



Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas  
e da Natureza  
Instituto de Geociências  
Departamento de Astronomia

DETERMINAÇÃO DE ÓRBITAS  
DE BINÁRIAS VISUAIS

por

Sebastião Fernandes Cunha Sobrinho

orientador

José Augusto Buzque de Nazareth

maio - 1981

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a todas as pessoas que, sem qualquer interesse (sem intenção de se beneficiar) ajudam qualquer outro seu semelhante.

O parágrafo acima aplica-se inteiramente ao meu orientador neste projeto, José Augusto Buarque de Nazareth, que conseguiu tempo e paciência para que pudesse tornar realidade este projeto.

Meus sinceros agradecimentos a meus irmãos Abrahão, José Zacarias e Mauro Lúcio; a meu amigo Diórgenes Penteado; a meu tio Abdon e a meus colegas Manoel Ribeiro da Silva, Regina Ocirema, Sérgio Ferreira e Sérgio Viola.

## PALAVRAS CHAVES

Órbitas  
Método de Kowalsky  
Binárias Visuais

## RESUMO

Este projeto trata da obtenção de órbitas de binárias visuais de uma forma geral e da órbita da binária visual A88 como ilustração. São recordados conceitos básicos como Leis de Kepler e momento angular. São citados os métodos de Kowalsky, Zwier e Thiele sendo que ao método de Kowalsky é dada uma prioridade, pois é através dele que se obtém aqui a órbita (verdadeira) da binária A88 (para efeito ilustrativo). A parte principal do referido projeto trata da determinação das órbitas aparente e verdadeira da binária visual A88 usando dados obtidos por Aitken, Van Biesbroeck, Leavenworth, Bernewitz e Maggini.

## ÍNDICE

- I Introdução
- II Aspectos teóricos relativos às binárias visuais
- 1 - Conceitos e fórmulas fundamentais
    - 1.1-Leis de Kepler
    - 1.2-Anomalias excêntrica, E, e média, M
  - 2 - Órbita aparente
    - 2.1-O que vem a ser uma órbita aparente
    - 2.2-Considerações gerais
    - 2.3-Traçado da órbita aparente
  - 3 - Órbita verdadeira
  - 4 - Construção da elipse verdadeira a partir da elipse aparente e dos elementos orbitais
  - 5 - Orientação no espaço, co-senos diretores
- III Métodos para cálculos de órbitas
- 1 - Método de Kowalsky
  - 2 - Método de Zwier
  - 3 - Método de Thiele
- IV Encontrando a órbita aparente da binária visual A88  
( ADS, 11520 )
- 1 - Distribuição dos pontos referentes à binária visual A88
  - 2 - Construção de elipses aparentes
  - 3 - Verificação da Lei das Áreas
- V Cálculo dos elementos orbitais e das constantes de Thiele - Innes pelo método de Kowalsky
- 1 - Cálculo das constantes de Thiele - Innes
  - 2 - Cálculo dos elementos orbitais:  $\Omega$ ,  $i$  e  $w$
  - 3 - Cálculo da excentricidade e do semi-eixo maior
  - 4 - Cálculo dos elementos orbitais dinâmicos: período e época de passagem pelo periastro
- VI Conclusão
- VII Bibliografia.

## I INTRODUÇÃO.

Estrelas duplas visuais ( as estrelas que serão tratadas aqui) são pares ligados fisicamente, com períodos de revolução geralmente na faixa de poucos anos até pouco mais de mil anos.

As estrelas descrevem órbitas elípticas (órbitas absolutas) em torno do centro de massa comum (figura 1). Cada membro do sistema binário se movimenta de acordo com as leis de Kepler.

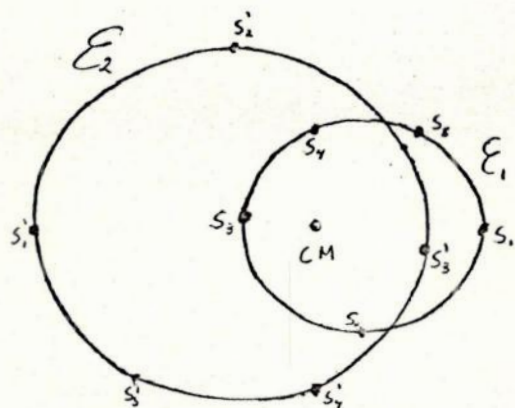


Figura 1. Ilustração a respeito do movimento das estrelas binárias visuais (órbitas absolutas), sendo:  $E_1$  a órbita absoluta da estrela  $S_1$  (de maior brilho, principal);  $E_2$  a órbita absoluta da estrela  $S_2$  (de menor brilho, companheira); CM o centro de massa do sistema, é foco de ambas as órbitas ( $E_1$  e  $E_2$ );  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ , as posições da estrela  $S_1$  nos instantes  $t_1, t_2, t_3, t_4$  e  $t_5$ ;  $s'_1, s'_2, s'_3, s'_4, s'_5$ , as posições da estrela  $S_2$  nos instantes  $t_1, t_2, t_3, t_4$  e  $t_5$ .

Observamos que, como em todo movimento kepleriano, as componentes situam-se sempre em pontos opostos, relativamente ao centro de massa.

Neste trabalho não trataremos da determinação das órbitas absolutas, pois para isso seria necessário considerações relativas ao movimento próprio, o que não será efetuado. Assim não daremos ênfase no cálculo das massas, embora isso seja de muita importância.

Tomando uma estrela como referência, a outra se move relativamente à primeira de maneira a descrever uma elipse, onde a estrela de referência (estrela principal) é um dos focos. A esta curva damos o nome de elipse verdadeira. Entretanto, o que se observa, quando se mede as coordenadas relativas, é a órbita aparente, que é a projeção da órbita verdadeira no plano tangente à esfera celeste, perpendicular à linha de visada.

Na determinação das órbitas verdadeiras, vários são os métodos que podem ser utilizados. Optamos pelo método de Kowalsky. E o

exemplo ilustrativo (partes IV e V) é dado pelo par A83. Os métodos de Thiele e de Zwier foram citados para que o trabalho não ficasse muito restrito.

Deve-se tomar cuidado para não confundir uma binária visual com um par ótico, pois neste, apesar de suas estrelas estarem separadas da mesma forma que as estrelas de uma binária visual (em termos de observações visuais ou micrométricas), deve-se levar em conta que as componentes de um par ótico não estão ligadas fisicamente (como se estão quase na mesma linha de visada), mas separadas tanto quanto o Sol está separado de qualquer outra estrela.

As estrelas binárias podem ser classificadas quanto à inclinação orbital i e ao semi-eixo maior a em: binárias eclipsantes, visuais e espectroscópicas. As eclipsantes apresentam inclinação orbital próximas a 90°, de forma que periodicamente uma estrela intercepta a luz da outra, ocorrendo eclipses. As visuais podem ser separadas opticamente, com interferômetro ou com micrômetro, já as espectroscópicas por apresentar o semi-eixo maior ( a ) bem menor que o das visuais, têm seu movimento detectado somente através da observação de velocidades radiais variáveis (o período das espectroscópicas é contado em dias, enquanto o das visuais é contado em anos).

## II ASPECTOS TEÓRICOS RELATIVOS ÀS BINÁRIAS VISUAIS

### 1) CONCEITOS E FÓRMULAS FUNDAMENTAIS

Equação cartesiana da elipse referida a seu centro (ver fig. 2):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{equação 1})$$

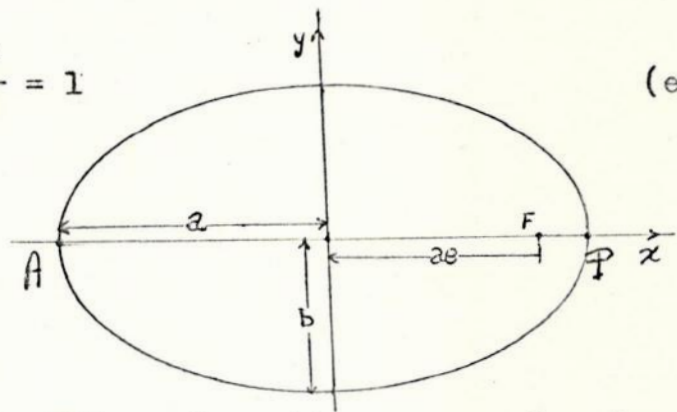


Figura 2. Elipse descrita por coordenadas retangulares (x, y).

Equação polar da elipse referida a seu foco (ver fig.3) :

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} \quad (\text{equação 2})$$

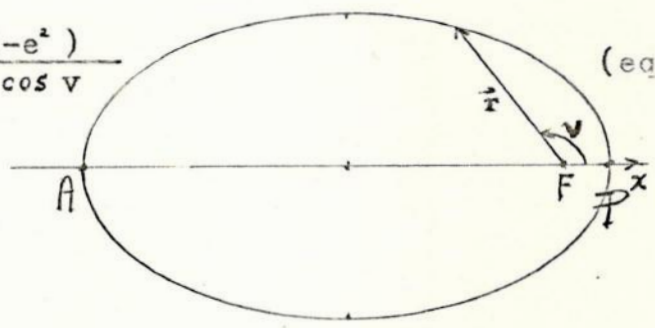


Figura 3. Elipse descrita por coordenadas polares (r,v).

Nas equações (1) a (4) temos:

a é o semi-eixo maior,

b = a√(1-e²) é o semi-eixo menor,

e = √(a² - b²) / a é a excentricidade,

F é um dos focos da elipse,

r = |r̄| é a distância entre um ponto qualquer da elipse e o foco de referência,

r̄ é o raio vetor, com origem no foco de referência e extremidade num ponto qualquer,

v é a anomalia verdadeira, ângulo contado desde o eixo dos x ( com origem na estrela principal), na direção do movimento até a posição da companheira,

(r , v ) são as coordenadas polares em se tratando da elipse verdadeira,

ae é a distância entre um dos focos e o centro da elipse,

p = a(1 - e²) é o semi latus rectum,

P e A são, respectivamente, o periastro e o apoastro.

O movimento das estrelas binárias é descrito pela fórmula

$$\frac{4\pi^2 a^3}{P^2} = K (m_1 + m_2) \quad (\text{equação 3})$$

Quando se relaciona as massas  $m_1$  e  $m_2$  (de  $S_1$  e  $S_2$ ) à massa do Sol, a constante  $K$  passa a valer  $4\pi^2$ , e portanto a fórmula anterior se reduz à forma

$$m_1 + m_2 = \frac{a^3}{P^2}, \quad (\text{equação 4})$$

onde

$a$  é o semi-eixo maior,  $P$  é o período de revolução, e  $m_1$  e  $m_2$  são medidas em unidades de massa solar.

Seja um sistema binário composto de massas  $m_1$  e  $m_2$  e suponhamos que é desprezível a influência de qualquer outra massa sobre elas. Como vimos, o movimento de qualquer uma destas estrelas relativamente à outra será uma elipse, com uma num dos focos e a outra descrevendo esta curva (fig.4).

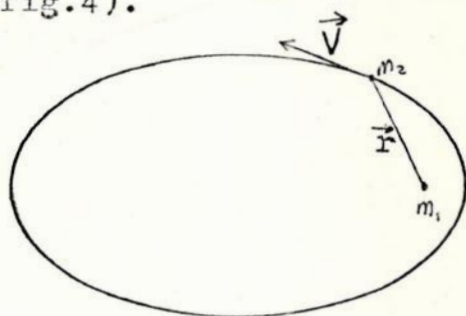


Figura 4.  $\vec{V}$  é a velocidade relativa de  $m_2$ .

Deve-se notar aqui as propriedades do momento angular,  $\vec{L}$ .

Sabemos que nas condições postuladas,

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{V} = \text{constante},$$

e como o momento angular se conserva, o movimento se verifica num plano invariante que contém  $\vec{V}$  e  $\vec{r}$  (plano da órbita verdadeira).

### 1.1) LEIS DE KEPLER

1ª-As órbitas das binárias são elípticas, com a estrela principal ocupando um dos focos.

2ª-A área varrida pelo raio vetor,  $\vec{r}$ , é proporcional ao intervalo de tempo necessário para que a estrela companheira descreva a elipse.

3ª-O produto do quadrado do período de revolução pelo



cubo da distância entre  $m_1$  e  $m_2$  é constante.

Como o raio vetor que une duas binárias varre áreas iguais em intervalos iguais de tempo, temos que,  $m_1$  completa uma volta em torno de  $m_2$ , em um intervalo de tempo correspondente ao período,

$$\frac{2\pi ab}{P} = c, \quad (\text{equação 5})$$

onde,  $c$  é o dobro da constante das áreas e  $P$  é o período de revolução.

### 1.2) ANOMALIAS EXCÊNTRICA, $E$ , E MÉDIA, $M$ .

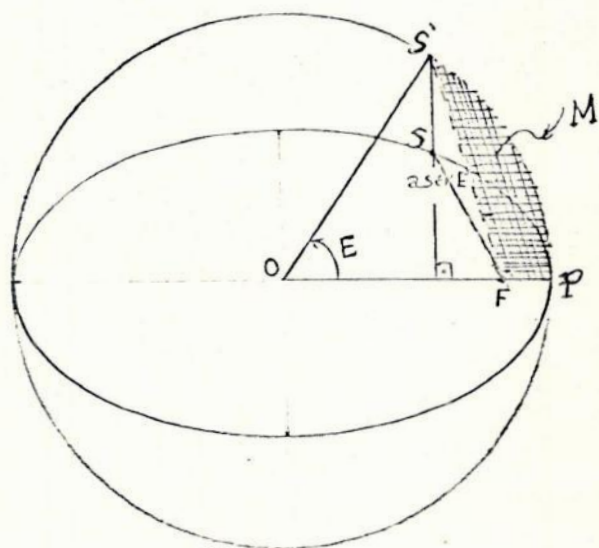


Figura 5. Definição das anomalias excêntrica e média, onde  $S$  é uma posição qualquer da estrela companheira na elipse verdadeira,  $S'$  é a posição correspondente da estrela companheira no círculo auxiliar,  $F$  é o foco da elipse verdadeira (estrela principal),  $P$  é o periaastro,  $O$  é o centro da elipse verdadeira e do círculo auxiliar,  $M$  (anomalia média) é a área tracejada (área entre o arco  $S'P$  e os segmentos de reta  $FP$  e  $S'F$ ),  $E$  é o ângulo  $POS'$ .

Pela figura 5 nota-se que a anomalia excêntrica vem a ser a posição angular do lugar correspondente a  $S$  no círculo auxiliar.

A área  $\pi a^2$  do círculo auxiliar é varrida no intervalo de tempo correspondente ao período  $P$ . Portanto a área  $FS'P$  é varrida no intervalo de tempo  $t-T$ , onde  $T$  é a época da passagem pelo periaastro. A área  $FS'P$  ( $= M$ ) pode ser expressa como a diferença entre o setor  $S'OP$  e o triângulo  $OS'F$

$$FS'P = S'OP - OS'F,$$

$$OS'F = a \sin E,$$

onde a equação de Kepler

$$M = E - a \sin E = \frac{2\pi(t-T)}{P}. \quad (\text{equação 6})$$

A equação de Kepler descreve uma equação transcendente entre anomalia média e a anomalia excêntrica.

Quando se deseja obter a posição ( $r$ ,  $v$ ) da companheira (na órbita verdadeira) a partir da anomalia excêntrica, usa-se as equações

$$\operatorname{tg} \left( \frac{v}{2} \right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \left( \frac{E}{2} \right), \quad (\text{equação } 7)$$

$$r = a (1 - e \cos E). \quad (\text{equação } 8)$$

As coordenadas elípticas retangulares  $x$  e  $y$  (também chamadas coordenadas reduzidas da componente B), como função de  $E$  são dadas por

$$x = \frac{r}{a} \cos v = \cos E - e \quad (\text{equação } 9)$$

$$y = \frac{r}{a} \sin v = \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

O movimento médio em graus por ano é dada por

$$n = \frac{360^\circ}{P}.$$

As relações e fórmulas acima foram tiradas de van de Kamp, 1967, página 152.

A relação entre a distância de uma estrela à Terra ( $d$ ), a paralaxe em segundos de arco ( $p''$ ) e a distância Terra - Sol (1 UA) é dada por

$$d = \frac{1 \text{ UA}}{p'' \operatorname{sen} 1''} = \frac{1 \text{ UA}}{206265 p''}, \quad (\text{equação } 10)$$

Quando a paralaxe é de  $1''$ , temos que a distância vale 1 parsec (1 pc), portanto

$$1 \text{ pc} = 206265 \text{ UA},$$

a partir do resultado acima e relacionando a distância Terra - Sol com a distância percorrida pela luz em um ano, temos

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ano-luz},$$

$$1 \text{ ano-luz} = 6,31 \times 10^4 \text{ UA},$$

paralaxe em graus por ano dada por

$$p'' = \frac{a''}{a(\text{UA})}.$$

## 2) ÓRBITA APARENTE

## 2.1) O QUE VEM A SER UMA ELÍPSE APARENTE

Pela figura 6 pode-se observar a elipse aparente.

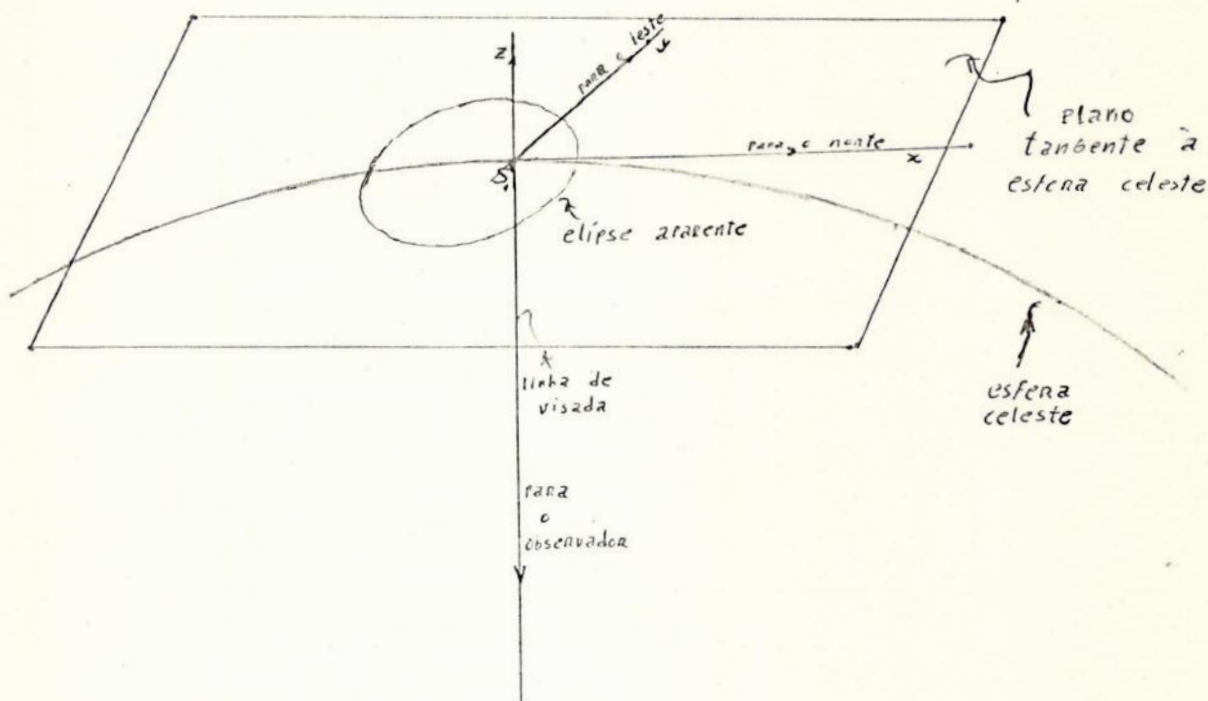


Figura 6. Ilustração de uma elipse aparente.

