορίζεται για $x \neq \rho\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $\rho \in Z$.

30. (α) Ολοκληρώσετε τη (Δ.Ε.): $(x^3 y' - 2)\ln|x| - (1 + x^2 y) = 0$, (Ε).

(Παρατηρήσετε ότι δέχεται μια λύση της μορφής $y = -x^{\nu}$ και προσδιορίσετε το ν).

(β) Προσδιορίσετε το σημείο Α του επιπέδου με θετική τετμημένη, από το οποίο περνά μια απειρία ολοκληρωτικών καμπύλων της (Ε). Προσδιορίσετε τη μερική λύση της (Ε) της οποίας το γράφημα στο Α έχει μια εφαπτομένη με κλίση 0.

Λύση

(α) Η εξίσωση (Ε) είναι γραμμική. Ολοκληρώνουμε την αντίστοιχη ομογενή (Δ.Ε.) (E_2): $x^3 y' \ln|x| - x^2 y = 0$, που δεν έχει έννοια για x=0.

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x\ln|x|},\quad x\neq 0.$$

Έχομε ότι $\ln|y|=\ln\left|\ln|x|\right|+c$, c αυθαίρετη σταθερά και $y=\kappa\ln|x|$, κ αυθαίρετη σταθερά. (Το ολοκλήρωμα $\int\frac{dx}{x\ln|x|}$ υπολογίζεται με τον μετασχηματισμό $t=\ln|x|$, ενθυμούμενοι πάντοτε ότι η παράγωγος του $\ln|x|$ είναι $\frac{1}{x}$ και όχι $\frac{1}{|x|}$ και ακόμη ότι η παράγωγος του $\ln|u|$ είναι $\frac{u'}{u}$). Ψάχνομε μια μερική λύση της (E) της μορφής $y=-x^{\nu}$. Έχομε λοιπόν $y'=-\nu x^{\nu-1}$ και αντικαθιστώντας στην (E) παίρνομε (E_3): $-(\nu x^{\nu+2}+2)\ln|x|-(1-x^{\nu+2})=0$.

Επειδή ο $\ln|x|$ δεν εκφράζεται ρητώς ως προς x, για να αληθεύει η σχέση (E_3) πρέπει και αρκεί $\begin{cases}\nu x^{\nu+2}+2=0\\ 1-x^{\nu+2}=0\end{cases}$, για κάθε $x\in R$ που δίνει: $\begin{cases}x^{\nu+2}=1\\ \nu+2=0\end{cases}$, για κάθε $x\in R$.

Οι παραπάνω δύο σχέσεις αληθεύουν για ν = –2 και μόνο γι' αυτό.

Έχομε λοιπόν τη μερική λύση της (E) $y=-\frac{1}{x^2}$.

Η γενική λύση της (E) είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της (E_2) και μιας μερικής λύσης της (E_1), δηλαδή $y=\kappa\ln|x|-\frac{1}{x^2}$.

(β) Αν x_0, y_0 οι συντεταγμένες του Α, πρέπει να ισχύει $y_0=\kappa\ln|x_0|-\frac{1}{x_0^2}$ για κάθε κ πραγματικό, δηλαδή $\kappa\ln|x_0|-\left(y_0+\frac{1}{x_0^2}\right)=0$, για κάθε $\kappa\in R$ και συνεπώς πρέπει $\ln|x_0|=0$ και $y_0+\frac{1}{x_0}=0$ ή $|x_0|=1$ και $y_0=-1$.

Επομένως, το σημείο Α με θετική τετμημένη είναι το Α (1, –1).

Η μερική λύση της (E) της οποίας το γράφημα στο Α έχει μια εφαπτομένη με κλίση 0 ικανοποιεί τη σχέση $y'(1)=0$.

$$y'=\frac{\kappa}{x}+\frac{2}{x^3},\quad y'(1)=\kappa+2=0\ \Rightarrow\ \kappa=-2.$$

Συνεπώς η ζητούμενη λύση είναι η $y=-2\ln|x|-\frac{1}{x^2}$.

31. Ολοκληρώσετε τη (Δ.Ε.): $yy' - y^2$ εφ$x = 1$, (E).

Λύση

H $y=0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Πρόκειται για μια εξίσωση Bernoulli (το δεύτερο μέλος είναι της μορφής y^{α}, $\alpha = -1$: $y' - y$ εφ$x = \frac{1}{y}$) και θέτοντας $y^2 = z$ (συνεπώς $2yy' = z'$) παίρνομε $\frac{1}{2} z' - z$ εφ$x = 1$, (E_1).

Η αντίστοιχη ομογενής (Δ.Ε.) είναι

$\frac{z'}{z} = 2$ εφ$x \Rightarrow \ln\left|\frac{z}{\kappa}\right| = -2\ln|\text{συν}x| \Rightarrow z = \frac{\kappa}{\text{συν}^2\kappa}$, κ αυθαίρετη σταθερά. Στη συνέχεια ψάχνομε για μια μερικη λύση της εξίσωσης (E_1) που να έχει τη μορφή $z = \frac{\kappa(x)}{\text{συν}^2 x}$. Αφού παραγωγίσουμε, αντικαθιστούμε στην (E_1) και έχομε

$\frac{1}{2}\,\frac{\kappa'}{\text{συν}^2 x} = 1 \Rightarrow \kappa' = 2\,\text{συν}^2 x \Rightarrow \kappa' = 1 + \text{συν}2x \Rightarrow \kappa(x) = \frac{1}{2}\,\text{ημ}2x + x$

και επομένως μια μερική λύση της (E_1) είναι η $z = \frac{\text{ημ}2x + 2x}{2\,\text{συν}^2 x}$ και η γενική λύση της (E_1) είναι η $z = \frac{c + \text{ημ}2x + 2x}{2\,\text{συν}^2 x}$, όπου $c = 2\kappa$ αυθαίρετη σταθερά.

Η γενική λύση της (Ε) είναι λοιπόν η $y = \pm\frac{\sqrt{c + \text{ημ}2x + 2x}}{\sqrt{2}\,|\text{συν}\,x|}$, (E_2). Επειδή η $y(x)$ πρέπει να είναι διάφορη του μηδενός, πρέπει να έχουμε $c + \text{ημ}2x + 2x \neq 0$.

Θέτομε $u = c + \text{ημ}2x + 2x$ και $u' = 2\,\text{συν}2x + 2 = 2\,(1 + \text{συν}2x)$.

Η u' μηδενίζεται όταν $\text{συν}2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2\kappa\pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

Εκτός από τις τιμές αυτές του x, η u' είναι θετική και συνεπώς η u είναι γνησίως αύξουσα. Η $u(x)$ μηδενίζεται λοιπόν μια μόνο φορά στο R για την τιμή του x_c που ορίζεται από την $c + \text{ημ}2x_c + 2x_c = 0$ και για $x > x_c$, $u>0$.

Οι λύσεις της (Ε) προκύπτουν από τη σχέση (E_2) για $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ (λόγω της παρουσίας της εφαπτομένης) και για $x > x_c$.

32. Να βρεθούν οι λύσεις της (Δ.Ε.) : $yy'' - 2(y')^2 = 0$, που περνούν από το σημείο $x=1$, $y=1$.

Λύση

$\frac{1}{y^3}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας μια και $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y^2}\right)=\frac{y\,y''-2(y')^2}{y^3}=0$.

Επομένως $\frac{y'}{y^2}=c \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y}=c\,x+d$. Για να περιέχει το σημείο (1, 1) πρέπει

$c+d=-1$ και επομένως (E_1) $y=\frac{1}{1+c\;(1-x)}$.

Κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής ικανοποιεί την εξίσωση και τις συνθήκες.

Αν $c=0$ τότε $y=1$ και έχει πεδίο ορισμού το R.

Αν $c\neq 0$, το δεξιό μέλος της (E_1) γίνεται αδύνατο για $x=\frac{1+c}{c}$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι το $\left(-\infty,\;\frac{1+c}{c}\right)\cup\left(\frac{1+c}{c},\;+\infty\right)$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θεωρούμε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή το y και σαν συνάρτηση το y'. Αν θέσουμε $y'=u$ θα έχουμε: $y''=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=u\,\frac{du}{dy}$.

Αντικαθιστώντας παίρνομε $u\left(y\,\frac{du}{dy}-2u\right)=0 \;\Rightarrow\; u=0$

ή $y\,\frac{du}{dy}-2u=0 \;\Rightarrow y=$σταθερή ή $y\,du=2u\,dy$.

Η $y\,du=2u\,dy \;\Rightarrow\; \frac{du}{u}=2\,\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; u=c\,y^2 \;\Rightarrow\; y'=c\,y^2 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \frac{dy}{y^2}=c\,dx \;\Rightarrow\; -\frac{1}{y}=c\,x+d$ κ.λ.π.

33. Προσδιορίστε τις ολοκληρωτικές καμπύλες της (Δ.Ε.): $y'=\frac{2x+y}{x-2y}$, θέτοντας όπου $x=r$ συνθ, $y=r$ ημθ.

Λύση

Έχομε $x=r$ συνθ $\Rightarrow$ $dx=dr\cdot$ συνθ $-\,r$ ημθ $\cdot\,d\theta$

και $y=r$ ημθ $\Rightarrow$ $dy=dr\cdot$ ημθ $+\,r$ συνθ $\cdot\,d\theta$.

Αντικαθιστώντας στην (Ε) παίρνομε:

$$\frac{dr\cdot ημθ + r\ συνθ\cdot dθ}{dr\cdot συνθ - r\ ημθ\cdot dθ} = \frac{2r\ συνθ + r\ ημθ}{r\ συνθ - 2r\ ημθ} = \frac{2συνθ + ημθ}{συνθ - 2\ ημθ}$$

ή $dr\ (ημθ\ συνθ - 2\ ημ^2θ - 2\ συν^2θ - ημθ\ συνθ) +$

$+\ dθ\ (r\ συν^2θ - 2r\ ημθ\ συνθ + 2r\ ημθ\ συνθ + r\ ημ^2θ) = 0$

ή $\dfrac{dr}{r} = \dfrac{1}{2}\ dθ$ ή $\ln\left|\dfrac{r}{κ}\right| = \dfrac{1}{2}\ θ$ ή $r = κ\ e^{\frac{θ}{2}}$.

Από την $r = κ\ e^{\frac{θ}{2}}$ παίρνομε τις ολοκληρωτικές καμπύλες με τις εξισώσεις τους σε πολικές συντεταγμένες.

Ακόμη, μπορούμε να τις πάρομε από τις εξισώσεις

$$\sqrt{x^2 + y^2} = κ\ e^{\frac{1}{2}\ Τοξ\ εφ\frac{y}{x}}, \qquad (E_1).$$

Πραγματικά: $θ = Τοξ\ εφ\ \dfrac{y}{x} + c$ (όπου c σταθερό πολλαπλάσιο του π).

Αυτή τη σταθερά, αν την εμφανίσουμε στη (2) δεν θα είχε παρά τη μορφή του κ, που είναι με κάθε τρόπο αυθαίρετη.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό y=tx. Ο μετασχηματισμός δικαιώνεται (επιβάλλεται) από την ομογένεια της (Δ.Ε.) (όχι απαραίτητα 1ου βαθμού ομογένειας), δηλαδή να μπορεί να γραφεί στη μορφή $\dfrac{dy}{dx} = f(t)$, απ' όπου $t = \dfrac{y}{x}$. Εδώ έχομε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2+t}{1-2t}$.

Αφού y=tx, τότε $dy = x\,dt + t\,dx$. Αντικαθιστώντας στην (Ε) παίρνουμε

$$x\ \frac{dt}{dx} + t = \frac{2+t}{1-2t} \quad ή \quad x\ \frac{dt}{dx} = \frac{2\ (1+t^2)}{1-2t} \quad ή \quad \frac{dx}{x} = \frac{1-2t}{2\ (1+t^2)}\ dt$$

$$ή \ \ \ln\left|\frac{x}{κ}\right| = \frac{1}{2}\ Τοξ\ εφ t - \frac{1}{2}\ \ln(1+t^2) \quad ή \quad x = κ\ \frac{e^{\frac{1}{2}\ Τοξ\ εφ\ t}}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Από την $y = t x \Rightarrow y = κt\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}\ Τοξ\ εφ\ t}}{\sqrt{1+t^2}}$.

Με τη λύση αυτή, πήραμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες σε παραμετρική μορφή. Μπορούμε ν' αποδείξουμε ότι αυτές οι καμπύλες ταυτίζονται μ' εκείνες που βρήκαμε στην πρώτη λύση.

Επειδή $t = \varepsilon\varphi\theta$ (γιατί $t = \frac{y}{x}$), αρκεί να γράψουμε στα αποτελέσματα της (Ε)

$x = \kappa\ e^{\frac{\theta}{2}}\ \sigma\upsilon\nu\theta, \qquad x = \kappa\ e^{\frac{\theta}{2}}\ \eta\mu\theta.$

34. Ολοκληρώσετε τη (Δ.Ε.): $y'(x^2-1) - y^2 + 1 = 0$, (Ε), παρατηρώντας ότι δέχεται τη μερική λύση $y = \frac{1}{x}$.

Λύση

Η προτεινόμενη είναι μια (Δ.Ε.) του Ricatti: $y' = \alpha(x)\ y^2 + \beta(x)\ y + \gamma(x)$.

Μπορούμε να τη λύσομε αν ξέρομε μια μερική λύση y_1, θέτοντας $y = z + y_1$.

Έστω $y = z + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = z' - \frac{1}{x^2}$. Αντικαθιστώντας στην (Ε) παίρνομε

$$\left(z' - \frac{1}{x^2}\right)(x^2-1) - \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow z'\ (x^2-1) - \frac{2z}{x} - z^2 = 0, \quad (E_1).$$

Η (E_1) είναι μια εξίσωση του Bernoulli και γράφεται ισοδύναμα έτσι:

$$(x^2-1)\ \frac{z'}{z^2} - \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{z} - 1 = 0.$$

Θέτοντας $u = \frac{1}{z}$ θα έχομε τη γραμμική (Δ.Ε.) $-(x^2-1)\ u' - \frac{2u}{x} = 1, \quad (E_2)$.

Λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή $\frac{u'}{u} = -\frac{2}{x\ (x^2-1)}$, της οποίας η λύση είναι:

$$\ln\left|\frac{u}{\kappa_1}\right| = 2\ln|x| - \ln|x-1| - \ln|x+1| \Rightarrow u = \kappa\ \frac{x^2}{x^2-1}$$ που ορίζεται για $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$.

Ψάχνομε μια μερική λύση της (E_2) με τη μορφή $u = \kappa(x)\ \frac{x^2}{x^2-1}$. Παραγωγίζοντας και θέτοντας στην (E_2), έχομε $-(x^2-1)\ \frac{\kappa'\ x^2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \kappa' = -\frac{1}{x^2}$. Μια λύση είναι η $\kappa(x) = \frac{1}{x}$ και επομένως μια μερική λύση της (E_2) είναι η $u = \frac{x}{x^2-1}$.

Συνεπώς η γενική λύση της (E_2) είναι η $u = \frac{x}{x^2-1} + \frac{\kappa\ x^2}{x^2-1} = \frac{\kappa\ x^2 + x}{x^2-1}$.

Έτσι παίρνομε $z = \frac{1}{u} = \frac{x^2-1}{x\ (\kappa\ x+1)}$ ή $y = z + \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x\ (\kappa x+1)} + \frac{1}{x}$ ή $y = \frac{\kappa + x}{(\kappa\ x+1)}$, που είναι η γενική λύση της (Ε).

Παρατηρούμε ότι παίρνομε τη μερική λύση $y = \frac{1}{x}$ θεωρώντας ότι το $\kappa \to +\infty$.

Σχόλιο. Για $\kappa=0$ παίρνουμε τη μερική λύση $y=x$, που είναι φανερό ότι ικανοποιεί την (Ε) και από την οποία μερική λύση θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε αρχικά. Θα φτάναμε γρηγορότερα στο αποτέλεσμα $y = \frac{c\,x-1}{c-x}$, που είναι το ίδιο μ' αυτό που βρήκαμε παραπάνω θέτοντας όπου $c = -\frac{1}{\kappa}$.

35. Να βρεθεί η καμπύλη που περνά από το σημείο (1, 2) και της οποίας η εφαπτομένη στο τυχόν σημείο της (x, y) τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $\left(\frac{1}{2}x,\ 0\right)$.

Λύση

Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της (x, y) είναι η $Y - y = y'\,(X - x)$.

Για να βρούμε πού η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα Ox, θέτουμε Y=0, οπότε, σύμφωνα με την εκφώνηση, $X = \frac{1}{2}\,x$.

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης δίνει

$$-y = y'\left(\frac{1}{2}\,x - x\right) \Rightarrow \frac{y}{y'} = \frac{1}{2}\,x \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + c \Rightarrow |y| = e^c \cdot x^2 \Rightarrow y = \pm\, e^c \cdot x^2 \Rightarrow y = \kappa\, x^2 \quad \text{με } \pm e^c = \kappa.$$

(Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο κ λαμβάνει την τιμή 0 οπότε ο τύπος περιέχει και τη λύση y=0).

Επειδή η καμπύλη περιέχει το σημείο (1, 2) προκύπτει ότι y(1)=2 ή κ=2, οπότε η ζητουμένη καμπύλη είναι η παραβολή $y = 2x^2$.

36. Υποθέτουμε πως δύο σύρματα, κάθετα στο επίπεδο Oxy, που περνάνε από τα σημεία (1, 0) και (-1, 0), φέρουν ηλεκτρικά φορτία ίσης έντασης αλλά αντίθετης φοράς.

Είναι γνωστό πως, σ' αυτή την περίπτωση, οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κύκλοι με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\,cx + 1 = 0$, c παράμετρος. Να βρεθούν οι δυναμικές γραμμές.

Λύση

Από τη φυσική είναι γνωστό πως οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές γραμμές, άρα πρέπει να αναζητήσομε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπυλών.

(1) $x^2 + y^2 - 2cx + 1 = 0$, c παράμετρος.

Παραγωγίζομε την (1) ως προς x και παίρνουμε (2) $c = x + yy'$.

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $(x^2 - y^2 - 1)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

Επομένως η (Δ.Ε.) των ορθογωνίων τροχιών (εδώ δυναμικών γραμμών) είναι $2xy\,dx - (x^2 - y^2 - 1)\,dy = 0$, (Ε).

Η (Δ.Ε.) (Ε) έχει ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(y) = \dfrac{1}{y^2}$ και η γενική λύση της (Ε) είναι $x^2 + y^2 - 1 = 2\kappa y$ ή $x^2 + (y-\kappa)^2 = 1 + \kappa^2$, κ αυθαίρετη σταθερά.

Οι δυναμικές γραμμές είναι κύκλοι με κέντρα τα σημεία (Ο, κ), (Ο, -κ) του άξονα yy' και περιέχουν όλοι τα σημεία (1, 0) και (-1, 0).

37. Όταν τα φυσικά ραδιενεργά στοιχεία εκπέμπουν σωμάτια α ή β, μετατρέπονται σε στοιχεία με διαφορετικό ατομικό αριθμό. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t ο αριθμός των πυρήνων κάποιου ραδιενεργού στοιχείου είναι $x(t)$ και ότι σε χρόνο $t + \Delta t$ ο αριθμός των πυρήνων είναι $x(t+\Delta t)$. Το όριο του λόγου $\dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$ που ισούται με $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ όταν το $\Delta t \to 0$, παριστάνει τη στιγμιαία ταχύτητα $\dfrac{dx}{dt}$ διάσπασης των πυρήνων, η οποία ακολουθεί το νόμο του Rutherford: Η στιγμιαία ταχύτητα διάσπασης των πυρήνων σ' ένα ραδιενεργό στοιχείο είναι ανάλογη του αριθμού πυρήνων που υπάρχουν τη χρονική αυτή στιγμή.

Δηλαδή, σε μαθηματικη διατύπωση: $\dfrac{dx}{dt} = -\kappa x$, όπου κ είναι η σταθερά διάσπασης και το $-$ δηλώνει ότι ο αριθμός των πυρήνων ελαττώνεται ($\Delta x < 0$).

