MENDEL COIFMAN

CURVAS REVERSAS NA SUPERFICIE DO TORO CIRCULAR — PROJEÇÕES HIPERBÓLICAS — CURVAS CICLICAS : EPI — E HIPOCICLÓIDES REGULARES, ALONGADAS E ENCURTADAS

RIO DE JANEIRO

— 1958 —

TESE APRESENTADA POR MENDEL COIFMAN À CONGRE-
BELAS ARTES
GAÇÃO DA ESCOLA NACIONAL DE [redacted] PARA

CONCURSO DE DOCENTE LIVRE DA CADEIRA DE

GEOMETRIA DESCRITIVA.

I

CURVAS REVESSAS NA SUPERFÍCIE DO TORO CIRCULAR — PROJEÇÕES HIPERBÓLICAS — CURVAS CÍCLICAS : EPI— E HIPOCICLÓIDES REGULARES — ALONGADAS E ENCURTADAS.

O presente trabalho tem como finalidade a apresentação de um estudo sôbre curvas revessas traçadas na superfície de um tóro circular e suas respectivas projeções ortogonais.

Apresentar a superfície do hiperbolóide de revolução de uma folha, como diretriz de um sistema de "PROJEÇÕES HIPERBÓLICAS".

Estudo das projeções hiperbólicas das curvas revessas acima mencionadas e a consequente obtenção de curvas cíclicas : epiciclóides e hipociclóides regulares alongadas e encurtadas.

II

RESUMO HISTÓRICO:

Uma curva plana que exerceu grande influência no desenvolvimento dos métodos infinitesimais e que ocupou todos os grandes matemáticos da primeira metade do século XVII, foi sem dúvida a: CICLÓIDE.

Segundo E. T. BELL (Los grandes matemáticos), apareceu na literatura matemática, pelo ano de 1501, quando Charles Bouvelles a descreveu em relação à quadratura do círculo.

O nome de CICLÓIDE é atribuído a Galileu que juntamente com seu discípulo V. Viviani a estudaram resolvendo o problema do traçado de uma tangente em qualquer ponto da curva.

Aconselharam seu emprêgo como arco para pontes e agora desde que se tornou comum o emprêgo do concreto armado, os arcos de ciclóide eram vistos com frequência no alto dos viadutos.

Em 1634 o Geômetra G. P. de Roberval a denominou de "TROCHOIDE" (denominação grega de RODA) e demonstrou que a área compreendida entre uma ciclóide e sua base é o triplo da área do círculo gerador, proposição esta extremamente notável.

Ainda estudou e determinou um método cinemático para traçar tangentes a tôdas as curvas planas de sua época entre as quais a atual SENÓIDE a qual denominou: "Companheira da Ciclóide".

Nesse ano Descartes deu solução elegante ao traçado da tangente à ciclóide e que serviu à uma teoria dos centros instantâneos de rotação.

O nome definitivo de CICLÓIDE à curva, foi dado nesta época, por G. de Beaugrand.

Em 1644, Roberval determinou a cubatura dos volumes gerados pela ciclóide ao girar em tôrno de seu eixo ou de sua base.

III

Pascal e a Ciclóide:

Blaise Pascal foi um grande pensador e matemático, nascido em 1623. Contemporâneo de Descartes e Fermat, tornou-se célebre por suas obras filosóficas e matemáticas.

Em 1658 durante uma noite de insônia motivada por sofrimentos físicos, meditou longamente sôbre a ciclóide e entregou-se durante vários dias à geometria da Ciclóide, resolvendo muito de seus problemas.

No entanto resolveu não publicar seus resultados e desejando mostrar superioridade sôbre os matemáticos da época, lançou um desafio propondo-lhes os seguintes problemas:

1) — Quadratura de um segmento de ciclóide compreendido entre o eixo, um arco e uma paralela à base.

2) — Centro de gravidade deste segmento.

3) — Volume gerado pela rotação deste segmento em tôrno da base ou de uma paralela à mesma.

4) — Volume gerado pela rotação do segmento girando ao redor do próprio eixo.

5) — Centro de gravidade deste volume.

6) — Centro de gravidade do sólido obtido, secionando o volume precedente com o plano que contém o eixo.

Os quatro primeiros, inclusive o da relação entre as áreas da ciclóide e do círculo gerador (3:1), já tinham sido estudados por Roberval, problemas que foram propostos por P. Mersenne.

Êste após conhecer seus resultados pediu-lhe que mantivesse segredo durante um ano, enquanto escrevia à diversos geômetras, propondo-lhes os mesmos problemas e tendo decorrido o prazo, não obtendo resposta, publicou as soluções no ano de 1637 em sua "Harmonie Universelle".

IV

Nesse ano, Pascal publica em francês e latim a "Histoire de la roulette".

Foram grandes as polêmicas que a seguir se formaram pela disputa dos matemáticos, para demonstrar as elegantes propriedades da ciclóide. Pascal durante essas polêmicas, nem sempre era escruploso para com seus adversários.

Finalmente em 1659, Pascal faz conhecer as soluções dos problemas propostos, sob pseudônimo de Amos Dettonville publicando as "Letres provinciales", dirigidas a M. de Carcavy, M. de Sluse, M. Huygens e a A.D.D.S. (Augusto D. de Sanglin).

A CICLÓIDE

Quando um círculo rola sem escorregar sôbre uma reta fixa (base), um ponto de seu plano descreve uma curva plana chamada: Ciclóide (no passado chamada TROCHOIDE e ROULETTE em francês).

— É precisamente a ciclóide ordinária ou regular se o ponto gerador pertence à periferia do círculo móvel, é encurtada se o ponto é interior e alongada se o ponto é exterior.

A ciclóide é uma curva periódica, apresentando diversos pontos singulares como sejam:

Na regular encontramos um número infinito de pontos de reversão, na encurtada um número infinito de pontos de inflexão e na alongada uma infinidade de pontos duplos.

V

EPICICLÓIDES E HIPOCICLÓDES EM GERAL

A definição de ciclóide admite uma natural extensão aplicando-se o mesmo conceito ao partirmos da "Conchóide de NICOMEDE" para a "Limação de PASCAL" (O nome desta curva foi dado por STEFANO PASCAL, pai do célebre filósofo francês), que consiste em substituir a base retilínea da primeira, por uma base circular.

Assim, o círculo móvel passando a rolar sôbre uma base circular, o contacto pode ser exterior ou interior.

No primeiro caso, a curva descrita pelo ponto gerador é a "Epiciclóide" e no segundo caso teremos uma "Hipociclóide".

Como vimos anteriormente o ponto gerador pode pertencer à periferia, ser interior ou exterior ao círculo móvel, teremos assim: Epiciclóide ou Hipociclóides respectivamente regulares, encurtadas ou alongadas.

Se a relação entre os raios dos dois círculos considerados é um número racional, o círculo móvel depois de um certo número de voltas retorna à sua primitiva posição.

L. Euler em 1781 propõe que se use indistintamente o nome de Curvas Cíclicas para as epiciclóides e hipociclóides, pela insignificante dstinção existente entre as mesmas.

Pode-se obter uma epiciclóide quando num paralelogramo articulado A B C D se fixa um vértice A e seus lados AB e AD giram com velocidades constantes mas diferentes em tôrno de A, o quarto vértice descreve uma epiciclóide.

VI

Baseado nestas considerações foram construídos uma série de aparelhos pela Casa Schilling e que são mencionados por F. Schilling na obra Zeit. Math. Phys. (1889) p. 214-277, que podem descrever mecanicamente curvas cíclicas (Enciclopedia delle Matematiche Elementare e Complementi — L. Berzolari — G. Vivanti — D. Gigli p. 414-416).

Nas definições da epi— e hipociclóides se imaginarmos o raio do círculo móvel igual a infinito, teremos a evolvente do círculo. (PH. DE LA HIRE, Mém. Ac. sc. Paris 1706, p. 369).

Pode-se estender ainda a definição de epi— e hipociclóide à esfera. Teremos as epi— e hipociclóides esféricas. São curvas que apresentam as mesmas propriedades que as suas congêneres planas. São estudadas e representadas analiticamente recorerndo-se às coordenadas geográficas sôbre a esfera. (G. Loria — Curve Sghembe Speciali).

O TORO CIRCULAR

Como sabemos, o tóro circular é a superfície gerada pela rotação de uma circunferência em tôrno de uma reta do seu plano que não passa pelo seu centro.

Conforme a distância do centro da circunferência geratriz à reta que serve de eixo ao tóro circular é maior, igual ou menor do que o seu raio, o tóro circular será: aberto, fechado ou reentrante.

O tóro circular é também denominado: Anel Circular.

Chamaremos a superfície do tóro circular de: Superfície Tórica.

O tóro circular também é uma superfície de circunvolução, pois pode ser descrita por uma esfera de raio invariável cujo centro gira em tôrno de uma reta fixa.

As esferas tangenciam a superfície ao longo de seus meridianos que constituem os próprios meridianos da superfície tórica.

Se o centro da esfera de raio invariável se deslocar sôbre uma linha reta, a superfície descrita será a de um cilindro circular de revolução.

Os meridianos de contacto serão circunferências paralelas entre si, que podemos reproduzir pelo deslocamento de uma circunferência de raio invariável, cujo centro é submetido à um movimento de translação ao longo de uma direção Δ (eixo do cilindro) normal ao seu plano (Figura 1).

Se a direção Δ assumir uma forma curvilínea transformando-se numa circunferência, por exemplo, a circunferência de raio invariável (geratriz) passará a ter seu plano passando pelo

centro da forma curvilínea (circunferência) e se o centro da geratriz deslocar-se sôbre a forma curvilínea, a superfície gerada será a Superfície Tórica. (Figura 2).

A forma curvilínea passará a ser denominada: Linha dos Centros.

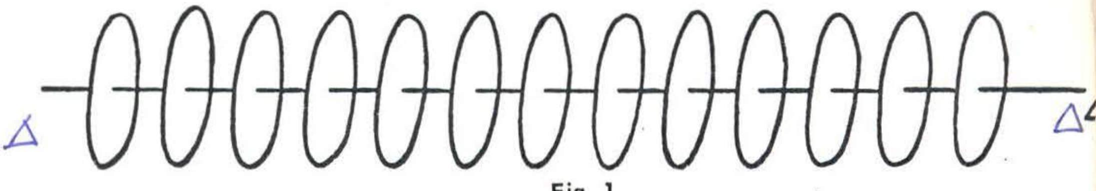

Fig. 1

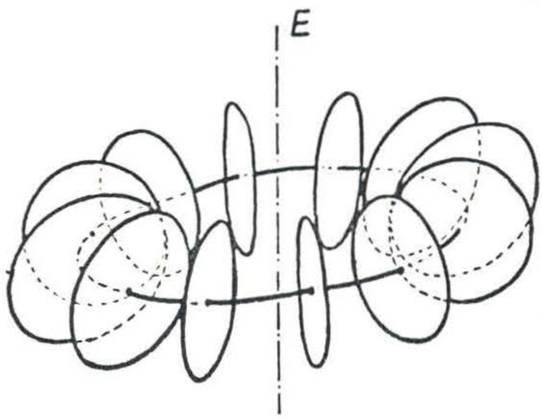

Fig. 2

O feixe de planos que contêm a circunferência geratriz em suas diferentes posições durante a geração da superfície tórica, apoia-se numa reta "E" perpendicular ao plano da linha dos centros e que constitue o "eixo" da superfície tórica.