A órbita aparente é a projeção da órbita verdadeira no plano perpendicular à linha de visada e tangente à esfera celeste no ponto determinado pela estrela principal (plano do céu) (figs. 6 e 7)

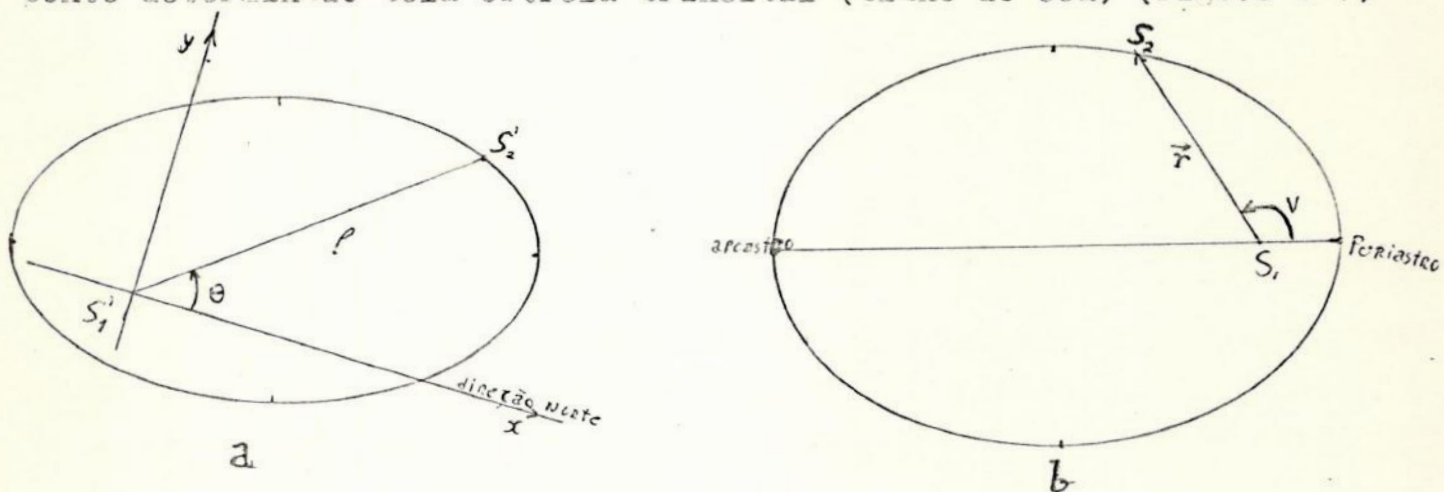


Figura 7 (a e b). Figuras ilustrando a órbita aparente (7a) e a órbita verdadeira;  $S_1'$  é a projeção de  $S_1$  e  $S_2'$  é a projeção de  $S_2$ , assim como a órbita aparente é a projeção da órbita verdadeira.

## 2.2) CONSIDERAÇÕES GERAIS

Para que se possa fazer uma observação completa de estrelas duplas visuais e obter os dados necessários à construção das elipses aparentes e, posteriormente, verdadeiras, devemos registrar o tempo

de observação ( $t$ ), a posição angular ( $\theta$ ) da companheira em relação à principal, a distância angular ( $\rho$ ) entre as duas estrelas e as velocidades radiais dessas estrelas. Desses dados, o tempo de observação é conhecido com muito maior precisão que qualquer dos outros. Entre as duas coordenadas de posição, a posição angular ( $\theta$ ) da companheira relacionada à principal é muito mais precisa que a distância angular, quando se trata de observações visuais. O instante da observação é necessário para determinar o movimento na elipse (da companheira relacionada à principal). É nessa determinação que se aplica a lei da velocidade areolar de Kepler.

A função da velocidade radial é determinar qual nodo é ascendente e qual é descendente. O nodo descendente é aquele em que a estrela mais se aproxima (desvio para o azul nas raias espectrais); o nodo será ascendente no momento em que a estrela mais se afastar (desvio para o vermelho nas raias espectrais). Alguns autores tomam como ascendente o nodo tomado aqui como sendo descendente, e vice versa.

As coordenadas medidas devem estar reduzidas a um equinócio e para isto é necessário fazer a correção da coordenada em precessão e em movimento próprio (Aitken, 1967). A correção para a precessão é dada por

$$\Delta\theta = -0,00557 (\sin \alpha)(\sec \delta)(t-t_0), \quad (\text{equação 11})$$

onde

$\alpha$  é a ascensão reta da binária,

$\delta$  é a declinação da binária,

$t_0$  é a época de referência e

$t$  é o instante da observação.

A correção para o movimento próprio é dada por

$$\Delta\theta = -15 \mu (\sin \delta) (t - t_0), \quad (\text{equação 12})$$

onde

$\mu$  é movimento próprio em ascensão reta, expresso em segundos de tempo.

Deve-se lembrar que os cálculos para determinação da elipse aparente são, em geral, baseados em medidas tomadas em um ou mais textos. E tais medidas são portadoras de erros observacionais, erros instrumentais e até erros introduzidos às medidas por tendências devido ao subconsciente por parte do observador.

Deve-se notar aqui que somente os erros aleatórios são minimizados quando se faz um cálculo usando o método dos mínimos quadrados. Deve-se verificar, então, quando do traçado da órbita aparente, se a medida é ou não a média de várias observações feitas nu

na mesma noite de observação, quais as condições da observação e o tipo de telescópio utilizado. É por esta razão que, dependendo da experiência do observador e dos fatores citados, se adota o critério de se dar pesos às medidas. Assim, uma medida muito boa será a aquela em que foram feitas várias observações numa noite para uma só medida (sendo esta medida igual à média aritmética das observações feitas naquela noite) por um observador experimentado. De forma que as combinações desses quatro fatores (experiência do observador, número de observações tomadas numa noite, tipo de telescópio utilizado e condição de observação em geral) determinam se uma medida é digna de muita, média ou pouca confiança. Pontos com maiores pesos indicam, mais que os de menor peso, por onde irá passar a elipse.

Outro detalhe a ser lembrado é o cuidado na utilização de lugares normais, pois não é bom tomar pontos normais envolvendo várias medidas muito espalhadas. No caso de uma distribuição de pontos experimentais como a da figura 8,

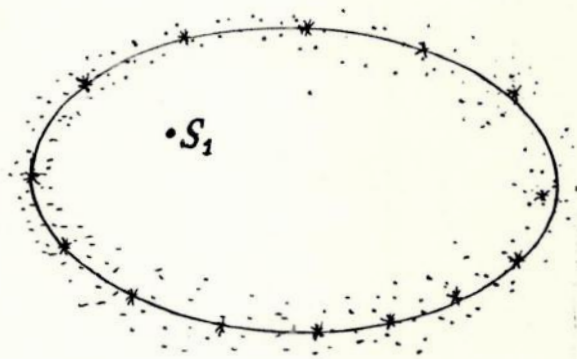


Figura 8. Os pontos determinam as medidas e os asteriscos determinam os lugares normais das medidas.  $S_1$  indica a posição da primária.

para que se possa tomar lugares normais no traçado da elipse, deve-se notar: primeiro, se a distribuição contém muitas medidas e todas relativas a um só período; segundo, deve-se tomar lugares normais de pontos próximos.

Existem várias maneiras de se obter coordenadas de posição de uma estrela dupla. Tais coordenadas podem ser polares ou retangulares. Quando as observações são feitas em um micrômetro, as coordenadas medidas são as coordenadas polares  $\rho$  e  $\theta$ , onde a origem da posição angular ( $\theta$ ) é indicada pela direção norte ( $\theta$  tomado em graus e contado no sentido anti-horário).

Quando as observações são feitas em placas fotográficas, as coordenadas são retangulares,  $x$  e  $y$ , sendo que a direção do eixo  $x$  é

a direção norte e o eixo y é perpendicular ao eixo x e positivo na direção leste. As observações feitas em placas fotográficas são muito mais precisas ( por um fator de 10) do que as obtidas por micrômetros (Aitken, 1967).

### 2.3) TRAÇADO DA ÓRBITA APARENTE

Duas são as maneiras usadas para se determinar a elipse aparente. A que consiste em plotar as posições da secundária ( tanto em coordenadas polares como retangulares), com a primária tomada como origem, dando maior peso às melhores medidas. Com a ajuda de um elipsógrafo ou com o uso de dois pinos e uma linha, traça-se uma elipse através dos pontos marcados e a ajustaremos até que tal elipse satisfaça a Lei das Áreas. O ajustamento precisa ser feito com a maior precisão e a curva elíptica traçada com grande cuidado, uma vez que a construção da elipse aparente é a parte crítica da determinação das órbitas verdadeira e aparente. A maneira de determinar-se a elipse obtida é válida é através da comparação das velocidades areolares. Com um planímetro mede-se os setores da elipse, comparando-os. Como a elipse aparente tem que satisfazer a lei das áreas, para cada setor da elipse obtém-se uma velocidade areolar e ao comparar estas velocidades areolares deve-se verificar onde deverá haver correção na elipse. Repete-se o processo: traça-se nova elipse, mede-se os setores elípticos, compara-se as diversas velocidades areolares, até que as divergências entre as velocidades areolares dos diversos setores sejam mínimas. Nesse momento, uma elipse satisfatória é obtida, pois satisfaz a lei das áreas ( $\rho^2 \frac{de}{dt} = \text{constante}$ ). O passo seguinte seria encontrar os elementos orbitais.

A segunda maneira é a seguinte: traça-se separadamente os gráficos  $\rho \times t$  e  $e \times t$ , onde  $e$  é a posição angular observada (tomada em graus),  $\rho$  é a distância observada (em segundos de arco) e  $t$  é o tempo de observação; sendo ainda, que  $\theta$  e  $\rho$  são tomadas como ordenadas e  $t$  é tomado como abscissa. Neste caso também deve-se dar maior peso às melhores medidas, de tal forma que os pontos vindos de melhores observações indicam, preferencialmente, por onde irão passar as referidas curvas. Depois de traçados os gráficos  $\theta \times t$  e  $\rho \times t$ , traça-se a elipse usando-se a forma das duas curvas:  $e \times t$  e  $\rho \times t$  (ou  $t \times e$  e  $t \times \rho$ ). Para este método, a curva  $\theta \times t$  é mais adequada que a curva  $\rho \times t$ , pois  $\theta$

é mais preciso que  $\rho$ . Portanto, se alguma correção for necessária, esta deverá ser feita na curva relativa ao gráfico  $\rho \times t$ . Desenhando cuidadosamente a curva  $\theta \times t$ , suave e sem mudanças abruptas, teremos a posição angular da companheira em qualquer época particular.

Pela teoria da gravitação universal, no movimento elíptico tem-se

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{constante} \Rightarrow \rho = \sqrt{c \frac{dt}{d\theta}},$$

donde

$$\rho \approx \sqrt{c^2 \frac{\Delta t}{\Delta \theta}} = \sqrt{c^2 \frac{t_1 - t_0}{\theta_1 - \theta_0}}. \quad (\text{equação 13})$$

Desta curva (ver figura 9) lê-se as épocas correspondentes a  $\theta_i$  (época  $t_i$ ),  $\theta_0$  (época  $t_0$ ) e aplica-se a eq.(13), resultando um valor de  $\rho$  que é tanto mais aproximado quanto menor for o intervalo  $\Delta\theta$ .

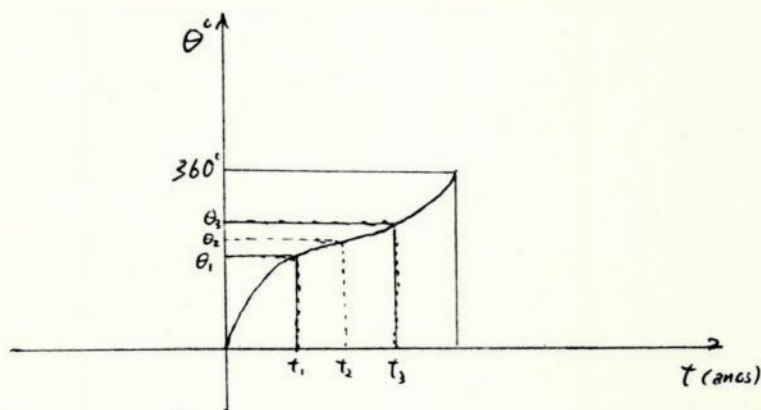


Figura 9. Curva  $\theta \times t$  para o movimento elítico.

Tomamos  $\theta_i$ ,  $i=0,1,2,3,\dots$ , tal que  $\theta_{i+1} - \theta_i = \Delta\theta$ . Uma série de valores relativos da distância, correspondendo a todos os intervalos angulares  $\theta$ , podem ser obtidas da tabela de ângulos (Aitken, 1967, pag.96). Em seguida plota-se as curvas  $\theta \times t$  e  $\rho \times t$ . Se essas curvas de interpolação forem corretamente desenhadas e interpretadas, delas tenta-se obter um arco de elipse. Caso não seja possível a obtenção desse arco, temos que a tentativa falhou. Com isso repete-se o processo até que se consiga um arco de elipse satisfatório. Quando isso for conseguido, desenha-se a melhor elipse e, com ela, corrige-se a curva de interpolação. Essas interações convergem para a elipse aparente.

Uma observação importante é a que trata das relações entre as órbitas aparente e verdadeira, pois o centro da órbita verdadeira se projeta no centro da órbita aparente. No entanto, o foco não se projeta, em geral, de forma a ser também foco da órbita aparente.

## 3) ÓRBITA VERDADEIRA

Depois da construção da elipse aparente, devemos encontrar os elementos orbitais, os quais definem a forma da órbita verdadeira, sua posição no plano orbital e a inclinação deste plano em relação ao plano do céu (fig.10).

Os elementos orbitais a serem considerados são:

- P - período de revolução do sistema binário,
- T - tempo de passagem pelo periastro (data, época),
- e - excentricidade da elipse verdadeira,
- a - semi-eixo maior (da elipse verdadeira),
- $\Omega$  - posição angular do ponto nodal ou ângulo de posição do nodo,
- i - inclinação do plano orbital,
- w - longitude do periastro, isto é, o ângulo entre o nodo e o periastro, medido no plano da órbita verdadeira e no sentido do movimento da companheira.

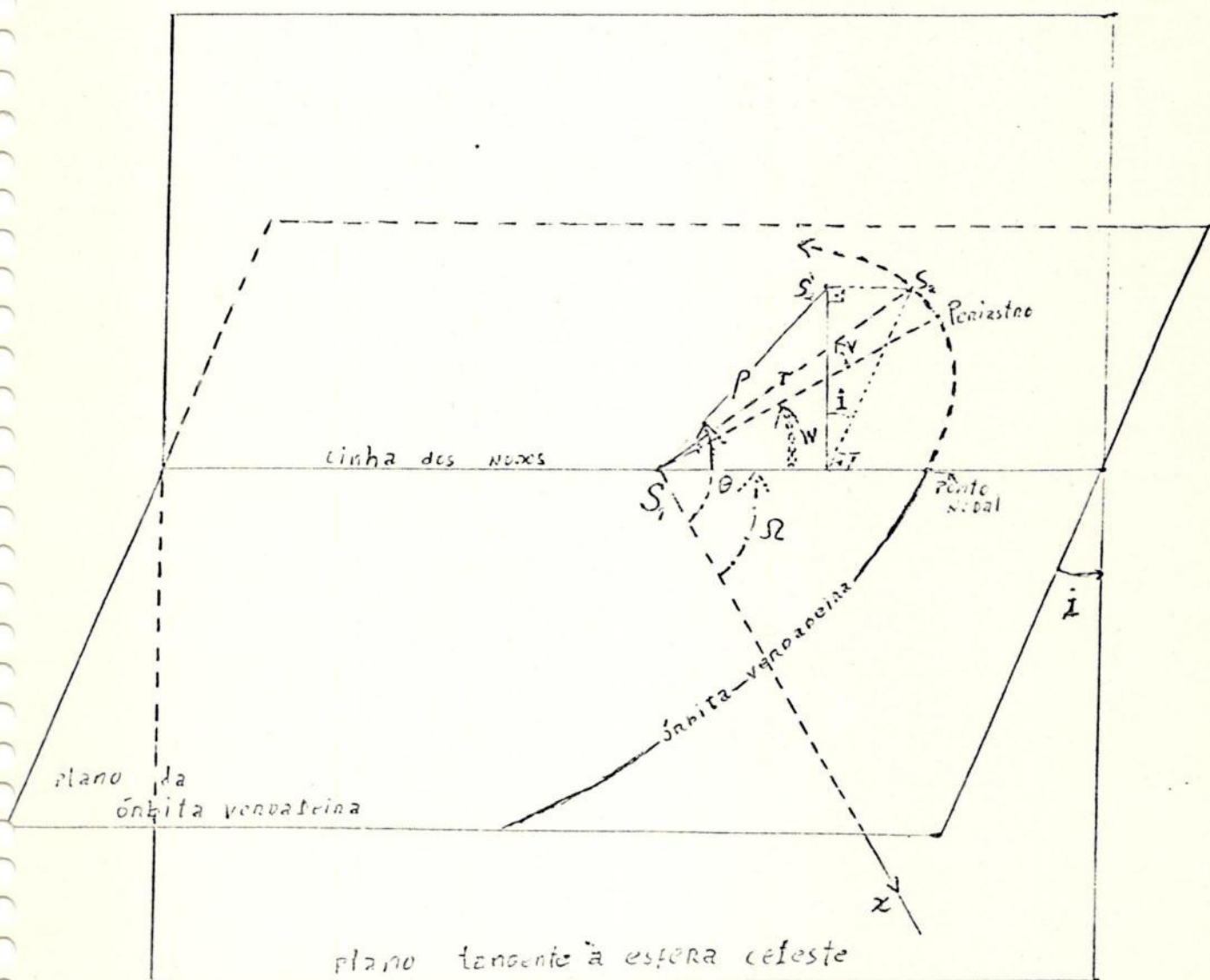


Figura 10. Uma ilustração a respeito dos elementos geométricos  $\Omega, i, w$ .



O período, tempo de passagem pelo periastro e excentricidade são elementos dinâmicos, e isto porque são inteiramente independentes da localização espacial do sistema. O semi-eixo maior é um elemento dinâmico quando medido em unidades lineares, porém quando medido em unidades angulares (segundos de arco), ele é função também da paralaxe, e então relacionado à órbita da Terra. Os elementos restantes (posição angular do ponto nodal, inclinação do plano orbital e longitude do periastro) são puramente geométricos; estes elementos somente relacionam as órbitas da Terra e do sistema binário. Uma explicação relativa aos elementos geométricos é dada a seguir.

$\Omega$  - Posição angular do ponto nodal. É o ângulo entre a linha dos nodos (linha de intersecção entre o plano da órbita verdadeira e o plano perpendicular à linha de visada do observador e tangente à esfera celeste na estrela principal), e a linha sul-norte (eixo dos x), contado no sentido anti-horário. O ponto nodal pode ser ascendente ou descendente: será ascendente quando a estrela companheira, em seu movimento relativo à estrela principal, passa pela linha dos nodos se afastando; será descendente quando a companheira passa pela linha dos nodos se aproximando. Para decidir se o nodo é ascendente ou descendente, serão necessárias medidas ao longo da linha de visada. No caso de não terem sido feitas medidas das velocidades radiais, permanece a indeterminação de qual ponto seja descendente ou ascendente. Nesse caso a posição angular do ponto nodal é contada de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ .

i - Inclinação do plano orbital. Ângulo entre o plano orbital e o plano do céu. O ângulo i é contado de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  quando a posição angular ( $\theta$ ) aumenta com o avanço do tempo (movimento direto), e de  $90^\circ$  a  $180^\circ$  quando a posição angular decresce com o tempo (movimento retrógrado). As órbitas verdadeira e aparente coincidem quando i é  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  (sendo que se i vale  $0^\circ$ , o movimento da companheira é no sentido anti-horário e se vale  $180^\circ$ , o movimento da companheira é contado no sentido horário); quando i for igual a  $90^\circ$  a órbita aparente é um segmento de reta. Quando  $0^\circ < i < 90^\circ$  e  $90^\circ < i < 180^\circ$  pode ocorrer qualquer dos quatro casos ilustrados, respectivamente, nas

figs. 11-a e 11-b, e 11-c e 11-d. Até que a indeterminação a respeito dos pontos nodais (ascendente e descendente) seja resolvida, os casos das figuras 11-b e 11-c são tomados.