Η λύση της $\dfrac{dx}{dt} = -\kappa x$ είναι ως γνωστό η $x(t) = x_0\,e^{-\kappa t}$, (Δ), που δίνει τον αριθμό των πυρήνων που δεν διασπάστηκαν σε κάθε μια χρονική στιγμή, όπου x_0 ο αριθμός των πυρήνων τη χρονική στιγμή $t=0$. Ο χρόνος που η ουσία αυτή μειώνεται στο μισό της αρχικής, λέγεται χρόνος μισής ζωής ή ημιζωή του ραδιενεργού σώματος.

Το φαινόμενο της διάσπασης είναι ασυνεχές αφού ο αριθμός των πυρήνων είναι ακέραιος αριθμός. Λόγω όμως του μεγάλου μεγέθους του αριθμού αυτού και της μικρής μεταβολής του με το χρόνο, θεωρείται συνεχής συνάρτηση του χρόνου. Από τη σχέση (Δ) παίρνουμε ότι ο αριθμός των πυρήνων, που διασπάστηκαν σε κάθε μια χρονική στιγμή δίνεται από τον τύπο $y(t) = x_0 - e^{-\kappa t}$.

Σχόλιο. Για το Ουράνιο 238 το κ είναι τόσο μικρό, ώστε ο χρόνος μισής ζωής του να υπολογίζεται σε 4,5 δισεκατομμύρια χρόνια. Έτσι, επιβεβαιώνεται η ύπαρξη οικολογικού προβλήματος από τα ραδιενεργά κατάλοιπα των ατομικών αντιδραστήρων. Ακόμη, με τη βοήθεια της (Δ) είναι δυνατό να ελέγξουμε τη γνησιότητα ζωγραφικών πινάκων υπό την προϋπόθεση πως είναι, ή υποτίθεται πως είναι, αρκετά παλαιοί, καθώς επίσης την χρονολόγηση ορισμένων πετρωμάτων.

Εφαρμογή. Να βρεθεί η ποσοστιαία μείωση, αν ο χρόνος μισής ζωής μιας ραδιενεργού ουσίας είναι 25 χρόνια.

Λύση.

Από την (Δ.Ε.) $x(t) = x_0\, e^{-\kappa t}$ για $x(t) = \frac{x_0}{2}$ και $t=25$, έχομε

$\frac{x_0}{2} = x_0\, e^{-25\kappa} \Rightarrow \kappa = \frac{\ln 2}{25} \cong \frac{0,693}{25} \cong 0,02$ δηλαδή η ποσοστιαία μείωση είναι περίπου 2%.

38. Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος μάζας m που πέφτει στο κενό (πρόκειται για υπόθεση που απλοποιεί την πραγματικότητα, διευκολύνοντάς μας να φτάσουμε σε μαθηματικά πρότυπα που μας οδηγούν εύκολα σε συμπεράσματα τα οποία, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, αποτελούν ικανοποιητικές προσεγγίσεις). Θα κάνουμε την επιπλέον απλοποιητική παραδοχή πως η τροχιά της πτώσης είναι τόσο μικρή σε σχέση με την ακτίνα της γης, ώστε μπορούμε - χωρίς σοβαρό λάθος στο αποτέλεσμα - να υποθέσουμε πως το βάρος του σώματος είναι σταθερό. Τότε και η επιτάχυνση θα είναι σταθερή και θα τη συμβολίζουμε με g. Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έχουμε

$v'(t) = -g$ («−», γιατί το σώμα επιταχύνεται προς τα κάτω)

$\Leftrightarrow \int v'(t)\,dt = \int(-g)\,dt \Leftrightarrow v(t) = -gt + c_1,\quad c_1$ σταθερά.

Η τελευταία εξίσωση δίνει τις τιμές της ταχύτητας, αν είναι γνωστή η σταθερά c_1. Προχωρώντας ένα βήμα ακόμη, έχουμε:

$$s'(t) = v(t) \Leftrightarrow \int s'(t)\,dt = \int(-gt + c_1)\,dt \Leftrightarrow s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,$$

c_2 σταθερά.

Έτσι, μπορούμε να ελέγξουμε και το διάστημα, αν ξέρουμε και τη σταθερά c_2. Οι σταθερές γενικά είναι προσδιοριστέα μεγέθη. Στη Φυσική, είναι συναρτήσεις των αρχικών συνθηκών του φαινομένου που μελετάμε. Για παράδειγμα, στο φαινόμενο της πτώσης που θεωρήσαμε, πρέπει να ληφθεί υπόψη αν το σώμα αφήνεται να πέσει, οπότε θα έχει αρχική ταχύτητα $v_0 = 0$ ή αν του δίνουμε μη μηδενική αρχική ταχύτητα $v_0 = v(0)$. Σε κάθε περίπτωση, εφαρμόζοντας τον τύπο της ταχύτητας για t=0, έχουμε $v(0) = -g \cdot 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = v_0$ και καταλήγουμε στον τύπο $v(t) = -g + v_0$. Εργαζόμενοι ανάλογα για το διάστημα, έχουμε $s(0) = -\frac{1}{2}g\,0^2 + c_1 0 + c_2$ και υποθέτοντας $s(0) = s_0$, καταλήγουμε στον τύπο $s(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0 t + s_0$ (της ομαλής επιταχυνομένης κίνησης).

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν με την εξωπραγματική προϋπόθεση πως υπάρχει κίνηση στο κενό που μπορούμε να τη μελετήσουμε. Αν λάβουμε υπόψη μας και την αντίσταση της ατμόσφαιρας κατά την πτώση, το μαθηματικό πρότυπο τροποποιείται ως εξής: υποθέτουμε πως εξαιτίας της ατμοσφαιρικής αντίστασης εξασκείται στο σώμα μια δύναμη που αντιτίθεται στην κίνηση (άρα έχει πάντα αρνητικό πρόσημο) και είναι ανάλογη της ταχύτητας. Δηλαδή η δύναμη αυτή είναι $-av(t)$ για κατάλληλο $a>0$. Τότε, η συνολική δύναμη που υποθέτουμε πως εξασκείται στο σώμα θα είναι

$-mg - a\,v(t)$ (βάρος + δύναμη της ατμοσφαιρικής αντίστασης).

Έτσι, σύμφωνα με τον νόμο του Newton (δύναμη = μάζα · επιτάχυνση) θα έχουμε

$$-mg - a\,v(t) = m\,v'(t) \Leftrightarrow \text{(E): } v'(t) + \frac{a}{m}\,v(t) + g = 0 \Rightarrow v(t) = c\,e^{-\frac{a}{m}t} - \frac{mg}{a}.$$

Αν υποθέσουμε πως ενδιαφερόμαστε για την αρχική συνθήκη $(0,\ v_0)$, όπου v_0 είναι η αρχική ταχύτητα, υπολογίζουμε το c από την ισότητα

$$v(0) = v_0 = c\,e^{\frac{a}{m}\cdot 0} - \frac{mg}{a} \Rightarrow c = v_0 + \frac{mg}{a},$$

οπότε η εξίσωση για την ταχύτητα σώματος που πέφτει μέσα στην ατμόσφαιρα (με τις παραδοχές που κάναμε για να φτάσουμε στο συγκεκριμένο πρότυπο) παίρνει την τελική μορφή

$$v(t)=v_0\, e^{-\frac{a}{m}t}-\frac{mg}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{m}t}\right)$$

Σχόλιο. Η (Ε) είναι της μορφής $x'+f(t)x=-g(t)$ και παρατηρούμε πως αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη επί $e^{\int f(t)\,dt}$, φτάνουμε στην ισότητα:

$$e^{\int f(t)\,dt}\cdot x'+f(t)\,e^{\int f(t)\,dt}\cdot x=-g(t)\;e^{\int f(t)\,dt}\;\Rightarrow\;\left(e^{\int f(t)\,dt}\cdot x\right)'=-g(t)\;e^{\int f(t)\,dt}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\int\left(e^{\int f(t)\,dt}\cdot x\right)'dt=-\int g(t)\;e^{\int f(t)\,dt}dt\;\Rightarrow\;e^{\int f(t)\,dt}\cdot x-c_1=-\int g(t)\;e^{\int f(t)\,dt}dt\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\underbrace{x(t)=c_1\;e^{-\int f(t)\,dt}-e^{-\int f(t)\,dt}\int g(t)\;e^{\int f(t)\,dt}dt.}_{(E')}$$

Η (Ε), λόγω της (Ε′) γίνεται:

$$v(t)=c\;e^{-\int\frac{a}{m}dt}-e^{-\int\frac{a}{m}dt}\int g\;e^{\int\frac{a}{m}dt}dt=c\;e^{-\frac{a}{m}t}-g\;e^{-\frac{a}{m}t}\int e^{\frac{a}{m}t}dt\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;v(t)=c\;e^{-\frac{a}{m}t}-g\;e^{-\frac{a}{m}t}\left(\frac{m}{a}\;e^{\frac{a}{m}t}\right)\;\Rightarrow\;v(t)=c\;e^{-\frac{a}{m}t}-\frac{mg}{a}.$$

Σχόλιο. Η σχέση $\left(e^{\int f(t)\,dt}\cdot x\right)'=-g(t)\cdot e^{\int f(t)\,dt}$ μπορεί να πάρει και τη μορφή:

$$\int\left(e^{\int f(t)\,dt}\cdot x\right)'dt+g(t)\,e^{\int f(t)\,dt}=0\;\Rightarrow\;\left(e^{\int f(t)\,dt}\cdot x+\int g(t)\,e^{\int f(t)\,dt}dt\right)'=0\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;e^{\int f(t)\,dt}\cdot x+\int g(t)\,e^{\int f(t)\,dt}dt=c.$$

IX. Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

«Μπορεί συχνά ν' ακούσετε από μη μαθηματικούς, ιδιαίτερα από φιλοσόφους, ότι τα μαθηματικά συνίστανται αποκλειστικά στην εξαγωγή συμπερασμάτων από σαφώς διατυπωμένες πρώτες αρχές. Και ότι στην πορεία αυτή δεν έχει καμία σημασία τι νόημα έχουν αυτές οι πρώτες αρχές, το αν είναι αληθείς ή ψευδείς, φτάνει να μην αντιφάσκουν η μια με την άλλη. Ένας όμως που έχει κάνει γόνιμο μαθηματικό έργο θα μιλήσει τελείως διαφορετικά. Στην πραγματικότητα οι άνθρωποι αυτοί [οι μη μαθηματικοί] έχουν στο νου τους μόνο την αποκρυσταλλωμένη μορφή με την οποία παρουσιάζονται τελικά οι ολοκληρωμένες μαθηματικές θεωρίες. Ωστόσο ο ίδιος ο ερευνητής στα μαθηματικά όπως και σ' όλες τις άλλες επιστήμες δεν εργάζεται μ' αυτό τον αυστηρά παραγωγικό τρόπο. Απεναντίας χρησιμοποιεί πάρα πολύ τη φαντασία του και προχωρεί επαγωγικά με τη βοήθεια ευρετικών τεχνασμάτων. Μπορούμε να δώσουμε πάμπολλα παραδείγματα μαθηματικών, που ανακάλυψαν θεωρήματα μεγάλης σημασίας και αδυνατούσαν να τα αποδείξουν. Ν' αρνηθούμε τότε ότι έκαναν μεγάλον άθλο και σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό να επιμείνουμε ότι δεν είναι μαθηματικά αυτά; Στο κάτω κάτω είναι αυθαίρετο το πώς χρησιμοποιείται η λέξη σήμερα, αλλά καμία αξιολογική κρίση δεν μπορεί ν' αρνηθεί ότι η επαγωγική εργασία του ανθρώπου που πρωτοδιατυπώνει το θεώρημα είναι τουλάχιστον εξίσου αξιέπαινη με την παραγωγική εργασία εκείνου που το αποδεικνύει. Γιατί και οι δυο είναι εξίσου απαραίτητοι και η ανακάλυψη είναι η προϋπόθεση του τελικού συμπεράσματος».

Φέλιξ Κλάιν

«Καμιά ανακάλυψη δεν έγινε στα μαθηματικά, ούτε και σ' άλλον τομέα, με προσπάθειες της παραγωγικής λογικής. Όλες είναι απόρροιες της δημιουργικής φαντασίας που χτίζει κάτι που φαίνεται να είναι αλήθεια, οδηγούμενη άλλοτε από αναλογίες, άλλοτε από ένα αισθητικό ιδανικό, δίχως διόλου να στηρίζεται σε στέρεες λογικές βάσεις. Αφού πρώτα γίνει μια ανακάλυψη, εμφανίζεται κι η λογική για ν' ασκήσει έλεγχο. Η λογική αποφαίνεται τελικά αν η ανακάλυψη είναι πραγματική ή απατηλή. Ο ρόλος της κατά συνέπεια, μολονότι σημαντικός, είναι μόνο δευτερεύων».

Ανρί Λεμπέκ

Η επιστήμη δημιουργείται με τα γεγονότα όπως ένα σπίτι χτίζεται με τούβλα. Αλλά η απλή συσσώρευση γεγονότων δεν είναι επιστήμη όπως ένας σωρός τούβλα δεν είναι σπίτι.

H. Poincaré

«Μερικά βιβλία μακρηγορούν για να ορίσουν την κλειστή καμπύλη, την ανοιχτή καμπύλη, τις κλειστές περιοχές, τις ανοιχτές περιοχές και ούτω καθεξής... και παρόλ' αυτά δε διδάσκουν περισσότερη γεωμετρία από το ότι, αν φέρουμε στο επίπεδο μια ευθεία, αυτή χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη. Στο τέλος μερικών από τα βιβλία γεωμετρίας αυτά ψάξετε να βρείτε, έπειτα από μια μακρά πραγμάτευση ή μια μεγάλη προσπάθεια για μάθηση, πόσην ακριβώς γνώση γεωμετρίας αποκτήσατε. Σκέφτομαι ότι συνήθως ο συνολικός αριθμός αληθειών που διδάσκονται είναι πολύ μικρός, ενώ ο συνολικός αριθμός των λέξεων είναι πολύ μεγάλος. Αυτό είναι δυσάρεστο. Επιπλέον επικρατεί σε μερικά από τα βιβλία αυτά η τάση να χρησιμοποιούν πολύ ασυνήθιστες λέξεις — τις λέξεις που χρησιμοποιούνται στο πιο τεχνικό λεκτικό ιδίωμα των καθαρών μαθηματικών. Δε βλέπω να υπάρχει λόγος γι' αυτό».

Richard P. Feynman

Οι εκδρομές στη χώρα των Μαθηματικών δεν έχουν σαφές δρομολόγιο· μπορείτε να ξεφύγετε προς όποια κατεύθυνση θέλετε και να επισκεφθείτε οποιαδήποτε περιοχή. Η πρώτη σας στάση μπορεί νάναι η χώρα των Πρώτων Αριθμών όπου η αναζήτηση του μεγαλύτερου πρώτου αριθμού δίνει σημαντικές πληροφορίες για τη δημιουργία αδιαπέραστων συστημάτων ασφαλείας των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Μπορείτε μετά να συνεχίσετε νότια προς τη χώρα της Ανάλυσης όπου ένα φαινομενικά απλό πρόβλημα που ταλαιπωρεί τους τοπογράφους χρόνια ολόκληρα μόλις λύθηκε. Υπάρχει ακόμα η Τοπολογία όπου η ελάχιστη επιφάνεια μιας σαπουνόφουσκας επαναλαμβάνεται στην κατασκευή μεγάλων αψίδων. Στην οροσειρά των κλασματικών ανακαλύπτετε καινούργιους τρόπος για την περιγραφή πολλών φυσικών φαινομένων κάτι που ήταν αδύνατο να γίνει παλιότερα. Στη θάλασσα της Στατιστικής μπορείτε να ρίξετε ένα κέρμα τηλεφωνικά, απόλυτα σίγουροι ότι ο συμπαίκτης σας δε σας ρίχνει.

Καλωσορίσατε λοιπόν στη χώρα των Μαθηματικών. Καθείστε αναπαυτικά, χαλαρώστε κι απολαύστε το ταξίδι. Ερασιτέχνες ή άνθρωποι του μαθηματικού χώρου θα αποκτήσετε μια καλύτερη άποψη του δυναμικού και χρήσιμου κόσμου των σύγχρονων Μαθηματικών.

Ivars Peterson

Αυτό τον χειμώνα παραδίδω δύο σειρές διαλέξεων σε τρεις σπουδαστές, από τους οποίους ο ένας είναι μέτρια προετοιμασμένος, ο δεύτερος λιγότερο από μέτρια και ο τρίτος στερείται και προετοιμασίας και ικανότητας. Τέτοια είναι τα βάρη του μαθηματικού επαγγέλματος.

Johann Friederich Carl Gauss

«Μερικές φορές διατυπώνω μια υπόθεση και προσπαθώ να την αποδείξω. Πολλές φορές, προσπαθώντας να την αποδείξω, ανακαλύπτω κάποιο αντίθετο παράδειγμα, οπότε πρέπει ν' αλλάξω την υπόθεσή μου. Άλλοτε πάλι πρόκειται για κάτι που το έχουν ήδη προσπαθήσει και άλλοι άνθρωποι. Βρίσκω ότι πολλές εργασίες είναι ασαφείς και απλώς δεν μπορώ να τις καταλάβω. Έτσι, πρέπει να προσπαθήσω να τις μεταφράσω στον δικό μου τρόπο σκέψης. Πολλές φορές έχω μια ιδέα και αρχίζω να τη δουλεύω στο χαρτί, και κατόπιν, αφού έχω φτάσει στα μισά, διαπιστώνω ότι έχει πολλές πτυχές ακόμη.
Δουλεύω πάρα πολύ με το ένστικτο, ξεκινώντας από τη σκέψη ότι μια ιδέα πρέπει να είναι σωστή. Μετά προσπαθώ να την αποδείξω. Μερικές φορές βλέπω ότι έκανα λάθος. Άλλες πάλι καταλαβαίνω ότι η αρχική ιδέα ήταν λανθασμένη, οδηγεί όμως σε νέες ιδέες. Πιστεύω ότι με βοηθά πολύ το να συζητώ τις ιδέες μου με τους άλλους. Ακόμη κι αν δεν συνεισφέρουν τίποτε, και μόνο το ότι πρέπει να τις εξηγήσω σε κάποιον άλλον, με βοηθά να τις ξεκαθαρίσω για τον εαυτό μου».

Stephen HawKing
(Καθηγητής στην έδρα του Νεύτωνα στο Καίμπριτζ)

«Έτσι πάει η ιστορία, νέα Μαθηματικά ξεπηδούν από τα παλιά, προχωρούν και αναδιπλώνονται, παλιές ιδέες αλλάζουν προσωπείο, νέα θεωρήματα ρίχνουν φως σε παλιά προβλήματα. Το να ασχολείσαι με τα Μαθηματικά είναι σα να περιπλανιέσαι σ' ένα άγνωστο τοπίο. Βλέπεις μια όμορφη πεδιάδα κάτω από τα πόδια σου αλλά ο δρόμος είναι πολύ απότομος κι έτσι διαλέγεις ένα άλλο μονοπάτι που σε οδηγεί πολύ μακριά μέχρι τη στιγμή που μ' ένα αναπάντεχο και ξαφνικό γύρισμα βλέπεις τον εαυτό σου να περπατά στην πεδιάδα».

Rick Norwood

Αρχίζω να αισθάνομαι τη δύναμη της αδράνειάς μου να μεγαλώνει σιγά - σιγά, και δεν μπορώ να πω αν σε δέκα χρόνια από τώρα θα εξακολουθώ να ασχολούμαι με τα Μαθηματικά. Μου φαίνεται επίσης πως το ορυχείο έχει σκαφτεί ήδη σε μεγάλο βάθος, και αν δεν βρεθούν νέες φλέβες θα πρέπει να εγκαταλειφθεί.