Numa esfera as seções planas contendo o eixo, são circunferências de raio constante denominadas: "meridianos". As secções perpendiculares ao eixo, são circunferências de raio variável chamadas: "Paralelos" e ao paralelo de maior raio, denomina-se "Equador".

Estendendo a um cilindro de revolução os conceitos acima, veremos que as secções planas contendo o eixo, serão linhas retas paralelas ao mesmo, portanto os meridianos serão as "geratrizes".

As secções perpendiculares ao eixo, correspondendo aos paralelos serão circunferências de raio constante.

Numa superfície tórica aberta, as secções planas contendo o eixo, determinam meridianos de raio constante e os planos perpendiculares ao eixo determinam na superfície dois paralelos concêntricos de raios variáveis. Se o plano passa pelo centro teremos um paralelo de raio máximo: "Equador" e outro de raio mínimo: "Círculo de gola".

Imaginemos um pequeno arco da linha dos centros e façamos o centro da circunferência geratriz percorrer este arco. Esta descreverá um pequeno trecho de uma superfície tórica.

Se fizermos variar o raio do arco acima referido, crescendo e tornando-se superior a qualquer quantidade dada, quando este assumir um valor infinitamente grande, o limite do trecho da superfície tórica, será a superfície cilíndrica de revolução.

Tomando este artifício como base, poderemos aplicar à superfície tórica o raciocínio empregado no cilindro de revolução para obtenção da hélice cilíndrica, tendo como única finalidade a obtenção de curvas revessas na superfície tórica, análogas à hélice cilíndrica, como veremos mais adiante.

Representação de um ponto e traçado do plano tangente à superfície tórica.

Na figura 3 vemos as projeções de uma superfície tórica aberta, em épura. Na projeção horizontal, o contorno aparente é formado pelo equador e pelo círculo de gola.

O contorno aparente vertical é obtido por duas posições de frente da circunferência geratriz, unidas por tangentes paralelas à linha de terra, representando os paralelos limites que em projeção horizontal se confundem com a projeção da linha dos centros,

Sendo M um ponto qualquer da superfície, dado por sua projeção horizontal "m", traçamos por este ponto um paralelo. A este paralelo correspondem na projeção vertical dois planos horizontais, sôbre um dos quais estará a projeção vertical " m' ".

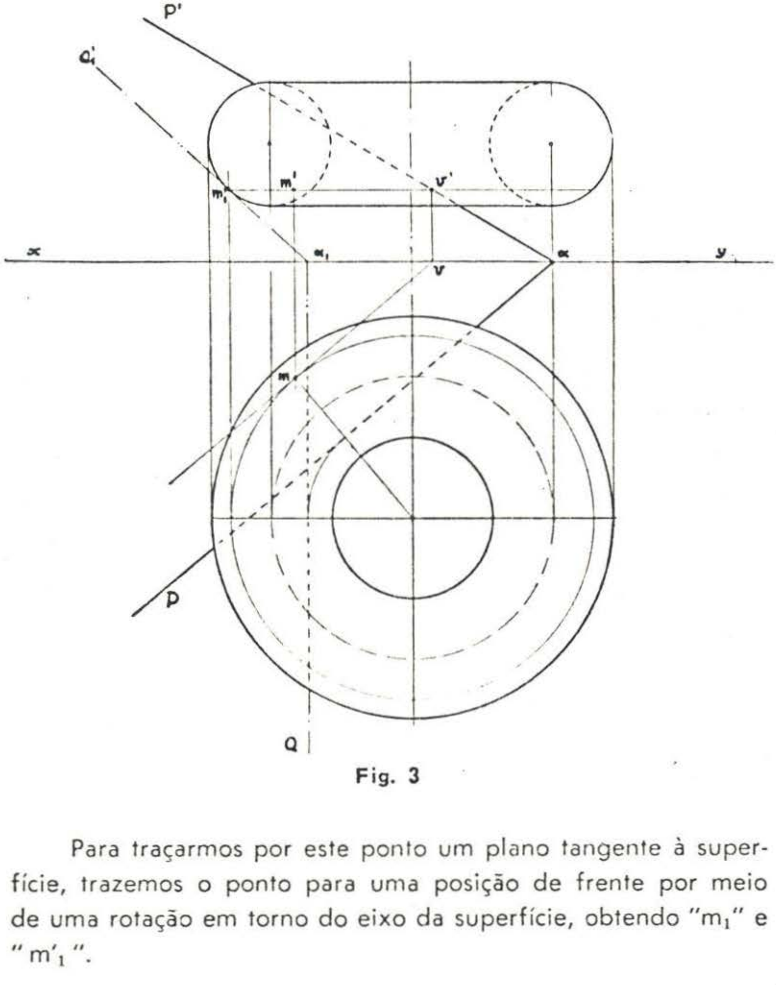

Fig. 3

Para traçarmos por este ponto um plano tangente à superfície, trazemos o ponto para uma posição de frente por meio de uma rotação em torno do eixo da superfície, obtendo "m_1" e " m'_1 ".

O plano tangente nesta posição é de tôpo, tangente ao meridiano de frente em " m'_1 " e por uma rotação inversa obtemos os traços do plano qualquer P α P'.

TRAÇADO DE CURVAS NA SUPERFÍCIE TÓRICA

As secções planas paralelas ao eixo do tóro foram denominadas de "Espíricas" por Perseo, denominação essa oriunda do Grego "Espira ou Anel", nome que designava as superfícies geradas por uma circunferência girando em tôrno de um eixo de seu plano.

Vemos portanto que as "espíricas" são curvas planas.

As curvas que iremos estudar neste trabalho, são revessas e análogas à hélice cilíndrica.

A "HÉLICE CILÍNDRICA NORMAL" como sabemos, é uma curva traçada na superfície do cilindro de revolução, cortando tôdas as geratrizes sôb ângulo constante.

É também definida como sendo a trajetória de um ponto, sujeito à dois movimentos:

1) — DE ROTACÃO, com velocidade angular constante, em torno de um eixo fixo.

2) — DE TRANSLACÃO, com velocidade também constante, paralelamente a esse eixo.

O primeiro movimento resulta da rotação de um "paralelo" do cilindro em tôrno de seu centro.

O segundo é resultante do deslocamento do centro do mesmo "paralelo" ao longo do eixo do cilindro.

Apliquemos à uma superfície tórica os conceitos acima emitidos em relação ao cilindro de revolução e poderemos supôr agora um ponto animado de dois movimentos de rotação, a saber:

1) — DE ROTACÃO, em tôrno da linha dos centros, com velocidade angular constante.

2) — DE ROTAÇÃO, em tôrno de um eixo fixo (eixo do tóro) também com velocidade angular constante.

A combinação dos dois movimentos fará o ponto descrever sôbre a superfície tórica uma curva revessa análoga à hélice cilíndrica que denominaremos de "PSEUDO HÉLICE TÓRICA".

Vemos assim, que enquanto na hélice cilíndrica normal a trajetória do ponto é resultante da combinação de dois movimentos, sendo um de ROTAÇÃO do paralelo do cilindro em tôrno de seu centro e outro de TRANSLAÇÃO resultante do deslocamento do centro do mesmo paralelo ao longo de seu eixo, na pseudo hélice tórica a trajetória do ponto gerador é resultante de dois movimentos de ROTAÇÃO.

O primeiro pela rotação do meridiano que contém o ponto gerador em torno de seu centro situado sôbre a linha dos centros.

O segundo pelo deslocamento do mesmo centro, ao longo da linha dos centros, resultante da rotação do meridiano em torno do eixo do tóro.

Devido à diferença de movimentos a que está sujeito o ponto gerador, sendo na hélice cilíndrica um de rotação e outro de translação, enquanto que na pseudo hélice tórica ambos são de rotação, a propriedade fundamental que possue a hélice cilíndrica de cortar tôdas as geratrizes do cilindro sob ângulo constante, não persiste em sua análoga.

Estendendo as noções de "espira" e "passo" da hélice cilíndrica, à nova curva, poderemos dizer que:

A porção da curva descrita pelo ponto ao passar por duas vezes consecutivas por um mesmo paralelo será uma "ESPIRA".

Ao arco de paralelo correspondente à passagem do ponto pelo mesmo, por duas vezes consecutivas, arco êsse cuja medida é feita em função do ângulo descrito pelo plano do meridiano em tôrno do eixo do tóro, denominaremos de "PASSO ANGULAR".

Resumindo, temos que a cada rotação completa (360°) do meridiano em torno de seu centro, corresponderá uma rotação (parcial ou total) de seu plano em torno do eixo do tóro.

Se o "passo angular" é nulo, o ponto gerador descreverá o meridiano da superfície.

Se o "passo angular" é igual a 360º a curva descrita pelo ponto gerador terá uma única espira.

Para valores atribuídos ao passo angular compreendidos entre 0º e 360º, a curva apresentará tantas espiras, quantos forem os múltiplos de 360º, para o valor atribuído ao passo.

Exemplo:

Passo angular igual a 180º, teremos .... 2 espiras.
Passo angular igual a 90º, teremos .... 4 espiras.
Passo angular igual a 45º, teremos .... 8 espiras.

Verificamos assim, que à medida que o passo angular diminue, o número de espiras aumenta.

PROJEÇÕES DA PSEUDO HÉLICE TÓRICA

Seja uma superfície tórica de eixo vertical, dada por suas projeções em épura (figura 4). A projeção horizontal da curva será obtida por um raciocínio semelhante ao empregado na hélice cilíndrica. Dividimos o meridiano de frente na projeção vertical em 12 partes iguais, por exemplo, pelas quais traçamos planos horizontais, determinando na projeção horizontal os paralelos correspondentes.

Suponhamos fixado o passo angular, igual a 90°. Dividimos o mesmo, no mesmo número de partes iguais (no caso, 12 divisões), unindo-as ao centro para termos as projeções horizontais das posições da circunferência geratriz no seu movimento em torno do eixo do tóro.

Os pontos de encontro dessas projeções com os paralelos darão os pontos de 1 até 12 na projeção horizontal e linhas de chamada darão sôbre os paralelos correspondentes na projeção vertical, os pontos de 1' a 12'. Obteremos assim as projeções de uma espira, sendo as demais obtidas da mesma maneira. No exemplo dado, teremos 4 espiras.