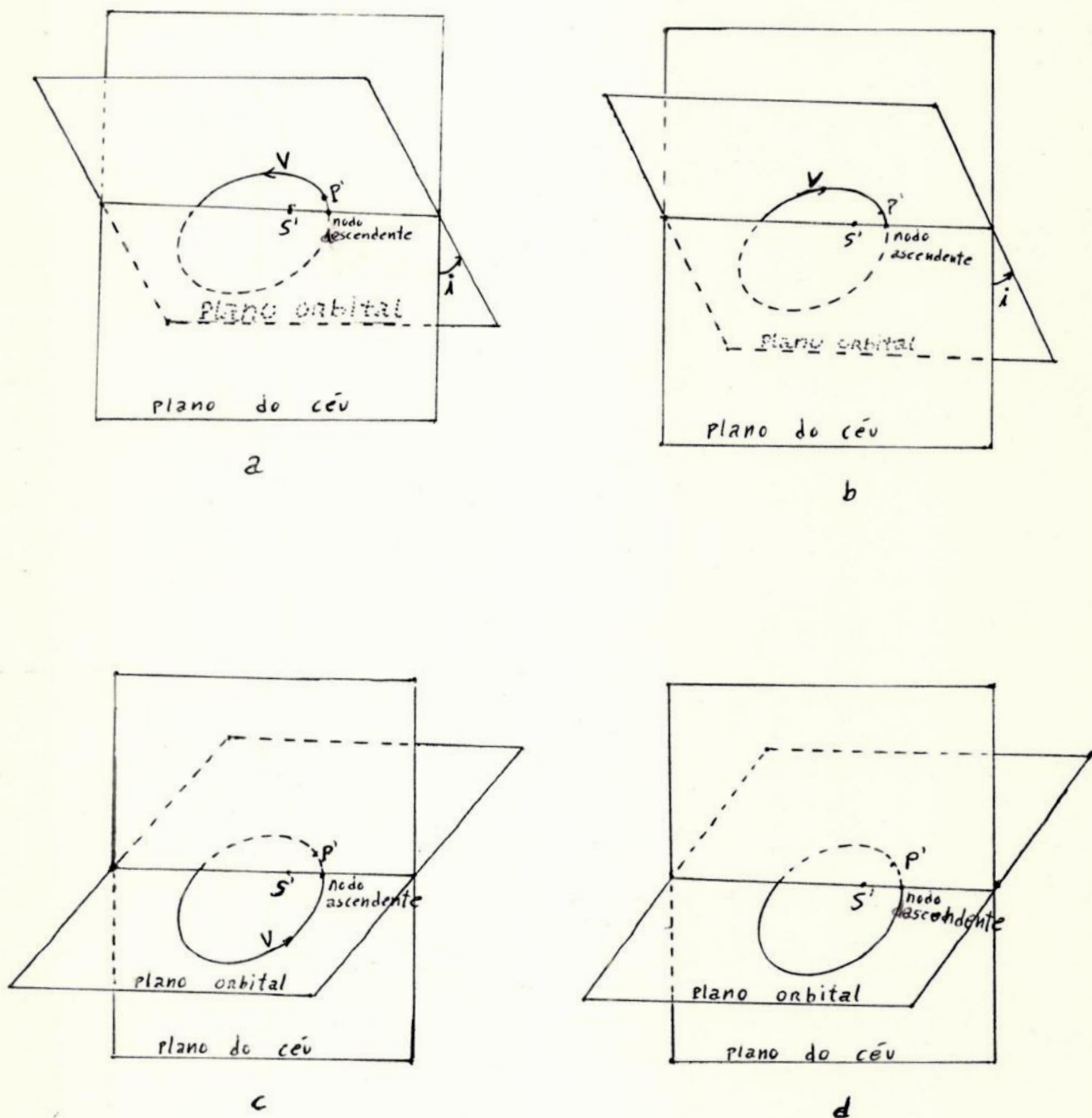


Figura 11. Ilustração a respeito da indeterminação da inclinação do plano orbital, quando não são feitas medidas de velocidade radial.

$w$  - Longitude do periastro. É o ângulo na órbita verdadeira entre a linha dos nodos e eixo maior, contado de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . É medido do ponto nodal ascendente na direção

do movimento da companheira até o ponto de passagem pelo periastro (fig.12).

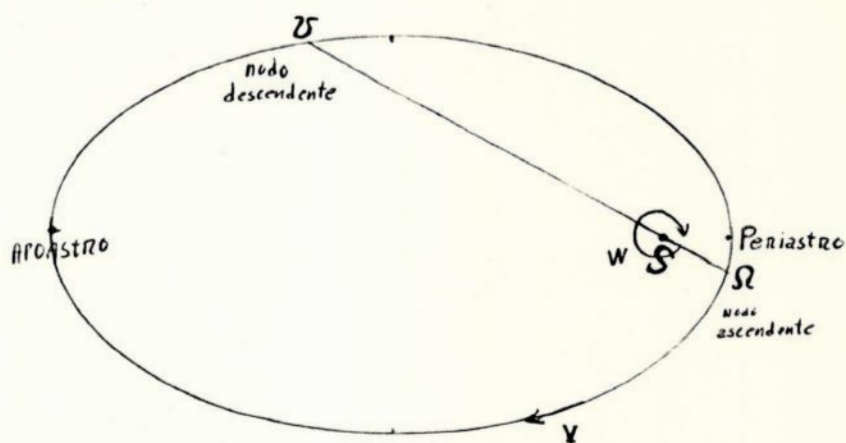


Figura 12. Determinação da Longitude do periastro.

Observar que, no caso em que não são feitas medidas de velocidade radial, não se sabe qual nodo é ascendente. Nesse caso,  $w$  é contado a partir da posição angular do ponto nodal,  $\Omega$ , de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , quando  $\theta$  cresce com o tempo, ou obtido das fórmulas e depois subtraído de  $360^\circ$ , caso  $\theta$  diminua com o tempo.

5) ORIENTAÇÃO NO ESPAÇO (CO-SENOS DIRETORES)

Seja o sistema de eixos x,y,z e o vetor unitário  $\vec{u}$ , como na figura 13.

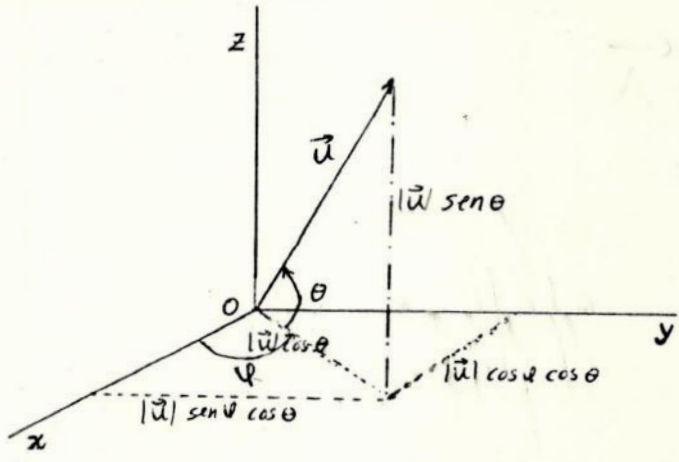


Figura 13. Obtenção dos co-senos diretores do vetor unitário  $\vec{u}$ , através de projeções.

As projeções do vetor unitário,  $\vec{u}$ , nos eixos x,y,z, são os co-senos diretores da direção do vetor em questão; isto é,  $\text{sen } \theta$ ,  $\text{sen } \psi \text{ cos } \theta$ ,  $\text{cos } \psi \text{ cos } \theta$  são os co-senos diretores da direção de  $\vec{u}$  segundo os eixos z,y,x, respectivamente.

Observar que  $(\text{sen } \theta)^2 + (\text{sen } \psi \text{ cos } \theta)^2 + (\text{cos } \psi \text{ cos } \theta)^2 = 1$ .

Em geral, os co-senos diretores de um vetor qualquer, com relação a um sistema de eixos arbitrários, satisfaz à relação

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \dots + l_n^2 = 1, \quad (\text{equação 14})$$

onde o índice n é a dimensão do referencial considerado.

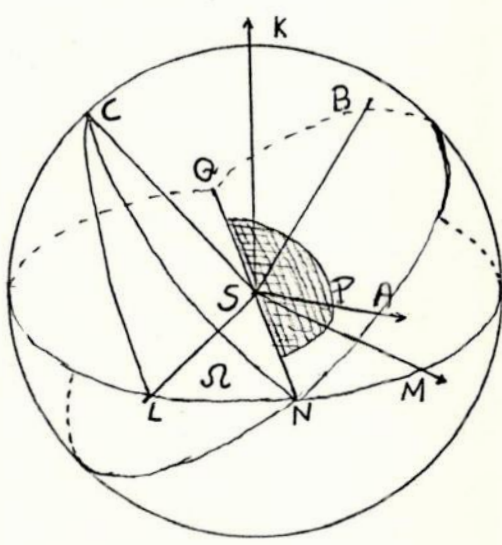


Figura 14. Construção dos co-senos diretores para o problema das binárias visuais. Ver texto para definição dos termos.

Na figura 14 tem-se a esfera celeste de raio unitário centrada na estrela principal S, origem de dois sistemas de coordenadas retangulares: SL, SM, SK e SA, SB, SC. Os eixos retangulares SL, SM, SK são relativos à órbita aparente; os eixos SA, SB e SC são os eixos da órbita verdadeira. Naturalmente, o eixo SA da órbita verdadeira é o eixo que contém a estrela principal S e o periastro P, o eixo SB é ortogonal ao eixo SA e está no plano da órbita verdadeira, o eixo SC é ortogonal ao plano da órbita verdadeira. Da mesma forma, o eixo SL é o eixo com origem em S e direcionado para o norte na órbita aparente, o eixo SM é o eixo do plano da órbita aparente ortogonal ao eixo SL e direcionado para o leste, e o eixo SK é o eixo perpendicular ao plano da órbita aparente. SK é o eixo da linha de visada, positivo na direção oposta ao observador.

O ângulo entre os planos da órbita aparente e da órbita verdadeira é representado pela letra  $i$ .  $\Omega$  é o ângulo entre o eixo SL e o ponto nodal N, isto é, o ângulo LSN. QN é a linha dos nodos.

Para uma notação mais simples, façamos o eixo SL como sendo eixo x, o eixo SM como sendo o eixo y, o eixo SK como sendo eixo z, o eixo SA como sendo eixo x', o eixo SB como sendo eixo y', o eixo SC como sendo eixo z'.

Os co-senos diretores do eixo SA com referência aos eixos SL, SM e SK são, respectivamente,  $l_1$ ,  $m_1$  e  $n_1$ ; do eixo SB com referência aos eixos SL, SM e SK são  $l_2$ ,  $m_2$  e  $n_2$ ; do eixo SC com referência a SL, SM e SK são  $l_3$ ,  $m_3$  e  $n_3$ ; do eixo SL com referência a SA, SB e SC são, respectivamente  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$ ; do eixo SM em referência a SA, SB e SC são  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ ; do eixo SK com referência a SA, SB, SC são  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$ . Mais ainda,

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

(equação 15)

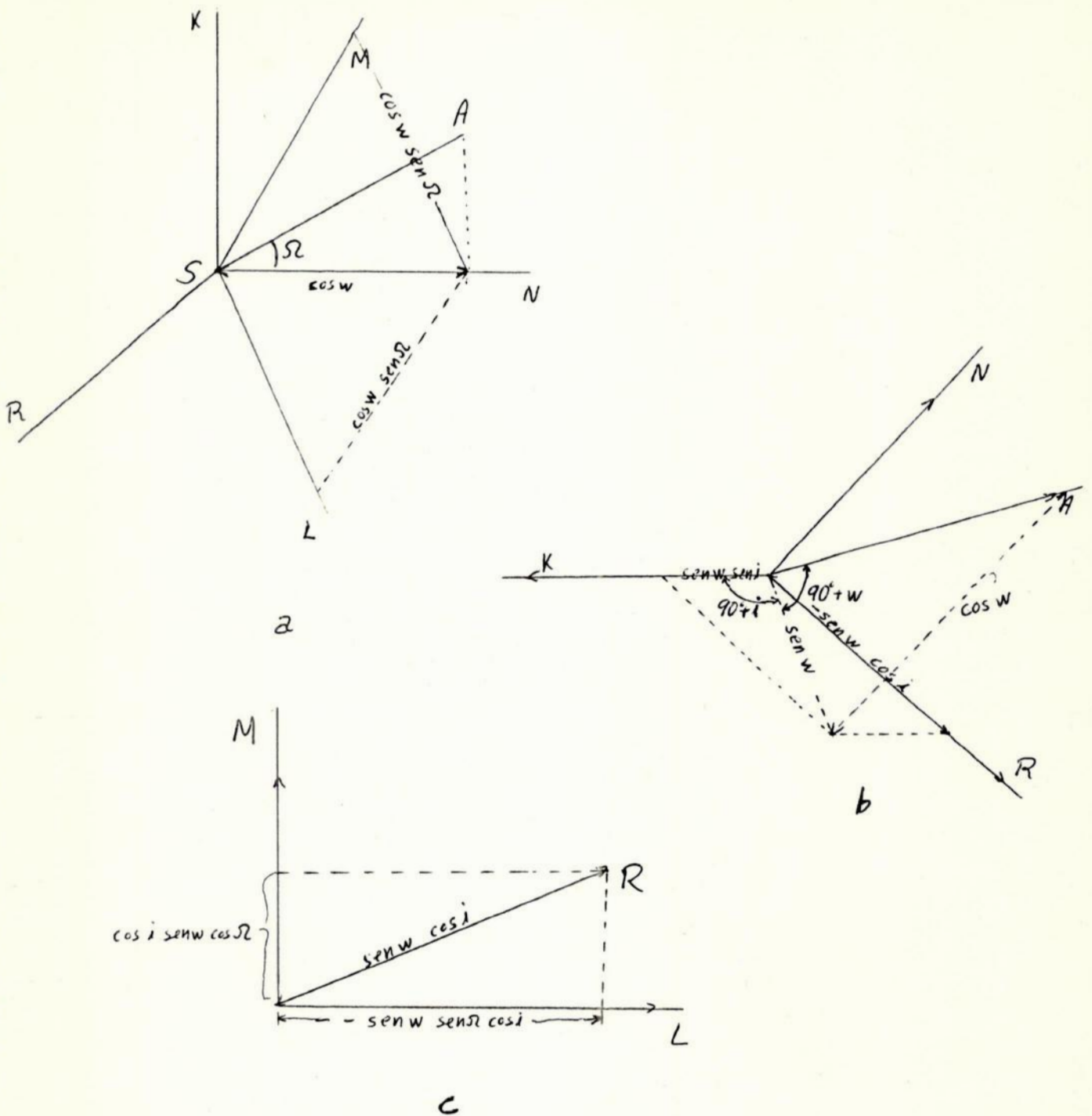


Figura 15. Relação entre os co-senos diretores e os elementos orbitais.

Das figs. 15, tiramos que

$$(\cos AL) = l_1 = (\cos w)(\cos \Omega) - (\sin w)(\sin \Omega)(\cos i),$$

$$(\cos AM) = m_1 = (\cos w)(\sin \Omega) + (\sin w)(\cos \Omega)(\cos i),$$

$$(\cos AK) = n_1 = (\sin w)(\sin i),$$

são os co-senos diretores do eixo SA com referência aos eixos SL, SM, SK, respectivamente. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \text{sen}(90 + i) &= \cos i, \\ \cos(90 + i) &= -\text{sen } i, \\ \text{sen}(90 - i) &= \cos i, \\ \cos(90 - i) &= \text{sen } i. \end{aligned}$$

(equação 16)

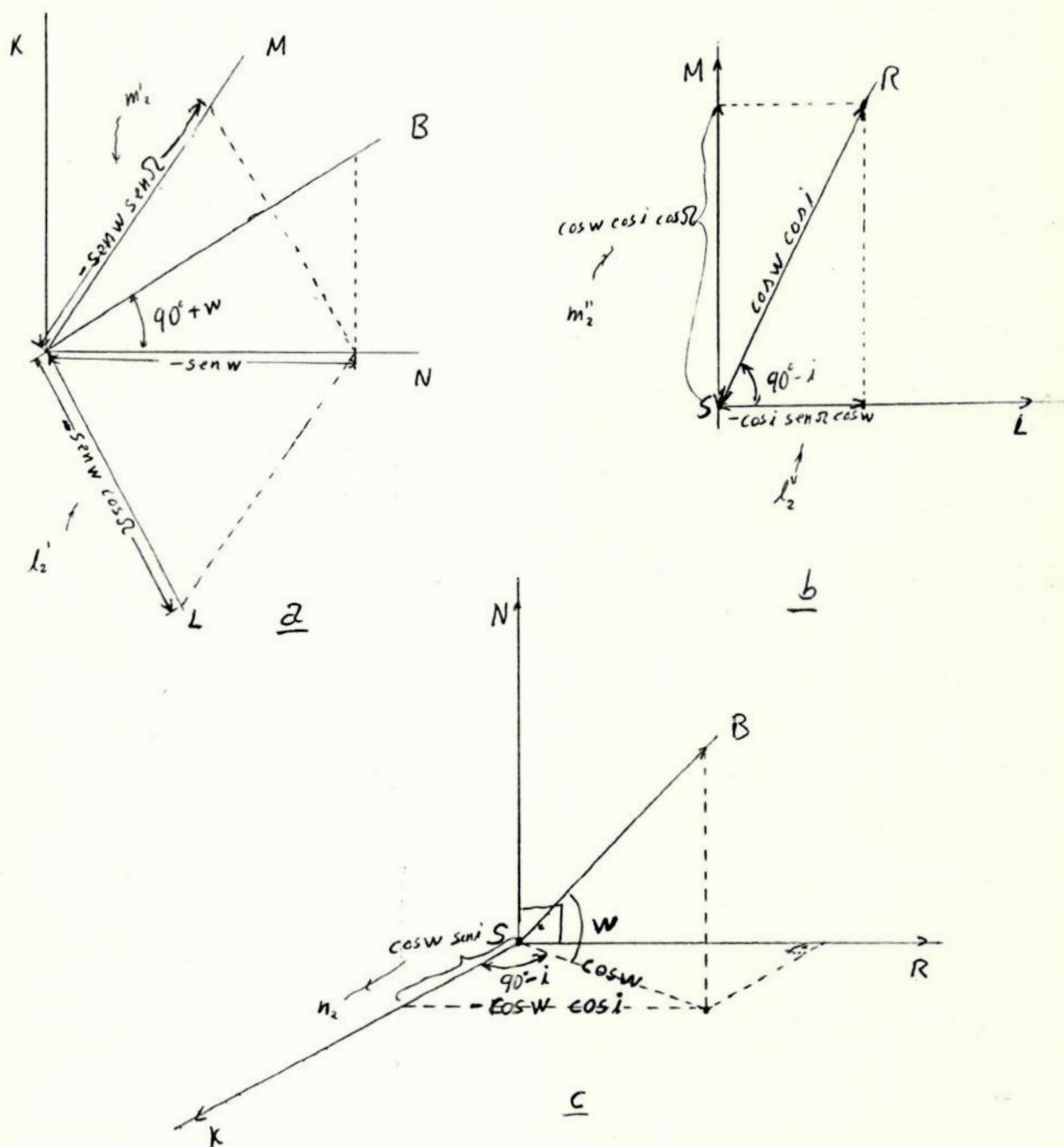


Figura 16. Relações entre os co-senos diretores e os elementos orbitais.