Lagrange

Ξέρω ότι οι περισσότεροι άνθρωποι, ακόμα κι αυτοί που χειρίζονται με ευκολία τα πιο περίπλοκα προβλήματα, σπάνια μπορούν να αποδεχτούν ακόμα και την πιο απλή και την πιο φανερή αλήθεια, αν είναι τέτοια που να τους υποχρεώνει να παραδεχτούν ως λαθεμένα κάποια συμπεράσματα που με ευχαρίστηση είχαν εξηγήσει σε συναδέλφους τους, που με περηφάνεια τα είχαν διδάξει σε άλλους και τα είχαν υφάνει, μια - μια κλωστή, ολόκληρη ζωή.

Τολστόι

Όταν άρχισα να ασχολούμαι επαγγελματικά με τα Μαθηματικά το 1960, που δεν είναι και πολύ παλιά, τα σύγχρονα Μαθηματικά, στο σύνολό τους, απορρίπτονταν από τους φυσικούς, ακόμα και από τους πιο πρωτοπόρους μαθηματικούς φυσικούς. Έτσι η διαφορίσιμη δυναμική, η γενική ανάλυση, οι απεικονίσεις σε πολλαπλότητες, η διαφορική γεωμετρία – καθετί, ένα ή δύο χρόνια μόνο μετά από όσα είχε χρησιμοποιήσει ο Einstein – όλα απορρίπτονταν.
Το ειδύλλιο ανάμεσα στους μαθηματικούς και στους φυσικούς είχε τελειώσει με διαζύγιο τη δεκαετία του 1930. Αυτοί οι άνθρωποι δεν μιλούσαν πια μεταξύ τους. Απλώς περιφρονούσε ο ένας τον άλλο. Οι μαθηματικοί φυσικοί δεν επέτρεπαν στους σπουδαστές τους να παρακολουθούν Μαθηματικά από μαθηματικούς: Διδαχτείτε Μαθηματικά από μας. Θα σας μάθουμε ό,τι χρειάζεται να ξέρετε. Οι μαθηματικοί ακολουθούν έναν τρομερά εγωιστικό δρόμο και θα σας καταστρέψουν τα μυαλά. Αυτά συνέβαιναν το 1960. Το 1968 είχαν μεταστραφεί εντελώς. Τελικά, φυσικοί, αστρονόμοι και βιολόγοι, όλοι καταλάβαιναν ότι έπρεπε να μαθαίνουν τα νέα Μαθηματικά.

Ralph Abraham

IX. Η ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Παρατήρηση

Αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t}\, dt > 0$.

Πραγματικά: $0 < t < x_2 \Rightarrow \frac{1}{t} > \frac{1}{x_2}$ και συνεπώς

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t}\, dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x_2}\, dt = \frac{1}{x_2}\int_{x_1}^{x_2} dt = \frac{x_2 - x_1}{x_2} = 1 - \frac{x_1}{x_2} > 0.$$

Ορισμός

Η συνάρτηση L με τύπο $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, ονομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση**[1].

Σχόλιο

Αν $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, τότε από το **θεώρημα συνάρτησης οριζόμενης με ολοκλήρωμα** έχομε ότι $L'(x) = \frac{1}{x}$.

Ιδιότητες της συνάρτηση L

i₁) $L(1) = 0$, διότι $L(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$.

i₂) $L(x) > 0$ για $x>1$ και $L(x)<0$ για $0<x<1$.

Απόδειξη

Αν $x>1$, τότε ακολουθούμε τη διαδικασία που αναφέραμε πιο πάνω. Αν $x<1$, τότε $\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt < 0$, αφού $\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt > 0$, λόγω της παρατήρησης.

i₃) Αν $x>0$, $y>0$ τότε $L(xy) = L(x)\cdot L(y)$.

Απόδειξη

$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt$ και αν θέσουμε $t=x\omega$, τότε $dt = (x\omega)'\, d\omega = x\, d\omega$ και όταν $t=x$ τότε $\omega=1$, όταν $t=xy$ τότε $\omega=y$. Επομένως

$$\int_x^{xy} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^y \frac{x\, d\omega}{x\omega} = \int_1^y \frac{1}{\omega}\, d\omega = \int_1^y \frac{1}{t}\, dt.$$

---

1. Η τιμή της συνάρτησης L στη θέση x ονομάζεται και φυσικός λογάριθμος. Συμβολικά: $L(x)$ ή $\ln x$ ή $\mathrm{Log}x$ ή $\text{λογ}_e x$.

Συνεπώς $L(xy)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^y \frac{1}{t}\,dt = L(x)+L(y)$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Κρατάμε το y σταθερό και θεωρούμε μια νέα συνάρτηση K: $K(x)=L(xy)$, $x>0$.

Τότε $K'(x)=L'(xy)\cdot(xy)'=y\cdot L'(xy)=y\cdot\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}$. Δηλαδή $K'(x)=\frac{1}{x}$.

Όμως $L'(x)=\frac{1}{x}$. Έχουν δηλαδή οι συναρτήσεις K και L την ίδια παράγωγο για κάθε $x>0$ και συνεπώς θα πρέπει να διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερά. Μπορούμε επομένως να γράψουμε:

$K(x)-L(x)=c$ (όπου c σταθερά) ή $L(x\cdot y)=L(x)+c$ για κάθε $x>0$.

Αν στη σχέση αυτή θέσουμε $x=1$, βρίσκουμε $L(y)=L(1)+c \Leftrightarrow c=L(y)$.

Επομένως $L(x\cdot y)=L(x)+L(y)$.

i_4) (α) $L\left(\frac{1}{x}\right)=-L(x)$ και (β) $L\left(\frac{x}{y}\right)=L(x)-L(y)$

Απόδειξη

(α) $L(1)=0 \Leftrightarrow 0=L\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 0=L(x)+L\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow L\left(\frac{1}{x}\right)=-L(x)$.

(β) $L\left(\frac{x}{y}\right)=L\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow L\left(\frac{x}{y}\right)=L(x)+L\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow L\left(\frac{x}{y}\right)=L(x)-L(y)$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

(α) $L\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,dt$ και αν θέσουμε $t=\frac{1}{\omega}$, τότε $dt=-\frac{d\omega}{\omega^2}$ και όταν $t=1$ τότε $\omega=1$, όταν $t=\frac{1}{x}$ τότε $\omega=x$, επομένως:

$$L\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}\,dt=\int_1^x \omega\left(-\frac{d\omega}{\omega^2}\right)=-\int_1^x \frac{1}{\omega}\cdot d\omega=-\int_1^x \frac{1}{t}\,dt=-L(x).$$

(β) $L\left(\frac{x}{y}\right)=\int_1^{\frac{x}{y}} \frac{1}{t}\,dt \overset{*}{=} \int_{1\cdot y}^{\frac{x}{y}\cdot y} \frac{1}{t}\,dt = \int_y^x \frac{1}{t}\,dt = \int_y^1 \frac{1}{t}\,dt + \int_1^x \frac{1}{t}\,dt =$

$= -\int_1^y \frac{1}{t}\,dt + L(x) = L(x) - L(y).$

i_5) $L(x^v) = v \cdot L(x)$, v φυσικός.

Απόδειξη

$L(x^v) = L\ \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots x)}_{v-\text{φορές}} = \underbrace{L(x) + \ldots + L(x)}_{v-\text{φορές}} = v \cdot L(x).$

Διαφορετική αντιμετώπιση

β_1) Για v=1, ισχύει.

β_2)

Υ	$L(x^v) = v \cdot L(x)$
Σ	$L(x^{v+1}) = (v+1) \cdot L(x)$

Πραγματικά:

$L(x^{v+1}) = L(x^v \cdot x) = L(x^v) + L(x) \overset{Y}{=} vL(x) + L(x) = (v+1)L(x).$

i_6) $L(x^v) = v\,L(x)$, όπου v αρνητικός ακέραιος.

Απόδειξη

Αν $v \in Z^-$ τότε $v = -\mu$, $\mu \in N$. Επομένως

$L(x^v) = L\left(\frac{1}{x^\mu}\right) = L\left(\left(\frac{1}{x}\right)^\mu\right) = \mu\ L\left(\frac{1}{x}\right) = -\mu L(x) = vL(x).$

*** Είναι φανερό ότι: $\int_\alpha^{x\alpha} \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt$, $\alpha > 0$. Πραγματικά: Για $t = \alpha y \Rightarrow dt = \alpha dy$ και για t=α βρίσκουμε y=1, ενώ για t=xα βρίσκουμε y=x. Συνεπώς**

$\int_\alpha^{x\alpha} \frac{1}{t}dt = \int_1^x \frac{1}{\alpha y}\alpha\,dy = \int_1^x \frac{1}{y}\,dy = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$

Διαφορετική αντιμετώπιση

$\int_\alpha^{\alpha x} \frac{1}{t}dt = [\ln t]_\alpha^{\alpha x} = \ln(\alpha x) - \ln\alpha = \ln\left(\frac{\alpha x}{\alpha}\right) = \ln x - \ln 1 = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt.$

$i_7)$ $L\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)=\dfrac{1}{\nu}L(x)$, **για κάθε x>0 και** $\nu \in N^*$.

Απόδειξη

$$L(x)=L\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\nu L\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right) \Rightarrow L\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)=\frac{1}{\nu}L(x).$$

$i_8)$ $L\left(x^{\frac{\mu}{\nu}}\right)=\dfrac{\mu}{\nu}L(x)$, **για κάθε x>0 και** $\mu,\ \nu \in N^*$.

Απόδειξη

$$L\left(x^{\frac{\mu}{\nu}}\right)=L\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}=\mu L\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)=\mu\cdot\frac{1}{\nu}L(x)=\frac{\mu}{\nu}L(x).$$

$i_9)$ **Η L** ***είναι συνεχής στο*** $(0,\ +\infty)$, **γιατί** ***στο διάστημα αυτό είναι διαφορίσιμη.***

$i_{10})$ **Το πεδίο τιμών της L είναι το διάστημα** $(-\infty,\ +\infty)$.

Απόδειξη

Επειδή η L είναι συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$, κατά το θεώρημα του Darboux, η L παίρνει διάφορες τιμές που το σύνολό τους αποτελεί ένα διάστημα, το διάστημα του πεδίου τιμών της. Για να δείξομε ότι το διάστημα αυτό είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty)$, αρκεί να δείξομε ότι το διάστημα αυτό δεν είναι ούτε πάνω ούτε κάτω φραγμένο. Αν M είναι ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός, θα δείξομε ότι η L μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του M και μικρότερες του -M.

Επειδή $L(2)=\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt>0$, υπάρχει θετικό πολλαπλάσιο ν του L(2), που είναι μεγαλύτερο του M, δηλαδή $\nu L(2)>M$ ή $-\nu L(2)<-M$. Επειδή $\nu L(2)=L(2^{\nu})$ και $-\nu L(2)=L(2^{-\nu})$, παίρνομε ότι $L(2^{\nu})>M$ για $\nu>\dfrac{M}{L(2)}$ και $L(2^{-\nu})<-M$.

$i_{11})$ **Η L είναι γνησίως αύξουσα.**

Πραγματικά: $L'(x)=\dfrac{1}{x}>0 \Rightarrow L \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

Αλλιώτικα: Υποθέτουμε ότι $0<x_1<x_2$. Τότε

$$L(x_2)=\int_1^{x_2}\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{x_1}\frac{1}{t}\,dt+\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{t}\,dt>\int_1^{x_1}\frac{1}{t}\,dt=L(x_1).$$

Συμπέρασμα: Η L είναι 1-1 καθώς: για κάθε x_1, $x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_2 > x_1 > 0 \Rightarrow L(x_2) > L(x_1)$.

i_{12}) Η συνάρτηση L είναι επί και το διάγραμμά της τέμνει κάθε οριζόντια ευθεία μια και μόνη φορά.

Διαφορετική διατύπωση: Αν δοθεί ένας αυθαίρετος πραγματικός y, υπάρχει ένα και μόνο ένα x>0 τέτοιο ώστε L(x)=y.

Απόδειξη

Έστω $y \in R$. Αν y>0, τότε θεωρούμε α>0 τέτοιο ώστε L(α)>1. Υποθέτουμε ότι $v \in N$, v>y. Τότε $L(\alpha^v) = vL(\alpha) > v > y$. Δηλαδή $0 = L(1) < y < L(\alpha^v)$. Η L είναι συνεχής και συνεπώς, από το θεώρημα του Darboux, παίρνουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x \in (1, \alpha^v)$ με L(x)=y. Το x είναι μοναδικό, διότι αν υπήρχε άλλο x', τέτοιο ώστε $L(x') = y$, τότε $L(x) = L(x')$, πράγμα άτοπο διότι η L είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επομένως η L για y>0 είναι 1-1.

Αν θεωρήσουμε y<0, τότε για $v \in N$ και $y > -v \Leftrightarrow v > -y$. Θεωρούμε α>0 τέτοιο ώστε L(α)>1. Οπότε θα έχουμε $L(\alpha^{-v}) < y < L(1)$. Η L είναι συνεχής και συνεπώς, από το θεώρημα του Darboux, παίρνουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $x \in (-\alpha^{-v}, 1)$ με L(x)=y. Το x αυτό είναι μοναδικό διότι η L είναι 1-1.

Σχόλιο. Η απόδειξη για αρνητικά y προκύπτει από την απόδειξη για θετικά y, δεδομένου ότι $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

Συμπέρασμα. Από τα παραπάνω προκύπτει το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Για κάθε πραγματικό αριθμό y υπάρχει ένας και μόνο ένας πραγματικός x>0 τέτοιος ώστε L(x)=y.

i_{13}) Για κάθε t>1 ισχύει: $\frac{t-1}{t} < \ln t < t-1$.

Απόδειξη

Έχομε $\int_1^t \frac{1}{t}\,dx < \int_1^t \frac{1}{x}\,dx < \int_1^t dx \Rightarrow \frac{1}{t}\left[x\right]_1^t < \ln t < \left[x\right]_1^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t-1}{t} < \ln t < t-1$.

i_{14}) $\lim\limits_{v \to +\infty}\left(1+\frac{x}{v}\right)^v = e$.

Απόδειξη

Από την (i_{13}) για $t = 1 + \frac{x}{v}$, παίρνομε $\dfrac{\frac{x}{v}}{1+\frac{x}{v}} < \ln\left(1+\frac{x}{v}\right) < \frac{x}{v}$

ή $\dfrac{x}{1+\frac{x}{v}} < v \ln\left(1+\frac{x}{v}\right) = \ln\left(1+\frac{x}{v}\right)^v < x$.

Καθώς $v \to +\infty$, $\dfrac{x}{1+\frac{x}{v}} \to x$, $\lim\limits_{v\to+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{v}\right)^v = \ln \lim\limits_{v\to+\infty}\left(1+\frac{x}{v}\right)^v = x$, οπότε

$\operatorname{Lim}\limits_{v\to+\infty}\left(1+\frac{x}{v}\right)^v = e^x$.

i_{15}) Για κάθε x>-1, ισχύει $L(1+x) = \int_0^x \dfrac{dt}{t+1}$.

Απόδειξη

$L(1+x) = \int_1^{1+x} \frac{1}{t}\, dt$.

Για $t = y+1 \Rightarrow dt = dy$. Για $t = 1 \Rightarrow y = 0$ και για $t = x+1 \Rightarrow y = x$.

Συνεπώς $L(1+x) = \int_0^x \dfrac{1}{y+1}(y+1)'\, dy = \int_0^x \dfrac{dy}{y+1} = \int_0^x \dfrac{dt}{t+1}$.

i_{16}) $\dfrac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Απόδειξη

Για x>0, $\dfrac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}$.

Για x<0, $\dfrac{d}{dx}\left(\ln|x|\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\ln(-x)\right) = -\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}(-x) = \left(-\dfrac{1}{x}\right)(-1) = \dfrac{1}{x}$.

i_{17}) $\ln(1+x) < x$, για x>0.

Απόδειξη

$\ln(1+x) = L(1+x) = \int_0^x \dfrac{dt}{t+1}$, λόγω της ($i_{15}$).

Επειδή x>0 και $t \in [0, x] \Rightarrow t+1>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{t+1}<1$.

Συνεπώς: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt < \int_0^x 1\,dt = \left[x\right]_0^x = x \Rightarrow \ln(1+x) < x$.

i_{18}) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x)$, για $x>0$.

Απόδειξη

$$t>0 \Rightarrow 1-t^2<1 \Rightarrow 1-t<\frac{1}{1+t} \Rightarrow \int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x < \ln(1+x) \Rightarrow x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

i_{19}) $\ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$, για $x>0$.

Απόδειξη

$$t>0 \Rightarrow 1+t^3>1 \Rightarrow (1+t)\,(1-t+t^2)>1 \Rightarrow 1-t+t^2 > \frac{1}{1+t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x (1-t+t^2)\,dt > \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt \Rightarrow x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} > \ln(1+x).$$

i_{20}) $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x) = -\infty$.

Απόδειξη

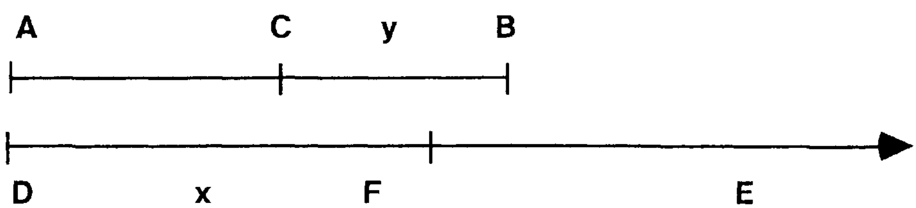
Παρατηρούμε ότι $L(2)>0$ και ότι $L(2^\nu) = \nu L(2)$ λόγω της $L(yz) = L(y)+L(z)$ για $y, z \in (0, +\infty)$. Συνεπώς $\lim\limits_{\nu\to+\infty} L(2^\nu) = +\infty$. Επειδή η L είναι γνησίως αύξουσα, παίρνομε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = +\infty$. Όμοια $L\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$ και $L\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^\nu\right) = \nu L\left(\dfrac{1}{2}\right)$ και επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x) = -\infty$.

ΣΧΟΛΙΟ. Συχνά διαβάζομε σε εγχειρίδια λογισμού ότι οι λογάριθμοι με βάση e καλούνται φυσικοί ή Νεπέρειοι λογάριθμοι, αφήνοντας στον αναγνώστη την εντύπωση ότι οι λογάριθμοι που επινοήθηκαν από τον John Napier (1550-1617) είναι οι φυσικοί λογάριθμοι ή οι λογάριθμοι με βάση e. Στην

πραγματικότητα, οι Νεπέρειοι λογάριθμοι και οι φυσικοί λογάριθμοι είναι εντελώς διαφορετικοί. Θα συμβολίσομε τον Νεπέρειο λογάριθμο του y με Naplogy, τον γνωστό λογάριθμο του y με βάση b με $\log_b y$ και τον φυσικό λογάριθμο του b (την ειδική περίπτωση που b=e) με lny.

Ο J. Napier παρουσίασε ένα συσχετισμό μεταξύ αριθμών και των λογαρίθμων τους, με τη βοήθεια δύο σημείων που κινούνται κατά μήκος παραλλήλων γραμμών. Ο τελικός ορισμός του λογαρίθμου κατά τον Napier είναι ο εξής:

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και μια άπειρη ακτίνα DE.



Υποθέτουμε ότι τα σημεία C και F αρχίζουν να κινούνται ταυτόχρονα από τα A και D, αντίστοιχα, πάνω σ' αυτές τις γραμμές και με τον ίδιο αρχικό ρυθμό. Έστω ότι το C κινείται με ταχύτητα που αριθμητικά είναι πάντα ίση με την απόσταση CB και ότι το F κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τότε ο John Napier όρισε το DF ως τον λογάριθμο του CB. Δηλαδή, αν ονομάσομε DF=x και CB=y, τότε x=Nap log y.

Για να αποφύγει τις δυσκολίες με τα κλάσματα, ο Napier πήρε το μήκος AB ίσο με 10^7, γιατί ο καλύτερος πίνακας ημιτόνων που γνώριζε είχε αριθμούς μέχρι επτά δεκαδικές θέσεις. Από τον ορισμό του Napier και από γνώσεις που δεν υπήρχαν στην εποχή του, έχομε ότι $\text{Nap}\log y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$.