A visibilidade na projeção horizontal é limitada pelo equador e pelo círculo de gola, sendo visíveis os pontos acima do equador, assim os pontos de 2 a 6 serão invisíveis, sendo os demais visíveis nesta espira. Na projeção vertical a visibilidade é limitada pelos paralelos tangentes aos meridianos de frente, que na projeção horizontal se confundem com a projeção da linha dos centros; assim os pontos de 5' a 9' serão invisíveis, sendo visíveis os pontos de 1' a 4' e de 10' a $1'_1$ nesta espira. O raciocínio é repetido para as demais espiras.

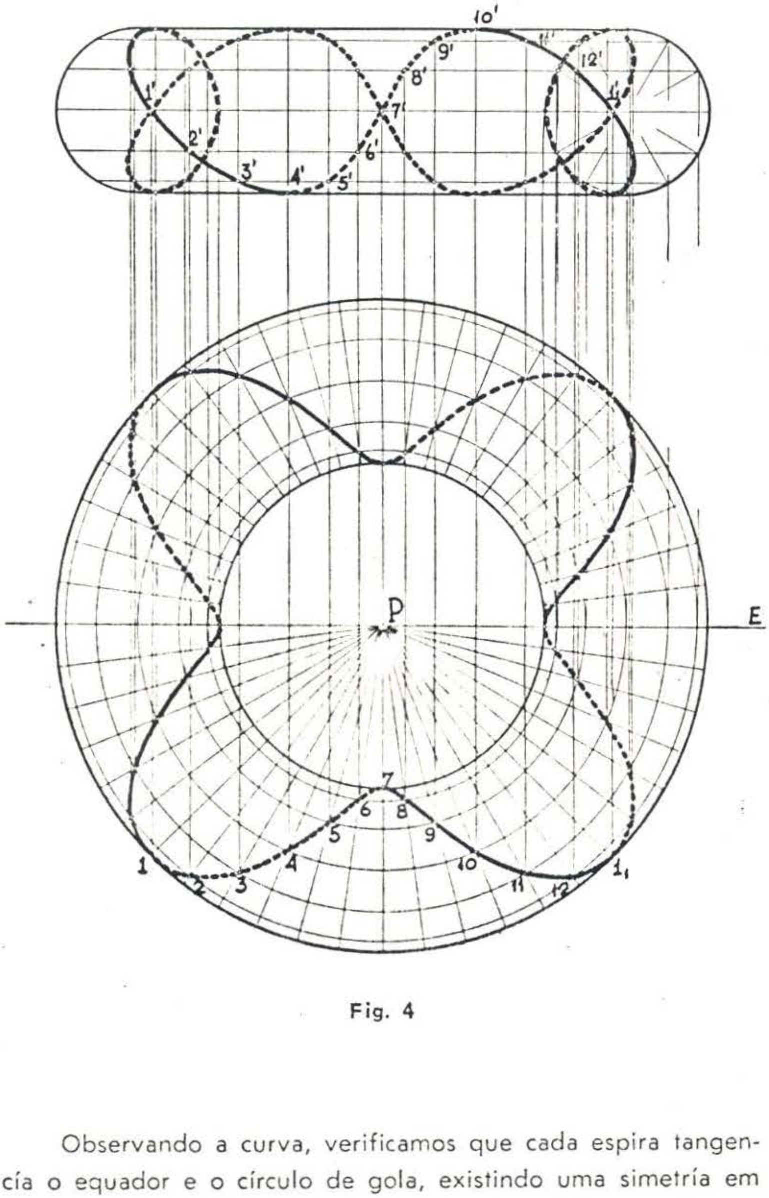

Fig. 4

Observando a curva, verificamos que cada espira tangencía o equador e o círculo de gola, existindo uma simetría em relação aos pontos de tangência, na projeção horizontal, e na projeção vertical a curva que une as quatro espiras, é simétrica em relação ao eixo do tóro e também em relação ao equador.

RELAÇÃO ENTRE A PROJEÇÃO HORIZONTAL DA PSEUDO HÉLICE TÓRICA E O SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

A senóide é a curva resultante da projeção de uma hélice cilíndrica normal, sôbre um plano paralelo ao eixo do cilindro núcleo.

Observando-se a projeção horizontal da pseudo hélice tórica da figura 4, verificamos que as espiras tangenciam alternadamente o equador e o círculo de gola.

Assim sendo, se considerarmos para Pólo de um sistema de coordenadas polares o centro da superfície tórica nesta projeção, sabemos que um ponto qualquer deste plano é fixado por duas coordenadas:

A primeira linear "raio vetôr" correspondendo à distância do ponto considerado ao pólo.

A segunda, angular "ângulo polar" correspondendo ao ângulo formado entre o eixo polar e o raio vetôr.

Supondo que o eixo polar passa pelo centro do tóro, é paralelo à linha de terra e observando a curva, podemos dizer:

— "Se imaginarmos um ponto do espaço percorrendo a curva com velocidade constante, teremos na projeção horizontal variações constantes do ângulo polar e os raios vetôres correspondentes aos diversos pontos, crescem ou decrescem de quantidades iguais as cotas relativas entre os paralelos, passando por mínimos no círculo de gola e por máximos ao atingirem o equador".

Isto se deve ao fato de que na projeção vertical, as distâncias relativas entre os planos horizontais que determinam os paralelos, passando pelos pontos de divisão do meridiano de frente, são iguais as distâncias entre os paralelos na projeção horizontal.

TANGENTE POR UM PONTO DA PSEUDO HÉLICE TÓRICA.

Antes do traçado da tangente, observemos a figura 5, na qual vemos um detalhe da geração da curva, passando por três pontos: 4, 5 e 6. Vejamos qual o raciocínio que empregaremos para traçar uma tangente pelo ponto 5 por exemplo. Observemos o triângulo: 5 N 6. Este triângulo é curvilíneo possuindo seus vértices sôbre a superfície do tóro, poderemos chamá-lo de

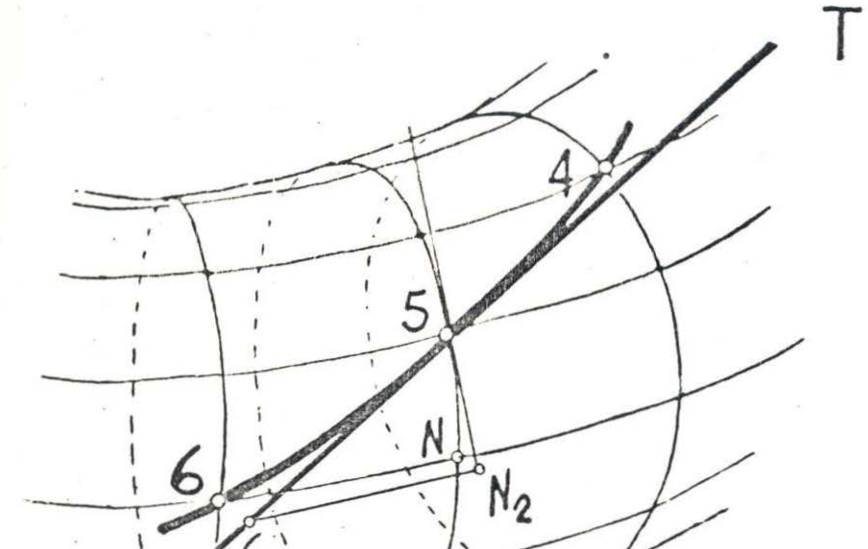

Fig. 5

"triângulo tórico". Por construção é um triângulo retângulo em N. Seu lado 5 N é um arco que corresponde a 1/12 do meridiano que passa pelo ponto 5.

O outro lado 6 N é um arco que corresponde a 1/12 do passo angular do paralelo que passa pelo ponto vizinho (6). Se imaginarmos um plano tangente ao tóro, passando pelo ponto 5 e retificarmos o arco 5 N, este passará para o plano correspondendo ao segmento 5 N_2. Se a partir deste ponto tomarmos

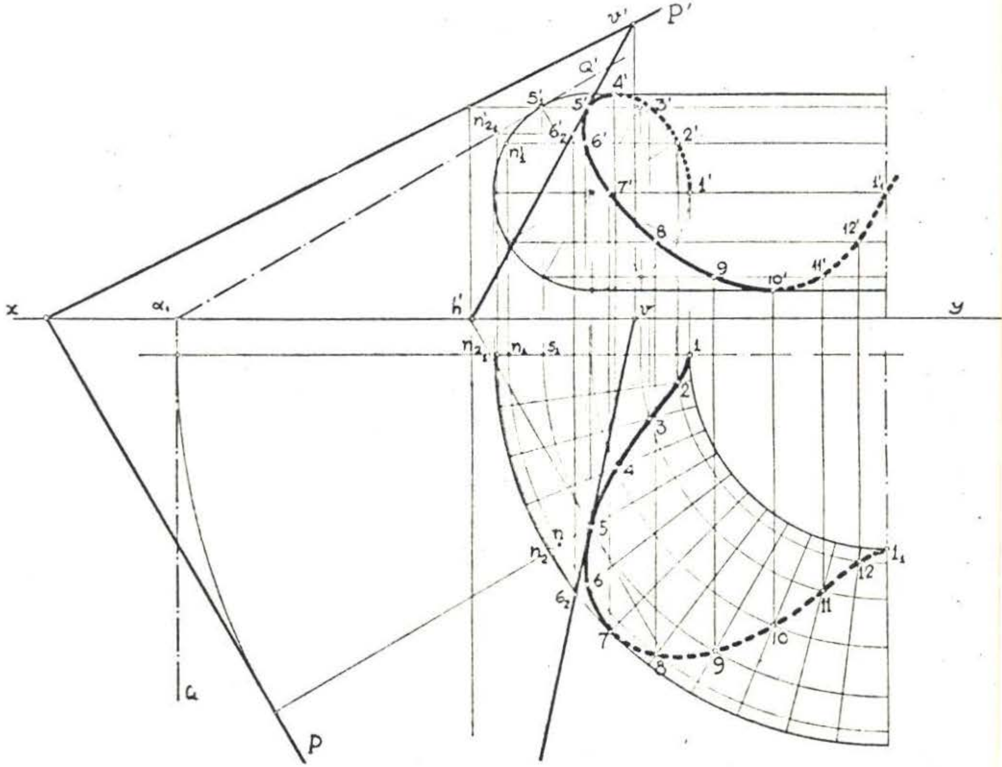

Fig. 6

sôbre uma perpendicular ao segmento, o comprimento N_2 6_2 igual à retificação do arco de paralelo 6 N, obteremos sôbre o plano tangente, a planificação do triângulo tórico antes referido. Assim, a hipotenusa 6_2 5 será a retificação do arco de hélice

correspondente aos pontos 5 e 6. Esta hipotenusa é tangente à curva no ponto "5".