Da figura 16-a tiramos que  $l_2' = -\text{sen } w \cos \Omega$

$m_1' = -\text{sen } w \text{ sen } \Omega$ ;  $m_1'$  é parte do co-seno diretor  $m_2$ , assim como  $l_2'$  é parte do co-seno diretor de  $l_2$ . Da figura 16-b tiramos que

$l_2'' = -\text{sen } \Omega \cos w \cos i$  e  $m_1'' = \cos w \cos \Omega \cos i$ ;  $m_1''$  e  $l_2''$  são as outras partes dos co-senos diretores de  $m_2$  e  $l_2$  respectivamente:

$$m_2 = m_1' + m_1'' \quad \text{e} \quad l_2 = l_2' + l_2'' \quad . \quad \text{Finalmente da figura}$$

16-c tiramos que  $n_2 = \cos w \text{ sen } i$ , e portanto,

$$\begin{aligned}
 l_2 &= -(\text{sen } w)(\text{cos } \Omega) - (\text{cos } w)(\text{sen } \Omega)(\text{cos } i), \\
 m_2 &= -(\text{sen } w)(\text{sen } \Omega) + (\text{cos } w)(\text{cos } \Omega)(\text{cos } i), \\
 n_2 &= (\text{cos } w)(\text{sen } i).
 \end{aligned}
 \tag{eq.(17)}$$

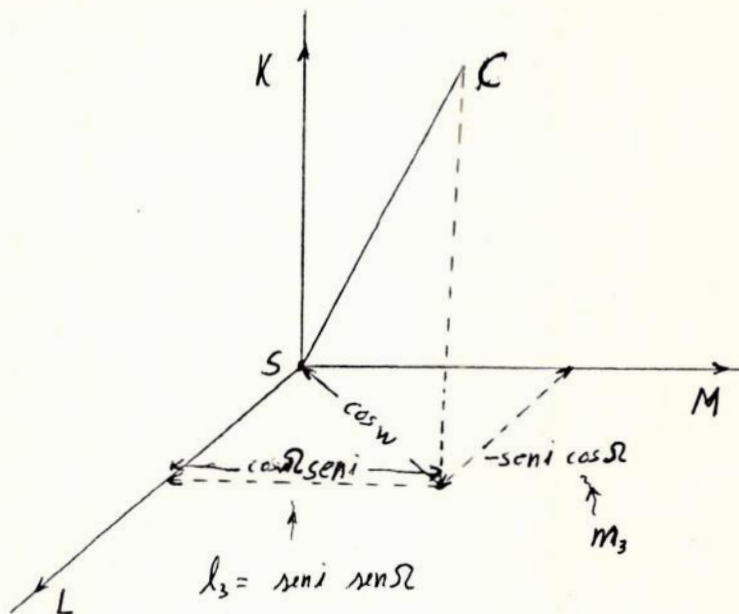


Figura 17. Relação entre os co-senos diretores e os elementos orbitais.

Finalmente, da figura 17 tiramos

$$\begin{aligned}
 l_3 &= (\text{sen } \Omega)(\text{sen } i), \\
 m_3 &= -(\text{cos } \Omega)(\text{sen } i), \\
 n_3 &= (\text{cos } i).
 \end{aligned}
 \tag{equação 18}$$



### III MÉTODOS PARA CÁLCULOS DE ÓRBITAS

#### 1) MÉTODO DE KOWALSKY

Para se calcular as órbitas, vários métodos poderiam ser propostos. Os três métodos de aplicações mais gerais são aqueles propostos por Glasenapp Kowalsky, Zwier e Thiele (o mesmo que o proposto por Innes).

Nesse contexto será dada muito ênfase ao método de Kowalsky, pois será através deste método que serão feitos os cálculos para a obtenção dos elementos orbitais e conseqüentemente a órbita verdadeira.

Este método (de Kowalsky) é extremamente analítico, e, portanto, adequado à computação, sendo que os elementos orbitais são aqui encontrados a partir da equação geral da elipse aparente (eq. 19). A origem das coordenadas é tomada em  $S'$ , a posição da estrela principal. Temos

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0. \quad (\text{equação 19})$$

O procedimento usado por Kowalsky, depois de a elipse aparente ser cuidadosamente delineada é o que segue.

Pondo  $y = 0$  na equação 19, a equação resultante fica sendo

$$Ax^2 + 2Gx + 1 = 0. \quad (\text{equação 20a})$$

Observa-se aqui que as raízes desta equação,  $x_1$  e  $x_2$ , serão os pontos em que o eixo dos  $x$  intercepta a elipse aparente. Tomando a equação 20a e a dividindo por  $A$ ,

$$x^2 + \frac{2Gx}{A} + \frac{1}{A} = 0. \quad (\text{equação 20b})$$

Como sabemos, para uma equação do segundo grau temos

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0, \\ x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0. \quad (\text{equação 20c})$$

Comparando cada termo das equações 20b e 20c, vem

$$\frac{1}{A} = x_1x_2 \Rightarrow A = \frac{1}{x_1 \cdot x_2}. \quad (\text{equação 21a})$$

Donde

$$\frac{2G}{A} = -(x_1 + x_2) \implies G = \frac{-(x_1 + x_2)}{2(x_1 \cdot x_2)}, \quad (\text{equação 21b})$$

Nota-se que as constantes A e G são obtidas por medidas diretas das distâncias entre a estrela principal (S') e os pontos em que o eixo dos x intercepta a elipse aparente.

Similarmente, colocando  $x = 0$  na equação 19, tem-se:

$By^2 + 2Fy + 1 = 0$ , e dividindo esta equação por B, tem-se

$$y^2 + \frac{2Fy}{B} + \frac{1}{B} = 0.$$

Donde

$$B = \frac{1}{y_1 y_2}, \quad (\text{equação 22a})$$

$$F = \frac{-(y_1 + y_2)}{2y_1 y_2}. \quad (\text{equação 22b})$$

Como se pode notar, as constantes B e F são então obtidas através de medidas das distâncias entre a estrela principal e a elipse aparente (os pontos em que o eixo dos y intercepta a elipse aparente).

Tendo agora os valores de A, B, F, G, deriva-se a constante H da equação 19:

$$H = \frac{Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1}{2xy}. \quad (\text{equação 23})$$

Para obtenção da quinta constante, H, usa-se os dois pontos  $(x_2, y_2)$  e  $(x_1, y_1)$  de modo que o produto  $xy$  seja o maior possível (para minimizar o erro) e de forma que os pontos  $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$  não estejam no mesmo quadrante, dado que se estivessem no mesmo quadrante seriam excessivamente próximos. Naturalmente, na obtenção da constante H aplicam-se os valores de A, B, F, G,  $x_a$  e  $y_a$  na equação 23, obtendo assim um valor para H ( $H_a$ ). Novo valor para H é obtido quando se aplicam os valores  $x_b$  e  $y_b$  (obtendo assim  $H_b$ ). A semelhança entre os valores obtidos para H será maior quanto mais correta for a elipse aparente. Depois de obtidos os valores  $H_a$  e  $H_b$ , toma-se a média desses dois valores para H.

Somente a obtenção dos coeficientes A, B, F, G e H não é suficiente, pois o objetivo desse método é naturalmente, como em qual -

quer método, a obtenção dos elementos orbitais ( $\Omega$ ,  $w$ ,  $i$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $P$  e  $T$ ).

Os elementos  $T$  e  $P$  não são obtidos a partir dos coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ , mas os outros elementos sim.

#### OBTENÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Para que se possa obter os elementos geométricos, o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita verdadeira, procede-se como se segue.

Seja a esfera celeste centrada na estrela principal  $S$ , onde  $S$  é também origem dos sistemas de coordenadas  $(x, y, z)$  e  $(x', y', z')$ . As coordenadas  $(x, y, z)$  são relativas à elipse aparente e  $(x', y', z')$  são relativas à elipse verdadeira (fig. 18).

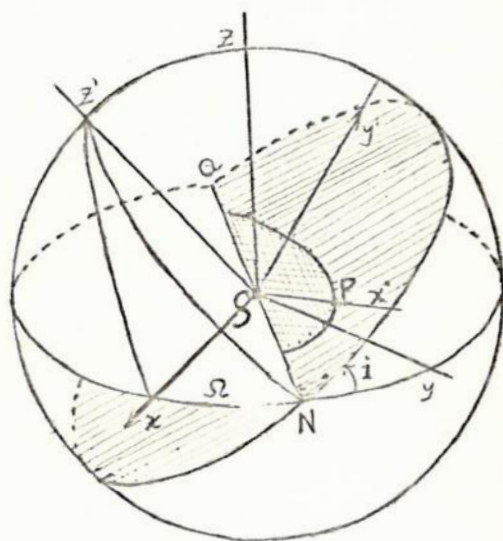


Figura 18. Diagrama de órbita.

O ângulo entre os planos das duas órbitas é  $i$ , que é o ângulo entre os pólos  $z$  e  $z'$  das duas órbitas. A linha de intersecção dos dois planos ( $QSN$ ) é a linha dos nodos. A posição angular do ponto  $N$  é o ângulo  $\Omega$ , sendo  $w$  contado a partir dos nodos (particularmente, de  $N$ ) no plano da órbita verdadeira até a coordenada  $x'$  (o eixo  $x$  é positivo de  $S$  para o norte, o eixo  $x'$  é positivo de  $S$  para o periastro  $P$ ).

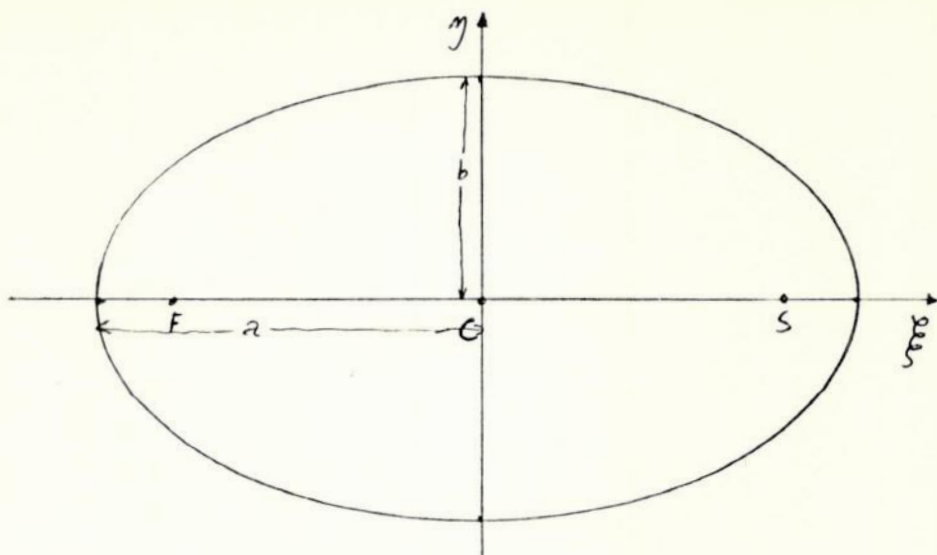


Figura 19. Elipse em que seu centro coincide com a origem do sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$ .

Os focos na figura 19 são F e S e a equação da elipse é

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1. \quad (\text{equação 24})$$

Seja a figura 20.

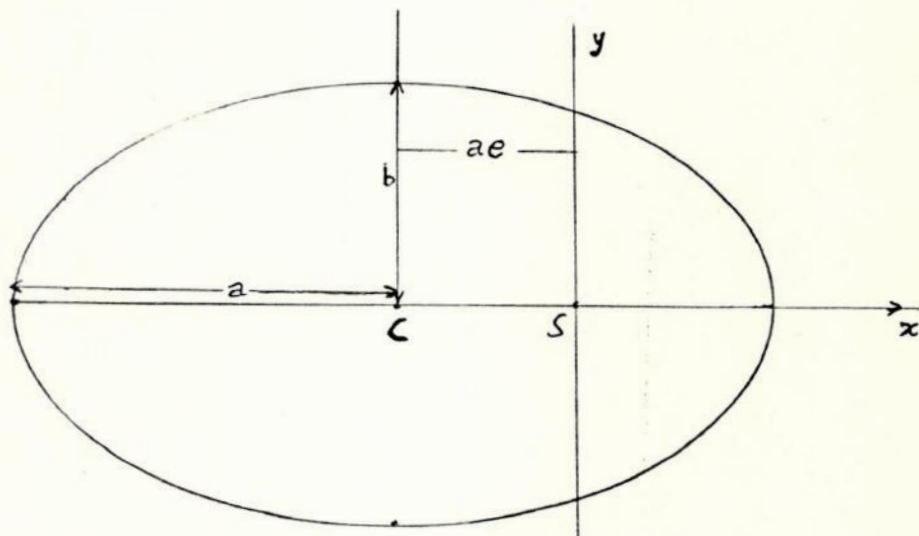


Figura 20. Elipse em que um de seus focos é origem do sistema de coordenadas  $(x', y')$ .

A equação da elipse relativa à figura 20 é

$$\frac{(x' + ae)^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1. \quad (\text{equação 25})$$

Observe que na figura 20, o eixo dos  $y'$  coincide com o foco S (isto é, está deslocado de  $ae$  em relação ao eixo  $y$ ).

De acordo com a teoria dos co-senos diretores, sejam  $l_1, m_1, n_1$ , os co-senos diretores do eixo  $x'$  com referência aos eixos  $x, y, z$ ; sejam  $l_2, m_2, n_2$ , e  $l_3, m_3, n_3$ , os cossenos diretores dos eixos  $y'$  e  $z$ ,

respectivamente, com referência aos eixos  $x, y, z$ . Os valores desses cossenos diretores foram encontrados no capítulo anterior (orientação no espaço) como sendo

$$l_1 = \cos \Omega \cos w - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} w \cos i, \quad (\text{equação 14})$$

$$m_1 = \operatorname{sen} \Omega \cos w + \cos \Omega \operatorname{sen} w \cos i,$$

$$n_1 = \operatorname{sen} w \operatorname{sen} i,$$

$$l_2 = -\cos \Omega \operatorname{sen} w - \operatorname{sen} \Omega \cos w \cos i, \quad (\text{equação 16})$$

$$m_2 = -\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} w + \cos \Omega \cos w \cos i,$$

$$n_2 = \cos w \operatorname{sen} i,$$

$$l_3 = \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} i, \quad (\text{equação 17})$$

$$m_3 = -\cos \Omega \operatorname{sen} i,$$

$$n_3 = \cos i.$$

Ainda de acordo com a teoria dos cossenos diretores sabemos que

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad (\text{equação 18b})$$

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \quad (\text{equação 18c})$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (\text{equação 18d})$$

Quando se projeta qualquer ponto da órbita verdadeira  $(x', y', 0)$  na órbita aparente, tem-se, para esse ponto,

$$x = l_1 x' + l_2 y', \quad (\text{equação 26a})$$

$$y = m_1 x' + m_2 y'. \quad (\text{equação 26b})$$

De

tem-se

$$x = l_1 x' + l_2 y',$$

e ainda

$$x' = (x - l_2 y') / l_1, \quad (\text{equação 26c})$$

$$y' = x - l_2 y.$$

Aplicando a equação 26c na equação 26b, vem

$$y = m_1 \frac{x - y'}{l_1} + m_2 y',$$

donde

$$y' = \frac{l_1 y - m_1 x}{l_1 m_2 - m_2 l_1}. \quad (\text{equação 27a})$$

Ainda das equações 26a e 26b, obtemos

$$y = m_1 x' + m_2 y' \Rightarrow y' = \frac{y - m_1 x'}{m_2}, \quad (\text{equação 18e})$$

Substituindo agora o valor da equação 18e em  $x = l_1 x' + l_2 y'$ , resulta

$$x = l_1 x' + l_2 \frac{y - m_1 x'}{m_2} = \frac{m_2 l_1 x' + l_2 y - l_2 m_1 x'}{m_2},$$

ou

$$m_2 x = x' (l_1 m_2 - l_2 m_1) + l_2 y,$$

e então

$$x' = \frac{m_2 x - l_2 y}{l_1 m_2 - l_2 m_1}, \quad (\text{equação 27b})$$

$$y' = - \frac{m_1 x - l_1 y}{l_1 m_2 - l_2 m_1}. \quad (\text{equação 27c})$$

Substituindo os valores dos respectivos co-senos diretores, encontramos

$$\begin{aligned} l_1 m_2 - l_2 m_1 &= - \cos \Omega \operatorname{sen} \Omega \cos w \operatorname{sen} w \\ &\quad + \cos^3 \Omega \cos^2 w \cos i + \operatorname{sen}^2 \Omega \operatorname{sen}^2 w \cos i \\ &\quad - \cos \Omega \operatorname{sen} \Omega \cos w \operatorname{sen} w \cos^2 i \\ &\quad + \cos^3 \Omega \operatorname{sen}^2 w \cos i + \cos \Omega \operatorname{sen} \Omega \cos w \operatorname{sen} w \\ &\quad + \cos \Omega \operatorname{sen} \Omega \cos w \operatorname{sen} w \cos^2 i \\ &\quad + \operatorname{sen}^2 \Omega \cos^2 w \cos i, \end{aligned}$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = \cos i ( \cos^3 \Omega \cos^2 w + \operatorname{sen}^2 \Omega \operatorname{sen}^2 w + \cos^3 \Omega \operatorname{sen}^2 w + \operatorname{sen}^2 \Omega \cos^2 w ),$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = \cos i ( \cos^3 \Omega ( \cos^2 w + \operatorname{sen}^2 w ) + \operatorname{sen}^2 \Omega ( \operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w ) ),$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = \cos i ( \cos^3 \Omega + \operatorname{sen}^2 \Omega ) = \cos i = n_3,$$

$$l_1 m_2 - l_2 m_1 = n_3. \quad (\text{equação 28})$$

Substituindo a equação 28 nas equações 27a e 27b,

$$x' = \frac{m_2 x - l_2 y}{n_3}, \quad (\text{equação 29a})$$

$$y' = - \frac{m_1 x - l_1 y}{n_3}. \quad (\text{equação 29b})$$

Substituindo os valores de  $x'$  e  $y'$  na equação 25, obtém-se a equação da órbita aparente

$$\frac{\left(\frac{m_2 x - l_2 v}{n_3} + ae\right)^2}{a^2} + \frac{\left(-\frac{m_1 x - l_1 v}{n_3}\right)^2}{b^2} = 1,$$

ou

$$\frac{(m_2 x - l_2 v + aen_3)^2}{a^2 n_3^2} + \frac{(m_1 x - l_1 v)^2}{b^2 n_3^2} = 1.$$

Esta equação pode tomar a forma

$$\frac{m_2^2 x^2 + l_2^2 v^2 + a^2 e^2 n_3^2 + 2m_2 x ae n_3 - 2m_2 x l_2 v - l_2 v ae n_3}{a^2 n_3^2} + \frac{m_1^2 x^2 + l_1^2 v^2 - 2m_1 l_1 \cdot xv}{b^2 n_3^2} - 1 = 0,$$

ou

$$\left(\frac{m_2^2}{b^2 n_3^2} + \frac{m_1^2}{a^2 n_3^2}\right) x^2 + \left(\frac{l_2^2}{a^2 n_3^2} + \frac{l_1^2}{b^2 n_3^2}\right) y^2 + 2\left(-\frac{m_2 l_2}{a^2 n_3^2} - \frac{m_1 l_1}{b^2 n_3^2}\right) xy + 2\left(\frac{m_2 aen_3}{a^2 n_3^2}\right) x + 2\left(-\frac{l_2 aen_3}{a^2 n_3^2}\right) y + \frac{a^2 e^2 n_3^2}{a^2 n_3^2} - 1 = 0,$$

ou ainda

$$\left(\frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_1^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{n_3^2} + \left(\frac{l_2^2}{a^2} + \frac{l_1^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{n_3^2} + 2\left(-\frac{m_2 l_2}{a^2} - \frac{m_1 l_1}{b^2}\right) \frac{xy}{n_3^2} + 2\left(\frac{m_2 e}{a n_3}\right) x + 2\left(-\frac{l_2 e}{a n_3}\right) y + e^2 - 1 = 0.$$

