Tartalomjegyzék

1. Skaláris szorzás **1**

2. Vektoriális szorzás **2**

3. Vegyes szorzás **3**

1. Skaláris szorzás

A skaláris szorzás két vektort kér és egy számot ad vissza.

1.1. Definíció (Skaláris szorzat)**.** *Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\underline{a}\,\underline{b}$-vel jelöljük, és a következőképpen határozzuk meg.*

$$\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\gamma,\ \ \textit{ahol}\ \gamma \in [0,\pi]\,\textit{a két vektor közbezárt szöge}$$

1.2. Állítás. *Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor $\underline{a}\,\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.*

Feladatok:

1. Feladat: Számoljuk ki az $\underline{a} = (1, 2, 3)$ és a $\underline{b} = (-1, 2, 1)$ által bezárt γ szöget.

2. Feladat: Mi legyen az x, hogy az $\underline{a} = (x, 3, 2)$ és a $\underline{b} = (2, -4, 1)$ vektorok merőlegesek legyenek egymásra?

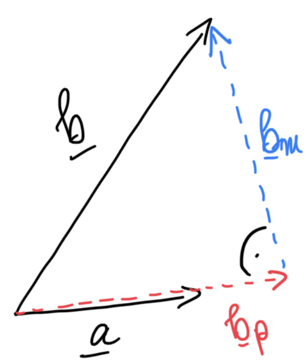
Megoldás:
1. Feladat
$\underline{a}\,\underline{b} = -1+4+3 = 6$, másrészt $\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\gamma = \sqrt{1^2+2^2+3^2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cos\gamma = \sqrt{14\cdot 6}\cos\gamma$, tehát

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ \text{vagyis}\ \gamma = \arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$$

2. Feladat
$\underline{a}\,\underline{b} = 2x - 12 + 2 = 2x - 10$, másrészt $\underline{a}\,\underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$, tehát

$$2x - 10 = 0,\ \text{vagyis}\ x = 5.$$

Alkalmazás: egy vektor másik vektorra párhuzamos és azzal merőleges komponense.



Adott $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok esetén kiszámolhatjuk a $\underline{b}$ vektor $\underline{a}$ vektorra merőleges (jelölés: $\underline{b}_m$) és $\underline{a}$ vektorral párhuzamos (jelölés $\underline{b}_p$) komponensét (lsd. az ábrát).

$$\underline{b}_p = \underbrace{\frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|^2}}_{\text{szám}} \underbrace{\underline{a}}_{\text{vektor}}$$

3. Feladat: Számoljuk ki az $\underline{a} = (3, 2, 5)$ és a $\underline{b} = (5, 4, 3)$
   (a) által bezárt γ szöget.
   (b) Illetve a $\underline{b}$ $\underline{a}$-val párhuzamos ($\underline{b}_p$) és az $\underline{a}$-ra merőleges ($\underline{b}_m$) komponensét.

   Megoldás:

   (a)

$$\cos\gamma = \frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|} = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{50}}$$

   (b) A párhuzamos komponens:

$$\underline{b}_p = \frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|^2}\underline{a} = \frac{38}{38}\underline{a}.$$

   A merőleges komponens tehát

$$\underline{b}_m = \underline{b} - \underline{b}_p = \underline{b} - \underline{a} = (2, 2, -2)$$

2. Vektoriális szorzás

A vektoriális szorzás két vektorból egy harmadikat csinál.

2.1. Definíció. *Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata az a $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor, melyre*

(i) $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}||\underline{b}| \sin\gamma$, *ahol γ a két vektor által bezárt szög;*

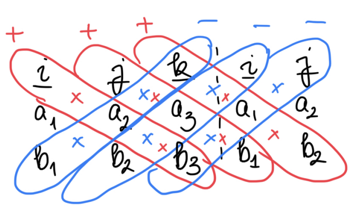
(ii) $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$ *és* $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$*;*

(iii) $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ *jobbsodrású rendszert alkot.*

2.2. Állítás. *Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor*

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_+ \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

(lsd. lenti ábra).