Em épura, (figura 6), sejam as projeções de uma espira da pseudo hélice tórica e o ponto 5 5' pelo qual desejamos traçar a tangente à curva. Por meio de uma rotação em tôrno do eixo do tóro, trazemos o ponto para o meridiano de frente, em 5_1 $5'_1$. Tracemos pela projeção vertical $5'_1$ uma tangente ao meridiano, sobre a qual tomamos o comprimento $5'_1 n'_{2_1}$ igual a 1/12 deste meridiano, (comprimento êsse correspondente ao arco $5'_1$ n'_1), obtemos na projeção horizontal n_{2_1} Por rotação inversa, obteremos n_2 e por este ponto uma perpendicular à 5 n_2 na qual assinalamos o comprimento n_2 6_2, do arco de paralelo n 6. A projeção vertical do ponto 6_2 será $6'_2$ sòbre a horizontal que passa por n'_{2_1} e a tangente terá por projeções 6_2 5; $6'_2$ e pertencendo ao plano tangente à superfície do tóro no ponto 5 5' deverá ter seus traços: horizontal e vertical sôbre os traços correspondentes do plano, como mostra a figura.

PROJEÇÕES HIPERBÓLICAS

Sabemos que um ponto A qualquer do espaço, pode ser projetado sôbre um plano, de diferentes modos:

1 — Projeção cilíndrica — A projeção de um ponto é feita paralelamente à uma direção dada, podendo ser oblíqua ou ortogonal, se a direção fôr inclinada ou perpendicular ao plano de projeção.

2 — Projeção cônica — Neste caso, a projetante é obrigada a passar por um ponto fixo chamado: "vértice" das projetantes cônicas.

As superfícies cilíndrica e cônica são geradas pela rotação de uma reta, girando em tôrno de um eixo fixo de seu plano.

Se a reta girar em tôrno de um eixo fixo não situado em seu plano, a superfície descrita será a de um Hiperbolóide de revolução de uma fôlha. A superfície obtida é portanto regrada ou reguada, como o são a cilíndrica e a cônica.

Tomando por base os conceitos acima, podemos dizer que a PROJEÇÃO HIPERBÓLICA de um ponto, é o traço da projetante traçada pelo ponto, paralelamente à posição de uma geratriz de um HIPERBOLÓIDE DE REVOLUÇÃO DE UMA FÔLHA.

O hiperbolóide é determinado por uma reta vertical (eixo) e uma geratriz frontal, paralela à uma direção "D" formando um ângulo dado com o plano horizontal de projeção.

Para traçarmos pelo ponto uma projetante, torna-se necessário trazer o ponto por meio de uma rotação em tôrno do eixo, para um plano de perfil que passa pelo mesmo. A seguir traçamos pelas novas projeções, projetantes paralelas à direção frontal e determinamos seu traço horizontal. Trazendo de volta

a projetante para a projeção inicial do ponto, o traço horizontal representará a projeção hiperbólica do ponto. Sejam, portanto, a e a' (figura 7) as projeções ortogonais de um ponto A do espaço. Tomemos um eixo vertical mn, m'n', e uma direção "D" frontal caracterizada pelas projeções d, d' formando com o plano horizontal ângulo de 45° E, por exemplo.

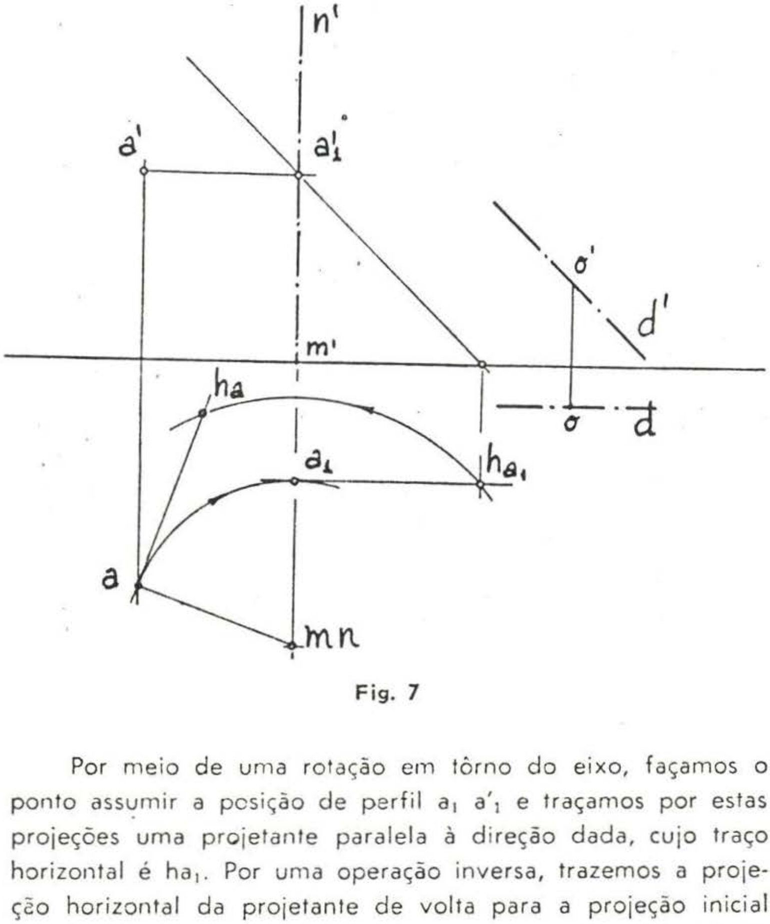

Fig. 7

Por meio de uma rotação em tôrno do eixo, façamos o ponto assumir a posição de perfil a_1 a'_1 e traçamos por estas projeções uma projetante paralela à direção dada, cujo traço horizontal é ha_1. Por uma operação inversa, trazemos a projeção horizontal da projetante de volta para a projeção inicial 'a' do ponto e o traço horizontal passará a ser "h_a", projeção hiperbólica do ponto A.

Desejamos assinalar que a projeção hiperbólica obtida uti-

liza os planos de projeção, é determinada pelo traço de uma projetante, portanto utiliza-se dos processos Mongeanos.

Um exemplo podemos dar, projetando hiperbolicamente uma hélice cilíndrica normal dada pelas projeções Mongeanas.

Apliquemos em seguida aos pontos de uma hélice cilíndrica normal o princípio das projeções hiperbólicas, considerando para eixo do Hiperbolóide Diretor o próprio eixo do cilindro núcleo e como inclinação das geratrizes com o plano horizontal,

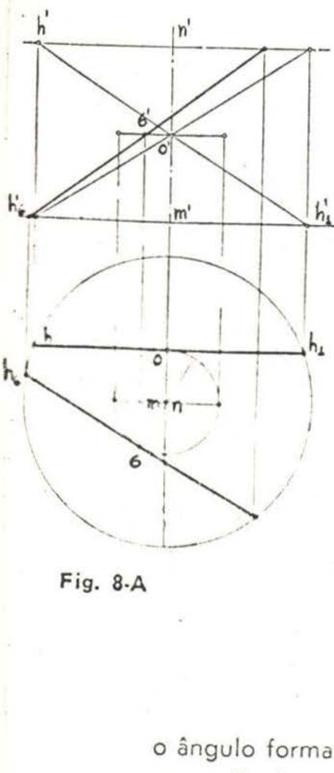

Fig. 8-A

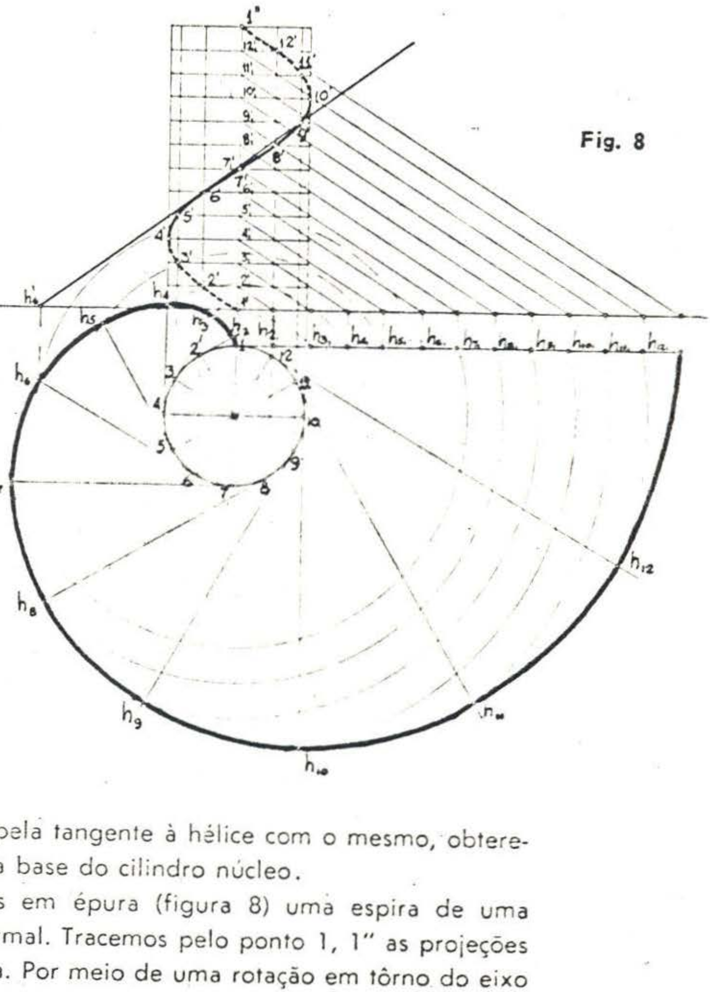

Fig. 8

o ângulo formado pela tangente à hélice com o mesmo, obteremos a Evolvente da base do cilindro núcleo.

Representemos em épura (figura 8) uma espira de uma hélice cilíndrica normal. Tracemos pelo ponto 1, 1" as projeções da tangente à curva. Por meio de uma rotação em tôrno do eixo

do cilindro transportemos todos os pontos da hélice para a geratriz de perfil que passa pelo ponto "1". Pela projeção vertical, de cada ponto ($2'_1$, $3'_1$ . . . etc.) tracemos projetantes frontais paralelas à tangente, teremos assim a possibilidade de determinar os traços horizontais: h_{2_1}, h_{3_1}, h_{4_1}, ... h_{12_1}. O traço horizontal correspondente ao ponto 1 1' corresponde ao próprio ponto na projeção horizontal.

Em seguida, trazendo as projetantes na projeção horizontal para seus devidos lugares, passando pelos pontos: 1, 2, 3, ..., 12, teremos em: h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_6, ... h_{12}, as projeções hiperbólicas dos pontos da hélice. A curva que reune êsses pontos é a evolvente perfeita à circunferência da base do cilindro núcleo.

Na mesma figura (figura 8a) tracemos as projeções de um eixo vertical mn m'n' e de uma reta frontal h h_1 h' h'_1, formando com o plano horizontal o mesmo ângulo do que o formado pela tangente à hélice. Supondo a reta animada de um movimento circular em tôrno do eixo, esta descreverá a superfície de um hiperbolóide de revolução de uma fôlha. Suponhamos que durante o seu movimento, fixamos a posição correspondente ao ponto 6.

Tracemos uma geratriz da superfície tangente ao círculo de gola no ponto 6, paralela à tangente traçada pelo ponto correspondente, à base do cilindro. Levantemos pelo ponto h_6 de uma e outra tangente, linhas de chamada, determinando a projeção vertical h'_6.