Multiplicando ambos os lados desta equação pela razão comum  $f$ , onde  $f = -\frac{a}{v}$ , obtém-se,

$$\left(\left(\frac{m_2^2}{b^2} + \frac{m_1^2}{a^2}\right) \frac{f}{n_3^2}\right) x^2 + \left(\left(\frac{l_2^2}{b^2} + \frac{l_1^2}{a^2}\right) \frac{f}{n_3^2}\right) y^2 + 2\left(-\frac{f}{n_3^2} \left(\frac{m_2 l_2}{a^2} + \frac{l_1 m_1}{b^2}\right)\right) xy + 2f\left(\frac{m_2 e}{a n_3}\right) x + 2\left(-\frac{e l_2}{a n_3}\right) f y + f(e - 1) = 0. \quad (\text{eq. 30})$$

Assim como a equação 19, a equação acima é também relativa à órbita aparente, e então comparando estas duas equações, vem

$$A = \frac{f}{n_3^2} \left( \frac{m_2^2}{a^2} + \frac{m_1^2}{b^2} \right), \quad (\text{equação 31a})$$

$$B = \frac{f}{n_3^2} \left( \frac{l_2^2}{a^2} + \frac{l_1^2}{b^2} \right), \quad (\text{equação 31b})$$

$$H = -\frac{f}{n_3^2} \left( \frac{l_2 m_2}{a^2} + \frac{l_1 m_1}{b^2} \right), \quad (\text{equação 31c})$$

$$G = \frac{f e m_2}{a n_3}, \quad (\text{equação 31d})$$

$$F = -\frac{f e l_1}{a n_3}, \quad (\text{equação 31e})$$

$$1 = f (e - 1). \quad (\text{equação 31f})$$

Comparando a última dessas relações com a relação  $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ , tem-se

$$-b^2 = a^2 (e^2 - 1) \Rightarrow \frac{-b^2}{a^2} = (e^2 - 1),$$

vindo daí,

$$f(e^2 - 1) = 1 = f\left(-\frac{b^2}{a^2}\right) \Rightarrow f = -\frac{a^2}{b^2}. \quad (\text{equação 32})$$

Como

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a(1 - e^2)}{a} = a(1 - e^2),$$

temos

$$f = \frac{a^2}{ap} = \frac{a}{p} \Rightarrow f = \frac{a}{p}. \quad (\text{equação 33})$$

Aplicando este valor de  $f$  (equação 33) e o valor de  $p$  ( $=a(1 - e^2)$ ), nas relações 31, obtemos

$$A = -\frac{1}{pn_3^2} \left( \frac{m_2^2}{a} + \frac{m_1^2}{p} \right), \quad (\text{equação 34a})$$

$$B = -\frac{1}{pn_3^2} \left( \frac{l_2^2}{a} + \frac{l_1^2}{p} \right), \quad (\text{equação 34b})$$

$$H = \frac{1}{pn_3} \left( \frac{l_2 m_2}{a} + \frac{l_1 m_1}{p} \right), \quad (\text{equação 34c})$$

$$G = -\frac{em_2}{pn_3}, \quad (\text{equação 34d})$$

$$F = \frac{el_1}{pn_3}, \quad (\text{equação 34e})$$



$$\begin{aligned}
 F^2 - G^2 + A - B &= \frac{e^2 l_2^2}{v^2 n_3^2} - \frac{e^2 m_2^2}{v^2 n_3^2} - \frac{1}{pn_3} \left( -\frac{l_2^2}{a} - \frac{l_1^2}{v} + \frac{m_2^2}{a} + \frac{m_1^2}{v} \right) \\
 &= \frac{e^2}{v^2 n_3^2} (l_2^2 - m_2^2) - \frac{1}{pn_3} \left( \frac{m_2^2 - l_2^2}{a} - \frac{m_1^2 - l_1^2}{v} \right) \\
 &= \frac{l_2^2 - m_2^2}{v^2 n_3^2} \left( e^2 + \frac{p}{a} \right) - \left( \frac{m_1^2 - l_1^2}{v^2 n_3^2} \right).
 \end{aligned}$$

Como

$$\frac{v}{a} = -\frac{1}{f},$$

e

$$e = 1 + \frac{1}{f},$$

tiramos

$$F^2 - G^2 + A - B = \frac{l_2^2 + l_1^2 - m_1^2 - m_2^2}{p^2 n_3^2}.$$

Mas, como

$$l_1^2 + l_2^2 = 1 - l_3^2, \quad m_1^2 + m_2^2 = 1 - m_3^2,$$

então

$$F^2 - G^2 + A - B = \frac{1 - l_3^2 - 1 + m_3^2}{p^2 n_3^2} = -\frac{l_3^2 + m_3^2}{p^2 n_3^2}.$$

Substituindo os valores de  $l_3$ ,  $m_3$  e  $n_3$ , dados pela equação 17,

$$F^2 - G^2 + A - B = \frac{\cos^2 \Omega \operatorname{sen}^2 i - \operatorname{sen}^2 \Omega \operatorname{sen}^2 i}{v^2 \cos^2 i}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 i (\cos^2 \Omega - \operatorname{sen}^2 \Omega)}{v^2 \cos^2 i}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 i \cos 2\Omega}{p^2 \cos^2 i},$$

ou

$$\Upsilon = F^2 - G^2 + A - B = \frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} \cos 2\Omega \quad (\text{equação 35})$$

Agora, aplicando os valores de F, G, H dados pela eq. 34,

$$FG - H = \left( \frac{e l_2}{pn_3} \right) \left( -\frac{em_2}{pn_3} \right) - \frac{1}{pn_3} \left( \frac{l_2 m_2}{a} + \frac{l_1 m_1}{p} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^2 \lambda_1 m_2}{p^2 n_3^2} - \frac{1}{p^2 n_3^2} \left( \frac{p}{e} \lambda_2 m_2 + \lambda_1 m_1 \right) \\
&= - \frac{1}{p^2 n_3^2} \left[ \left( e^2 + \frac{p}{e} \right) \lambda_2 m_2 + \lambda_1 m_1 \right] \\
&= - \frac{1}{p^2 n_3^2} \left[ \lambda_2 m_2 + \lambda_1 m_1 \right].
\end{aligned}$$

Resolvendo agora o termo entre colchetes na equação acima,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \cos \Omega \cos w - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} w \cos i, \\
m_1 &= \operatorname{sen} \Omega \cos w + \cos \Omega \operatorname{sen} w \cos i, \\
\lambda_2 &= - (\cos \Omega \operatorname{sen} w + \operatorname{sen} \Omega \cos w \cos i), \\
m_2 &= - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} w + \cos \Omega \cos w \cos i,
\end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned}
\lambda_2 m_2 &= \operatorname{sen} w (\operatorname{sen} \Omega \cos \Omega) + \operatorname{sen}^2 \Omega (\operatorname{sen} w \cos w \cos i) \\
&\quad - \cos^2 \Omega (\operatorname{sen} w \cos w \cos i) - \cos^2 i \cos^2 w (\operatorname{sen} \Omega \cos \Omega),
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\lambda_2 m_2 &= \left( \frac{\operatorname{sen} 2\Omega}{2} \right) \cdot (\operatorname{sen}^2 w - \cos^2 i \cos^2 w) \\
&\quad - \cos 2\Omega (\operatorname{sen} w \cos w \cos i),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\lambda_1 m_1 &= \cos^2 w (\cos \Omega \operatorname{sen} \Omega) - \operatorname{sen}^2 w \cos^2 i (\cos \Omega \operatorname{sen} \Omega) \\
&\quad + \cos^2 \Omega (\operatorname{sen} w \cos w \cos i) \\
&\quad - \operatorname{sen}^2 \Omega (\operatorname{sen} w \cos w \cos i),
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\lambda_1 m_1 &= \frac{\operatorname{sen} 2\Omega}{2} (\cos^2 w - \operatorname{sen}^2 w \cos^2 i) \\
&\quad + \cos 2\Omega (\operatorname{sen} w \cos w \cos i).
\end{aligned}$$

Somando  $\lambda_1 m_1$  com  $\lambda_2 m_2$ ,

$$\begin{aligned}
[\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2] &= \frac{\operatorname{sen} 2\Omega}{2} (\cos^2 w \operatorname{sen}^2 w - \operatorname{sen}^2 w \cos^2 i \\
&\quad - \cos^2 w \cos^2 i) + (\operatorname{sen} w \cos w \cos i) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos 2\Omega - \cos 2\Omega),
\end{aligned}$$

ou

$$[\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2] = \frac{\operatorname{sen} 2\Omega}{2} (1 - \cos^2 i (\operatorname{sen}^2 w + \cos^2 w)),$$

donde

$$[\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2] = \frac{\operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen} 2\Omega}{2}.$$

Voltando ao raciocínio anterior e levando os valores obtidos no termo entre colchetes, vem

$$F G - H = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} i}{p} \operatorname{sen} 2\Omega. \quad (\text{equação } 36)$$

Dividindo a equação acima pela equação 35, obtém-se

$$\frac{F G - H}{F^2 - G^2 + A - B} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\Omega$$

$$\mathcal{L} = \operatorname{tg} 2\Omega = -\frac{2(F G + H)}{F^2 - G^2 + A - B}. \quad (\text{equação } 37),$$

$\Omega$  é então determinada por esta equação, uma vez que as constantes de Thiele - Innes (A, B, G, F e H) são agora quantidades conhecidas.

Assim,

$$\Omega = \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} (\mathcal{L})}{2}. \quad (\text{equação } 37a).$$

Para que se possa encontrar o valor da inclinação orbital  $i$  (uma vez que as equações 35 e 36 fornecem  $i$  como função de  $p$ ), devemos encontrar  $p$  como função de quantidades conhecidas (que agora podem ser A, F, H, B, G e  $\Omega$ ). Outra vez, tomando relações entre as constantes de Thiele - Innes,

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{e^2 l_2^2}{p^2 n_3^2} + \frac{e^2 m_2^2}{p^2 n_3^2} + \frac{1}{pn_3^2} \left[ \frac{m_2^2 + l_2^2}{a} + \frac{m_1^2 + l_1^2}{p} \right],$$

que pode ser reescrita na forma

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{e^2}{p^2 n_3^2} (l_2^2 + m_2^2) + \frac{1}{p^2 n_3^2} \left[ \frac{p}{a} (m_2^2 + l_2^2) + m_1^2 + l_1^2 \right],$$

ou ainda,

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \left[ l_2^2 + m_2^2 \left( \frac{p}{a} + e^2 \right) + m_1^2 + l_1^2 \right] \frac{1}{p^2 n_3^2}.$$

Mas, então,

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \left[ l_2^2 + m_2^2 + m_1^2 + l_1^2 \right] \frac{1}{p^2 n_3^2},$$

que, com a utilização das eqs. (18), se reduz a

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{1 - n_2^2 + 1 - n_1^2}{p^2 n_3^2} = \frac{2 - (n_2^2 + n_1^2)}{p^2 n_3^2},$$

ou

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{1 + n_3^2}{p^2 n_3^2}.$$

Como  $n_3 = \cos i$ ,

$$F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{1 - \cos^2 i}{p^2 \cos^2 i},$$

e aplicando a relação trigonométrica  $\text{sen}^2 i + \text{cos}^2 i = 1$ , segue

$$1 + \text{cos}^2 i = 1 + (1 - \text{sen}^2 i) = 2 - \text{sen}^2 i,$$

$$\mathcal{L} = F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{2 - \text{sen}^2 i}{p^2 \text{cos}^2 i},$$

$$= \frac{1 + \text{cos}^2 i}{p^2 \text{cos}^2 i},$$

donde

$$\mathcal{L} = F^2 + G^2 - (A + B) = \frac{2 + \text{tg}^2 i}{p^2}. \quad (\text{equação 38})$$

Podemos obter, pelas equações 35 e 38,

$$p^2 = \frac{2 + \text{tg}^2 i}{\mathcal{L}} = \frac{(\text{tg}^2 i)(\text{cos } 2\Omega)}{\mathcal{F}}. \quad (\text{equação 38-a})$$

Portanto,

$$\frac{2}{\mathcal{L}} = \text{tg}^2 i \left[ \frac{\text{cos } 2\Omega}{\mathcal{F}} - \frac{1}{\mathcal{L}} \right],$$

$$\text{tg}^2 i = \frac{2}{\mathcal{L}} \left[ \frac{1}{\frac{(\text{cos } 2\Omega)\mathcal{L} - \mathcal{F}}{\mathcal{F}}} \right],$$

$$= \mathcal{M} = \frac{2}{\mathcal{L}} \left[ \frac{\mathcal{F}\mathcal{L}}{(\text{cos } 2\Omega)\mathcal{L} - \mathcal{F}} \right],$$

ou

$$\mathcal{M} = \text{tg}^2 i = \frac{2\mathcal{F}}{(\text{cos } 2\Omega)\mathcal{L} - \mathcal{F}}, \quad (\text{equação 38-b})$$

donde

$$\text{tg } i = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{(\text{cos } 2\Omega)\mathcal{L} - \mathcal{F}}}, \quad (\text{equação 38-c})$$

$$i = \text{arc tg} \left[ \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{(\text{cos } 2\Omega)\mathcal{L} - \mathcal{F}}} \right]. \quad (\text{equação 38-d}).$$

Como foi visto anteriormente (eq. 38-a),

$$p^2 = \frac{(\text{tg}^2 i)(\text{cos } 2\Omega)}{\mathcal{F}},$$

donde

$$p = \sqrt{\frac{(\text{tg}^2 i)(\text{cos } 2\Omega)}{\mathcal{F}}}. \quad (\text{equação 38-e})$$

Do conjunto de equações 34, tiramos

$$G = \frac{-e m_2}{p n_3}, \quad m_2 = \frac{-G p n_3}{e},$$

$$F = \frac{e l_2}{p n_2}, \quad l_2 = \frac{F p n_2}{e},$$

sendo que se pode observar, pelos conjuntos de equações 16 e 17, que

$$\begin{aligned} l_2 &= -(\cos \Omega)(\sin w) + (\sin \Omega)(\cos w)(\cos i), \\ m_2 &= (\cos \Omega)(\cos w)(\cos i) - (\sin \Omega)(\sin w), \\ n_2 &= \cos i. \end{aligned}$$

Então,

$$m_2 = \frac{-G p(\cos i)}{e} = -(\sin \Omega)(\sin w) + (\cos \Omega)(\cos w)(\cos i), \quad (\text{equação 39})$$

$$l_2 = \frac{F p(\cos i)}{e} = -(\cos \Omega)(\sin w) + (\sin \Omega)(\cos w)(\cos i). \quad (\text{equação 40})$$

Multiplicando a equação 39 por  $-\sin \Omega$ , a equação 40 por  $-\cos \Omega$  e somando,

$$p \left( \frac{G(\sin \Omega) - F(\cos \Omega)}{e} \right) \cos i = (\sin w) [\sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega].$$

Desta equação tiramos a excentricidade

$$e = \frac{p [G(\sin \Omega) - F(\cos \Omega)] (\cos i)}{(\sin w)}. \quad (\text{equação 41-a})$$

Multiplicando agora a equação 39 por  $-\cos \Omega$ , a equação 40 por  $-\sin \Omega$  e subtraindo, tem-se

$$\frac{G(\cos \Omega) - F(\sin \Omega)}{e} p (\cos i) = -(\cos w) [(\sin^2 \Omega) + (\cos^2 \Omega)] (\cos i),$$

ou

$$\frac{G(\cos \Omega) + F(\sin \Omega)}{e} p = -(\cos w).$$

Pode-se notar que, desta equação, a excentricidade toma o valor

$$e = \frac{-p (G(\cos \Omega) + F(\sin \Omega))}{(\cos w)}. \quad (\text{equação 41-b})$$

Dividindo-se a equação 41-a pela equação 41-b,

$$R = \operatorname{tg} w = \frac{(G(\sin \Omega) - F(\cos \Omega)) (\cos i)}{G(\cos \Omega) + F(\sin \Omega)} \quad (\text{equação 42})$$

e então,

$$w = \text{arc tg } (\mathcal{R}). \quad (\text{equação 43})$$

O semi eixo maior,  $a$ , é deduzido da relação

$$a = \frac{p}{(1 - e^2)}. \quad (\text{equação 44})$$

Portanto, uma boa sequência para se encontrar os valores numéricos dos elementos orbitais é

$$F^2 - G^2 + A - B = \mathcal{F} = \frac{\text{tg}^2 i}{p} (\cos 2\Omega), \quad (\text{equação 35})$$

$$\frac{-2(FG - H)}{F^2 - G^2 + A - B} = \mathcal{L} = \text{tg } 2\Omega, \quad (\text{equação 37})$$

$$\Omega = \frac{\text{arc tg } \mathcal{L}}{2}, \quad (\text{equação 37-a})$$

$$p^2 = \frac{(\text{tg}^2 i) (\cos 2\Omega)}{\mathcal{F}}, \quad (\text{equação 38-a})$$

$$i = \text{arc tg} \left[ \sqrt{\frac{2\mathcal{F}}{(\cos 2\Omega)\mathcal{L} - \mathcal{F}}} \right], \quad (\text{equação 38-d})$$

$$p = \sqrt{\frac{(\text{tg}^2 i) (\cos 2\Omega)}{\mathcal{F}}}, \quad (\text{equação 38-e})$$

$$w = \text{arc tg} \left[ - \frac{G(\text{sen } \Omega) - F(\cos \Omega)}{G(\cos \Omega) - F(\text{sen } \Omega)} \cos i \right], \quad (\text{eq. 43})$$

$$e = \frac{p[G(\text{sen } \Omega) - F(\cos \Omega)]}{\text{sen } w} \cos i, \quad (\text{equação 41-a})$$

$$a = \frac{p}{(1 - e^2)}. \quad (\text{equação 44})$$

#### OBTENÇÃO DOS ELEMENTOS DINÂMICOS: PERÍODO (P) E ÉPOCA DE PASSAGEM PELO PERIASTRO (T)

Neste método a obtenção de T e P é feita a partir de medidas de áreas na elipse aparente através de um planímetro.

Na ausência de um planímetro, adotamos o procedimento que se segue. Medimos os ângulos de posição e as distâncias angulares de uma porção de pequenos setores (ligados entre si) da elipse (usando coordenadas polares) de forma que em cada setor da elipse medido, a distância angular  $\rho$  (entre S' e o traçado da elipse) pouco varia (fig. 21).

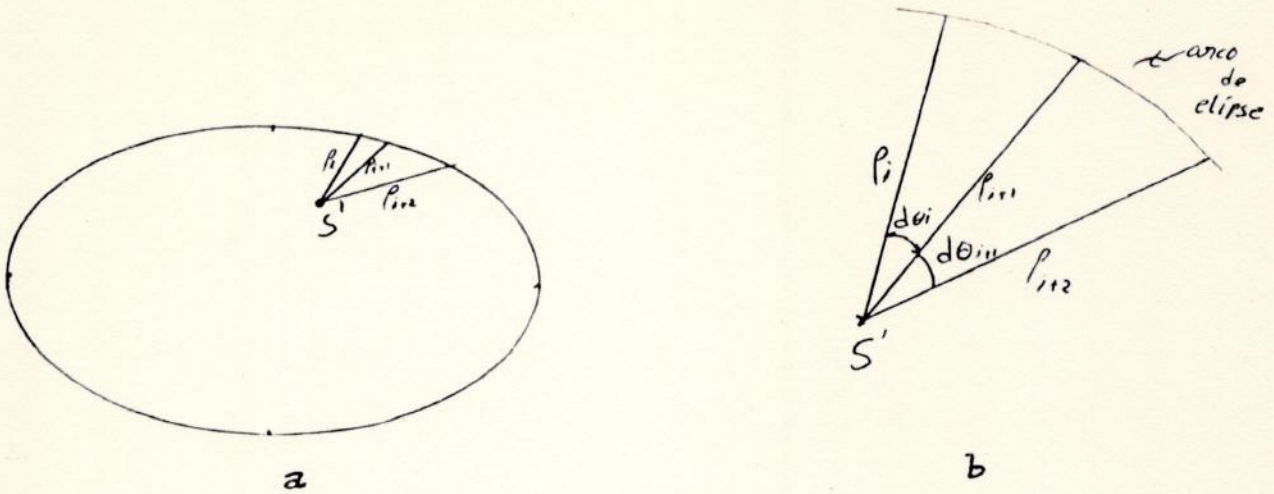


Figura 21. Ilustração das distancias angulares ( $P_i, P_{i+1}, \dots$ ) e os arcos entre elas, na elipse aparente. A Fig. 21b é parte da fig. 21a, ampliada;  $S'$  é a estrela principal.