Πραγματικά: $AC = 10^7 - y$, οπότε, ταχύτητα του $C: \ -\frac{dy}{dt} = y$.

Δηλαδή $\frac{dy}{y} = -dt$ ή ολοκληρώνοντας, $\ln y = -t + \kappa$. Για να υπολογίσομε τη σταθερά ολοκλήρωσης, αντικαθιστούμε t=0, (AC=0) και βρίσκουμε $\kappa = \ln 10^7$, οπότε $\ln y = -t + \ln 10^7$. Τώρα, ταχύτητα του $F: \ \frac{dx}{dt} = 10^7$, οπότε $x = 10^7 t$, (αφού για $t = 0 \Rightarrow y = 10^7$).

$$\text{Nap}\log y = x = 10^7 t = 10^7\ (\ln 10^7 - \ln y) = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{y}\right) = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right).$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: $\text{Nap}\log y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{y}{10^7}\right)$.

Δεν είναι επομένως ακριβές ότι οι Νεπέρειοι λογάριθμοι είναι οι φυσικο λογάριθμοι, δηλαδή λογάριθμοι με βάση το e.

Παρατηρούμε ότι ο Νεπέρειος λογάριθμος μειώνεται καθώς ο αριθμός αυξάνεται, ενώ στους φυσικούς λογαρίθμους συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο.

Για θεωρητικούς σκοπούς, η καλύτερη βάση ενός συστήματος λογαρίθμων είναι εκείνη που δίνει την απλούστερη δυνατή μορφή στην παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης.

ΠΗΓΕΣ

[1] Tom M. Apostol: Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, §§ 3.2 και 3.3, σελ. 202-207. Βλέπε ακόμη σελ. 208, στίχος 17^+.

[2] Howard Eves: Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών (έως το 1650), σελ. 204-207, εκδόσεις Τροχαλία.

[3] Θεόδωρος Σπ. Μπόλης: Λογαριθμικές και εκθετικές συναρτήσεις. (Διαλέξεις που δόθηκαν κατά το σχολικό έτος 1988-1989, στο παράρτημα Ιωαννίνων της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, Ιωάννινα, Μάιος 1989).

[4] Ο.Ε.Δ.Β.: Μαθηματικά Β' Λυκείου, Άλγεβρα τεύχος Β, σελ. 23, στίχος 6^-.

[5] Michael Spivak: Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, σελ. 295, άσκηση 33, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

ΣΧΟΛΙΟ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΗ. Τον εκλεκτό φίλο και συνάδελφο ΧΑΡΗ ΒΑΒΕΙΑΔΗ ευχαριστώ θερμότατα για το συγκινητικό ενδιαφέρον του σε ό,τι αφορά την τύχη του ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ και για την βοήθειά του, αληθινά πολύτιμη, κάθε φορά που την ζητούσα.

X. ΕΠΙΛΟΓΕΣ ΑΞΙΟΠΡΟΣΕΚΤΩΝ ΚΕΙΜΕΝΩΝ

Ως συνθήκη για τη χρήση των λογικών συμπερασμών και την επιτέλεση λογικών πράξεων πρέπει κάτι να είναι ήδη δοσμένο στην εποπτεία, δηλαδή συγκεκριμένα εξωλογικά αντικείμενα που είναι παρόντα στην εποπτεία ως άμεσες εμπειρίες πριν από τη σκέψη. Για να είναι ασφαλής ο λογικός συμπερασμός, πρέπει τα αντικείμενα αυτά να μπορούν να εξεταστούν από κάθε τους πλευρά και οι ιδιότητες, οι διαφορές και η τάξη με την οποία παρουσιάζονται πρέπει να είναι δοσμένα εποπτικά μαζί με τα αντικείμενα ως κάτι που δεν επιδέχεται παραπέρα αναγωγή ή που δεν χρειάζεται αναγωγή.
Αυτή είναι η φιλοσοφία που θεωρώ αναγκαία όχι μόνο για τα μαθηματικά αλλά, γενικότερα, για κάθε επιστημονική σκέψη, κατανόηση και επικοινωνία. Σύμφωνα με αυτήν, αντικείμενο των μαθηματικών είναι τα ίδια τα συγκεκριμένα σημεία των οποίων η μορφή, είναι, δυνάμει της αντίληψης που υιοθετήσαμε, άμεσα σαφής και αναγνωρίσιμη.

Hilbert

Στον Σάρζι μου φαίνεται πως αναγνωρίζω τη σταθερή πεποίθηση ότι όταν κανείς φιλοσοφεί πρέπει να στηρίζεται στη γνώμη κάποιου σπουδαίου συγγραφέα, σα να όφειλε το μυαλό μας να μένει εντελώς στείρο και ανίκανο, εκτός πια και αν επηρεαζόταν από το μυαλό κάποιου άλλου. Ίσως θεωρεί ότι η φιλοσοφία είναι όπως ένα βιβλίο ενός συγγραφέα, σαν την Ιλιάδα ή τον Orlando furioso – κατασκευές δηλαδή όπου το ελάχιστο που ενδιαφέρει είναι αν είναι αλήθεια αυτό που γράφεται. Λοιπόν, Σάρζι, δεν είναι έτσι τα πράγματα. Η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του κόσμου που στέκεται μονίμως ανοικτό μπροστά μας. Αλλά αυτό το βιβλίο δεν μπορούμε να το κατανοήσουμε εκτός και αν κανείς μάθει να διαβάζει καλά τη γλώσσα και το αλφάβητο στο οποίο είναι γραμμένο. Είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών και οι χαρακτήρες είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα χωρίς τα οποία είναι αδύντο να καταλάβουμε λέξη: χωρίς αυτά περιπλανιέται κανείς στον σκοτεινό λαβύρινθο.

Γαλιλαίος

«Αυστηρά μιλώντας, αυτό που λέγεται μαθηματική απόδειξη δεν υπάρχει· σε τελευταία ανάλυση δεν μπορούμε παρά απλώς να δειξουμε κάτι: οι αποδείξεις είναι ό,τι ο Littlewood κι εγώ ονομάζουμε «αέρας», ρητορικές δηλαδή εκρήξεις σχεδιασμένες να επηρεάσουν την ψυχολογία, εικόνες στον πίνακα της τάξης, μηχανισμοί για να ερεθίσουν τη φαντασία των μαθητών».

Hardy

...Εγώ είχα από πολύ μικρός μια πολύ σαφή κλίση για τις θετικές επιστήμες και τα Μαθηματικά. Την έχασα στη διάρκεια των γυμνασιακών μου σπουδών γιατί δεν είχα καθηγητές που να αξίζουν κάτι παραπάνω από ένα ξερό σύκο. Έτσι, μετά την πρώτη Γυμνασίου διάλεξα αντίθετα, στη θέση τους τα Ελληνικά (υπήρχε δικαίωμα επιλογής...).

Αντώνιο Γκράμσι

«Όσον καιρό σκέπτομαι, γράφω και μιλώ γι' αυτά τα θέματα, έχω υποστηρίξει διαφορετική θέση: αν αξιώματα που τεθούν αυθαίρετα δεν αντιφάσκουν το ένα το άλλο με τις συλλογικές συνέπειές τους, τότε είναι αληθή, και τα αντικείμενα που ορίζονται μέσω αυτών των αξιωμάτων υπάρχουν. Αυτό για μένα είναι το κριτήριο αλήθειας και ύπαρξης».

Hilbert

Προσπαθώντας να καταλάβουμε τον φυσικό κόσμο γύρω μας, αποκτούμε εμπιστοσύνη στην ικανότητά μας να προσδιορίζουμε ποιον να εμπιστευόμαστε και τι να πιστεύουμε ακόμη και για άλλα θέματα. Χωρίς την εμπιστοσύνη αυτή, οι αποφάσεις μας για κοινωνικά, πολιτικά και οικονομικά θέματα αναπόφευκτα βασίζονται εξ ολοκλήρου στο πιο ελκυστικό ψέμα που θα μας σερβίρει κάποιος άλλος. Γι' αυτό η εκτίμησή μας για τις επισημάνσεις και τις ανακαλύψεις των επιστημόνων και των καλλιτεχνών είναι χρήσιμη, όχι μόνο για να μας ευχαριστεί, αλλά και για να μας βοηθά να παίρνουμε ικανοποιητικότερες και έγκυρες αποφάσεις και να βρίσκουμε αποτελεσματικότερες λύσεις στα προσωπικά και κοινωνικά μας προβλήματα.

Φρανκ Οπενχάιμερ

ΣΜΙΛΕΥΟΝΤΑΣ ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΟ ΑΓΑΛΜΑ

Στα εφτά μου χρόνια μπήκα στην τρίτη δημοτικού, στο μικρό λύκειο Καρνό. Η πρώτη εντύπωση ήταν οριστική. Κράτησε όλα τα δέκα χρόνια που πέρασα εκεί, ως το ακαδημαϊκό απολυτήριο. Ένα κλουβί. Ένα κλουβί όπου το ντρεσάρισμα των ενοίκων το κανόνιζε η καλή θέληση των δασκάλων ή των επιστατών και το ρύθμιζαν οι κωδωνοκρουσίες. Η μητέρα μου με έφερνε κάθε πρωί. Με βαριά την καρδιά καθώς την αποχωριζόμουν, μόλις κατόρθωνα να μην κλάψω. Ερχόταν να με πάρει για να με πάει στο σπίτι. Στην αρχή, έτρεχα προς την έξοδο για να την ξαναβρώ. Πολύ σύντομα, της γύρεψα να μην έρχεται ως την πόρτα του λυκείου, αλλά να με περιμένει στη γωνία της οδού Καρντινέ. Στα χρόνια του δημοτικού, είχα διαδοχικά δύο δασκάλους. Ο κύριος Β. είχε ένα άσπρο και ροδαλό δέρμα. Το μικρό γκριζωπό γένι του ήταν τόσο μικρό που νόμιζες απλώς πως ήταν κακοξυρισμένος. Όσο για τον κύριο Σ., αυτός δεν είχε γένι, αλλά ούτε μαλλιά. Από αυτούς τους δύο, δεν κρατώ παρά μιαν αρκετά ουδέτερη ανάμνηση. Είχαν ως αποστολή να ντρεσάρουν τα παιδιά. Τα ντρέσαραν. Τα ντρέσαραν στον ανταγωνισμό μέσω του ανταγωνισμού. Διαγωνισμοί, τιμητικοί πίνακες, συγχαρητήρια, καλοί βαθμοί, βραβεία. Δεν υπήρχε μέρα που δεν έπρεπε να κάνεις μια καλή εκκίνηση για να τερματίσεις πριν από τους άλλους. Ή να πεις, πριν από τους άλλους, ποια ήταν η πόλη που έδειχνε ο βουβός χάρτης. Ή ακόμα να απαγγείλεις, καλύτερα από τους άλλους, τον *Λύκο και το αρνί.* Ίσως να είχα περισσότερη ευαισθησία από τους συμμαθητές μου στη μέθοδο της καραμέλας και της βίτσας. Ίσως να έδειχνα περισσότερη υπερηφάνεια ή περισσότερο κονφορμισμό. Όπως κι αν είναι, τα σχολικά αγωνίσματα γίνονταν η μανία μου, η έμμονη ιδέα μου. Δεν δούλευα παρά γι' αυτά, με την ενθάρρυνση στο σημείο αυτό των γονιών ~~μου~~ που είχαν μιαν άμετρη επιθυμία επιτυχίας για τον βλαστό τους. Ακόμα κάποια λύτρα που οφείλουν να πληρώσουν τα μοναχοπαίδια πάνω στα οποία οι γονείς συγκεντρώνουν τα ανεκπλήρωτα όνειρα και τις ανεκπλήρωτες επιθυμίες τους. Ο ανταγωνισμός έπαιρνε τέτοια θέση στη ζωή μου, με απασχολούσε σε τέτοιο βαθμό, ώστε γινόταν ακριβώς το θέμα των παιχνιδιών μου.

ΣΧΟΛΙΟ ΤΟΥ ΕΚΔΟΤΗ. Τα επιλεγμένα κείμενα που ακολουθούν είναι των: ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΖΑΚΟΜΠ, R.P. FEYNMAN, GERALD FEINBERG, ΟΔΥΣΣΕΑ ΕΛΥΤΗ. Τα παραθέτουμε, με την πίστη ότι πρέπει να διαβαστούν από τον καθένα πάλι και πάλι.

Δεν μ' ενδιέφεραν παρά τα παιχνίδια που είχαν να κάνουν με αγώνες δρόμου ή με διαγωνισμούς. Πάνω σε μικρά μηχανικά ιπποδρόμια έβαζα, για ώρες, να τρέχουν μεταλλικά άλογα ή αυτοκίνητα. Έδινα στους διαγωνιζόμενους τα ονόματα των συμμαθητών μου, ενώ το φαβορί ήταν, βέβαια, εκείνο που είχε το όνομα Φρανσουά Ζακόμπ.

* * *

Στην τελευταία τάξη του πρακτικού τμήματος του λυκείου, η επιστροφή στο σχολείο πήρε μιαν ασυνήθιστη όψη, από την πρώτη κιόλας μέρα, από το πρώτο πρωί με την υποδοχή του κυρίου Σ., του καθηγητή των μαθηματικών. Μόλις είχαμε καθίσει στα θρανία μας μας υπέβαλε σε μια γραπτή εξέταση. Μια εξέταση που οι μαθητές ήταν σύμφωνοι να την χαρακτηρίσουν «ύπουλη», γιατί απαιτούσε γνώσεις που ξεπερνούσαν το πρόγραμμα της προηγούμενης χρονιάς. Από τις εννιά ως τις δώδεκα, με το μυαλό μας ακόμα γεμάτο από τις διακοπές, έχοντας χάσει τη συνήθεια του συλλογισμού και τη μέθοδο του υπολογισμού, βρεθήκαμε αναγκασμένοι να πολεμήσουμε με εξισώσεις που δεν ξέραμε να χειριστούμε. Όλην αυτήν την ώρα, ο κύριος Σ. με το γκρίζο γενάκι ψηλά, το γεμάτο περιέργεια βλέμμα του πίσω από τα γυαλιά με συρμάτινο σκελετό, κι ένα ικανοποιημένο ύφος, πηγαινοερχόταν μέσα στην τάξη του σαν μια αρκούδα μέσα στο κλουβί της, σταματώντας πότε πότε για να καθαρίσει το λαιμό του και να φτύσει μέσα σ' ένα μαντίλι που εξέταζε ύστερα μ' ενδιαφέρον, ξαναρχίζοντας το πηγαινέλα του, επιτηρώντας τον καθένα από μας πάνω από τον ώμο, σχεδιάζοντας κάποτε ένα χαμόγελο που έλεγε πολλά για την έλλειψη εκτίμησης που είχε ήδη, ύστερα από μιαν ώρα, για ορισμένους από τους καινούργιους μαθητές του, οι οποίοι είχαν εκπλαγεί από τη βιαιότητα και τη δυσκολία της δοκιμασίας. Στην έξοδο, η συντριβή ήταν γενική.

Ευτυχώς, το απόγευμα γινόταν το πρώτο μάθημα της φιλοσοφίας. Η φιλοσοφία: καινούργιος κλάδος, ο μόνος που περιμέναμε με ανυπομονησία. Πολύ περισσότερο που ο καθηγητής, ο κύριος Λ., είχε τη φήμη παράξενου ανθρώπου. Έλεγαν πως τη νύχτα, ενώ κοιμόνταν τα παιδιά του, ηλικίας οκτώ και δέκα χρονών, εκείνος τα κρεμούσε από τα πόδια ή τα τοποθετούσε σε όποιαν άλλη αλλόκοτη θέση, προτού τα ξυπνήσει για να τα βάλει να του διηγηθούν τα όνειρά τους. Με μια λέξη, ένα είδος πειραματισμού. Εύσωμος, με αραιά μαλλιά, καταγάλανα μάτια πίσω από χοντρά γυαλιά με κοκάλινο σκελετό, ο κύριος Λ. μας υποδέχτηκε με ψυχρή αβρότητα. Όσο παίρναμε τις θέσεις μας, χτυπούσε ελαφρά το χέρι του πάνω στο γραφείο του. Σιωπηλός, περίμενε τη δική μας σιωπή. Έξαφνα, έδειξε ένα μαθητή στην τύχη: «Εσείς! Πώς ονομάζεστε; – Ντυπόν. – Κι εσείς; – Ντυράν. – Κι εσείς; – Ντυβάλ. – Λοιπόν, Ντυπόν, Ντυράν και Ντυβάλ, θα μείνετε ο καθένας δύο ώρες τιμωρία μέσα στην τάξη, την επόμενη Πέμπτη. Θα μάθετε έτσι πως προτιμάω να με παίρνουν για μούτρο παρά για βλάκα! Η φιλοσοφία, κύριοι, είναι ένας τρόπος του συλλογίζεσθαι...» Έπεσε τέτοια σιωπή, που ακούγαμε τις μύγες να πετούν. Και τις ακούγαμε να πετούν για μια τουλάχιστον εβδομάδα στο μάθημα της φιλοσοφίας. Αλλά αυτές οι δύο σκηνές, που έγιναν η μια μετά την άλλη, την ίδια μέρα, άφησαν ίχνη. Πολύ περισσότερο που οι άλλοι καθηγητές δεν είχαν σε τίποτα να ζηλέψουν τούτους τους δύο, όσον αφορά την παραξενιά και την αυταρχικότητα. Όλες αυτές οι ιδιοτροπίες, όλες αυτές οι μανίες έρχονταν να συσσωρευτούν για να κάνουν αφόρητη τη ζωή στο λύκειο! Ένας κόσμος αποβλάκωσης και τρόμου.Τρόμου να φτάσεις καθυστερημένος, να λησμονήσεις μιαν εργασία, να μην ξέρεις ένα μάθημα, να σε σηκώσουν στον πίνακα, να βρεθείς απροειδοποίητα μπροστά σε μια γραπτή εξέταση. Λες και η λειτουργία του λυκείου ήταν λιγότερο να διδάξει και περισσότερο να τιθασεύσει τους νέους, να τους κάνει ομοιόμορφους, να τους χύσει όλους μέσα στο ίδιο καλούπι. Λες και η Γαλλική Δημοκρατία ήθελε να υποχρεώσει τα παιδιά της να περάσουν από κάποιους οίκους μη ανοχής, να τα μεταμορφώσει σε μελλοντικούς στρατιώτες, μαθημένους να υπακούουν, να βαδίζουν με στρατιωτικό βήμα χωρίς να γκρινιάζουν. Είχα πάντα στο μυαλό μου την προετοιμασία για την Στρατιωτική Πολυτεχνική Σχολή. Μου άρεσαν πολύ τα μαθηματικά και η φυσική, μαθήματα στα οποία πήρα τα δύο βραβεία. Είχα μάλιστα γραφτεί, για την επόμενη χρονιά, σ' ένα φροντιστήριο, ενός ειδικευμένου λυκείου στην αριστερή όχθη του Σηκουάνα. Αλλά η προετοιμασία της Πολυτεχνικής Σχολής αντιπροσώπευε δύο χρόνια τουλάχιστον ενός ακόμα πιο δρακόντειου καθεστώτος. Λίγο λίγο, αυτή η ιδέα άρχισε να με κυνηγάει. Έπειτα κατάντησε έμμονη. Μια νύχτα, είδα έναν εφιάλτη. Βρισκόμουν μέσα σε μια μεγάλη τρύπα απ' όπου προσπαθούσα μάταια να βγω. Ψηλά, σκυμμένος πάνω μου, με το καπέλο του στο κεφάλι, με το γενάκι του σε θέση μάχης, ο κύριος Σ., ο καθηγητής των μαθηματικών, με εξέταζε με το βλέμμα του εμπόρου αλόγων που λογαριάζει τι αξίζει ένα άλογο. Χτυπιόμουν. Προσπαθούσα να πηδήξω, να πιαστώ από το τοίχωμα. Αλλά το έδαφος γινόταν σκόνη, γλιστρούσε. Ξαναέπεφτα πάντα. Ο κύριος Σ. έφτυνε μέσα στο μαντήλι του, το εξέταζε για πολλήν ώρα, έπειτα, μ' ένα μικρό χαμόγελο, δήλωνε σιγά:

«Δεν θα μπορέσετε ποτέ να βγείτε από εδώ». Όταν ξύπνησα, αποφάσισα να μην προετοιμαστώ για την Πολυτεχνική Σχολή.