$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{i} \cdot a_2 \cdot b_3 + \underline{j} \cdot a_3 \cdot b_1 + \underline{k} \cdot a_1 \cdot b_2 - \underline{k}\, a_2 \cdot b_1 - \underline{i}\, a_3\, b_2 - \underline{j}\, a_1 \cdot b_3 =$$

$$\underline{i}(a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) + \underline{j}(a_3 \cdot b_1 - a_1 b_3) + \underline{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

4. Feladat: Számoljuk ki az $\underline{a} = (5, 4, 2)$ és a $\underline{b} = (1, -3, 2)$, számoljuk ki
   (a) $\underline{a} \times \underline{b}$-t,
   (b) $\underline{b} \times \underline{a}$-t,
   (c) az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített háromszög területét.

Megoldás:
(a)

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{i}(8 + 6) + \underline{j}(2 - 10) + \underline{k}(-15 - 4) = (14, -8, -19)$$

(b)

$$\underline{b} \times \underline{a} = \underline{i}(-8 - 6) + \underline{j}(-2 + 10) + \underline{k}(15 + 4) = (-14, 8, 19) = -\underline{a} \times \underline{b}$$

(c) A vektoriális szorzat definíciójának (i) pontja alapján:

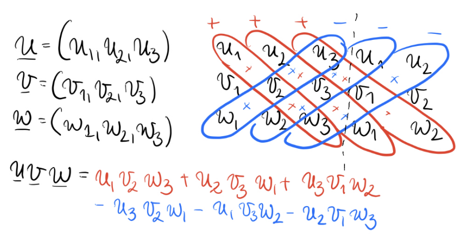
$$T = \frac{|\underline{a}||\underline{b}| \sin\gamma}{2} = \frac{|\underline{a} \times \underline{b}|}{2} = \frac{\sqrt{621}}{2}$$

3. Vegyes szorzás

A vegyes szorzás három vektorból csinál egy számot.

3.1. Definíció. *Adott $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ vekotorok vektoriális szorzatát a $(\underline{u} \times \underline{v})\underline{w}$ képlet adja meg. A három vektor vektoriális szorzatát $\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}$-vel jelöljük.*

Megj.:



- Az $|\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}|$ az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát adja meg.
- Következésképpen $\frac{|\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w}|}{6}$ az $\underline{u}$, $\underline{v}$ és $\underline{w}$ vektorok által kifeszített tetraéder térfogatát adja meg.
- Ha $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$, akkor $\underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w} = u_1v_2w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3$.(lásd az ábrát.)

4. Feladat: Milyen z értékre lesznek egy síkban az $\underline{u} = (3, 2, 1)$, $\underline{v} = (5, 1, 2)$ és a $\underline{w} = (3, 4, z)$ vektorok?

Megoldás:
A három vektor egy síkban van akkor és csak akkor, hogyha az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata nulla. A három vektor által kifeszített paralelpipedon

előjeles térfogata a három vektor vegyesszorzata, tehát ezt a vegyesszorzatot kell egyenlővé tennünk nullával.

$$0 = \underline{u}\,\underline{v}\,\underline{w} = 3z + 12 + 20 - 3 - 24 - 10z \leftrightarrow 5 - 7z = 0 \leftrightarrow z = \frac{5}{7} \tag{3.1}$$

5. Feladat: Adjuk meg az $A(4,-1,2)$, $B(5,3,2)$, $C(-1,2,2)$ és a $D(3,5,4)$ pontok által kifeszített tetráéder V térfogatát!

Megoldás: A térfogatot megadja a a tetraédert kifeszítő három vektor vegyesszorzatának abszolút értéke osztva hattal (lásd a megjegyzés 2. pontját). A tetraédert kifeszíti például az $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ vektor hármas. (lásd az ábrán)

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (1,4,0),\ \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (-5,3,0),\ \vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = (-1,6,2).$

Tehát a térfogat: $V = \frac{|\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD}|}{6} = \frac{46}{6}$.