Unindo este ponto e o seu correspondente na hélice, ao ponto 6' sôbre o círculo de gola e na projeção vertical da hélice, verificaremos que a geratriz do hiperbolóide é paralela à tangente traçada pelo ponto 6' na hélice. Se repetirmos o raciocínio precedente para qualquer ponto da hélice, concluiremos que **"as tangentes à uma hélice cilíndrica normal, são paralelas às geratrizes de um hiperbolóide de revolução de uma fôlha. Se tomarmos essa superfície como superfície diretora, a projeção hiperbólica da Hélice cilíndrica, será a evolvente à circunferência da base";.**

APLICAÇÃO DAS PROJEÇÕES HIPERBÓLICAS À PSEUDO HÉLICE TÓRICA — OBTENÇÃO DAS CURVAS CICLICAS.

(Epiciclóide e hipociclóides, regulares, alongadas e encurtadas)

Por meio das projeções cilíndricas oblíquas podemos obter à partir da hélice cilíndrica as Ciclóides regulares, alongadas ou encurtadas, como o demonstra o Teorema de GUILLERY.

Pretendemos nesse estudo demonstrar a possibilidade de obtenção do restante do Grupo das Curvas Ciclicas, isto é, as Epiciclóides e Hipociclóides regulares, alongadas e encurtadas, que são curvas geométricas planas de grande importância na Engenharia, pela **aplicação nos perfis conjugados.**

Estudaremos a obtenção das curvas acima referidas pela aplicação das projeções hiperbolicas a pseudo hélice tórica, determinando essas projeções sôbre o plano do equador.

A Epiciclóide é uma curva plana gerada por um ponto fixo de uma circunferência, cujo circulo, rola sem escorregar sôbre outro circulo. A Hipociclóide é obtida quando o circulo rola na parte interna de outro circulo, sem escorregar. De acôrdo com a posição do ponto essas curvas podem ser alongadas, regulares e encurtadas.

PRINCÍPIO GERAL:

Partiremos do seguinte principio geral:

A projeção horizontal de um tóro possue como contorno aparente o círculo de gola e o equador. Consideraremos a circunferência que possue como diâmetro a diferença entre o equador e o círculo de gola.

Se imaginarmos essa circunferência rolando sem escorregar sôbre o círculo de gola, podemos obter Epiciclóides regulares, alongadas e encurtadas.

Se ao invés de rolar sôbre o círculo de gola a circunferência rolar no interior do equador sem escorregar, poderemos obter as Hipociclóides regulares, alongadas e encurtadas.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL:

"A projeção hiperbólica de uma pseudo hélice tórica sôbre o plano do equador, é uma curva cíclica (epiciclóide ou hipociclóide), quando as geratrizes do hiperbolóide diretor formarem com êste plano, ângulo de 45°".

NOTA — Para a obtenção das curvas cíclicas acima referidas, é necessário que existam determinadas relações entre os círculos de gola e do equador, as quais passamos a enumerar:

1 — **Epiclóide regular** — O passo angular marcado sôbre o círculo de gola, igual ao arco cujo comprimento é o da circunferência resultante da diferença entre o raio do equador e o círculo de gola. Exemplo: Raio do equador é o dobro do raio do círculo de gola. Passo angular igual a 180°.

2 — **Epiclóide regular (CASO PARTICULAR DA CARDIÓIDE)** — O passo angular marcado sôbre o círculo de gola igual ao arco, cujo comprimento é o da circunferência resultante da diferença entre o raio do equador e do círculo de gola, isto é, o raio da circunferência é igual ao raio do círculo de gola. Exemplo: O raio do círculo de gola é igual a um têrço do raio do equador. Passo angular igual a 360°.

3 — **Epiclóide alongada** — O passo angular marcado sôbre o círculo de gola, menor do que o arco correspondente ao comprimento da circunferência resultante da diferença entre o raio do equador e do círculo de gola. Exemplo: Raio do círculo de gola igual a um terço do raio do equador. Passo angular igual a 90°.

4 — **Epiclóide encurtada** — O passo angular marcado sôbre o círculo de gola, maior do que o arco correspondente ao comprimento da circunferência resultante da diferença entre o

raio do equador e do círculo de gola. Exemplo: Raio do equador igual a 20cm, raio do círculo de gola igual a 16 cm, passo angular igual a 120°.

5 — **Hipociclóide regular** — O passo angular marcado sôbre o equador, igual ao arco correspondente ao comprimento da circunferência resultante da diferença entre o raio do equador e do círculo de gola. Exemplo: Raio do equador igual ao dobro do raio do círculo de gola. Passo angular igual a 90°.

6 — **Hipiclóide alongada** — O passo angular marcado sôbre o equador, menor do que o arco correspondente ao comprimento da circunferência resultante da diferença entre o raio do equador e do círculo de gola. Exemplo: Raio do círculo de gola igual a um terço do raio do equador. Passo angular igual a 90°.

7 — **Hipiclóide encurtada** — O passo angular marcado sôbre o equador, maior do que o arco correspondente ao comprimento da circunferência resultante da diferença entre o raio do equador e do círculo de gola. Exemplo: Raio do equador igual a 20cm, raio do círculo de gola igual a 16cm, passo angular igual a 120°.

A EPICICLÓIDE REGULAR

Imaginemos um semi-tóro oriundo da secção plana feita num tóro circular aberto de eixo vertical, por um plano de frente (figura 9) dado por suas projeções em épura. Suponhamos que o raio do círculo de gola seja a metade do raio do equador. Assim, a circunferência resultante da subtração dos raios terá como raio a metade do que corresponde ao círculo de gola. Se esta rolar sôbre este último, sem escorregar, à uma rotação completa (360°) terá percorrido a metade desta, por causa da relação existente entre os raios de 1:2.

Por isso, tomaremos o passo angular igual ao arco percorrido sôbre o círculo de gola igual a 180°, determinando em seguida as projeções da pseudo hélice tórica nos pontos de 12 a 12_1 na projeção horizontal e de 12' a $12'_1$ na projeção vertical.

Os pontos de 12 a 6 serão visíveis na projeção horizontal, sendo invisíveis os restantes de 7 a 11. Na projeção vertical, serão invisíveis 1', 2', 10' e 11', sendo os demais visíveis.

Observação: — Os pontos 12, 6, 12_1, pertencem ao plano horizontal que passa pelo equador.

Apliquemos em seguida aos pontos da pseudo hélice tórica, o princípio das Projeções Hiperbólicas, supondo um hiperbolóide diretor que tenha as geratrizes inclinadas de 45° E com o plano horizontal de projeção, projetando os pontos sôbre o plano do equador.

Por uma rotação em tôrno do eixo do tóro, trazemos os pontos da pseudo hélice para o meridiano de perfil, de menor afastamento, obteremos os pontos de: 1_1 a 11_1 na projeção horizontal e de $1'_1$ a $11'_1$ na projeção vertical.

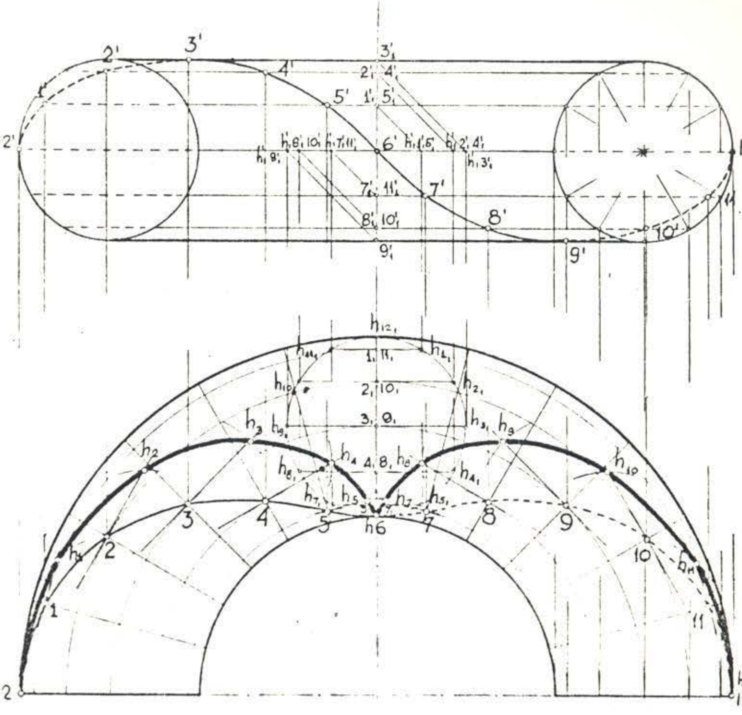

Fig. 9

As projetantes frontais que passam por estes pontos terão seus traços sôbre o plano do equador na projeção vertical, de $h'_{1_1}{}'$ a $h'_{11_1}{}'$ e na projeção horizontal, de h_{1_1} a h_{11_1} pertencentes à circunferência cujo diâmetro é a diferença entre pertencentes à circunferência cujo diâmetro é a diferença entre os raios do equador e do círculo de gola.

Por uma rotação inversa, trazemos os pontos de 1_1 a 11_1, juntamente com os traços das projetantes hiperbólicas de h_{1_1} a h_{11_1}, para as posições primitivas de 1 a 11, que com os respectivos traços obtemos os pontos de h_1 a h_{11}. A curva que une êsses pontos representa a **Epiciclóide Regular** gerada por um ponto da circunferência dos traços das projetantes hiperbólicas, quando esta rolar sôbre o círculo de gola, sem escorregar.

Como vimos, acabamos de obter uma curva geométrica plana pela projeção hiperbólica de uma curva revessa traçada na superfície do tóro circular aberto, aplicando os princípios fundamentais da Geometria Descritiva de Gaspar Monge.

CASO PARTICULAR DA "CARDIÓIDE"

Para obtermos a "Cardióide"' por meio da projeção hiperbólica de uma pseudo hélice, imaginemos (figura 10) as projeções de um tóro circular aberto, de eixo vertical, no qual o raio do círculo de gola seja igual à um têrço do raio do equador. Evidentemente, a diferença entre os raios, dará uma circunferência, cujo diâmetro será igual ao do círculo de gola.

Determinemos no tóro mencionado, as projeções da pseudo hélice, supondo o passo angular igual a 360°, obteremos na projeção horizontal os pontos de 1 a 12 e de 1' a 12' na projeção vertical. Apliquemos à curva obtida o princípio das projeções hiperbólicas, tomando como superfície diretora, um hiperbolóide que tenha suas geratrizes inclinadas de 45°E com o plano horizontal de projeção, determinando as projeções dos diferentes pontos da hélice, sôbre o plano do equador do tóro.

De acôrdo com o princípio estabelecido, trazemos todos os pontos por meio de rotação em tôrno do eixo do tóro, para o meridiano de menor afastamento e de perfil, obtendo os pontos de 1_1 a 12_1 na projeção horizontal e de $1'_1$ a $12'_1$ na projeção vertical.