A seguir calculamos

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{i+1} d\theta_i}{n} = c$$

na parte mais confiável da elipse aparente, ou mesmo na elipse inteira (caso esta seja razoável), sendo  $c$  é dupla constante da velocidade areolar. Observe que  $c$  é obtida através de medida de área, e por essa razão, caso exista à disposição algum planímetro é melhor usá-lo para obter  $c$  e fazer medidas de áreas na elipse.

O que foi proposto por Glasennap Kowalsky para se encontrar o período  $P$  e a época de passagem pelo periastro,  $T$ , é dado a seguir. Tomando-se no traçado da elipse aparente o ponto  $P'$  mais próximo de  $S'$  (observação: este ponto  $P'$  e o centro  $C$  da elipse devem estar na mesma direção; o segmento  $CS'P'$  é a projeção do semi-eixo maior,  $a$ , da órbita verdadeira na órbita aparente e a excentricidade,  $e$ , pode ser dada por  $e = CS'/GP'$ ). Naturalmente, este ponto  $P'$  (sobre o traçado da elipse aparente, mais próximo de  $S'$ ) é a projeção do ponto do periastro.

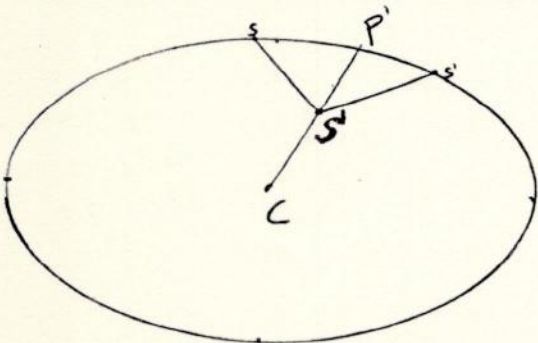


Figura 22.  $C$  é o centro das elipses verdadeira e aparente;  $S'$  a projeção da estrela principal no plano do céu;  $s, s'$  as posições observadas, tomadas sobre o traçado da elipse aparente, sendo  $s$  antes da passagem pelo periastro e  $s'$  depois. A  $s$  corresponde a data  $t_0$  e a  $s'$  corresponde a data  $t_1$ ;  $P'$  a projeção do periastro.

Medindo-se as áreas dos setores  $P'S's'$  e  $P'S's$  (vide figura 22) e em seguida dividindo-se estes valores por  $c$ , encontra-se dois valores, aos quais são adicionados os valores de  $t$  e  $t'$ . O tempo de passagem pelo periastro é dado pela média dos dois valores:  $T_+$  e  $T_-$ , isto é,

$$T_+ = t_+ - \frac{P'S's'}{c},$$

$$T_- = t_- + \frac{P'S's}{c}, \quad (\text{equação 46})$$

$$T = \frac{T_+ + T_-}{2}.$$

Observamos que  $T_+$  e  $T_-$  deverão ser numericamente semelhantes.

O tempo de passagem pelo periastro poderá ser obtido das medidas de vários grupos (dois a dois) de pontos.

Para se obter o período de revolução, Kowalsky propôs que se medisse a área de toda a elipse aparente dividindo-a em seguida pela dupla constante de velocidade areolar ( $c$ ), de forma que o resultado é o período de revolução  $P$ .

## 2) MÉTODO DE ZWIER

Este método também parte do princípio de que a órbita aparente tenha sido traçada.

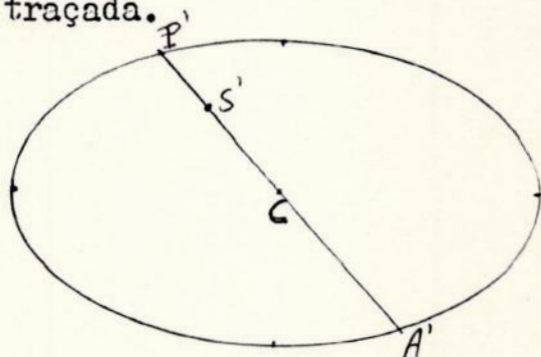


Figura 23. elipse aparente (órbita aparente)

O diâmetro  $A'CS'P'$  da elipse aparente (fig.23), traçado através de  $S'$  (projeção da estrela principal  $S$ ), é a projeção do eixo maior  $2a$  da órbita verdadeira. O ponto  $P'$  é a projeção do periastro no plano do céu. O ponto  $A'$  é a projeção do apoastro no plano do céu. Uma vez que o segmento  $CP'$  é a projeção do semi-eixo maior  $a$ , o segmento  $CS'$  é a projeção do produto  $ae$  (onde  $e$  é a excentricidade da órbita verdadeira). Dado que as proporções não são mudadas em uma projeção, a excentricidade  $e$  será por  $CS'/CP'$ . O semi-eixo menor é dado por

$$b = a\sqrt{1-e^2}.$$

Seja  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$  a proporção do eixo maior relativo



ao eixo menor da órbita verdadeira; seja a distância  $A'CP'$  o eixo conjugado  $2a'$ . O outro eixo conjugado ( $2b'$ ) será dado a partir da construção que se segue.

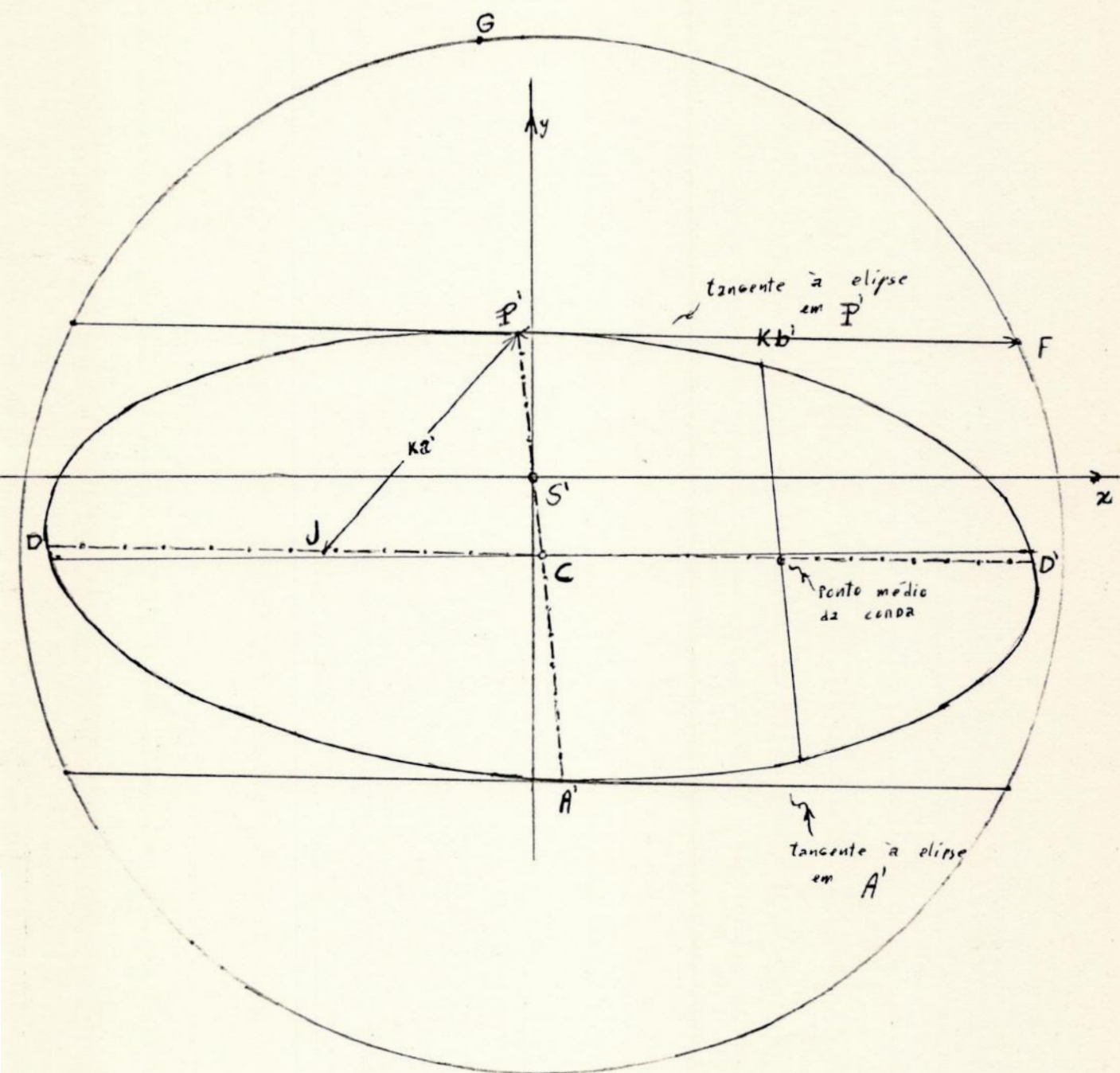


Figura 24. Ilustração do método de Zwier.

Seja uma corda na elipse aparente, paralela à  $ACS'P'$ . Toma-se o ponto médio desta corda e em seguida traça-se um segmento passando por esse ponto, pelo centro  $C$  e cortando a elipse aparente em dois pontos,  $D$  e  $D'$  (figura 24). este segmento, assim traçado é o diâmetro conjugado  $2b'$ . A equação da elipse aparente referida ao diâmetro conjugado é

$$\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(b')^2} = 1,$$

e a equação da elipse auxiliar, referida também ao diâmetro conjugado, é dada por

$$\frac{x^2}{(a')^2} + \frac{y^2}{(kb')^2} = 1.$$

Traçamos agora uma tangente à elipse aparente no ponto  $P'$  e uma perpendicular à essa tangente, passando pelo mesmo ponto ( $P'$ ), no sentido exterior à elipse aparente, e tomamos em seguida os pontos  $G$  e  $P'$ ; a distância entre eles mede  $ka' = a''$  (a distância do ponto  $G$  ao centro  $C$  é  $CG = \alpha$ ). Marca-se então um ponto ( $F$ ) na reta tangente a  $P'$  tal que a distância  $FP'$  seja  $kb' = b''$  (a distância entre o ponto  $F$  e o centro  $C$  vale  $\alpha$ , isto é,  $CF = \alpha$ ). Marca-se, agora, um ponto ( $J$ ) no diâmetro conjugado  $2b'$  ( $DD'$ ) de forma que a distância deste ponto a  $P'$  seja  $ka'$ . O seguimento  $CJ$  é igual a  $\beta$  e

$$\alpha^2 + \beta^2 = a''^2 + b''^2. \quad (\text{equação 47})$$

Duas importantes observações:

- A linha dos nodos é o único diâmetro da elipse aparente que não é reduzido pela projeção.

- No método de Zwier os ângulos são contados na direção crescente dos ângulos de posição.

Seja  $\gamma$  a posição angular de  $P'$ . O ângulo de inclinação da órbita verdadeira é dado pela relação

$$\cos i = \frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{equação 48})$$

Continuando com a descrição do método de Zwier, tomamos as posições angulares do ponto  $P'$  e do ponto  $D$  (ou  $D'$ ), com o centro como origem e o eixo  $x$  como início de contagem, de maneira que a posição angular de  $D$  (ou  $D'$ ) seja  $\psi$ , sendo  $\psi$  tomado de forma que  $\gamma - \psi$  seja um ângulo agudo. Tendo todas essas informações, é fácil verificar que

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= a''^2 + b''^2 + 2a''b'' |\sin(\gamma - \psi)|, \\ (\alpha - \beta)^2 &= a''^2 + b''^2 - 2a''b'' |\sin(\gamma - \psi)|. \end{aligned} \quad (\text{equação 49})$$

As coordenadas de qualquer ponto na elipse auxiliar em relação ao eixos  $2\alpha$  e  $2\beta$  são escritas na forma  $\alpha \cos \varphi'$  e  $\beta \sin \varphi'$ . As coordenadas do ponto  $P'$  (extremidade do diâmetro  $a'$ ) são, portanto  $(\alpha \cos w, \beta \sin \Omega)$ . Disto decorre que

$$(\overline{OP'}) = a'^2 = \alpha^2 \cos^2 w + \beta^2 \sin^2 w, \quad (\text{equação 50})$$

ou

$$a'^2 (\sin^2 w + \cos^2 w) = \alpha^2 \cos^2 w + \beta^2 \sin^2 w,$$

donde

$$\tan w = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 - a'^2}{a'^2 - \beta^2}}. \quad (\text{equação 51})$$

O sinal de  $(\tan w)$  tem que ser o mesmo de  $(\gamma - \varphi)$ .

É através de  $w'$  (projeção do angulo  $w$ ) que se encontra a posição angular do ponto nodal ascendente  $\Omega$ , no método de Zwier. A tangente desse ângulo ( $w'$ ) é dada por

$$\tan w' = \frac{\ell}{\alpha} \tan w, \quad (\text{equação 52}).$$

Resultando para  $\Omega$  o valor  $\Omega = \gamma - w'$  (equação 53). O valor de  $w$  que deve ser tomado na equação 52 é o que faz  $\Omega < 180^\circ$ .

## 3) MÉTODO DE THIELE

Em relação a este método não será dado aqui, muita ênfase, uma vez que o método escolhido para ilustrar o exemplo de cálculo de órbita (A88) foi o método de Kowalsky.

É bom que se note que Innes propôs um método que é em sua essência o mesmo proposto por Thiele.

O método de Thiele se baseia em três posições observadas (lugares normais) e na constante de velocidade areolar. As três posições citadas são lugares normais habilmente selecionados, de forma que representem convenientemente as partes bem observadas da elipse aparente. O sucesso do método de Thiele depende da habilidade com a qual é feita tal seleção e da precisão com a qual é feita a definição da constante de velocidade areolar.

Neste método são considerados dados: a dupla constante de velocidade areolar ( $c$ ), os três lugares normais e os instantes correspondentes a esses três lugares normais  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$ .

Tendo, para cada observação,

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta, \end{aligned} \quad (\text{equação 54}).$$

vem

$$\begin{aligned} \rho \cos (\theta - \Omega) &= r \cos (v + w), \\ \rho \sin (\theta - \Omega) &= r (\sin (v + w)) (\cos i). \end{aligned} \quad (\text{equação 55})$$

Separando  $\theta$  de  $r$  e  $v$  de  $w$ ,

$$\begin{aligned} ((\cos \theta) + (\sin \theta) (\cos \Omega)) &= r ((\cos v) (\cos w) - (\sin w) (\sin v)), \\ ((\sin \theta) (\cos \Omega) - (\sin \Omega) (\cos \theta)) &= r (\sin v \cos w + \sin w \cos v \cos i). \end{aligned}$$

Transpondo o segundo membro para o primeiro e usando a equação 54, vem

$$\begin{aligned} x &= r (\cos v) ((\cos w) (\cos \Omega) - (\sin w) (\sin \Omega) (\cos i)) \\ &\quad + r (\sin v) ((-\sin w) (\cos \Omega) - (\cos w) (\sin \Omega) (\cos i)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r (\cos v) ((\cos w) (\sin \Omega) + (\sin w) (\cos \Omega) (\cos i)) \\ &\quad + r (\sin v) ((-\sin w) (\sin \Omega) + (\cos w) (\cos \Omega) (\cos i)). \end{aligned}$$

Observe que a inclinação  $i$  é tomada entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , quando o movimento for retrógrado, em todas as fórmulas de Thiele-Innes.

Sejam

$$\begin{aligned} X &= \frac{r}{a} (\cos v) = (\cos E) - (\sin \psi), \\ Y &= \frac{r}{a} (\sin v) = (\cos \psi) - (\sin E), \end{aligned} \quad (\text{equação 57})$$

e

$$\begin{aligned} A &= a((\cos w)(\cos \Omega) - (\sin w)(\sin \Omega)(\cos i)), \\ B &= a((\cos w)(\sin \Omega) + (\sin w)(\cos \Omega)(\cos i)), \\ F &= a((-\sin w)(\cos \Omega) - (\cos w)(\sin \Omega)(\cos i)), \\ G &= a((-\sin w)(\sin \Omega) + (\cos w)(\cos \Omega)(\cos i)). \end{aligned} \quad (\text{equação 58})$$

Estas equações relacionam as constantes de Thiele-Innes e os elementos orbitais  $a$ ,  $w$ ,  $\Omega$  e  $i$ .

As equações 56, 57 e 58 podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} X &= AX + FY, \\ Y &= BX + GY. \end{aligned} \quad (\text{equação 59})$$

O centro da elipse aparente e mais os pontos  $(A, B)$  e  $(F(\cos \psi), G(\cos \psi))$ , definem as projeções dos eixos maior e menor da órbita verdadeira (par de eixos conjugados).

Seja

$$c = \frac{2\pi}{P} (AG - BF)(\cos \psi), \quad (\text{equação 60})$$

a dupla constante de velocidade areolar.

Consideremos as posições da estrela principal e da companheira nas datas  $t_r$  e  $t_f$ . Representando por  $\Delta_{rf}$  a dupla área do triângulo formado pelas três posições (da principal e da companheira em  $t_r$  e  $t_f$ ), vem

$$\Delta_{rf} = x_r y_f - x_f y_r = (AG - BF)(X_r Y_f - X_f Y_r). \quad (\text{equação 61})$$

Substituindo as equações 57 e 60 na equação 61, temos

$$\frac{\Delta_{rf}}{c} = \frac{P}{2\pi} \sin(E_f - E_r) - (\sin \psi)((\sin E_f) - (\sin E_r)). \quad (\text{equação 62})$$

Desta equação e da equação de Kepler segue que

$$E - (\sin \psi)(\sin E) = M = 2\pi \frac{(t - T)}{P}, \quad (\text{equação 6})$$

onde  $\frac{2\pi}{P} = \mu$ .

Assim,

$$t_f - t_r = \frac{1}{\mu} (E_f - E_r) - (\sin \psi)((\sin E_f) - (\sin E_r)).$$

Subtraindo desta última equação a equação 62, obtemos

$$t_f - t_r - \frac{\Delta_{rf}}{c} = \frac{1}{\mu} (E_f - E_r) - \sin(E_f - E_r). \quad (\text{equação 63})$$

Fazendo  $E_2 - E_1 = u$  e  $E_3 - E_2 = v$ , temos  $E_3 - E_1 = u+v$ , e escrevendo a equação 63 para  $(t_2 - t_1)$ ,  $(t_3 - t_2)$  e  $(t_3 - t_1)$ , segue que

$$\begin{aligned}
 t_2 - t_1 - \frac{\Delta_{1,2}}{c} &= \frac{1}{\mu} (E_2 - E_1) - \text{sen}(E_2 - E_1) \\
 &= \frac{1}{\mu} (u - \text{sen } u), \\
 t_3 - t_2 - \frac{\Delta_{2,3}}{c} &= \frac{1}{\mu} (E_3 - E_2) - \text{sen}(E_3 - E_2) \\
 &= \frac{1}{\mu} (v - \text{sen } v), \quad (\text{equação 64}) \\
 t_3 - t_1 - \frac{\Delta_{1,3}}{c} &= \frac{1}{\mu} (E_3 - E_1) - \text{sen}(E_3 - E_1) \\
 &= \frac{1}{\mu} (u+v) - \text{sen}(u+v).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 u - \text{sen } u &= (t_2 - t_1 - \frac{\Delta_{1,2}}{c}) , \\
 v - \text{sen } v &= (t_3 - t_2 - \frac{\Delta_{2,3}}{c}) , \quad (\text{equação 65})
 \end{aligned}$$

$$(u+v) - \text{sen}(u+v) = (t_3 - t_1 - \frac{\Delta_{1,3}}{c}) .$$

Note que se as observações se estendem sobre uma revolução completa, o período será aproximadamente conhecido; o valor de  $\mu$  será também conhecido e daí pode-se deduzir de vez os valores de  $\text{sen } \varphi$  e  $E_2$ . No entanto, se as observações feitas cobrem somente partes da órbita, assume-se o valor mais plausível para  $\mu$  e faz-se uma tabela, como a tabela A, partindo dos parâmetros  $\Delta_{1,2}$ ,  $\Delta_{2,3}$ ,  $\Delta_{1,3}$  e  $c$ , aplicados a formula 65. Nela,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  e  $\mu_4$ , são valores possíveis de  $\mu$ . Quando a diferença soma -  $(u+v)$  for suficiente pequena o mesmo valor de  $\mu$  aplicado em  $u$  e  $v$  coincide com o aplicado em  $(u+v)$ .