* * *

Φθινόπωρο '56. Το πανεπιστήμιο της Καν. Ένα από τα παλαιότερα της Γαλλίας: πάνω από μισή χιλιετία. Ισοπεδώθηκε από τους βομβαρδισμούς του καλοκαιριού του '44. Μόλις έχει ξαναχτιστεί. Για μερικές μέρες, τα καινούργια αμφιθέατρα έχουν γίνει η έδρα ενός έντονου αναβρασμού: ξαφνικά, η πολιτική ενδιαφέρθηκε για την επιστήμη.

Ανάμεσα στους πολιτικούς και στους επιστήμονες οι σχέσεις δεν υπήρξαν ποτέ πολύ στενές στη Γαλλία. Εκτός από την εποχή του Λαϊκού Μετώπου που καινοτόμησε με τη δημιουργία ενός Υφυπουργείου Επιστημονικής Έρευνας. Κι ακόμα, με την ανάπτυξη, από τον Ζαν Περέν, του Εθνικού Ταμείου Ερευνών, το οποίο μεταμορφώθηκε σύντομα σε Εθνικό Κέντρο Επιστημονικής Έρευνας [CNRS - ΕΚΚΕ]. Και στο μέσο αυτού του αιώνα, εκείνο που έχει σώσει τη γαλλική επιστήμη από μιαν ολοκληρωτική καταστροφή είναι ακριβώς το ΕΚΕΕ. Από συνήθεια, οι κυβερνήσεις που διαδέχτηκαν η μία την άλλη μετά τον πόλεμο εξακολούθησαν να διορίζουν έναν υφυπουργό Επιστημονικής Έρευνας. Διορισμοί που σχεδόν πάντα υπάκουσαν περισσότερο σε πολιτικές παρά σε επιστημονικές απαιτήσεις. Γιατί αυτός που έπαιρνε το υπουργικό χαρτοφυλάκιο επιλεγόταν όχι για την πείρα του, αλλά για τις ψήφους που έφερνε στην κυβέρνηση. Ήταν, κοντολογίς, κάποιος που έπρεπε να τοποθετηθεί σε μια θέση υπουργού, χωρίς να του δίνουν πολλή σημασία. Και να που έξαφνα ένας πολιτικός μιλάει για επιστημονική έρευνα και για τον θεμελιακό ρόλο που αυτή έχει για τον τόπο. Ένας πολιτικός έρχεται να πει πως σ' αυτόν τον αιώνα δεν μπορεί πια να υπάξει ούτε ισχύς ούτε ευημερία δίχως επιστήμη και τεχνική. Και όχι οποιοσδήποτε πολιτικός. Ο μόνος που από την εποχή του ντε Γκωλ φανέρωσε ένα ανάστημα κι ένα διαμέτρημα προικισμένου πολιτικού ηγέτη: ο Πιερ Μαντές Φρανς, που αναρωτιέται και ανησυχεί. Που καταγγέλει τα ελαττώματα της ανώτατης εκπαίδευσής μας και της έρευνάς μας. Στηλιτεύει την ακινησία, την αρτηριοσκλήρωση, τις κακές συνήθειες, τα φέουδα, τα προνόμια. Και τελικά συγκαλεί ένα ευρύ συμπόσιο για να οριστούν οι ελλείψεις και να καθοριστεί το γιατρικό.

Ένα μεγάλο αμφιθέατρο. Στα έδρανα, ανάκατα, κοινοβουλευτικοί και ερευνητές, βιομήχανοι και πανεπιστημιακοί, στελέχη της διοίκησης και κοινωνιολόγοι. Ατμόσφαιρα που την κάνουν πυρετώδη η κριτική και η ελπίδα. Ατμόσφαιρα εργασίας και οίστρου. Καθένας λέει το τροπάριό του, τα πράγματα που τον εξοργίζουν, τα σχέδιά του. Διοικητικά στεγανά. Έλλειψη μέσων. Σταδιοδρομίες μέτριες. Διαιώνιση των παλιών επιστημονικών κλάδων και απουσία νέων. Απομόνωση της έρευνας και της βιομηχανίας. Ανεπάρκεια των στελεχών στην ανώτατη εκπαίδευση. Δεκαετές πρόγραμμα. Μεταρρύθμιση των ιατρικών σπουδών. Αύξηση του αριθμού των φοιτητών στις θετικές επιστήμες. Ξάφνου σηκώνεται ένας ερευνητής του Ινστιτούτου Παστέρ, ο Ραιμόν Ντεντοντέρ. Πηγαίνει στον πίνακα. Χαράζει άξονες συντεταγμένων. Στρέφεται για να κάνει μια πρόγνωση που είναι δύσκολο να αμφισβητηθεί: όσοι γεννήθηκαν το 1945 θα είναι είκοσι χρονών το 1965! Θέτει σε τεταγμένη τον αριθμό των φοιτητών που προβλέπονται έτσι. Στην τετμημένη, τα επόμενα έτη. Σχεδιάζει την καμπύλη. Ο αριθμός των φοιτητών αυξάνει, αυξάνει. «Σε πέντε χρόνια, λέει ο Ντεντοντέρ, η κατάσταση των Πανεπιστημίων θα είναι πολύ δύσκολη, αν δεν κάνουμε τίποτε. Τότε όλα θα εκραγούν». Δείχνει ένα σημείο στην καμπύλη: είναι το 1968!

(ΦΡΑΝΣΟΥΑ ΖΑΚΟΜΠ: ΣΜΙΛΕΥΟΝΤΑΣ ΤΟ ΕΣΩΤΕΡΟ ΑΓΑΛΜΑ, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΡΑΠΠΑ)

Τον ίδιο καιρό έκανα διαλέξεις για πρωτοετείς. Ο Tom Harvey που με βοηθούσε στο εργαστήριο, μου είπε: «Πρέπει να δεις τι γίνεται με τα σχολικά βιβλία των μαθηματικών. Η κόρη μου έρχεται σπίτι με πολλά τρελά πράγματα». Δεν έδωσα μεγάλη προσοχή σ' αυτά που έλεγε. Όμως την επομένη πήρα ένα τηλεφώνημα από κάποιον πολύ γνωστό δικηγόρο εδώ στην Pasadena, τον Μ. Norris, που τότε ήταν στο υπουργείο Παιδείας. Με ρώτησε αν ήθελα να συμμετάσχω σε μια επιτροπή του υπουργείου Παιδείας που έργο της θα ήταν η επιλογή των νέων σχολικών βιβλίων της Πολιτείας της Καλιφόρνιας. Βλέπετε, υπήρχε νόμος ο οποίος όριζε ότι όλα τα σχολικά βιβλία που θα διδάσκονταν σε δημόσια σχολεία, έπρεπε να επιλεγούν από μια κρατική επιτροπή. Τότε πολλά από τα βιβλία στηρίζονταν σε μια νέα μέθοδο που ονόμαζαν «νέα μαθηματικά». Οι μόνοι άνθρωποι που έκριναν τα βιβλία δεν ήταν παρά δάσκαλοι και επιθεωρητές. Τώρα όμως οι επικεφαλής σκέφτηκαν: «Καιρός δεν είναι να απευθυνθούμε και σε κάποιον που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά επιστημονικά και ξέρει ποιος είναι ο στόχος της διδασκαλίας και να του ζητήσουμε να αξιολογήσει αυτά τα βιβλία;» Βρήκαν λοιπόν εμένα.

Πρέπει να μου είχε δημιουργηθεί ένα αίσθημα ενοχής για τη σταθερή άρνησή μου να συνεργαστώ με το κράτος. Γι' αυτό κατέληξα να συμφωνήσω και να μπω στην επιτροπή. Αμέσως άρχισα να παίρνω επιστολές και τηλεφωνήματα από εκδότες που έλεγαν, «είμαστε πολύ ευχαριστημένοι που μαθαίνουμε ότι μπήκατε στην επιτροπή, διότι πραγματικά θέλαμε έναν επιστήμονα...» και «είναι θαυμάσιο που τώρα έχουμε έναν επιστήμονα στην επιτροπή, διότι τα βιβλία μας, που είναι γραμμένα επιστημονικά, θα εκτιμηθούν...». Έγραφαν επίσης «Θα θέλαμε να σας εξηγήσουμε σε τι αναφέρεται το βιβλίο μας...» και «με ευχαρίστηση θα σας βοηθούσαμε να κρίνετε τα βιβλία μας...». Αυτό μου φάνηκε εξωφρενικό. Είμαι ένας αντικειμενικός επιστήμονας και οποιαδήποτε επιπλέον εξήγηση από τους εκδότες μου φαινόταν παρέμβαση, καθώς το μόνο πράγμα που επρόκειτο να πάρουν τα παιδιά στο χέρι ήταν το βιβλίο και αυτό και μόνο αυτό έπρεπε να αξιολογήσω. Έτσι δεν ήθελα καθόλου να μιλήσω με οποιονδήποτε εκδότη και η απάντησή μου ήταν στερεότυπη: «Δεν χρειάζεται να μου εξηγήσετε· είμαι σίγουρος ότι τα βιβλία θα μιλήσουν μόνα τους».

Αντιπροσώπευα μια ορισμένη περιοχή που την αποτελούσαν τα προάστια του Los Angeles. Μια πολύ συμπαθής κυρία αντιπροσώπευε την πόλη του Los Angeles. Ονομαζόταν κυρία Whitehouse και ο Norris μου σύστησε να τη συναντήσω και να ενημερωθώ απ' αυτή σχετικά με την πορεία και το έργο της επιτροπής. Η κυρία Whitehouse άρχισε την ενημέρωση εξηγώντας μου το περιεχόμενο της επόμενης συνάντησης (είχαν ήδη συναντηθεί μια φορά). «Θα γίνει συζήτηση για τους μετρητές».

Δεν κατάλαβα αμέσως τι εννοούσε, τελικά όμως φάνηκε ότι επρόκειτο γι' αυτούς που εγώ ονόμαζα ακέραιους. Χρησιμοποιούσαν διαφορετική ορολογία για όλα, πράγμα που μου δημιούργησε πρόβλημα από την πρώτη μέρα.

Μου εξήγησε πώς έκριναν τα νέα σχολικά βιβλία τα μέλη της επιτροπής. Έπαιρναν ένα μεγάλο σχετικά αριθμό από αντίτυπα ενός βιβλίου και τα μοίραζαν σε διάφορους καθηγητές και επιθεωρητές στην περιοχή τους. Όλοι αυτοί που τα διάβαζαν έστελναν τις αναφορές τους στην επιτροπή. Επειδή εγώ δεν γνώριζα πολλούς δασκάλους και επειδή πίστευα ότι διαβάζοντάς τα ο ίδιος θα μπορούσα να σχηματίσω γνώμη, προχώρησα στο έργο. (Υπήρχαν μερικοί στην περιοχή που οπωσδήποτε περίμεναν να τους δοθούν τα βιβλία και να εκφράσουν τη γνώμη τους. Για να τους γίνει το χατίρι, η κυρία Whitehouse μου πρότεινε να βάλω τις αναφορές τους μαζί με τις δικές μου· έτσι δεν θα δυσαναςχετούσαν και ούτε θα ενοχλούσαν κι εμένα με τα παράπονά τους).

Μετά από μερικές μέρες πήρα ένα τηλεφώνημα με το οποίο με πληροφορούσαν ότι θα μου έστελναν τα βιβλία, που ζύγιζαν 200 κιλά περίπου.

«Μην ανησυχείτε, κύριε Feynman, θα βρούμε κάποιον να σας βοηθήσει στο διάβασμα», προσπάθησαν να με παρηγορήσουν.

Αυτό δεν μπορούσα να το καταλάβω. Ή τα διαβάζεις ή δεν τα διαβάζεις. Τοποθέτησα στο γραφείο μου ειδικά ράφια. (Τα βιβλία κάλυψαν 6 μέτρα περίπου). Άρχισα, λοιπόν, να τα διαβάζω. Στην επόμενη συνάντηση θα γινόταν συζήτηση για τα βιβλία του δημοτικού.

Ήταν μια πολύ σκληρή δουλειά. Καθόμουν με τις ώρες στο γραφείο μου κάτω στο υπόγειο, ενώ η γυναίκα μου έλεγε ότι ένιωθε σαν να ζούσε πάνω από ένα ηφαίστειο.

Τα βιβλία ήταν χάλια! Ψεύτικα, φτηνά και προχειρογραμμένα. Ήταν εμφανής η προσπάθεια των συγγραφέων να είναι απόλυτοι σ' αυτά που έγραφαν. Τα παραδείγματά τους όμως δεν ήταν 100% εντάξει (ανέφεραν τα τροχοφόρα στο δρόμο για «σύνολα»). Υπήρχε σχεδόν πάντοτε μια μικρή έστω απόκλιση. Οι ορισμοί δεν ήταν ακριβείς. Όλα ήταν κάπως ασαφή. Ποιος ο λόγος να προσπαθούν να είναι «απόλυτοι;» Κορόιδευαν τον εαυτό τους. Ήθελαν να διδάξουν κάτι που οι ίδιοι δεν το είχαν καταλάβει και που ήταν άχρηστο στα παιδιά, για την ώρα τουλάχιστον.

Κατάλαβα τι προσπαθούσαν να κάνουν. Πολλοί πίστευαν ότι μείναμε πίσω σε σχέση με τους Ρώσους μετά τον «Σπούτνικ» και ζητήθηκε από μερικούς μαθηματικούς να δώσουν τα φώτα τους για μια μοντέρνα και πιο ενδιαφέρουσα προσέγγιση στα μαθηματικά. Ο σκοπός ήταν να κάνουν τα παιδιά να ανακαλύψουν τη μαγεία των μαθηματικών και να πάψουν να τα θεωρούν βαρετά.

Θα σας δώσω ένα παράδειγμα: υπήρχε ένα κεφάλαιο για διάφορες βάσεις αριθμών – πέντε, έξι, κτλ. και ζητούσαν μετατροπή από τη μία στην άλλη. Για το παιδί που καταλάβαινε τη βάση 10, η μετατροπή σε άλλη βάση μπορούσε να είναι κάτι το διασκεδαστικό. Στο βιβλίο όμως έβαλαν έτσι το θέμα που φαινόταν πως κάθε παιδί έπρεπε να μάθει άλλη μια βάση! Το αποτελέσμα θα ήταν ο συνηθισμένος τρόμος και η αποστροφή: «Μετατρέψτε αυτούς τους αριθμούς από τη βάση 7 στη βάση 5». Αυτό είναι ένα τελείως άχρηστο πράγμα. Αν μπορείς να το κάνεις, ίσως να είναι διασκεδαστικό. Αν δεν μπορείς, ξέχνα το. Δεν υπάρχει λόγος να το μάθεις.

Κοίταζα όλα εκείνα τα βιβλία και κανένα δεν έκανε λόγο για τη χρησιμότητα της αριθμητικής στην επιστήμη. Αν υπήρχαν κάποια παραδείγματα (εξαιρουμένων αυτών των μοντέρνων αφηρημένων ανοησιών), θα αναφέρονταν σε πράγματα όπως η αγορά γραμματοσήμων.

Τελικά έφτασα σ' ένα βιβλίο που έλεγε: «Τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται στην επιστήμη σε πολλές περιπτώσεις. Θα σας δώσουμε ένα παράδειγμα από την αστρονομία που είναι η επιστήμη των άστρων». Γύρισα τη σελίδα και είδα: «Οι κόκκινοι αστέρες έχουν μια θερμοκρασία 4.000°, οι κίτρινοι αστέρες έχουν μια θερμοκρασία 5.000°...» – μέχρι εδώ πολύ καλά. Συνέχιζε: «Οι πράσινοι αστέρες έχουν θερμοκρασία 7.000°, οι μπλε αστέρες 10.000° και οι ιώδεις αστέρες έχουν θερμοκρασία... (κάποιο μεγάλο αριθμό)». Δεν υπάρχουν πράσινοι και ιώδεις αστέρες.Τέλος πάντων τα νούμερα της θερμοκρασίας για τους άλλους είναι περίπου σωστά. Ορίστε, υπάρχει ασάφεια. Όλα έτσι ήταν, βιβλία γραμμένα από ανθρώπους που δεν ήξεραν τι στο διάβολο έλεγαν. Πάντοτε υπήρχε έστω κι ένα μικρό λάθος! Και πώς είναι δυνατό να διδάξουμε σωστά, όταν χρησιμοποιούμε βιβλία γραμμένα από ανθρώπους που δεν ξέρουν το θέμα τους; Αυτό δεν μπορώ να το καταλάβω. Αλήθεια γιατί τα σχολικά βιβλία να είναι φτηνά; ΠΑΓΚΟΣΜΙΩΣ ΦΤΗΝΑ;

Τουλάχιστον ήμουν ευχαριστημένος μ' αυτό το βιβλίο διότι ήταν το πρώτο που ανέφερε ότι η αριθμητική έχει σχέση με την επιστήμη. Με δυσαρέστησε λίγο όταν διάβασα για τις θερμοκρασίες των αστέρων, αλλά η δυσαρέσκειά μου μετριάστηκε γιατί συνειδητοποίησα ότι ήταν άλλο ένα δείγμα λάθους απλώς.

Μετά προχώρησα στα προβλήματα. Έλεγε, λοιπόν: Ο Γιαννάκης και ο πατέρας του βγαίνουν έξω για να δουν τ' αστέρια. Ο Γιαννάκης βλέπει ένα κόκκινο και δύο μπλε. Ο πατέρας του βλέπει ένα πράσινο, ένα βιολέ και δύο κίτρινα. Ποια είναι η συνολική θερμοκρασία των αστεριών που είδαν ο Γιαννάκης και ο πατέρας του;» Μου ήρθε να εκραγώ!

Η γυναίκα μου συνέχιζε να μιλάει για το ηφαίστειο κάτω απ' τα πόδια της. Αυτό που σας είπα ήταν μόνο ένα παράδειγμα: όλα τα βιβλία ήταν γεμάτα από παρόμοια παραδείγματα. Ένας συνεχής παραλογισμός! Αλήθεια, ποια σκοπιμότητα υπάρχει στο να προσθέσουμε τις θερμοκρασίες των αστέρων; Οι θερμοκρασίες δεν προστίθενται. Μόνο, ίσως, αν χρειαστεί να βρεθεί ο μέσος όρος της θερμοκρασίας των αστέρων. Ένιωσα απέχθεια. Έψαχναν για παιχνίδι που να δίνει την ευκαιρία πρόσθεσης αλλά δεν ήξεραν τι έλεγαν. Ήταν σαν να διάβαζες κάποιο κείμενο με τυπογραφικά λάθη και ξαφνικά έβλεπες και μια πρόταση αντίστροφα γραμμένη. Έτσι ακριβώς ήταν τα μαθηματικά σ' αυτά τα βιβλία. Ελεεινή κατάσταση!

Πήγα, λοιπόν, στη συνάντηση. Τα άλλα μέλη της επιτροπής είχαν ήδη κάνει κάποια αξιολόγηση και με ρώτησαν ποια ήταν η δική μου. Διαφωνούσαμε συνεχώς και ήταν συνηθισμένη η ερώτηση: «Γιατί βαθμολογείτε αυτό το βιβλίο τόσο χαμηλά;»

Τότε απαντούσα: «Το πρόβλημα μ' αυτό το βιβλίο είναι αυτό κι αυτό στην τάδε σελίδα». Είχα κρατήσει, βλέπετε, τις σημειώσεις μου.

Ανακάλυψαν ότι μπορούσαν να επωφεληθούν από μένα γιατί τους έλεγα με λεπτομέρειες τι ήταν καλό και τι άσχημο σε κάθε βιβλίο. Είχα εξήγηση για κάθε αξιολόγηση. Τους ρωτούσα κι εγώ γιατί, ας πούμε, βαθμολογούσαν αυτό το βιβλίο τόσο ψηλά και αντί για απάντηση άκουγα ερώτηση. «Δεν μας λέτε εσείς τι νομίζετε γι' αυτό το βιβλίο;» Ποτέ δεν έμαθα τα κριτήρια της αξιολόγησής τους.