Tracemos por êstes pontos as projetantes frontais, cujos traços sôbre o plano do equador determinam na projeção horizontal os pontos de h_{1_1} a h_{12_1}, pontos êsses, que pertencem à circunferência de diâmetro igual à diferença entre os raios do equador e do círculo de gola. Esta circunferência rolando sôbre este último, sem escorregar, poderá dar lugar à uma CARDIÓIDE, porque seus raios são iguais.

Com efeito, se por uma rotação inversa, trouxermos os pontos de h_{1_1} a h_{12_1} para seus lugares de origem, obteremos

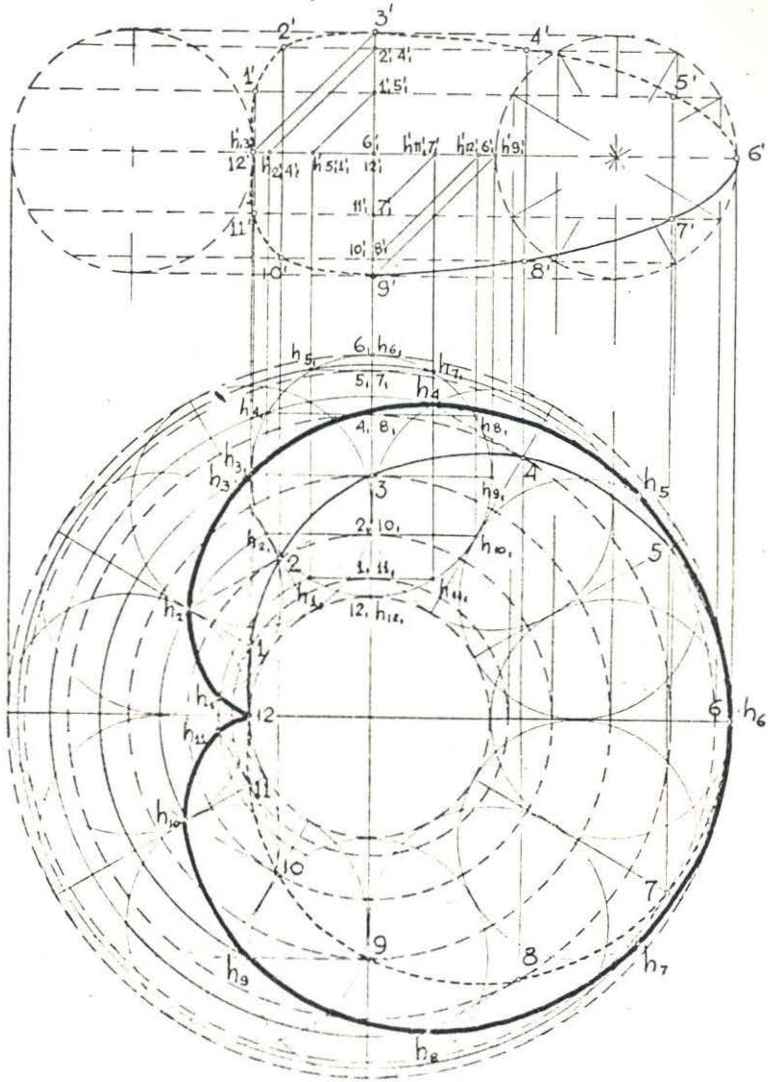

Fig. 10

sôbre tangentes aos paralelos dos pontos 1 a 12, as projeções hiperbólicas dêsses pontos, de h_1 a h_{12}. A curva que reune êsses pontos é uma **CARDIÓDE.** Pode-se ver na figura a construção planimétrica desta, coincidindo com as projeções obtidas.

A EPICICLÓIDE ALONGADA

Suponhamos um semi-tóro originado pela secção por um plano frontal, num tóro circular aberto, de eixo vertical (figura 11), no qual o raio do círculo de gola é igual a um têrço do raio do equador.

A circunferência que tem como diâmetro a diferença entre os raios do equador e do círculo de gola é igual a êste último. Se esta circunferência rolar sôbre o círculo de gola, sem escorregar, o arco descrito será de 360°.

Se lançarmos mão do seguinte artifício: "Imaginarmos que uma circunferência concêntrica a esta, com um raio menor, rolar sôbre outro círculo, de tal maneira que descreva sôbre êste, um arco menor do que 360°, por exemplo um arco de 90° para uma volta completa, um ponto da primeira circunferência durante êste movimento descreverá uma Epiciclóide Alongada, de acôrdo com o que já conhecemos para a construção planimétrica desta curva.

Este raciocínio nos mostra a necessidade de construirmos uma pseudo hélice com um passo menor do que 360° (se conservarmos o passo angular de 360° recairemos no caso anterior) e é o que faremos determinando na épura as projeções ortogonais de uma pseudo hélice com o passo angular de 90°, por exemplo. Teremos os pontos de 12 a 12_1 na projeção horizontal e de 12' a $12'_1$ na projeção vertical.

Por uma rotação em tôrno do eixo do tóro façamos os pontos coindirem com o meridiano de perfil, de menor afastamento obtendo de 1_1 a 12_1, na projeção horizontal e de $1'_1$ a $12'_1$ na projeção vertical.

Tomando como superfície diretora das projeções hiperbólicas um hiperbolóide que tenha suas geratrizes inclinadas de um ângulo de 45°E com o plano horizontal de projeção, traçaremos por esses pontos projetantes paralelas à direção dada, cujos traços sôbre o plano do equador se localizam na projeção horizontal nos pontos de h_{1_1} a h_{12_1}, pertencendo todos à circunferência de diâmetro igual à diferença entre os raios do equador e do círculo de gola.

Trazendo os pontos do meridiano de perfil, por uma rotação inversa aos primitivos lugares, os traços das projetantes

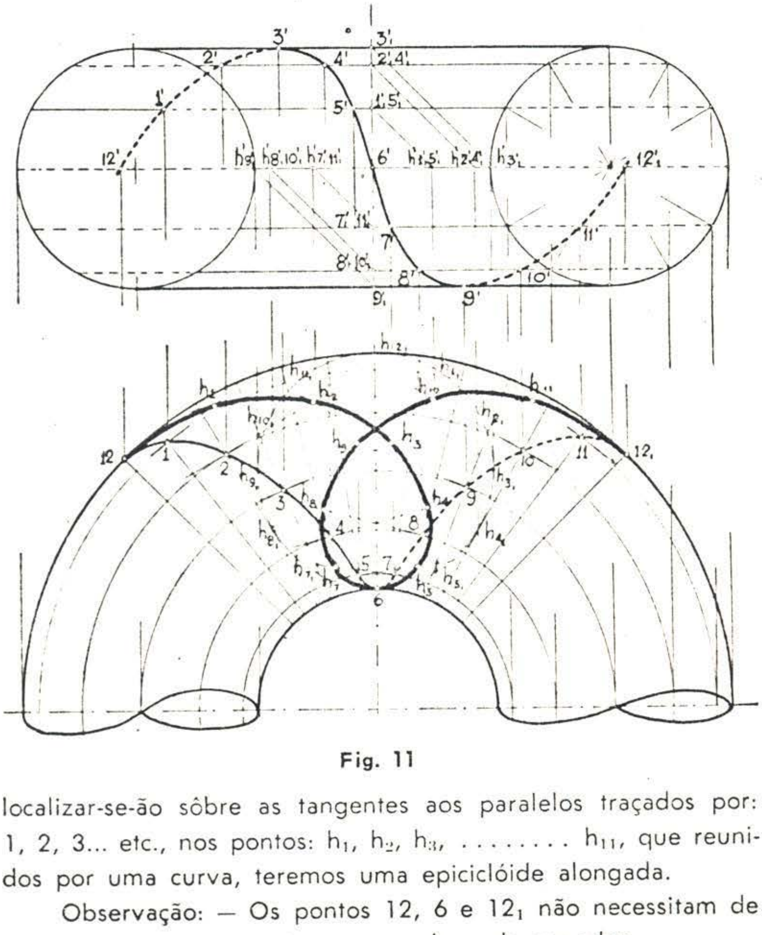

Fig. 11

localizar-se-ão sôbre as tangentes aos paralelos traçados por: 1, 2, 3... etc., nos pontos: h_1, h_2, h_3, ... h_{11}, que reunidos por uma curva, teremos uma epiciclóide alongada.

Observação: — Os pontos 12, 6 e 12_1 não necessitam de projetantes, porque pertencem ao plano do equador.

A EPICICLÓIDE ENCURTADA:

Consideremos um semi-tóro aberto, de eixo vertical, dado por suas projeções em épura (figura 12), no qual a diferença entre os raios do equador e do círculo de gola, dê uma circunferência de raio tal, que o passo angular marcado sôbre o círculo de gola, seja um arco maior do que o comprimento do arco descrito por esta, sôbre o círculo de gola, quando sôbre êste rolar, sem escorregar.

Suponhamos por exemplo que, sendo o raio do equador igual a 20cm e do círculo de gola igual a 16 cm, a diferença será de 4 cm. Ora, a circunferência com esse diâmetro, rolando sôbre o círculo de gola sem escorregar, descreverá sôbre êste um arco de 45°. Se fixarmos um passo angular maior do que 45°, por exemplo: 120°, poderemos fazer um raciocínio análogo ao do caso anterior:

"— Se imaginarmos uma segunda circunferência concêntrica com a primeira e apresentando um raio maior, tal que, rolando (a segunda) sôbre outro círculo decreva, sôbre êste o seu comprimento dando um arco de 120°, para uma volta completa, um ponto qualquer da primeira circunferência descreverá durante êsse movimento uma **"epiciclóide encurtada".**

Êste raciocinio foi feito baseado no processo construtivo de uma hipociclóide encurtada.

Baseados neste raciocínio, determinemos no tóro dado, as projeções ortogonais de uma pseudo hélice tendo como passo angular um arco de 120°.

Teremos na projeção horizontal, os pontos de 12 a 12_1 e de 12' a $12'_1$ na projeção vertical. A rotação em tôrno do eixo do tóro os trará para o meridiano de perfil: em 1_1, 2_1, 3_1 . . etc. e $1'_1$, $2'_1$, $3'_1$ . . . . etc. Observemos que os pontos: 12, 6 e 12_1 pertencem ao plano do equador.