Tabela A. Exemplo de organização da tabela para o cálculo de  $u$ ,  $v$  e  $u+v$

$\mu$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$
$u - \text{sen } u$				
$v - \text{sen } v$				
$(u + v) - \text{sen}(u + v)$				
$u$				
$v$				
Soma				
$u + v$				
Soma - $(u + v)$				

Neste estágio, temos

$$F = \frac{2\pi}{\mu}$$

Combinando as relações 65, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta_{1,2} + \Delta_{2,3} - \Delta_{1,3} &= \frac{c}{\mu} \left[ (\text{sen } u) + (\text{sen } v) - (\text{sen } (u+v)) \right] \\ \Delta_{2,3} (\text{sen } u) - \Delta_{1,2} (\text{sen } v) &= \frac{c}{\mu} (\text{sen } \varphi) \left[ (\text{sen } v) ((\text{sen } E_2) - (\text{sen } E_1)) - (\text{sen } u) ((\text{sen } E_3) - (\text{sen } E_1)) \right], \end{aligned}$$

onde  $E_3 - E_2 = v$ .

A segunda equação pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \Delta_{2,3} (\text{sen } u) - \Delta_{1,2} (\text{sen } v) &= \frac{c}{\mu} (\text{sen } \varphi) (\text{sen } E_2) \left[ (\text{sen } v) \left( 1 - \frac{\text{sen } E_1}{\text{sen } E_2} \right) + (\text{sen } u) \left( 1 - \frac{\text{sen } E_3}{\text{sen } E_1} \right) \right], \end{aligned}$$

ou então,

$$\begin{aligned} \Delta_{2,3} (\text{sen } u) - \Delta_{1,2} (\text{sen } v) &= \frac{c}{\mu} (\text{sen } \varphi) (\text{sen } E_2) \left[ (\text{sen } v) + (\text{sen } u) - \text{sen}(u+v) \right]. \end{aligned} \quad (\text{equação 66})$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta_{2,3} (\cos u) + \Delta_{1,2} (\cos v) - \Delta_{1,3} &= \frac{c}{\mu} (\text{sen } \varphi) \left[ (\text{sen } E_3) (\text{sen } E_1) - (\cos u) (\text{sen } E_3 - \text{sen } E_2) - (\cos v) (\text{sen } E_2 - \text{sen } E_1) \right], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta_{2,3} (\cos u) + \Delta_{1,2} (\cos v) - \Delta_{1,3} &= \frac{c}{\mu} (\text{sen } \varphi) (\cos E_2) \left[ (\text{sen } u) + (\text{sen } v) - \text{sen}(u+v) \right]. \end{aligned} \quad (\text{equação 67})$$

Das equações 66 e 67 decorre

$$(\text{sen } \varphi) (\text{sen } E_2) = \frac{\Delta_{2,3} (\text{sen } u) - \Delta_{1,2} (\text{sen } v)}{\Delta_{1,2} + \Delta_{2,3} - \Delta_{1,3}}, \quad (\text{equação 68})$$

$$(\text{sen } \varphi) (\cos E_2) = \frac{\Delta_{2,3} (\cos u) + \Delta_{1,2} (\cos v) - \Delta_{1,3}}{\Delta_{1,2} + \Delta_{2,3} - \Delta_{1,3}}.$$

Como o sistema formado pelas equações 68 fornece  $E_2$  e  $e \text{ sen } \psi$ , tem-se que

$$E_1 = E_2 - u \quad \text{e} \quad E_3 = E_2 + v .$$

Da equação  $M = \mu (t - T)$  são obtidos três valores para o tempo de passagem pelo periastro,  $T$  (pela aplicação das três datas  $t_1, t_2$ , e  $t_3$ ).

Após utilizar a equação 57 para encontrar  $X$  e  $Y$ , com a equação 59 se obtém as constantes de Thiele-Innes :  $A, B, F$  e  $G$ . A partir daí, se obtém os elementos orbitais geométricos ( $w, \Omega$  e  $i$ ) por combinações das relações 58, como indicado a seguir.

$$\text{tg}(w + \Omega) = \frac{B - F}{A + G} ,$$

$$\text{tg}(w - \Omega) = \frac{-B - F}{A - G} ,$$

$$\text{tg}^2 \frac{i}{2} = \frac{A - G}{A + G} \cdot \frac{(\cos(w + \Omega))}{(\cos(w - \Omega))} = \frac{-(B - F)}{B - F} \cdot \frac{(\text{sen}(w + \Omega))}{(\text{sen}(w - \Omega))} .$$

(eq. 69)

Lembramos que nas fórmulas 68, se o movimento for retrógrado, os valores de  $w + \Omega$ ,  $w - \Omega$  e  $\frac{i}{2}$  são tomados no 2º quadrante.

Outra observação importante é a que se refere à dupla constante de velocidade areolar ( $c = \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ ), cujo sinal é negativo quando o movimento da companheira relativamente à principal for retrógrado.

Tendo agora  $w, \Omega$  e  $i$  e as constantes de Thiele-Innes ( $A, B, F$  e  $G$ ) pode-se obter o semi-eixo maior através de uma das equações do conjunto de equações 58. Por exemplo,

$$a = \frac{A}{(\cos w)(\cos \Omega) - (\text{sen } w)(\text{sen } \Omega)(\cos i)} \cdot \quad (\text{eq. 70})$$

Em resumo, no método de Thiele se obtém primeiro o período a partir de  $\mu$ , depois obtém-se a excentricidade  $e$  e o tempo de passagem pelo periastro  $T$  pela aplicação das relações 68. Em seguida obtém-se  $X$  e  $Y$  das equações 57, e em seguida as constantes de Thiele-Innes da equação 59. A seguir, utilizando as equações 69 obtém-se os elementos orbitais geométricos  $w, i$  e  $\Omega$ . Para se obter o semi-eixo maior  $a$ , aplica-se a equação 70.



#### 4) CONSTRUÇÃO DA ELÍPSE VERDADEIRA, A PARTIR DA ELÍPSE APARENTE E DOS ELEMENTOS ORBITAIS.

Pela elipse aparente, encontra-se o seu centro  $C$  e observamos que este ponto é centro de ambas as elipses (aparente e verdadeira). Quando da construção da elipse aparente, uma das primeiras providências tomadas foi traçar o eixo dos  $x$  que é positivo na direção norte (este eixo tem origem em  $S'$ ).

Para que se possa obter a elipse verdadeira a partir da elipse aparente e dos elementos orbitais  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $w$ ,  $\Omega$  e  $T$ , procede-se da forma que se segue (figura 25). Traça-se dois círculos, ambos centrados no centro  $C$ , comum às elipses verdadeira e aparente, um dos círculos de raio  $a$  e outro de raio igual a  $a\sqrt{1-e^2}$  ( $=b$ , semi-eixo menor), traça-se também um eixo paralelo ao eixo dos  $x$  de forma que este novo eixo (também eixo dos  $x$ ) tenha como centro o ponto  $C$  (naturalmente este eixo tem direção sul-norte e é positivo no sentido de sul para norte). A partir deste eixo, traça-se a linha dos nodos  $\Omega C U$  que por sua vez é obtida a partir do elemento  $\Omega$  (posição angular do ponto nodal ascendente). Com a linha dos nodos, marca-se a longitude do periastro  $w$  e depois de marcado o ponto correspondente à longitude do periastro ( $w$ ), traça-se um segmento de reta que ligue tal ponto ao centro comum a ambas as elipses e círculos. Este segmento de reta corta o círculo de raio  $a$  em dois pontos (um deles é o periastro e o outro é o apoastro). O ponto do periastro  $P$  é aquele que se projeta na órbita aparente no ponto da elipse aparente mais próximo da projeção da estrela principal  $S$ .

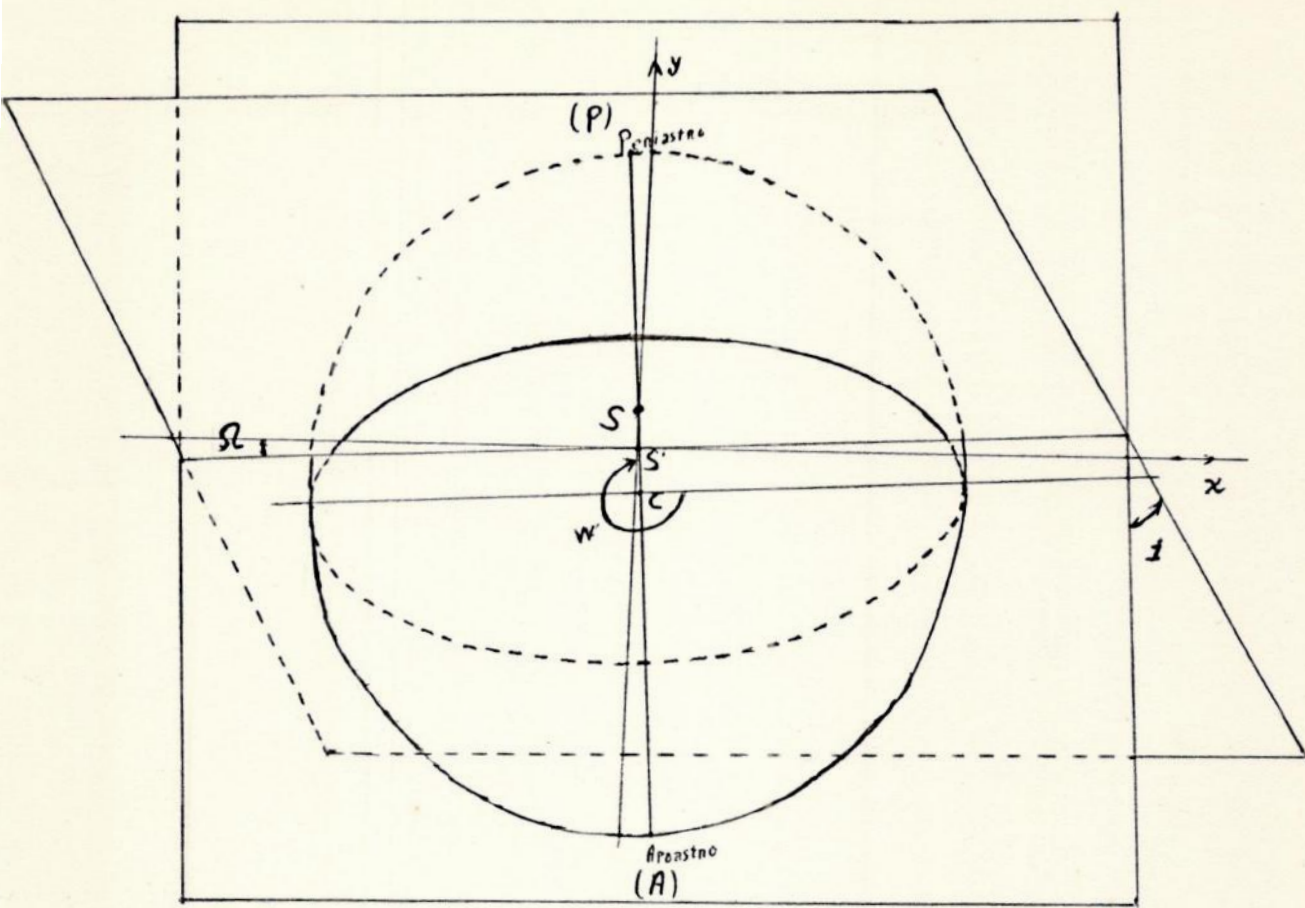


Figura 25. Construção da elipse verdadeira a partir da aparente e dos elementos orbitais (já obtidos pe la aplicação de algum método).

Uma outra maneira de se obter o periastro é traçar uma perpendicular à linha dos nodos passando pelo ponto da elipse aparente (determinado por T) mais próximo à projeção da estrela principal S'; Onde tal perpendicular cortar o semi-círculo de raio a que contém S', teremos o periastro. Traçando-se uma reta que passe pelo periastro e pelo centro C, a reta cortará o círculo de raio a no apoastro A. Determina-se, assim, a linha ACP que é o eixo maior da elipse verdadeira. Este eixo contém os focos da elipse verdadeira. Traçando uma perpendicular à linha dos nodos e que passa por S' (projeção da estrela principal S), obtém-se S como sendo o ponto em que essa perpendicular cortar o eixo maior da elipse verdadeira (S é um dos focos desta elipse). Sabe-se que o foco S (estrela principal) se situa entre o ponto C e o periastro e que o foco F se situa entre o centro C e o apoastro. Tomando-se o seguimento CS' e o co-seno da inclinação do plano orbital, CS é obtido pela fórmula

$$ae = CS = \frac{CS'}{\cos i} \text{ (no sentido de C para P),}$$

e o segmento CF por

$$ae = CF = \frac{CS'}{\cos i} \quad (\text{no sentido de } C \text{ para } A).$$

Com esses dois focos S e F, dois pinos, um em cada foco, e uma linha de comprimento  $2a(1 + e)$  traça-se uma elipse que é a elipse verdadeira.

## IV ENCONTRANDO A ÓRBITA APARENTE DA BINÁRIA VISUAL A88

(ADS, 11520)

## 1 ) DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS REFERENTES À BINÁRIA VISUAL A88

Tabela I. Dados observacionais da binária visual A88  
(Aitken, 1964, página 96).

Data	$\theta_0$ ( $^{\circ}$ )	$\rho_0$ ( $''$ )	n	Obs.	(O - C),		
					$\Delta\theta$ ( $^{\circ}$ )	$\Delta\rho$ ( $''$ )	
1900,46	353,2	0,14	3	Ait.	- 1,3	-0,004	-0,03
1901,56	338,3	0,14	3	"	- 0,8	-0,002	-0,02
1902,66	318,1	0,12	3	"	0,7	0,002	-0,01
1903,40	293,6	0,11	3	"	- 0,2	-0,000	0,00
1904,52	278,4	0,14	4	"	20,8	+0,640	0,03
1905,53	224,8	0,12	4	"	- 0,2	-0,000	0,01
1906,48	199,1	0,13	4	"	- 7,4	-0,020	-0,03
1907,30	193,5	0,14	1	"	- 0,8	-0,002	-0,03
1908,39	178,1	0,15	3	"	0,1	+0,000	0,00
1909,67	150,4	0,10	2	"	3,3	0,006	0,01
1910,56	047,0	0,11	2	"	- 0,6	-0,001	0,03
1911,55	018,7	0,15	1	"	7,0	0,017	0,01
1912,57	356,1	0,15	3	"	0,9	0,003	-0,02
1914,55	331,2	0,14	4	"	9,2	+0,022	0,00
1915,52	306,4	0,15	3	"	10,6	+0,020	0,04
1916,24	277,2	0,13	1	V.Bs.	- 9,8	-0,017	0,03
1916,63	243,0	0,16	2	Lv	-12,1	-0,023	0,05
1916,76	248,8	0,14	2	Ait.	- 2,3	-0,004	0,03
1917,62	222,5	0,10	1	V.Bs.	- 3,6	-0,008	0,03
1917,64	228,1	0,14	2	Ait.	2,1	+0,008	0,01
1918,52	200,4	0,14	2	"	- 7,4	-0,021	-0,02
1918,76	196,9	0,14	1	V.Bs.	- 7,1	-0,020	-0,02
1919,62	188,4	0,15	3	AIT.	- 3,1	-0,007	-0,02
1920,37	173,6	0,16	2	"	- 7,4	-0,020	0,00
1920,67	172,6	0,16	5	Btz	- 2,6	-0,007	0,01
1921,52	143,5	0,15	1	Btz	- 6,9	-0,011	0,06
1921,53	144,4	0,12	4	Ait.	- 6,0	-0,009	0,03
1922,62	muito próximas			"			
1923,57	010,9	0,14	4	"	- 2,9	00,007	0,00
1923,76	011,8	0,18	4	Mag.	11,9	0,005	0,03
1924,51	354,9	0,15	1	V.Bs.	- 2,9	-0,009	-0,02
1924,65	344,2	0,12	1	Ait.	-11,6	-0,034	-0,05
1925,61	340,6	0,15	3	"	- 1,5	-0,004	-0,01
1928,63	272,2	0,14	2	"	12,8	0,025	0,03
1931,66	187,5	0,14	2	"	- 6,9	-0,020	-0,03
1932,78	177,7	0,15	2	"	2,4	0,006	0,00
1933,60	159,3	0,11	4	"	6,6	0,012	0,01

Na tabela I,  $\theta$  é a medida da posição angular em graus,  $\rho$  é a medida de distância angular em segundos de arco,  $n$  é o número de observações para uma medida, obs indica o observador e (O-C) é o resíduo.

## 2) CONSTRUÇÃO DE ELÍPSES APARENTES

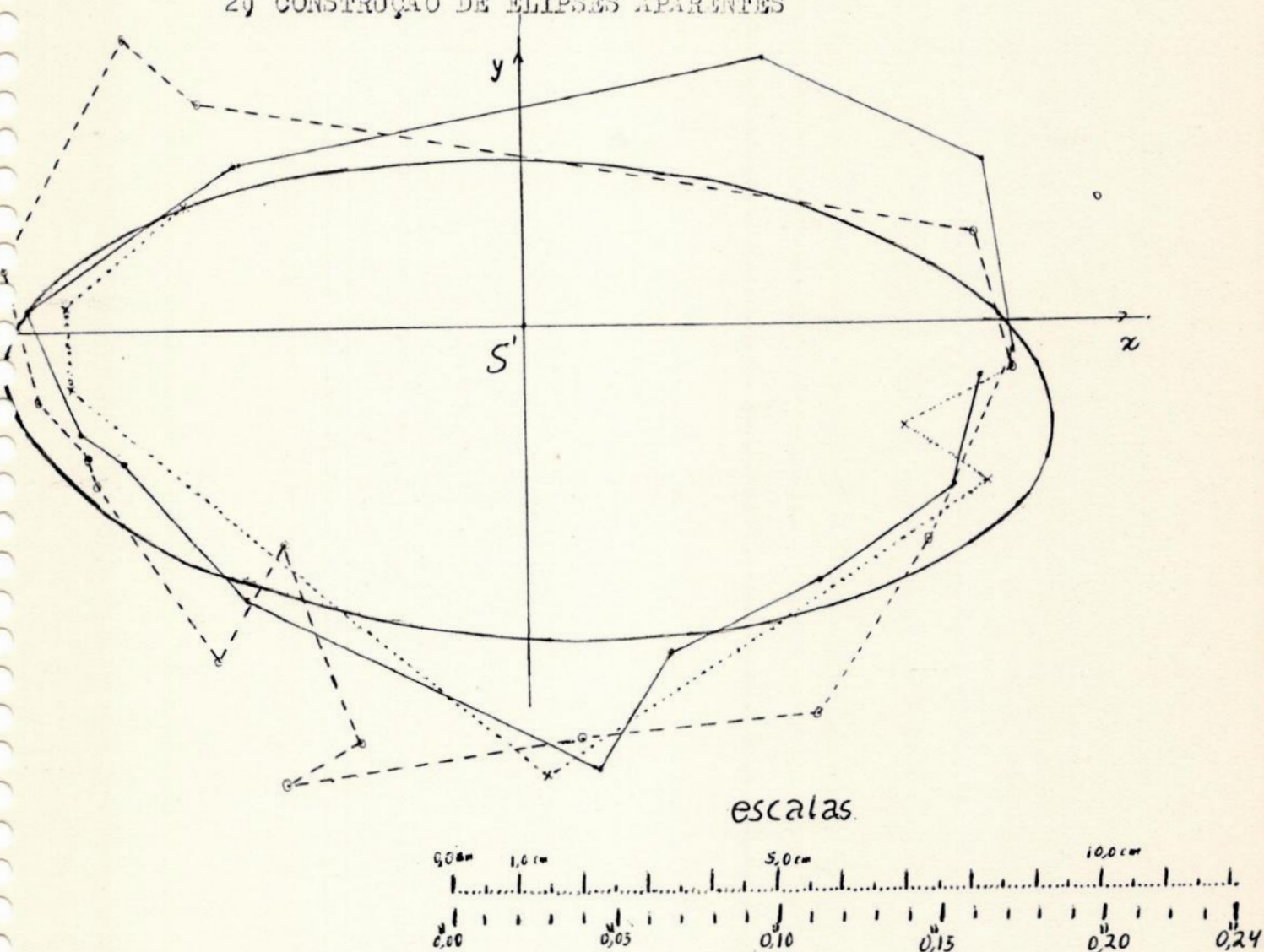


Figura 26. Órbita aparente de ABB. A linha contínua é relativa às posições dadas na primeira volta, a tracejada é relativa à segunda volta e a pontilhada à terceira volta. Ao lado da figura estão duas escalas para comparação (a de cima em centímetros e a de baixo em segundos de arco).