Φτάσαμε σ' ένα βιβλίο, τμήμα μιας ενότητας τριών βιβλίων του ίδιου εκδοτικού οίκου, και ζήτησαν τη γνώμη μου.

«Δεν μου έχει σταλεί το συγκεκριμένο βιβλίο. Τα άλλα δύο που είδα είναι καλά», απάντησα.

Κάποιος επέμενε και επανέλαβε την ερώτηση: «Τι νομίζετε γι' αυτό το βιβλίο;»

«Μόλις είπα ότι δεν το έλαβα αυτό, οπότε δεν μπορώ να εκφέρω γνώμη».

Ο άνθρωπος που είχε την ευθύνη για την αποστολή των βιβλίων ήταν εκεί και ένιωσε ότι έπρεπε να δικαιολογηθεί: «Δεν σας το έστειλα διότι δεν είχε ολοκληρωθεί. Υπάρχει κανόνας που λέει ότι τα βιβλία για να υποβληθούν πρέπει να είναι έτοιμα μια ορισμένη ημερομηνία και ο εκδότης είχε καθυστερήσει μερικές μέρες. Έτσι μας έχει στείλει μόνο το εξώφυλλο του βιβλίου. Με επιστολή τους ζητούν συγγνώμη και ελπίζουν ότι το σύνολο των τριών βιβλίων θα εγκριθεί ζητώντας από μας επιείκεια για την καθυστέρηση του τρίτου βιβλίου».

Όπως αποκαλύφθηκε, το άγγραφο βιβλίο είχε αξιολογηθεί κι αυτό από ορισμένα μέλη της επιτροπής. Δεν δέχτηκαν ότι είχαν εξετάσει το εξώφυλλο του βιβλίου, το έκριναν μάλιστα και καλύτερο από τα άλλα δύο.

Αυτό έγινε διότι το σύστημά τους δούλευε ως εξής: μοίραζαν τα βιβλία σε διάφορους ανθρώπους, ανθρώπους πολυάσχολους. Αυτοί δεν έδιναν μεγάλη σημασία. Θα σκέφτονταν, «πολλοί θα διαβάσουν αυτό το βιβλίο, οπότε δεν πειράζει αν εγώ δεν το διαβάσω». Έβαζαν, λοιπόν, ένα βαθμό στην τύχη. — Δεν λέω ότι το έκαναν όλοι, μερικοί όμως σίγουρα. Όταν ήρθαν οι βαθμολογίες, το συγκεκριμένο εξώφυλλο είχε, ας πούμε, αξιολογηθεί από έξι κριτές ενώ τα άλλα από δέκα. Επειδή όμως η επιτροπή έβγαζε τον μέσο όρο, το βιβλίο δεν έπαιρνε χαμηλό βαθμό λόγω του μικρότερου αριθμού κριτών. Αυτή λοιπόν ήταν η διαδικασία της αξιολόγησης ενός βιβλίου που δεν είχε ακόμα γραφτεί! Σχημάτισα αυτή την εντύπωση επειδή είδα τον τρόπο λειτουργίας της επιτροπής. Για το ανύπαρκτο βιβλίο έξι στους δέκα κριτές έδωσαν βαθμολογία, ενώ οκτώ ή εννιά στους δέκα για τα υπόλοιπα. Αισθάνθηκαν μεγάλη προσβολή με το πάθημά τους, κάτι που έδωσε σ' εμένα μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση. Φάνηκε ότι τα άλλα μέλη της επιτροπής δούλεψαν αρκετά τρέχοντας από δω κι από κει για να μοιράσουν τα βιβλία και να τα μαζέψουν, καθώς και να παρακολουθήσουν τις εξηγήσεις από τους εκδότες οι οποίοι πρόβαλαν τα βιβλία τους. Όλα αυτά τα έκαναν πριν καθήσουν να τα διαβάσουν οι ίδιοι. Ήμουν ο μόνος άνθρωπος σ' εκείνη την επιτροπή που διάβασε όλα τα βιβλία χωρίς να έχει πάρει καμμιά επιπλέον εξήγηση από εκδότες — μόνο ό,τι περιείχε το βιβλίο, αυτό δηλαδή που θα κατέληγε στα σχολεία.

Όλη αυτή η υπόθεση δεν διαφέρει πολύ από κείνη τη γνωστή ιστορία για τη μύτη του αυτοκράτορα της Κίνας. Σε κανέναν δεν επιτρεπόταν να δει τον αυτοκράτορα της Κίνας και το ερώτημα ήταν: «Ποιο είναι το μήκος της μύτης του αυτοκράτορα;» Για να το βρεις, αρχίζεις να διασχίζεις τη χώρα ρωτώντας τους κατοίκους της τι μήκος είχε η μύτη του αυτοκράτορα. Τελικά βρίσκεις το μήκος της από τον μέσο όρο των απαντήσεων που σου έδωσαν οι διάφοροι Κινέζοι. Και νομίζεις ότι η απάντησή σου είναι ακριβής επειδή ήταν μεγάλος ο αριθμός των ερωτηθέντων. Δεν είναι όμως αυτός ο σωστός τρόπος για να βρεις κάτι.

Όταν ρωτάς πολλούς ανθρώπους που δεν γνωρίζουν τίποτε γι' αυτό που τους ρωτάς, δεν ωφελεί σε τίποτα να βγάλεις τον μέσο όρο των απαντήσεών τους.
Δεν ήταν από την αρχή προγραμματισμένο να ασχοληθούμε με το κόστος των βιβλίων. Μας είχαν πει πόσα βιβλία θα έπρεπε να επιλέξουμε κι έτσι καταστρώσαμε ένα πρόγραμμα με πολλά συμπληρωματικά βιβλία, αφού όλα τα σχολικά βιβλία είχαν ελλείψεις κάθε είδους. Οι πιο σοβαρές ελλείψεις βρίσκονταν στα βιβλία των μοντέρνων μαθηματικών, δεν υπήρχαν εφαρμογές. Γινόταν πολύς λόγος για μετατροπές, αφηρημένες έννοιες χωρίς παραδείγματα από τον πραγματικό κόσμο. Τι θα έκανε το παιδί; Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό ή διαίρεση; Έτσι προτείναμε μερικά συμπληρωματικά βιβλία που κάλυπταν αυτό το κενό – ένα ή δύο για κάθε τάξη. Προσπαθήσαμε να ισορροπήσουμε τα πράγματα μετά από πολλή συζήτηση.
Όταν υποβάλαμε τις προτάσεις μας στο υπουργείο Παιδείας μάθαμε ότι δεν διέθεταν ένα τόσο μεγάλο κονδύλι για να καλυφθεί το πρόγραμμά μας, οπότε έπρεπε να επανέλθουμε και να αφαιρέσουμε βιβλία, λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη φορά το κόστος. Θα καταστρεφόταν ένα ωραίο ισορροπημένο πρόγραμμα, το οποίο θα έδινε την ευκαιρία στο δάσκαλο να βρει τα παραδείγματα που θα χρειαζόταν.
Μετά από αυτό καταλαβαίνετε πόσο ανατράπηκε το πρόγραμμα. Όταν κατέληξε στην επιτροπή προϋπολογισμού της Γερουσίας είχε ακρωτηριαστεί ακόμη περισσότερο. Τώρα ήταν πραγματικά αηδία. Μου ζητήθηκε να παρουσιαστώ στους γερουσιαστές όταν θα συζητούσαν για το θέμα αλλά αρνήθηκα. Έχοντας ασχοληθεί τόσο μ' αυτό, είχα κουραστεί. Οι προτάσεις μας είχαν υποβληθεί στο υπουργείο Παιδείας και μου φαινόταν ότι ήταν δική τους υπόθεση να το παρουσιάσουν στη Γερουσία. Εξάλλου και από νομική άποψη αυτό ήταν το σωστό. Ωστόσο δεν έπρεπε να καταθέσω τα όπλα τόσο γρήγορα. Όμως όλη η πορεία του πράγματος, όπως εξελίχτηκε, ήταν αποκαρδιωτική. Δεν θα πήγαινε τόση δουλειά χαμένη αν μας είχαν μιλήσει από την αρχή για το οικονομικό θέμα.
Τον επόμενο χρόνο θα συζητούσαν για τα βιβλία των θετικών επιστημών. Αυτό ήταν αρκετό για να αλλάξω γνώμη και να μην παραιτηθώ. Σκέφτηκα ότι με τα βιβλία των θετικών επιστημών ίσως τα πράγματα να ήταν διαφορετικά. Με αυτή την ελπίδα άρχισα να ξεφυλλίζω μερικά.
Ίδια απογοήτευση. Κάτι που φαινόταν καλό στην αρχή, τελικά αποδεικνυόταν απαράδεκτο. Για παράδειγμα, υπήρχε ένα βιβλίο που άρχιζε με τέσσερις εικό-

νες: ένα κουρδιστό παιχνίδι, ένα αυτοκίνητο, ένα παιδί που οδηγούσε ποδήλατο και κάτι άλλο. Από κάτω υπήρχε η ερώτηση: «Τι τα κάνει να κινούνται;»

Τότε σκέφτηκα: «Ξέρω τι είναι: Θα μιλήσει για μηχανική, πώς δουλεύουν τα ελατήρια μέσα στο παιχνίδι, για χημεία, πώς λειτουργεί η μηχανή του αυτοκινήτου· και για βιολογία, πώς δουλεύουν οι μύες».

«Τι το κάνει να κινείται;» Να τι θα έλεγε ο πατέρας μου: «Το καθετί κινείται γιατί ο ήλιος λάμπει. Και μετά θα ήταν απόλαυση να το συζητήσουμε».

«Όχι, το παιχνίδι κινείται γιατί κουρδίζεται το ελατήριο», θα έλεγα.

«Και πώς κουρδίζεται το ελατήριο;» θα ρωτούσε αυτός.

«Εγώ το κουρδίζω».

«Κι εσύ πώς κινείσαι;»

«Τρώγοντας».

«Και η τροφή παράγεται μόνο και μόνο επειδή ο ήλιος λάμπει. Οπότε όλα αυτά τα πράγματα κινούνται επειδή ο ήλιος λάμπει». Έτσι έβγαινε το συμπέρασμα ότι η κίνηση είναι απλά μετατροπή ηλιακής ενέργειας.

Γύρισα τη σελίδα. Να οι απαντήσεις: για το παιχνίδι, «η ενέργεια το κάνει να κινείται». Και για το παιδί στο ποδήλατο, «η ενέργεια το κάνει να κινείται». Για το καθετί, «η ενέργεια το κάνει να κινείται».

Αλλά αυτό δεν σήμαινε τίποτα. Υποθέστε ότι αντί για την ενέργεια έλεγε η «αντεβρέστη». «Η αντεβρέστη το κάνει να κινείται». Μ' αυτόν τον τρόπο το παιδί δεν μαθαίνει τίποτα. Η ενέργεια είναι απλώς μια λέξη!

Αυτό που έπρεπε να είχαν κάνει ήταν να παρατηρήσουν το κουρδιστό παιχνίδι και να δουν ότι είχε ελατήρια μέσα του, να μάθουν για τα ελατήρια και τους τροχούς, και να αφήσουν στην άκρη την ενέργεια. Αργότερα, όταν τα παιδιά θα έχουν μάθει πια πώς λειτουργεί το παιχνίδι, μπορούν να μάθουν μερικές γενικές έννοιες για την ενέργεια.

Αλλά και κάτι άλλο. Δεν είναι σωτό ότι «η ενέργεια το κάνει να κινείται», επειδή αν σταματήσει, μπορείς το ίδιο άνετα να πεις ότι η ενέργεια το έκανε να σταματήσει. Εννοούσαν βασικά τη συμπυκνωμένη ενέργεια που μετατρέπεται σε άλλες μορφές λιγότερο συμπυκνωμένες, μια όχι και τόσο εμφανή ιδιότητα της ενέργειας. Σ' αυτά τα παραδείγματα η ενέργεια ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται, μετατρέπεται απλώς από τη μια μορφή στην άλλη. Και όταν τα πράγματα αυτά σταματάνε, η ενέργεια μετατρέπεται σε θερμότητα.

Έτσι ήταν όμως όλα τα βιβλία. Έλεγαν πράγματα που ήταν άχρηστα, μπερδεμένα, ασαφή και μερικώς λαθεμένα. Δεν ξέρω πώς μπορεί να μάθει φυσική από τα βιβλία αυτά ένα παιδί, αφού αυτό που παρουσιάζουν κάθε άλλο παρά επιστήμη είναι.

Όταν λοιπόν είδα ότι κι αυτά τα βιβλία δεν ήταν καλύτερα από εκείνα των μαθηματικών, αισθάνθηκα ότι το ηφαίστειό μου δεν θα έμενε σε αδράνεια. Έτσι όπως απογοητεύτηκα με την κατάληξη που είχε το θέμα των βιβλίων των μαθηματικών, και μάλιστα μετά από τόσο χαμένο κόπο, δεν μπορούσα να αντέξω άλλο έναν άχρηστο χρόνο και παραιτήθηκα.

Λίγο αργότερα πληροφορήθηκα ότι εκείνο το βιβλίο, «η ενέργεια το κάνει να κινείται», επρόκειτο να προταθεί στο υπουργείο Παιδείας κι έκανα μια τελευταία προσπάθεια να το αποτρέψω. Σε κάθε συνάντηση της επιτροπής επιτρεπόταν στο κοινό να κάνει σχόλια κι έτσι σηκώθηκα και εξήγησα γιατί πίστευα ότι το βιβλίο δεν ήταν καλό.

Ο άνθρωπος που με αντικατέστησε στην επιτροπή είπε: «Το βιβλίο αυτό προτάθηκε από εξήντα πέντε μηχανολόγους της τάδε αεροπορικής εταιρείας!»

Δεν αμφέβαλα ότι η εταιρεία είχε μερικούς πολύ καλούς μηχανολόγους, όμως ανάμεσα στους εξήντα πέντε σίγουρα θα συμπεριλαμβάνονταν και μερικοί άχρηστοι! Ίδια περίπτωση με το κατά μέσο όρο μήκος της μύτης του αυτοκράτορα και την αξιολόγηση εκείνου του άγραφου βιβλίου από το εξώφυλλο. Θα ήταν πιο αποτελεσματικό να ζητούσαν από την εταιρεία να επιλέξει τους καλύτερους μηχανολόγους και να αξιολογούσαν αυτοί το βιβλίο. Δεν υποστήριζα ότι ήμουν εξυπνότερος από εξήντα πέντε ανθρώπους — σίγουρα όμως ήμουν εξυπνότερος από τον μέσο όρο των εξήντα πέντε μηχανολόγων.

Η θέση μου δεν έγινε δεκτή κι έτσι το βιβλίο εγκρίθηκε από το Υπουργείο.

Όταν ήμουν στην επιτροπή χρειάστηκε να πάω μερικές φορές στο San Francisco. Μετά την επιστροφή μου στο Los Angeles, πήγα να πάρω το αντίστοιχο ποσό των εξόδων μου.

«Πόσο στοίχισε, κύριε Feynman;»

«Πήγα αεροπορικώς στο San Francisco οπότε έχουμε το εισιτήριο συν το πάρκινγκ του αυτοκινήτου μου στο αεροδρόμιο εδώ όσο έλειπα».

«Έχετε το εισιτήριό σας;»

Έτυχε να το κρατάω.

«Έχετε μια απόδειξη για το πάρκινγκ;»

«Όχι, αλλά μου στοίχισε 2,35 δολάρια».

«Όμως πρέπει να έχουμε την απόδειξη».

«Μα σας είπα πόσο στοίχισε. Αν δεν με εμπιστεύεστε πώς μου ζητάτε να σας πω τι είναι καλό και τι όχι στα σχολικά βιβλία;»

Έγινε μεγάλο μπέρδεμα. Δυστυχώς δεν ήμουν εξοικειωμένος με τον τρόπο που λειτουργούσε το κράτος. Μέχρι τώρα συνήθιζα να δίνω διαλέξεις για το πανεπιστήμιο, για κάποιες εταιρείες, για ιδιώτες γενικά και όχι για την κυβέρνηση. «Ποια ήταν τα έξοδά σας;» με ρωτούσαν. «Τόσα»... «Ορίστε, κύριε Feynman». Αυτό ήταν όλο κι όλο.

Αποφάσισα να μην τους δώσω καμιά απολύτως απόδειξη.

Μετά το δεύτερο ταξίδι μου στο San Francisco μου ζήτησαν πάλι το εισιτήριό μου και αποδείξεις.

«Δεν έχω τίποτα να σας δείξω», τους είπα.

«Αυτό δεν μπορεί να συνεχιστεί, κύριε Feynman».

«Όταν δέχτηκα να συμμετάσχω στην επιτροπή μου είπατε ότι θα μου πληρώνατε τα έξοδα».

«Όμως περιμέναμε μερικές αποδείξεις που να αποδεικνύουν αυτά τα έξοδα».

«Δεν έχω να αποδείξω τίποτα, ξέρετε πολύ καλά ότι ζω στο Los Angeles και ότι χρειάστηκε να πάω σε άλλες πόλεις. Πώς στο διάβολο θα πήγαινα;»

Δεν το έβαλαν κάτω. Ούτε κι εγώ όμως. Πιστεύω ότι όταν βρεθείς σε μια τέτοια θέση και αποφασίσεις να μην υποκύψεις στο σύστημα, θα πρέπει να είσαι έτοιμος να δεχτείς και τις συνέπειες, αν τα πράγματα δεν εξελιχθούν όπως τα θέλεις. Είμαι απόλυτα ικανοποιημένος, αλλά δεν πήρα λεφτά για κείνα τα ταξίδια.

Ήταν κι αυτό ένα από τα παιχνίδια που έπαιζα. Ήθελαν απόδειξη; Δεν θα τους έδινα. Δεν θα μου έδιναν τα λεφτά. Εντάξει, ας μην τα πάρω. Αφού δεν με εμπιστεύονταν, ας πήγαιναν χαμένα. Βέβαια αυτό ήταν παράλογο! Ξέρω ότι έτσι λειτουργεί το κράτος. Εμένα όμως δεν με νοιάζει. Πιστεύω ότι οι άνθρωποι πρέπει να συμπεριφέρονται ανθρώπινα. Όταν έχω διαφορετική μεταχείριση, παύω να ασχολούμαι μαζί τους. Νιώθουν άσχημα; Ναι, νιώθουν άσχημα. Το ίδιο νιώθω κι εγώ. Ξέρω ότι προστατεύουν «τον φορολογούμενο πολίτη». Μπορείτε όμως να δείτε πόσο καλά προστατεύεται ο φορολογούμενος πολίτης στην ακόλουθη περίπτωση.

Υπήρχαν δύο βιβλία για τα οποία δεν μπορούσαμε να αποφασίσουμε, και μάλιστα μετά από αρκετή συζήτηση. Στην αξιολόγηση έρχονταν πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Αφήσαμε, λοιπόν, το θέμα ανοιχτό για να αποφασίσει το υπουργείο. Καθώς το υπεύθυνο τμήμα του υπουργείου λάβαινε υπόψη το κόστος και καθώς τα δύο βιβλία έρχονταν πολύ κοντά το ένα στο άλλο, αποφάσισαν να ανοίξουν τις προσφορές και να πάρουν το φτηνότερο.

Μετά ανέκυψε το εξής θέμα: Θα δοθούν τα βιβλία στα σχολεία όταν αρχίσουν τα μαθήματα ή λίγο νωρίτερα ώστε να προετοιμαστούν οι δάσκαλοι για το τρίμηνο που θα ακολουθήσει;

Ο ένας αντιπρόσωπος του εκδοτικού οίκου σηκώθηκε και είπε: «Χαιρόμαστε που δεχτήκατε την προσφορά μας. Θα έχουμε έτοιμα τα βιβλία για το ερχόμενο τρίμηνο την ορισμένη ημερομηνία».