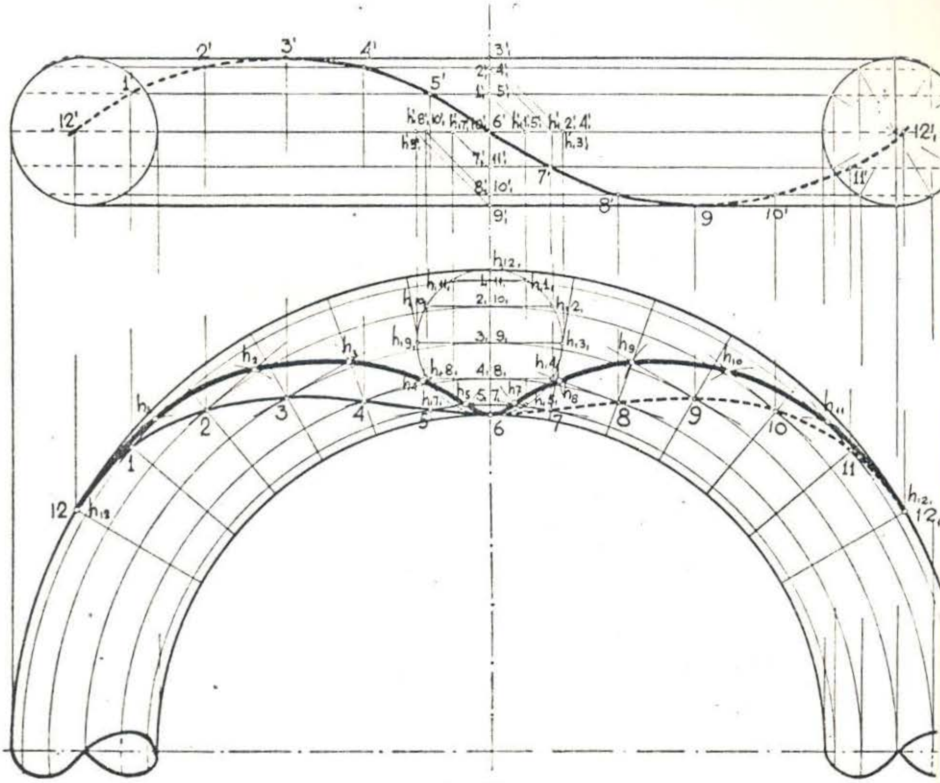

Fig. 12

Tomando como superfície diretora um hiperbolóide de revolução de uma fôlha que tenha suas geratrizes inclinadas de 45°D com o plano horizontal de projeção e traçando dêsses pontos as projetantes frontais, determinaremos sôbre o plano do equador seus traços, que na projeção horizontal darão os pontos de h_{1_1} a h_{11_1} situados sôbre a circunferência que possue como diâmetro a diferença entre os raios do círculo de equador e do círculo de gola.

Por uma rotação inversa, obteremos os traços das projetantes: de h_1 a h_{11}, sôbre as tangentes aos paralelos correspondentes aos pontos da pseudo hélice.

A reunião dos pontos obtidos pelos traços das projetantes hiperbólicas sôbre o plano do equador, será uma curva correspondente à EPICICLÓIDE ENCURTADA.

A HIPOCICLÓIDE REGULAR.

Seja um semi-tóro circular aberto, dado por suas projeções em épura (figura 13) no qual o raio do círculo de gola é a metade do raio do equador.

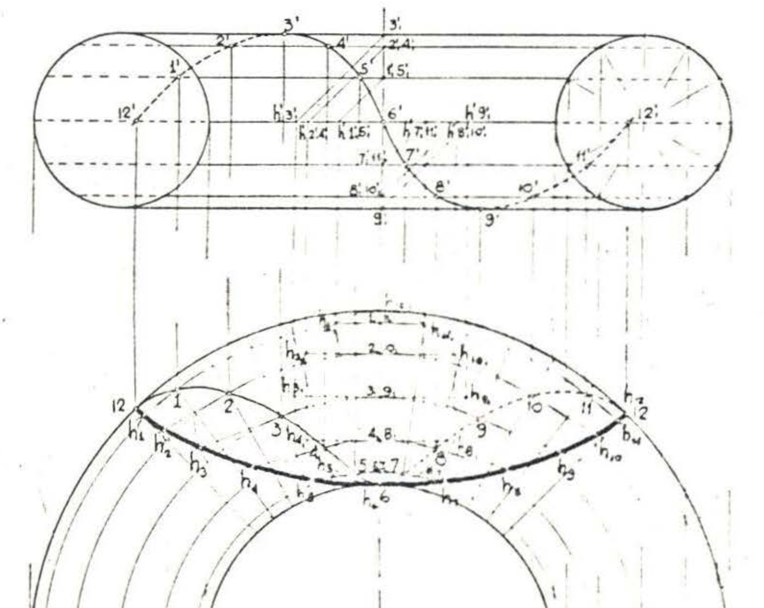

Fig. 13

Se a circunferência que possue como diâmetro a diferença entre o raio do equador e o círculo de gola, rolar na parte interna do equador sem escorregar, descreverá sôbre o mesmo um

arco igual ao seu comprimento, que no exemplo dado, corresponde a 90^0, porque seu raio é 1/4 do raio do equador.

Portanto se fixarmos o passo angular em 90^0 e construirmos as projeções ortogonais da pseudo hélice, teremos os pontos de: 12 a 12_1 na projeção horizontal e de 12' a $12'_1$ na projeção vertical. Observemos que os pontos 12, 6 e 12_1 estão situados sôbre o equador do tóro.

Tomemos como superfície diretora das projeções hiperbólicas, um hiperbolóide de revolução de uma fôlha que tenha as geratrizes inclinadas de 45^0D. com o plano horizontal de projeção.

Por meio de uma rotação em tôrno do eixo do tóro, façamos com que os pontos da hélice se transfiram para o meridiano de perfil de menor afastamento e obtemos os pontos de: 1_1 a 11_1 na projeção horizontal e de: $1'_1$ a $11'_1$ na projeção vertical. Tracemos por estes pontos projetantes frontais, paralelas às geratrizes de frente do hiperbolóide, determinando os traços sôbre o plano do equador. Estes na projeção horizontal se localizam sôbre a circunferência cujo diâmetro é a diferença entre os raios do equador e do círculo de gola.

A rotação inversa trará os traços, para as posições primitivas dos pontos da pseudo hélice, situados sôbre as tangentes traçados destes pontos aos respectivos paralelos, nos pontos de: h_1 a h_{11}.

A curva que une êsses pontos será uma HIPOCICLÓIDE REGULAR, gerada pela circunferência que passa pelos traços das projetantes hiperbólicas e cujo diâmetro é a diferença entre os raios do equador e o círculo de gola, quando esta rolar no interior do equador, sem escorregar.

A HIPOCICLÓIDE ALONGADA.

Imaginemos um semi-tóro circular aberto, dado por suas projeções em épura (figura 14) no qual vamos supôr o raio do círculo de gola igual a um têrço (1/3) do raio do equador. A diferença entre os raios, dará uma circunferência de raio igual a 1/3 do raio do equador.

Se esta circunferência rolar na parte interna do equador sem escorregar, descreverá um arco correspondente a 120° (pela relação de 3:1 entre os raios). Se imaginarmos porém uma segunda circunferência concêntrica com a primeira e de raio menor, rolando no interior de outro círculo, descrevendo neste um arco de 90° por exemplo, para uma volta completa, um ponto qualquer da primeira circunferência acompanhando o movimento, descreverá uma hipociclóide alongada.

Determinemos no tóro dado as projeções ortogonais da pseudo hélice tórica, fixando o passo angular em 90°, teremos assim na projeção horizontal os pontos de 1 a 1_1 e de 1' a $1'_1$ na projeção vertical. Observemos que os pontos 1, 7 e 1_1 encontram-se sôbre o plano do equador. Trazendo os pontos do eixo do tóro, teremos os pontos de: 2_1 a 11_1 e de: $2'_1$ a $11'_1$ nas projeções horizontal e vertical respectivamente.

Em seguida, projetemos os pontos obtidos, paralelamente às geratrizes de um hiperbolóide de revolução de uma fôlha que servirá de superfície diretora e na qual as geratrizes frontais, formam ângulo de 45° D com o plano horizontal de projeção.

Tracemos pelos pontos, projetantes paralelas à direção dada, acharemos os seus traços sôbre o plano do equador, sendo

que na projeção horizontal êstes se localizam sôbre a circunferência que têm como diâmetro a diferença entre os raios do equador e do círculo de gola.

Transferindo os pontos da pseudo hélice por meio de rotação inversa, para seus primitivos lugares a 1 a 1_1, na projeção

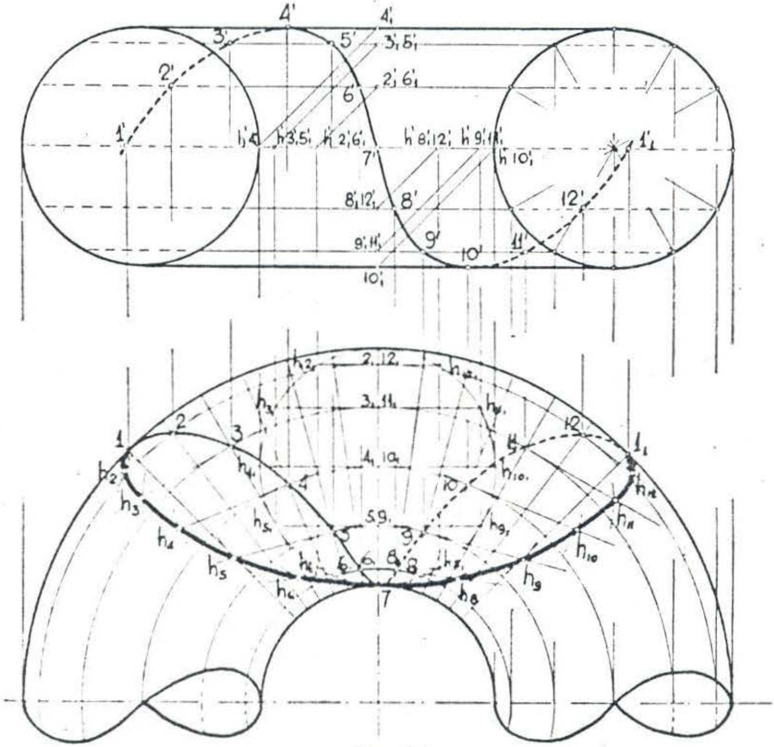

Fig. 14

horizontal, os traços das projetantes hiperbólicas estarão sôbre tangentes aos paralelos, traçadas por cada ponto da curva e obteremos então os pontos de h_2 a h_{11}. A curva que une êsses pontos é uma **Hipociclóide alongada** resultante da projeção hiperbólica dos pontos de uma pseudo hélice sôbre o plano do equador.

A HIPOCICLÓIDE ENCURTADA

Seja o semi tóro aberto de eixo vertical dàdo por suas projeções em épura (figura 15). Se construirmos as projeções ortogonais da pseudo hélice, fixando o passo angular (120° por exemplo) maior do que o arco descrito pela circunferência que têm como diâmetro a diferença entre os raios do equador e do círculo de gola, quando esta rolar sem escorregar no interior do equador, a projeção hiperbólica da curva acima, sôbre o plano do equador, será uma Hipociclóide Encurtada.

O raciocinio que empregaremos, será baseado em imaginar uma segunda circunferência concêntrica com a primeira e de raio maior, rolando no interior de um outro circulo, sem escorregar, de modo a descrever neste um arco igual ao seu comprimento (120° por exemplo), um ponto qualquer da primeira circunferência durante èsse movimento, descreverá uma Hipociclóide Encurtada.