Ο αντιπρόσωπος του οίκου του οποίου το βιβλίο είχε απορριφθεί, είπε: «Επειδή οι προσφορές μας διαμορφώθηκαν σε σχέση με μια ορισμένη προθεσμία, νομίζω ότι πρέπει να μας δοθεί η ευκαιρία να υποβάλουμε νέες προσφορές με την καινούργια προθεσμία, επειδή θα μπορέσουμε να ανταποκριθούμε».

Ο Μ. Norris, νομικός του υπουργείου από την Pasadena τον ρώτησε: «Και πόσο θα μας στοιχίσει να πάρουμε τα βιβλία σας νωρίτερα;»

Ο αριθμός που έδωσε ήταν μικρότερος από του άλλου αντιπροσώπου. Κι αυτός με τη σειρά του σηκώθηκε και είπε: «Έχουμε κι εμείς δικαίωμα να αλλάξουμε τη δική μας».

Ο Norris ρώτησε: «Πώς γίνεται αυτό; Παίρνουμε τα βιβλία νωρίτερα κι είναι και φτηνότερα!»

«Ναι», απάντησε ο ένας. «Θα χρησιμοποιήσουμε μια νέα όφσετ πιο γρήγορη».

Ο άλλος αντιπρόσωπος συμφώνησε. «Όταν τα βιβλία βγαίνουν γρήγορα στοιχίζουν λιγότερο».

Αυτό ήταν σοκ για μένα. Τελικά κατέβηκαν κατά δύο εκατομμύρια δολάρια. Μετά από αυτή την αναπάντεχη έκπτωση, ο Norris έγινε έξαλλος. Αυτό που συνέβη πραγματικά ήταν το εξής: η αβεβαιότητα για την ημερομηνία έδωσε τη δυνατότητα σ' αυτούς τους δύο να ανταγωνιστούν ο ένας τον άλλο. Κανονικά, όταν τα βιβλία επιλέγονταν χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η τιμή τους, δεν υπήρχε λόγος να κατεβάζουν τις τιμές. Οι εκδότες διαμόρφωναν τις τιμές όπως ήθελαν. Τώρα ανταγωνίστηκαν με σκοπό να εντυπωσιάσουν τα μέλη της επιτροπής. Και κάτι άλλο. Κάθε φορά που συνερχόταν η επιτροπή, οι εκδότες δεν παρέλειπαν να φροντίζουν για την ψυχαγωγία των μελών, προσφέροντάς τους γεύματα και μιλώντας τους για τα βιβλία τους. Εγώ πάντοτε αρνιόμουν αυτές τις προσκλήσεις.

Τώρα που το σκέφτομαι δεν βρίσκω τίποτε ανεξήγητο, τότε όμως δεν μπορούσα να το εξηγήσω πώς έλαβα ένα πακέτο με ξερά φρούτα και άλλα οπωρικά από τη Western Union με ένα σημείωμα που έλεγε: «Από την οικογένειά μας για τη δική σας. Με τις ευχές μας. Pamilio».

Ήταν από μια οικογένεια στο Long Beach που δεν γνώριζα. Πίστεψα ότι είχε γίνει λάθος στο όνομα και τη διεύθυνση. Τηλεφώνησα, λοιπόν, στη Western Union, έμαθα το τηλέφωνο των ανθρώπων που μου έστειλαν τα πράγματα και τους τηλεφώνησα.

«Γεια σας. Λέγομαι Feynman. Έχω παραλάβει ένα πακέτο...».

«Ω, γεια σας, κ. Feynman· εδώ Pete Pamilio», είπε με τέτοια οικειότητα που με έκανε να νιώσω ότι έπρεπε οπωσδήποτε να τον ξέρω. Δεν θυμάμαι φυσιογνωμίες ούτε ονόματα ανθρώπων. Οπότε του είπα: «Συγνώμη, κ. Pamilio, αλλά αυτή τη στιγμή δεν μπορώ να θυμηθώ ποιος είστε...»

Ήταν αντιπρόσωπος ενός εκδοτικού οίκου του οποίου τα βιβλία θα έκρινα στην επιτροπή.

«Κατάλαβα. Αλλά μπορεί να παρεξηγηθούμε».

«Μα είναι μόνο από την οικογένειά μου για τη δική σας».

«Ναι, αλλά εγώ θα κρίνω το βιβλίο που εκδίδετε και ίσως παρερμηνευθεί η ευγένειά σας!» Ήξερα ακριβώς τι σήμαινε η γενναιοδωρία του, προτίμησα όμως να παριστάνω το βλάκα.

Ένα παρόμοιο περιστατικό συνέβη όταν έλαβα μια δερμάτινη τσάντα με το όνομά μου ωραία τυπωμένο με χρυσά γράμματα. Ήταν δώρο από έναν εκδότη. Του φέρθηκα με τον ίδιο τρόπο:«Δεν μπορώ να τη δεχτώ. Βλέπετε, κρίνω μερικά από τα βιβλία που εκδίδετε. Νομίζω ότι δεν δώσατε σημασία σ' αυτό!»

Ένας από τους σύνεδρους που είχε διατελέσει μέλος της επιτροπής για ένα μεγάλο διάστημα είπε: «Δεν δέχομαι ποτέ τίποτα. Με εκνευρίζει πολύ αυτό το πράγμα που δεν λέει να σταματήσει».

Αλλά έτσι έχασα κάποτε σε μια αποστολή πραγματικά μια ευκαιρία. Μόνο αν το μυαλό μου λειτουργούσε γρήγορα θα είχα μια ξεχωριστή εμπειρία. Έφτασα στο ξενοδοχείο στο San Francisco το βράδυ για να συμμετάσχω στην πρώτη συνάντηση το επόμενο πρωί. Αποφάσισα να βγω έξω για να περπατήσω στην πόλη και να φάω κάτι. Μόλις βγήκα από το ασανσέρ, δύο τύποι που κάθονταν σ' έναν καναπέ απέναντι πετάχτηκαν μπροστά μου και είπαν: «Καλησπέρα σας κ. Feynman. Πού πηγαίνετε; Υπάρχει κάτι που θέλετε να σας δείξουμε στο San Francisco;» Ήταν από εκδοτικό οίκο και δεν ήθελα να έχω καμιά σχέση μαζί τους.

«Πάω για φαγητό».

«Μπορούμε να σας πάμε εμείς για δείπνο».

«Όχι, θα ήθελα να είμαι μόνος μου».

«Ο,τιδήποτε θελήσετε μπορούμε να σας βοηθήσουμε».

Δεν μπόρεσα να αντισταθώ και είπα: «Μα πηγαίνω σε κακόφημα σπίτια».
«Νομίζω ότι και σ' αυτό μπορούμε να σας βοηθήσουμε», μου είπε ο ένας.
«Όχι, αυτό θα το φροντίσω μόνος μου». Μετά σκέφτηκα: «Τι λάθος! Έπρεπε να είχα αφήσει τα πράγματα να εξελιχτούν και να κρατήσω ημερολόγιο ώστε ο λαός της Καλιφόρνιας να μάθει μέχρι πού μπορούσαν να φτάσουν οι εκδότες!»
Πρέπει να ομολογήσω πως αυτή η ιστορία των δύο εκατομμυρίων δολαρίων μου προξένησε πολλές σκέψεις.
(R.P. Feynman: Σίγουρα θα αστειεύεστε κύριε Feynman, εκδόσεις Τροχαλία)

ΓΙΑΤΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΠΟΡΟΥΝ ΝΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ;

Γιατί τα μαθηματικά πρέπει να έχουν οπωσδήποτε αποτελέσματα για την επιστήμη; Δηλαδή γιατί μπορούμε να περιγράψουμε τα φυσικά φαινόμενα χρησιμοποιώντας έννοιες που αρχικά τις επινόησαν μαθηματικοί; Η ερώτηση για την αποτελεσματικότητα των μαθηματικών είναι ιδιαίτερα αινιγματική ως προς τη χρήση «εκ των προτέρων» διατυπωμένων μαθηματικών εννοιών, όπως οι ομάδες, οι οποίες αρχικά δεν επινοήθηκαν με σκοπό κάποιες επιστημονικές εφαρμογές. Ορισμένες φορές οι επιστήμονες προσεγγίζουν το αντικείμενό τους με μεθόδους που αργότερα αποδεικνύονται απαράδεκτες. Υπήρξε μια μεγάλη περίοδος το 18ο αιώνα, που οι επιστήμονες χρησιμοποίησαν κανονικά θεολογικά επιχειρήματα για να βγάλουν συμπεράσματα για τους νόμους της φυσικής. (Και η ειρωνεία είναι ότι συχνά έφταναν σε σωστά συμπεράσματα βασισμένοι σε επιχειρήματα που τώρα θα τα θεωρούσαμε άσχετα). Μολονότι επί αιώνες τα μαθηματικά χρησιμοποιήθηκαν με σαφή επιτυχία στην επιστήμη, θα μπορούσαμε ίσως να σκεφτούμε την πιθανότητα να μην υπάρχει πραγματική σύνδεση ανάμεσά τους, οπότε δεν θα συνεχίσουν να χρησιμοποιούνται στη μελλοντική επιστήμη.

Πιστεύω, όμως, ότι δεν μπορούμε να υπερασπίσουμε με επιτυχία την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι πράγματι άσχετα με την επιστήμη, ή ότι θα γίνουν λιγότερο σχετικά στο μέλλον. Είναι δύσκολο να φανταστούμε την επιστήμη χωρίς τη συστηματική χρήση των συμβολικών αναπαραστάσεων, η ανάλυση των οποίων είναι η ουσία των μαθηματικών. Αυτό ισχύει κυρίως σε πεδία όπως η φυσική, όπου οι απόψεις της φύσης που τώρα μελετώνται υπόκεινται λιγότερο στη συνηθισμένη διαίσθηση και όπου η χρήση των συμβολικών αναπαραστάσεων είναι ουσιώδης. Η μαθηματική συλλογιστική πιθανότατα θα γίνει ουσιαστικότερη και σε άλλα πεδία, ειδικά σε όσα θα «δανείζονται» ιδέες και εφαρμογές από τη φυσική.

Χρειάζεται να καταλάβουμε γιατί τα μαθηματικά εφαρμόζονται στην επιστήμη. Μια προσέγγιση σε αυτές τις ερωτήσεις μπορεί να συνδεθεί με την πλατωνική άποψη για τη φύση των μαθηματικών, η οποία υιοθετήθηκε από ορισμένους μαθηματικούς και φιλοσόφους, όπως ο Kurt Gödel. Σύμφωνα μ' αυτήν την άποψη, τα μαθηματικά περισσότερο ανακαλύφθηκαν παρά δημιουργήθηκαν. Οι δομές που μελετήθηκαν από μαθηματικούς δεν είναι απλώς προϊόντα του ανθρώπινου νου, αλλά μάλλον υπάρχουν σ' ένα ανεξάρτητο «σύμπαν», το οποίο εξερευνούν οι μαθημτικοί δια μέσου της δουλειάς τους. Αυτό μοιάζει με την εξερεύνηση του φυσικού Σύμπαντος από τους επιστήμονες. Αν το επιχείρημα είναι σωστό, τότε ίσως υπάρχει σχέση ανάμεσα στα δύο «σύμπαντα», έτσι ώστε οι δομές που ανακάλυψαν οι μαθηματικοί να είναι πράγματι σχετικές μ' εκείνες των φυσικών.

Έχω σοβαρές επιφυλάξεις για την πλατωνική άποψη. Η διαδικασία και η πορεία των μαθηματικών ανακαλύψεων είναι τόσο καθαρά δεμένες με την ιδιοσυγκρασία της ανθρώπινης σκέψης, ώστε μας είναι δύσκολο να πιστέψουμε πως οι μαθηματικοί εξερευνούν έναν κόσμο ανεξάρτητο από το ανθρώπινο πνεύμα. Επιπρόσθετα, το μαθηματικό σύμπαν, αντίθετα από το φυσικό κόσμο, δεν μπορεί να ερευνηθεί με τη σκέψη και τις αισθήσεις ταυτόχρονα: μπορούμε να το προσεγγίσουμε μόνο με το νου μας. Αφού δεν υπάρχει η παραμικρή ένδειξη πως οι μαθηματικές έννοιες γεννιούνται εκτός του μυαλού μας, εύλογο είναι να υποθέσουμε ότι το μαθηματικό «σύμπαν» έχει δημιουργηθεί από τις δικές μας σκέψεις παρά ότι έχει ανεξάρτητη ύπαρξη. Ακόμη και αν οι θέσεις των πλατωνικών μαθηματικών είναι σωστές, θα εξηγούσαν την ικανότητά μας να εφαρμόσουμε μαθηματικές δομές στην επιστήμη μόνο αν αληθεύει ότι ο αριθμός των δομών που υπάρχουν στο μαθηματικό σύμπαν είναι σχετικά μικρός και ότι έχουμε ήδη εξερευνήσει τις περισσότερές τους. Διαφορετικά είναι απίθανο η παράλληλη εξερεύνηση των δύο ανεξάρτητων συμπάντων να αποκαλύψει δομές σχετικές μεταξύ τους.

Σε κάποιες περιστάσεις, μέσα σε ορισμένες περιοχές των μαθηματικών, υπάρχει περιορισμένος αριθμός δομών που ίσως είναι εφαρμόσιμες στη φύση και όπου είναι κατορθωτή η εξέταση όλων αυτών. Για παράδειγμα, αφού υπάρχουν μόνο τρία είδη χώρου σταθερής καμπυλότητας, αν το Σύμπαν μας είναι χώρος σταθερής καμπυλότητας, πρέπει ν' ανήκει σ' ένα από αυτά. Δεν υπάρχει, όμως, ένδειξη ότι ο συνολικός αριθμός των κατανοητών μαθηματικών δομών είναι πολύ μικρός ή ότι βρισκόμαστε κοντά στην κατανόηση σημαντικού μέρους των δυνατών δομών. Αν είχαμε ήδη ανακαλύψει τις περισσότερες μαθηματικές δομές, θα μειωνόταν ο αριθμός των μαθηματικών νεωτερισμών — και δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι συμβαίνει κάτι τέτοιο. Για όλους αυτούς τους λόγους πιστεύω ότι δεν μπορούμε να ζητάμε από τον μαθηματικό πλατωνισμό μια εξήγηση της αποτελεσματικότητας των μαθηματικών στην επιστήμη.

Μια αντίθετη προσέγγιση τονίζει πως οι ιδέες και των μαθηματικών και της επιστήμης δημιουργήθηκαν από τον ανθρώπινο νου. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο, τότε δεν πρέπει να εκπλαγούμε από το γεγονός ότι δύο διαφορετικά σύνολα ιδεών θα είναι στενά συνδεδεμένα, αφού έχουν την ίδια αρχή. Υπάρχει μια δόση αλήθειας σ' αυτή την άποψη, που όμως, αν οδηγηθεί στα άκρα, θα καταλήξει στο συμπέρασμα πως οι επιστημονικές απόψεις μας για τον κόσμο καθορίζονται τελικά περισσότερο από τον εγκέφαλό μας παρά από το εξωτερικό περιβάλλον. Δεν μπορώ να δεχτώ αυτή την άποψη για την επιστήμη, αν και πιστεύω ότι ισχύει για τα μαθηματικά. Μας εκπλήττουν τόσο όσα ανακαλύπτουν οι επιστήμονες, ώστε πρέπει να υπάρχει μια συνιστώσα της επιστήμης που να υπερβαίνει τους ιδιαίτερους τρόπους με τους οποίους σκέφτονται τα ανθρώπινα όντα.

Η «υποκειμενική» άποψη για τη σχέση της επιστήμης με τα μαθηματικά μπορεί να είναι περισσότερο σχετική, όταν υπάρχουν περισσότερες από μία πιθανές θεωρητικές αναλύσεις του ίδιου σώματος της επιστημονικής γνώσης. Συχνά ανακαλύπτουμε ότι ενώ κάποια περιοχή της επιστήμης περιγράφτηκε αρχικά μ' έναν τύπο μαθηματικής γλώσσας, είναι εξίσου πιθανό να χρησιμοποιηθεί μια από τις πολλές άλλες γλώσσες. Μερικές φορές σημειώνεται μια μετατόπιση από την αρχική περιγραφή σε κάποια νέα. Ένα τέτοιο παράδειγμα ήταν η μετατόπιση από τον γεωμετρικό στον αναλυτικό τρόπο διατύπωσης της μηχανικής του Νεύτωνος. Συχνά μια εναλλακτική μαθηματική περιγραφή ερευνάται από καθαρή περιέργεια και οι επιστήμονες δεν την υιοθετούν παρά πολύ αργότερα, όταν αποδεικνύεται πως είναι προτιμότερη στο φως των νέων ανακαλύψεων.

Η δική μου άποψη για την αιτία της αποτελεσματικότητας των μαθηματικών στην επιστήμη βρίσκεται πιο κοντά στην υποκειμενική άποψη, δεν είναι όμως και εντελώς όμοιά της. Ξενικά με την αντίληψη πως οι ιδέες και των δύο κλάδων αναπτύσσονται από ένα διαισθητικό σύνολο που έχει αφετηρία το ίδιο είδος της ανθρώπινης εμπειρίας. Ενώ μπορεί να υπάρχουν πάμπολλες λογικά συμβιβαστές συμβολικές δομές, οι μαθηματικοί τείνουν να ενδιαφέρονται περισσότερο για όσες έχουν εμφανιστεί «φυσικά» στην πορεία της ανάπτυξης των ίδιων των μαθηματικών, παρά για εκείνες που επινοούνται ανεξάρτητα. Τα καθαρά μαθηματικά τείνουν να μεγαλώσουν σχεδόν όπως ένα δέντρο, με νέους κλάδους που γεννιούνται από προβλήματα που εμφανίζονται στους ήδη υπάρχοντες. Επιπρόσθετα, όταν οι μαθηματικοί επινοούν νέες συμβολικές δομές για να λύσουν κάποια προβλήματα, χρησιμοποιούν γενικές έννοιες που αποτελούν άμεσες αφαιρέσεις από την καθημερινή εμπειρία. Για παράδειγμα, η θεωρία των ομάδων στηρίζεται σε μια έννοια «πολλαπλασιασμού», όπου δύο σχετιζόμενες δραστηριότητες (π.χ. δύο διακριτές κινήσεις ενός και του αυτού σώματος) «πολλαπλασιάζονται» με καθορισμένη σειρά. Το ίδιο ισχύει και για τις επιστημονικές ιδέες. Ακόμη κι όταν οι επιστήμονες σκέφτονται για φαινόμενα πολύ διαφορετικά από εκείνα της καθημερινής ζωής, όπως ειναι τα υποατομικά σωματίδια, συνδυάζουν με νέους τρόπους ιδέες που προέρχονται από την καθημερινή ζωή. Για παράδειγμα, ένας από τους αληθινούς νεωτερισμούς του ατομικού κόσμου, η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, βασίζεται στη αντίληψη πως όταν παρατηρούμε κάτι, η πράξη της παρατήρησης μπορεί να αλλάξει την παρατηρούμενη ιδιότητα. Κάτι ανάλογο συμβαίνει με την πίεση ενός νευρικού ανθρώπου που μπορεί ν' ανέβει όταν ο γιατρός τον πλησιάζει για να τη μετρήσει.

Εξαιτίας του ότι τα καθαρά μαθηματικά και η φυσική πηγάζουν από την καθημερινή εμπειρία, δεν πρέπει να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι οι δομές που μελετώνται από έναν επιστημονικό κλάδο συχνά αποδεικνύονται εφαρμόσιμες και σε άλλους. Όμως, καθώς και τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες αναπτύσσονται, όσοι εργάζονται σε κάθε πεδίο έχουν την τάση να στηρίξουν τη δουλειά τους περισσότερο σε ιδέες που έχουν εισαχθεί προηγουμένως σ' αυτό το πεδίο παρά σε ιδέες που προέκυψαν από την κοινή εμπειρία. Αυτές οι ιδέες είναι συνήθως αρκετά αφαιρετικές και συχνά καταργούνται από την εμπειρία άλλων που εργάζονται σε διαφορετικά πεδία. Γι' αυτό και προτείνω ότι καθώς τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες αναπτύσσονται, συνεχώς και λιγότερες δομές του ενός κλάδου θα αφορούν τον άλλο. Αυτή η διαδικασία μοιάζει κάπως με ό,τι συμβαίνει κατά τη διάρκεια της βιολογικής εξέλιξης, όπου, καθώς δύο αρχικώς συγγενικά είδη διαχωρίζονται, η συμπεριφορά και η εμφάνισή τους σταδιακά διαφέρει περισσότερο.