Assim sendo, determinemos em épura, as projeções ortogonais da pseudo hélice e teremos os pontos de: 12 a 12_1 na projeção horizontal e de: 12' a $12'_1$ na projeção vertical. Observemos que os pontos: 12, 6 e 12_1, pertencendo ao plano do equador, não precisam ser projetados hiperbòlicamente.

Tomemos como superfície diretora um hiperbolóide de revolução de uma fôlha, que tenha as geratrizes inclinadas de 45°D com o plano horizontal de projeção.

Por meio de rotação em tôrno do eixo do tóro, façamos os pontos da curva coincidir com o meridiano de perfil, nos pontos de: 1_1 a 11_1 e de $1'_1$ a $11'_1$ nas projeções horizontal e vertical respectivamente.

Tracemos por êstes pontos as projetantes hiperbólicas frontais cujos traços sôbre o plano do equador na projeção horizontal, darão os pontos de h_{1_1} a h_{11_1}, localisados sôbre a circunferência que tem como diâmetro a diferença entre os raios do

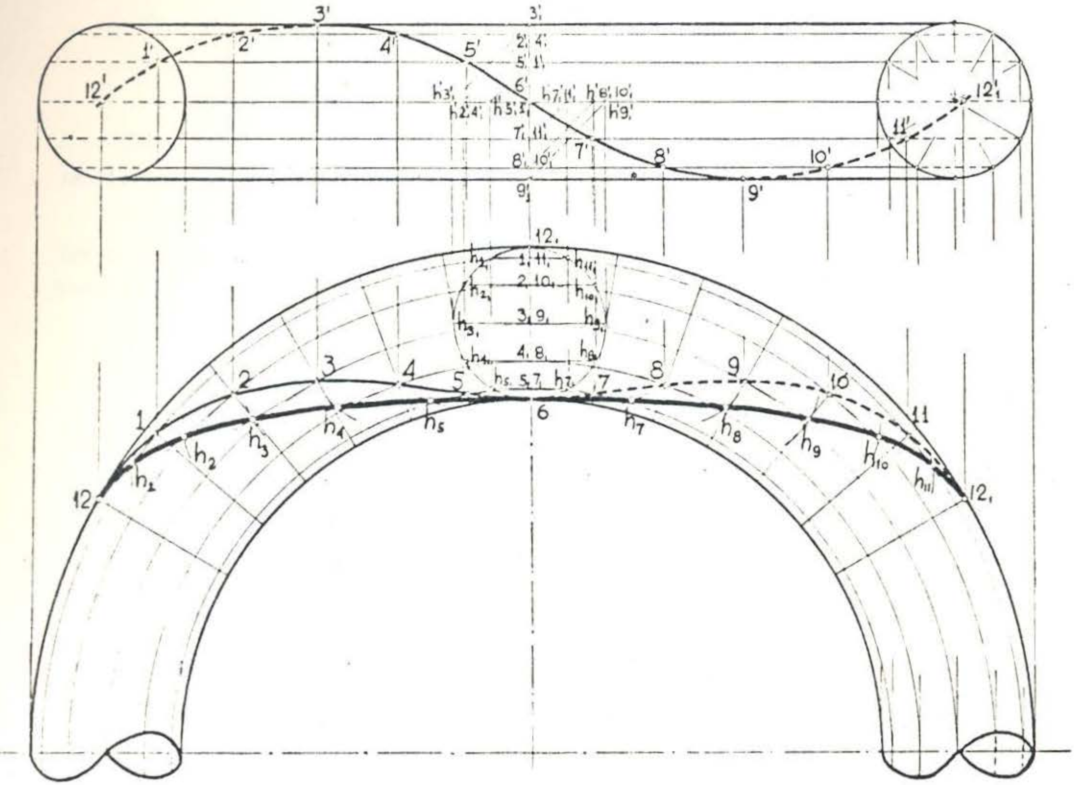

Fig. 15

equador e do círculo de gola. Por rotação inversa, façamos os pontos do meridiano de perfil voltarem às primitivas posições, juntamente com os traços das projetantes hiperbólicas darão os pontos de: h_1 a h_{11}. A curva que une os pontos obtidos é uma **Hipociclóide Encurtada.**

CURVAS DO TIPO LEMNISCATA

Como sabemos, as lemniscatas são quárticas planas resultantes da projeção de quárticas revessas.

São curvas que possuem a forma de um oito, apresentando um ponto duplo (nó) com duas tangentes principais para cada ramo.

As mais importantes são:

LEMNISCATA DE GERONO — resultante da projeção vertical da intersecção entre uma esfera e um cilindro circular de geratrizes verticais, cujo diâmetro é igual ao raio da esfera, de sorte que uma geratriz coincida com o eixo da esfera, estando os eixos no mesmo plano de perfil.

No tóro circular, aberto, temos:

LEMNISCATA HIPERBÓLICA DE BOOTH — é uma curva plana resultante da secção paralela ao eixo de uma superfície tórica, feita por um plano tangente à gola.

LEMNISCATA DE BERNOULLI — é uma curva plana resultante da secção feita por um plano paralelo ao eixo de uma superfície tórica cujo raio da circunferência geratriz é igual a 1 3 do raio do equador, plano êsse tangente à gola da superfície.

Esta lemniscata juntamente com a de Gerono, se distingue das demais por apresentar no ponto duplo, as tangentes principais ortogonais entre si.

Desejamos apresentar nesse trabalho, curvas do tipo lemniscata que resultam da projeção de curvas revessas traçadas na superfície tórica e que possuem aspectos diversos de acôrdo com as relações entre o círculo de gola e do equador da superfície.

A condição para se obter as curvas do tipo lemniscata é que a pseudo hélice seja formada por duas espiras e como consequência cada espira deverá ter o passo angular igual a 180°.

Imaginemos em primeiro lugar, uma superfície tórica aberta, dada por suas projeções em épura (Figura 16).

Tracemos as projeções de duas espiras da pseudo hélice

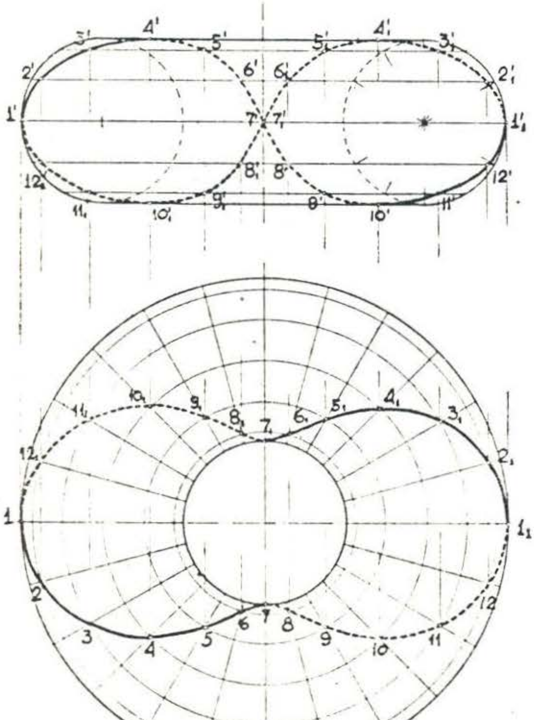

Fig. 16

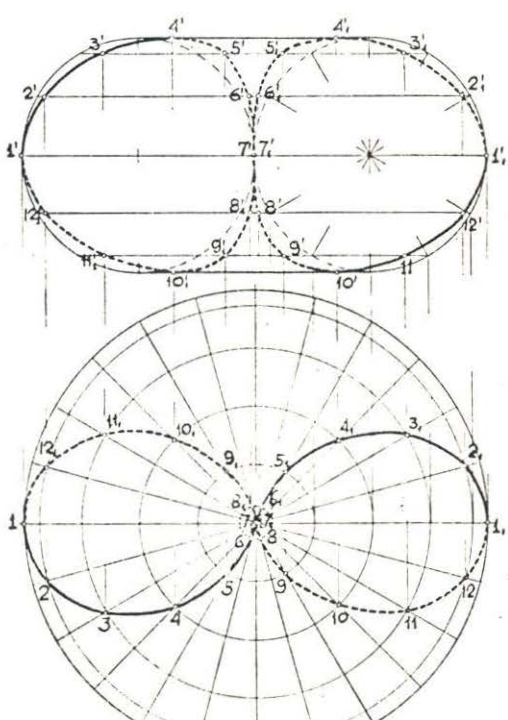

Fig. 17

na superfície dada, fixando o passo angular em 180° e partindo de um ponto do equador situado no meridiano de frente. O ponto gerador na projeção horizontal descreverá uma espira de 1 a 12 e a segunda espira de 1_1 a 12_1 correspondendo na pro-

jeção vertical os pontos de $1'$ a $12'$ para a primeira espira e de $1'_1$ a $12'_1$ para a segunda.

A reunião dos pontos na projeção vertical dará uma curva plana resultante da projeção de uma curva revessa traçada na superfície tórica, apresentando um ponto duplo $7'$ $7'_1$ e em forma de oito.

A projeção horizontal apresenta uma curva que tangencia o equador e possue um estreitamento nos pontos em que tangencia o círculo de gola.

O estreitamento nos leva a raciocinar que será maior, quanto menor fôr o círculo de gola e que aproximará os pontos de tangência neste círculo, quando êste tiver o raio nulo.

Evidentemente nessas condições o tóro que apresentar o círculo de gola com raio nulo, será um tóro fechado e a curva resultante da projeção de duas espiras de uma pseudo-hélice com passo angular igual a 180° (Figura 17) apresentará uma curva tipo lemniscata na projeção horizontal, cujo ponto duplo será o centro do tóro e teremos uma segunda curva do tipo lemniscata na projeção vertical, com a particularidade de apresentar uma única tangente aos dois ramos no ponto duplo, sendo a tangente o próprio eixo vertical de simetria.

Vemos assim a possibilidade de obter duas curvas do tipo lemniscatas resultantes da projeção sôbre o plano horizontal e vertical de uma curva revessa traçada na superfície de um tóro circular.

CONCLUSÃO

Escolhendo a superfície do Tóro Circular para a elaboração dessa tese, a finalidade do autor foi estudar as curvas reversas traçadas nesta superfície e suas projeções ortogonais.

A introdução do conceito de "Projeção Hiperbólica" tornou-se necessária para obtenção das curvas cíclicas: epi e hipociclóides regulares, alongadas e encurtadas na Geometria Descritiva.

Estes conceitos permitiram considerar o Hiperbolóide de revolução de uma fôlha como superfície directora para um sistema de projeções. A aplicação das projeções hiperbólicas à hélice cilíndrica normal mostrou a possibilidade de obtenção da evolvente à base do cilindro núcleo.

Sabemos também da importância que possuem na Engenharia as epiciclóides e hipociclóides, pois são curvas geométricas que satisfazem às condições geométricas e cinemáticas dos perfís conjugados, pois as engrenagens que possuem perfís cicloidais apresentam menores resistências passivas.