Όμως οι μαθηματικοί θα συνεχίζουν να δημιουργούν μια επιβλητική σειρά από συμβολικές δομές, ορισμένες από τις οποίες θα συνεχίσουν να διαδραματίζουν κύριο ρόλο στο μέλλον της επιστήμης.

(Gerald Feinberg: 21ος ΑΙΩΝ, εκδόσεις Τροχαλία)

«...το πράγμα που με βοήθησε, περισσότερο από κάθε άλλο, δεν ήταν οι αφηρημένοι στοχασμοί ενός διανοουμένου, αλλά η πίστη και η προσήλωσή μου σ' έναν κόσμο **ζωντανών** και **περασμένων** ανθρώπων.... Αυτός ο κόσμος, **όλος μαζί,** μου έδωσε το συναίσθημα πως δεν είμαι μια αδέσποτη μονάδα, ένα άχερο στ' αλώνι...

...**Κι όλα τούτα** θα μπορούσα να τα ονομάσω με τη λέξη **παράδοση**... Αλήθεια, υπάρχουν ροπές που νομίζουν πως η παράδοση μας στρέφει σε έργα παρωχημένα και ανθρώπους παρωχημένους· πως είναι πράγμα τελειωμένο και άχρηστο για τις σημερινές μας ανάγκες...

Μου φαίνεται πως αυτές οι ροπές εκπορεύονται από τη **σύγχρονη απελπισία** για την αξία του ανθρώπου. Είναι τα συμπτώματα **ενός πανικού** που εν ονόματι του ανθρώπου τείνουν **να κατακερματίσουν** την ψυχή του ανθρώπου...»

(Γιώργος Σεφέρης: ομιλία στην αναγόρευσή του ως επιτίμου διδάκτορος - Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1964)

ΣΤΑΧΥΟΛΟΓΗΜΑΤΑ*

Αντιλαμβάνομαι την ποίηση σαν μια πηγή αθωότητας γεμάτης από επαναστατικές δυνάμεις, που αποστολή μου είναι να τις κατευθύνω επάνω σ' έναν κόσμο απαράδεκτο για τη συνείδησή μου· ελπίζοντας, μέσ' από συνεχείς μεταμορφώσεις, να τον κάνω πιο σύμφωνο με τα όνειρά μου.

* * *

Θα 'θελα να φτιάξω έναν ουρανό
να 'χω τώρα που νύχτωσε ένα στερέωμα να κοιτάζω
θα το 'καμνα μεγάλο, γιομάτο άστρα με σχήματα παράξενα
θα του 'βαζα αντίς από 'να, δυο φεγγάρια ανόμοια
το 'να μικρό σαν παιδί, τ' άλλο μεγάλο σαν παράπονο.

* * *

(*) Από το βιβλίο του ΟΔΥΣΣΕΑ ΕΛΥΤΗ: ΕΝ ΛΕΥΚΩ.

Ωστόσο, να μαθαίνει κανείς το αλφάβητο από το κάπα και ύστερα είναι αναπηρία. Παραμένουμε ανεξοικείωτοι με τον «κατ' αναλογίαν» συλλογισμό· θεωρούμε τη φαντασία σαν υπερκείμενη στην πραγματικότητα· και χρειάστηκε η φωνή των υπερρεαλιστών, στα μισά του αιώνα μας, για να ξαναφέρει τα πράγματα εκεί που τα είχε αφήσει ο Όμηρος.

* * *

Στο μικρό εικονοστάσι μου, χρόνια τώρα, φυλάγω ρόδια, δακτυλίδια κοριτσών, χρωματιστά βότσαλα, πεταλούδες. Όταν δέομαι, οι συμφορές απομακρύνονται ή, εάν όχι, μοιάζουν με πελώριες ανορθογραφίες. Ίσως αγαπώ τα καθαρά κείμενα γι' αυτό· για να μη με αποστερούν από μια τέτοια δυνατότητα: οι ροδιές να φωνάζουν σαν πετεινάρια, τα δακτυλίδια να ομολογούν τους αθάνατους έρωτες, τα βότσαλα να μου υποβάλλουνε την αιώνια παρουσία της θάλασσας, οι πεταλούδες να με πηγαίνουν τρεις ορόφους πιο ψηλά πάνω απ' τις αθλιότητες. Αισθάνομαι μιαν ευγνωμοσύνη, που δεν ξέρω σε ποιον να την απευθύνω. Εξακολουθητικά υπάρχει κάποιο πρόσωπο που με μαγνητίζει σαν Μέδουσα. Ποιο είναι; Ποιος είμαι; Πού είμαι;

* * *

Μέσα στη θλίψη της απέραντης μετριότητας που μας πνίγει από παντού, παρηγοριέμαι ότι κάπου, σε κάποιο καμαράκι, κάποιοι πεισματάρηδες αγωνίζονται να εξουδετερώσουν τη φθορά. Με πλήρη επίγνωση ότι μια μέρα ο πλανήτης αυτός θα καταψυχθεί ή θ' αναφλεγεί μαζί με τα επιτεύγματά τους.
Άλλης λογής ήρωες, που, αυτοί, θα βγάλουν ασπροπρόσωπη την ποτέ ανθρωπότητα.

* * *

Παράξενο: στο όνομα του ανθρωπισμού, ανέκαθεν οι λαοί έκαναν δύο βήματα μπροστά και οι ποιητές δύο βήματα πίσω.
Μην κοροϊδευόμαστε. Δε γίνεσαι χορτοφάγος τρώγοντας αρνάκια βαμμένα πράσινα.

* * *

Πολλοί στην ποίηση, επειδή τυχαίνει να 'ναι άσχημοι, διακηρύσσουν ότι ο Θεός έπλασε άσχημα τον κόσμο. Μερικοί φτάνουν και πιο πέρα: επειδή κινδύνεψαν κάποτε να πνιγούν, επιμένουν ότι η θάλασσα δεν είναι γαλάζια.

* * *

Τη μαγεία δεν την πιάνεις με την ερμηνεία της μαγείας, πόσο μάλλον με την περιγραφή της ερμηνείας της μαγείας. Ή κελαηδάς ή σωπαίνεις. Δε λες: αυτό που κάνω είναι κελαηδητό. Αλίμονο. Αν νογούσανε τα πουλιά, θα μας έπαιρναν με τις πέτρες — συγνώμην, με τις κουτσουλιές ήθελα να πω.

* * *

Προσοχή στη συγκίνηση. Αν είναι γόησσα, δεν παύει να 'ναι και ρουφιάνα.

* * *

Το Ένα και το Απόλυτο που συλλαμβάνει ο νους μας είναι τα πολλά και τα σχετικά των άλλων, φτασμένα στην καθαρότητα της μονάδας.

* * *

Η απόσταση από το «τίποτε» στο «ελάχιστο» είναι πολύ μεγαλύτερη παρ' ό,τι από το «ελάχιστο» στο «πολύ».

* * *

Η Ελλάδα είναι η χρυσή χώρα της Λιγοσύνης που αχρηστεύει την αξία του αριθμού· αλλά και η μαύρη χώρα του Άνισου, όπου κανένα πεπρωμένο δεν κόβεται στα δοσμένα του αρχήθεν μέτρα.

* * *

Τη σαφήνεια συνήθιζαν να μας διδάσκουν οι πατέρες μας· πολύ σωστά. Μόνο που είχαν κατά νου τη σαφήνεια του στοχασμού, παραβλέποντας ή αγνοώντας τη σαφήνεια του συναισθήματος: όπου δεν είναι πάντοτε απαραίτητο να υπάρχει θάλασσα για να προχωρήσει ένα καράβι· πόσο μάλλον να είναι η θάλασσα γαλάζια.

* * *

Ο ένας πήρε κι έδωσε. Ο άλλος έδωσε κι έφυγε. Αλλά και οι δυο τους *μένουν*. Τόσο είναι αλήθεια ότι αρκεί να ολοκληρωθεί κανείς στη ζωή, όχι με το να υποδύεται ρόλους αλλά με το ν' αξιοποιεί εκείνο που πραγματικά είναι — για να μην εκλείψει ποτέ.

* * *

Μπορεί να μειδιούν οι πρακτικοί άνθρωποι, κάποτε και να τρομάζουν μπροστά σε ό,τι υπερβαίνει την καθημερινή πραγματικότητα. Δεν έχει σημασία. Η στιγμή φτάνει που, με μαθηματική ακρίβεια, συνειδητοποιούν ότι, σ' όλο το μάκρος της ζωής τους και σ' όλη την έκταση των σχέσεών τους με τους άλλους, δεν είχαν να κάνουν παρά μ' αυτά που τόσο επιπόλαια περιφρονούσαν.

* * *

Τίποτε απ' όλ' αυτά που περιφέρουν, επί αιώνες τώρα, στα σχολεία, στις εκκλησίες, στις κομματικές συγκεντρώσεις, δεν παίρνει διαβατήριο για την ψυχή, αν προηγουμένως δεν έχει την οφειλόμενη θεώρηση από τα μέσα τα εκφραστικά. Οι νόμοι της τέχνης είναι και νόμοι της ζωής. Ο πολιτικός οφείλει να μη διαφέρει σαν αντίληψη απ' τον καλλιτέχνη. Και στην αντίληψη του καλλιτέχνη ο αγώνας για τη σωτηρία του ανθρώπου είναι αγώνας για την ορθή έκφραση και τίποτε άλλο. Σε τέτοιο σημείο, που θα έλεγα ότι και οι πλέον αντίθετες τοποθετήσεις απέναντι στο ίδιο πρόβλημα εξισώνονται αν η εν τέχνη δικαίωσή τους είναι του αυτού υψηλού βαθμού. Η ποιότητα στηρίζει τους θεούς, κι είναι για να μην το 'χουν κατανοήσει εγκαίρως οι Ιερείς που παιδεύεται άδικα η ανθρωπότητα.

* * *

Στη μοναξιά υπάρχουν κι εκεί, όπως μέσα στη γλώσσα, ιδιώματα. Το δικό μου πρέπει να 'ναι της πλέον ακατοίκητης ερημονησίδας. Αλλιώς δεν εξηγείται πώς τα λόγια μου, ενώ τα κατευθύνω στο κέντρο των ενδιαφερόντων του κόσμου, ηχούν απόμακρα ή χάνονται ολότελα. Τα φωνήεντά μου, τα «α» μου και τα «ε» μου, δε γίνεται, φαίνεται, να τα πιάσεις σε καμιά συχνότητα. Το πολύ ν' ακούσεις κάτι σαν τραύλισμα κυμάτων επάνω στα βότσαλα.

Παραμένω, έτσι, ένας ιδιώτης απαρηγόρητος, που δεν καταφέρνει ν' ανήκει πουθενά, σε καμιά κοινότητα, ούτε καν των ποιητών· αφού τα σκάφη μας μήτε που συναντιούνται, θα 'λεγες, για τη χαρά έστω να σφυρίξει το ένα για να χαιρετίσει το άλλο. Φαίνεται ότι στην προσπάθειά μου να τους πλησιάσω, τα ρεύματα με παρασύρουν και με παν έξω από την περιφέρεια. Τουλάχιστον έτσι, αν όχι τίποτε άλλο, επαληθεύεται κάποια γνησιότητα· ή όχι; Πώς να κρίνεις. Η φουρτούνα που περιγράφεις δεν είναι ποτέ η φουρτούνα που αντιμετωπίζει πραγματικά ο ναυτικός. Πρέπει το «σκόρτσο» να το αντιμετωπίζεις και στην έκφραση. Έτσι πρέπει να κρίνεις.

* * *

Χρειάζεται ν' αποβάλεις το λίπος του τυπικού των καθημερινών σου αναγκών, καθώς και όλα τα ουδέτερα ή άχροα στοιχεία που παρεμβάλλονται ανάμεσα στα σημαντικά της ζωής σου και τ' αποδυναμώνουν, για να νιώσεις τις πραγματικές σου διαστάσεις. Διαφορετικά, χάνεις τα μέτρα σου, περιπίπτεις από 'να σ' άλλο αδιέξοδο και στα ύστερα συνθηκολογείς. Δέχεσαι να ενσαρκώνεις το περίφημο πρακτικό πνεύμα, που μπορεί ν' αποσπά τον έπαινο των δικών σου επειδή σου παρέχει πλουσιοπάροχα να φας και να πιεις, την ίδια στιγμή όμως σε προσβάλλει με τον ιό της πλήξης και της μοναξιάς.

* * *

Η μεγάλη τέχνη βρίσκεται οπουδήποτε ο άνθρωπος κατορθώνει ν' αναγνωρίζει τον εαυτό του και να τον εκφράζει με πληρότητα μες στο ελάχιστο.

* * *

Η ώρα των μεταμορφώσεων, μέσα στο χρόνο της ύλης, οργανικής ή ανόργανης, απαιτεί τόση φαντασία και άμεση την ίδια στιγμή αποτύπωση, που μόνον ίσως ένα παιδί θα μπορούσε να το κατορθώσει. Αλλά πότε είναι κανείς παιδί στη ζωή του; Δύο φορές μόνον. Όταν είναι πραγματικά παιδί κι όταν είναι τόσο μεγάλος που να μπορεί να ξανακατακτά, ένα προς ένα, όλα όσα τον έκαναν κάποτε παιδί.

* * *

Οι καιροί φευ εστάθηκαν ανέκαθεν για τον άνθρωπο dürftiger. Αλλά και η ποίηση ανέκαθεν λειτουργούσε. Δύο φαινόμενα προορισμένα να συνοδεύουν την επίγεια μοίρα μας και που το ένα τους αντισταθμίζει το άλλο. Πώς αλλιώς. Αφού και η νύχτα και τ' άστρα εάν μας γίνονται αντιληπτά είναι χάρη στον ήλιο. Με τη διαφορά ότι ο ήλιος, κατά τη ρήση του αρχαίου σοφού, εάν υπερβεί τα μέτρα καταντά «ύβρις». Χρειάζεται να βρισκόμαστε στη σωστή απόσταση από τον ηθικόν ήλιο, όπως ο πλανήτης μας από τον φυσικό ήλιο, για να γίνεται η ζωή επιτρεπτή. Μας έφταιγε άλλοτε η αμάθεια. Σήμερα μας φταίει η μεγάλη γνώση. Δεν έρχομαι μ' αυτά που λέω να προστεθώ στη μακρά σειρά των επικριτών του τεχνικού μας πολιτισμού. Μια σοφία παλαιή όσο και η χώρα που μ' εξέθρεψε, μ' εδίδαξε να δέχομαι την εξέλιξη, να χωνεύω την πρόοδο μαζί με όλα της τα παρεπόμενα, όσο δυσάρεστα και αν μπορεί να είναι αυτά.
Τότε όμως η Ποίηση; Τι αντιπροσωπεύει μέσα σε μια τέτοια κοινωνία; Απαντώ: τον μόνο χώρο όπου η δύναμη του αριθμού δεν έχει πέραση. Και ακριβώς, η εφετεινή απόφασή σας να τιμήσετε στο πρόσωπό μου την ποίηση μιας μικρής χώρας δείχνει σε πόσο αρμονική ανταπόκριση βρίσκεστε με την χαριστική αντίληψη της τέχνης, την αντίληψη ότι η τέχνη είναι η μόνη εναπομένουσα πολέμιος της ισχύος που κατήντησε να έχει στους καιρούς μας η ποσοτική αποτίμηση των αξιών».

* * *

Δεν αρκεί να ονειροπολούμε με τους στίχους. Είναι λίγο. Δεν αρκεί να πολιτικολογούμε. Είναι πολύ. Κατά βάθος ο υλικός κόσμος είναι απλώς ένας σωρός από υλικά. Θα εξαρτηθεί από το αν είμαστε καλοί ή κακοί αρχιτέκτονες το τελικό αποτέλεσμα. Ο Παράδεισος ή η Κόλαση που θα χτίσουμε. Εάν η Ποίηση παρέχει μια διαβεβαίωση και δη στους καιρούς τους dürftiger, είναι ακριβώς αυτή: ότι η μοίρα μας παρ' όλ' αυτά βρίσκεται στα χέρια μας.

ΤΟ ΤΕΥΧΟΣ 4-5
ΤΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ
«ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ» ΤΥΠΩΘΗΚΕ
ΤΟΝ ΑΠΡΙΛΙΟ ΤΟΥ 1993
ΣΕ 1000 ΑΝΤΙΤΥΠΑ
ΓΙΑ ΛΟΓΑΡΙΑΣΜΟ
ΤΟΥ ΤΕΙ ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ
ΣΤΙΣ ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΤΕΧΝΕΣ
«ΤΥΠΟΚΡΕΤΑ»
ΒΙ.ΠΕ. ΗΡΑΚΛΕΙΟΥ
ΤΗΛ. (081) 229335, 229357

1. Δείξτε ότι $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{1+(\varepsilon\varphi x)^{\sqrt{2}}}=\dfrac{\pi}{4}$.

Απόδειξη

Για $\sqrt{2}=\rho$ και $x=\dfrac{\pi}{2}-\omega$, έχουμε: $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \dfrac{-d\omega}{1+\sigma\varphi^{\rho}\omega}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\varepsilon\varphi^{\rho}\omega\, d\omega}{1+\varepsilon\varphi^{\rho}\omega}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\varepsilon\varphi^{\rho}x\ dx}{1+\varepsilon\varphi^{\rho}x}$.

Επομένως $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\varepsilon\varphi^{\rho}x}{1+\varepsilon\varphi^{\rho}x}\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\dfrac{\pi}{2}$, δηλαδή $I=\dfrac{\pi}{4}$.

2. Αν $S_\nu=1+\dfrac{1}{2}+\dots+\dfrac{1}{\nu}$, **δείξτε ότι:**

(α) $\nu\,(\nu+1)^{\frac{1}{\nu}} < \nu+S_\nu$ **για** $\nu>1$ **και (β)** $(\nu-1)\,\nu^{-\frac{1}{\nu+1}} < \nu-S_\nu$ **για** $\nu>2$.

Απόδειξη

(α) $$\frac{\nu+S_\nu}{\nu}=\frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\dots+\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}{\nu} > \sqrt[\nu]{(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}=$$

$$=\sqrt[\nu]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{\nu+1}{\nu}}=(\nu+1)^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{και} \quad \nu+S_\nu > \nu\,(\nu+1)^{\frac{1}{\nu}}.$$

(β) $$\frac{\nu-S_\nu}{\nu-1}=\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}{\nu-1} > \sqrt[\nu-1]{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}=$$

$$=\sqrt[\nu-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{\nu-1}{\nu}}=\nu^{-\frac{1}{\nu-1}} \qquad \text{και} \quad \nu-S_\nu > (\nu-1)\,\nu^{-\frac{1}{\nu-1}}.$$

3. Αν στο κυρτό εξάγωνο ABCDEF, κάθε ζεύγος απέναντι πλευρών είναι παράλληλες, δείξτε ότι τα τρίγωνα ACE και BDF είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη: Τριγ. HBC ≈ Τριγ. EFG $\Rightarrow \dfrac{\kappa}{e-a}=\dfrac{d-b}{c} \Rightarrow \kappa c=ed-ad-eb+ab$.

Τότε: $\dfrac{2\,(ACE)}{\eta\mu\omega}=\left|\begin{vmatrix}0&0&1\\e&\kappa&1\\c&d&1\end{vmatrix}\right|=\left|ed-c\kappa\right|=\left|ad+eb-ab\right|$, $\dfrac{2\,(BDF)}{\eta\mu\omega}=\left|\begin{vmatrix}0&b&1\\a&0&1\\e&d&1\end{vmatrix}\right|=$

$=\left|ad+eb-ab\right|$.