Depois de plotados os pontos da tabela I, a próxima fase é a de construção de elipses. E estas elipses foram traçadas de modo a termos a configuração mais adequada possível à distribuição dos pontos relativos à tabela I. Os pontos são considerados de acordo com o número  $n$  de observações, isto é, um ponto para o qual foram feitas cinco (05) observações em uma noite vale tanto quanto cinco outros pontos para os quais foram feitas somente uma observação. Quante mai-

or for  $n$ , maior é a credibilidade para o respectivo ponto.

Os instrumentos usados aqui para traçar elipses foram duas agulhas, um pedaço de linha, lápis e papel. Cada elipse foi traçada cravando - se duas agulhas em uma folha onde os pontos relativos à tabela I haviam sido previamente marcados, (ver figura 26). Dessa forma foram traçadas mais de dez (10) elipses e na escolha da melhor elipse o critério foi, preliminarmente, o da melhor adaptação da elipse à distribuição dos pontos. A elipse final que obtivemos difere da de Aitken. No entanto, ocorre que ele tinha a seu dispor um planímetro, um elipsógrafo e não considerou as observações de Magaine, Van Biesbrock, Leavenworth e Bernewitz.

bom

### 3) VERIFICAÇÃO DA LEI DAS ÁREAS

Se a Lei das Áreas se verificar para uma elipse aparente significa que a elipse é razoável, no mínimo. A verificação da Lei das Áreas funciona como um teste.

Segundo palavras de Danjon, "Para o observador terrestre o movimento aparente se deduz do movimento verdadeiro por uma projeção sobre o plano normal ao raio visual. A órbita aparente é elíptica, mas a componente principal ( $S'$ ) não ocupa nenhum foco. O movimento aparente da companheira ( $B$ ) em relação à principal obedece ainda à Lei das Áreas" ( Danjon, 1959, pág. 381 ).

A Lei das Áreas nos diz que o raio vetor que, no caso, une as projeções das duas binárias, varre áreas iguais em intervalos iguais de tempo (fig. 27).

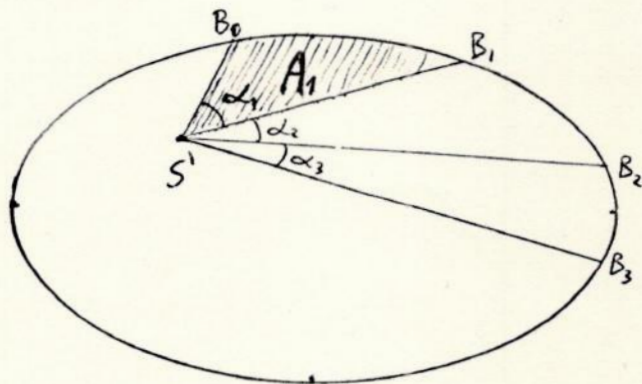


Figura 27. Os segmentos  $S'B_i$  representam as posições das projeções das estrelas, principal e secundária, em um instante  $t$ ; qualquer ( $i=0,1,2,3,\dots$ ).  $A_i$  é a área do setor da elipse determinado pelo arco da elipse que une  $B_{i-1}$  a  $B_i$ .

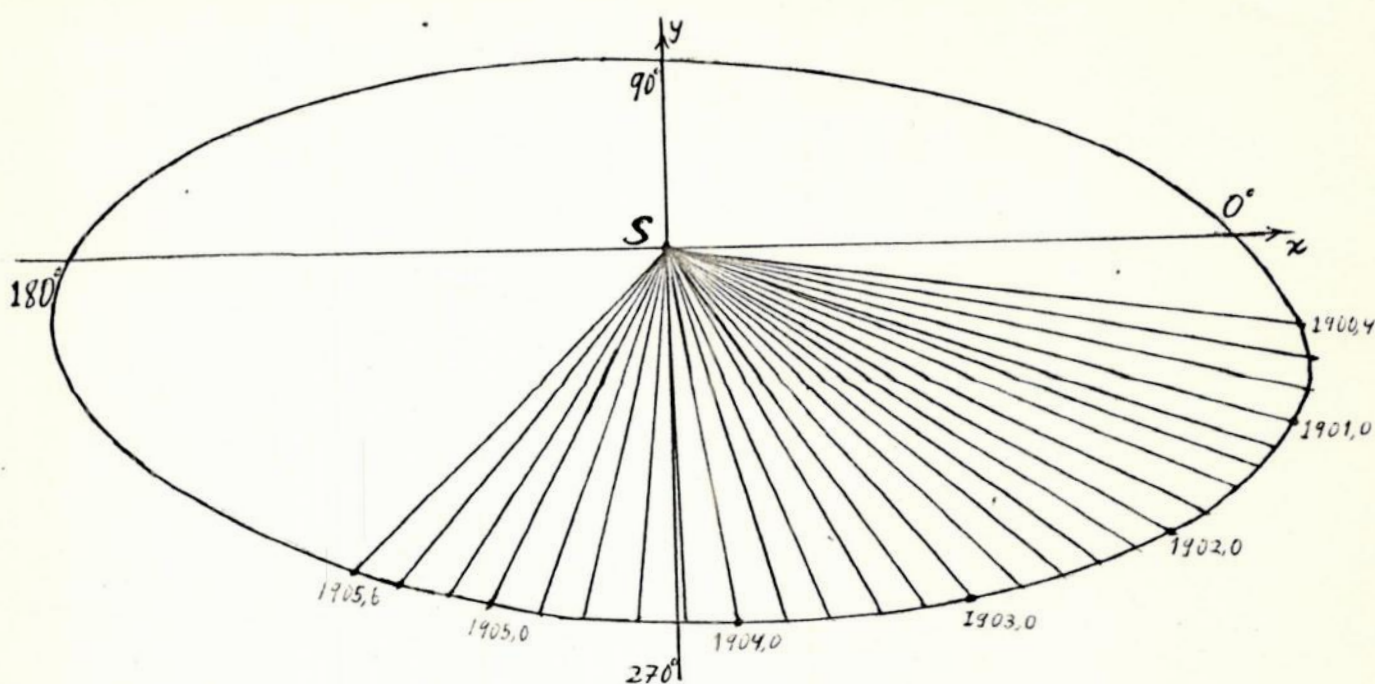


Figura 28. Elipse com as relativas seções de áreas constantes para a verificação da lei das áreas.

Se o autor Aitken achou outra elipse é devido a várias razões, dentre as quais

- 1- experiência, habilidade, especialidade;
- 2- trabalhou somente com suas observações (eu trabalhei com outras observações também);
- 3- uso do planímetro (Aitken usou, eu não).

Deve-se observar que o valor 0,001223 determinado como média de  $\rho_i \rho_{i-1} \Delta \theta_i$  (referente à tabela da página 54), foi obtido quando a unidade para os ângulos foi o radiano. Dividindo agora  $\rho_i \rho_{i-1} \Delta \theta_i$  por 0,2 (intervalo de tempo, em anos) obtém-se para a dupla constante areolar,  $c$ , o valor

$$c = 0,006115$$

De acordo com a Lei das Áreas, a área  $A_i$  será igual à área  $A_1$  desde que os intervalos de tempo decorridos sejam iguais ( $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ ). E quando  $t_1 = t_2 = t_3$ ,  $t_2 = t_3 = t_4$ , tem-se  $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_i$ .

Observe que quando o ângulo  $\alpha_i$  tende a zero, o arco unindo  $B_i$  a  $B_{i-1}$  tende a uma reta e temos

$$\frac{A_i}{(t_i - t_{i-1})} = \overline{SB_i} \cdot \overline{SB_{i-1}} \cdot \alpha_i = \text{Constante} = c,$$

e que quando  $t_i = t_{i-1}$  ( $t_i = t_1, t_2, t_3, \dots$ ), decorre (fig. 28)

$$A_i = \overline{SB_i} \cdot \overline{SB_{i-1}} \cdot \alpha_i = \text{Constante}.$$

Quando se faz medidas para o caso em que  $\alpha_i$  é pequeno, tem-se que a fórmula anterior é razoável, embora não seja exata, e passa a ter a seguinte notação,

$$A_i = \rho_{i-1} \rho_i \Delta \theta.$$

Como não dispenho de planímetro, minha opção foi medir cada setor da área da elipse, de maneira que o intervalo de tempo para cada setor de área fosse constante. E nesse processo, vários conjuntos de medidas (tabelas) erradas foram feitas até chegar a uma tabela razoável (quando o desvio padrão não é muito grande, relativamente à média, como sugerido por Aitken). A melhor tabela conseguida é dada a seguir.



Tabela II. Cálculo de  $\rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta$  ( $=A_i$ ), isto é, do produto de duas distâncias angulares adjacentes e o ângulo  $\Delta\theta$  entre elas (observe que o intervalo de tempo,  $t_i - t_{i-1}$ , para que a estrela companheira passe da posição  $\rho_{i-1}$  para a posição  $\rho_i$ , é constante).

data	$\theta^\circ$	$\Delta\theta^\circ$	$\rho_i''$	$\rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta$
1900,4	352,0		0,161	
1900,6	349,0	2,6	0,164	0,069
1900,8	346,8	2,6	0,165	0,070
1901,0	344,2	2,6	0,165	0,071
1901,2	341,6	2,6	0,164	0,070
1901,4	339,0	2,8	0,161	0,069
1901,6	336,2	2,9	0,158	0,071
1901,8	333,3	3,1	0,153	0,071
1902,0	330,2	3,3	0,149	0,071
1902,2	326,9	3,5	0,144	0,069
1902,4	323,4	3,9	0,137	0,070
1902,6	319,5	4,3	0,131	0,070
1902,8	315,2	4,7	0,125	0,071
1903,0	310,5	5,1	0,120	0,070
1903,2	305,4	5,6	0,114	0,070
1903,4	299,8	6,2	0,109	0,070
1903,6	293,6	6,7	0,104	0,070
1903,8	286,9	7,0	0,101	0,070
1904,0	279,9	7,4	0,099	0,070
1904,2	272,5	7,6	0,096	0,070
1904,4	264,9	7,6	0,096	0,070
1904,6	257,3	7,4	0,096	0,070
1904,8	249,9	7,1	0,098	0,070
1905,0	242,9	6,6	0,101	0,070
1905,2	236,2	6,1	0,105	0,070
1905,4	230,1	5,6	0,109	0,070
1905,6	224,5		0,114	

Dos dados da tabela II tiramos

$$\rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta^\circ = 0,0701 = \rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta \text{ rad.} = 0,001223,$$

$$\sigma_{\rho_i} = 0,000010 (")^2 \text{ rad}, \quad t_i = 0,2 \text{ anos},$$

$$c = \frac{\rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta \text{ rad.}}{t_i} = 0,006115 \pm 0,000052 (")^2 \text{ rad.}$$

Pela tabela II e figura 28 verifica-se a Lei das Áreas, no mínimo razoavelmente.

V CÁLCULO DOS ELEMENTOS ORBITAIS E DAS CONSTANTES DE THIELE-INNES PELO MÉTODO DE KOWALSKY

1 ) CÁLCULO DAS CONSTANTES DE THIELE-INNES

Naturalmente, as constantes de Thiele-Innes são os parâmetros da equação geral da elipse (equação 19)

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0.$$

Seja a elipse aparente obtida dos dados do Aitken, 1951, página 96 (obs.: foram levados em consideração medidas obtidas por Aitken, Maggini, van Biesbroeck, Leavenworth e Bernewitz e não como foi calculado por Aitken, quando somente suas medidas foram consideradas).

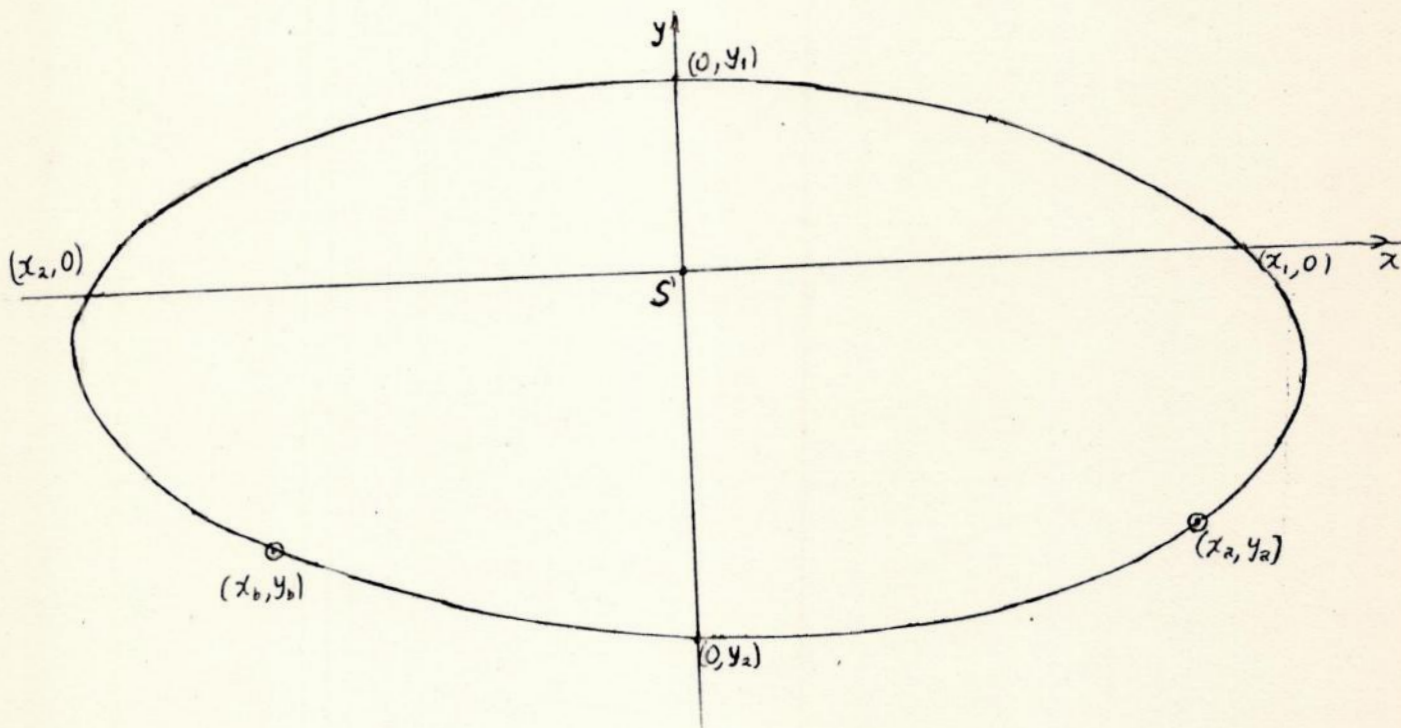


Figura 29 . Figura ilustrando a elipse aparente relativa à binária visual A88.

Sejam os seis pontos da elipse aparente de A88 marcados na figura 29 :  $(x_1, 0)$ ,  $(x_2, 0)$ ,  $(0, y_1)$ ,  $(0, y_2)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_1, y_1)$ , sendo

$(x_1, 0)$  o ponto em que o eixo dos x positivos corta a elipse,  
 $(x_2, 0)$  " " " " " " " " negativos " " " ,

$(0, y_1)$  o ponto em que o eixo dos  $y$  positivos corta a elipse,  
 $(0, y_2)$  " " " " " " " " negativos " " " ,  
 $(x_a, y_a)$  e  $(x_b, y_b)$  os pontos na elipse aparente em que o  
 produto  $x \cdot y$  é máximo.

Observe que  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da eq. de segundo grau

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad (\text{eixo dos } x)$$

assim como  $y_1$  e  $y_2$  são raízes da eq.

$$(y - y_1)(y - y_2) = 0 \quad (\text{eixo dos } y, \text{ figura 29})$$

Os valores numéricos de  $x_1, x_2, y_1, y_2, x_a, y_a, x_b$  e  $y_b$  são:

$$x_1 = 7,4 \text{ cm}, \quad x_2 = 6,6 \text{ cm}, \quad x_a = -7,8 \text{ cm}, \quad x_b = -5,5 \text{ cm},$$

$$y_1 = 2,5 \text{ cm}, \quad y_a = -3,6 \text{ cm}, \quad y_2 = -4,8 \text{ cm}, \quad y_b = -3,5 \text{ cm},$$

todos com erro de 0,1 cm, dado que a régua utilizada nas medidas é graduada em milímetros.

Continuando com o método de Kowalsky (para cálculo de órbitas), os parâmetros da equação 19 (constantes de Thiele-Innes, todas deduzidas no capítulo III) são

$$A = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad (\text{eq. 21-a})$$

$$B = \frac{1}{y_1 y_2}, \quad (\text{eq. 22-a})$$

$$G = \frac{-(x_1 + x_2)}{2x_1 x_2} \quad (\text{eq. 21-b})$$

$$F = \frac{-(y_1 + y_2)}{2y_1 y_2} \quad (\text{eq. 22-b})$$

$$H = \frac{Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1}{2xy} \quad (\text{eq. 23})$$

Sendo que  $H$  é obtida da média de  $H_a$  e  $H_b$ :

$$H_a = \frac{Ax_a^2 + By_a^2 + 2Gx_a + 2Fy_a + 1}{2x_a y_a},$$

$$H_b = \frac{Ax_b^2 + By_b^2 + 2Gx_b + 2Fy_b + 1}{2x_b y_b},$$

$$H = \frac{H_a + H_b}{2}. \quad (\text{eq. 23}^*)$$

Substituindo nas equações 21-a, 21-b, 22-a, 22-b e 23\* os valores numéricos de  $x$  e  $y$  e considerando as expansões usuais da teoria dos erros, vem

$$A = \frac{1}{x_1 x_2} \pm \left( \frac{\epsilon_{x_1}}{x_1 x_2} + \frac{\epsilon_{x_2}}{x_1 x_2} \right),$$

$$= -(1,73250 \mp 0,04562) \cdot 10^{-2}.$$

$$B = \frac{1}{y_1 y_2} \pm \left( \frac{\epsilon_{y_1}}{y_1 y_2} + \frac{\epsilon_{y_2}}{y_1 y_2} \right),$$

$$= -(8,33333 \pm 0,50694) \cdot 10^{-2}.$$

$$G = \frac{-(x_1 + x_2)}{2x_1 x_2} \pm \left[ \frac{\epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2}}{2x_1 x_2} + \frac{x_1 + x_2}{2} \left( \frac{\epsilon_{x_1}}{x_1 \cdot x_2} + \frac{\epsilon_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} \right) \right],$$

$$= -(3,45000 \pm 1,73010) \cdot 10^{-3}.$$

$$F = \frac{-(y_1 + y_2)}{2y_1 y_2} \pm \left[ \frac{\epsilon_{y_1} + \epsilon_{y_2}}{2y_1 y_2} + \frac{y_1 + y_2}{2} \left( \frac{\epsilon_{y_1}}{y_1 y_2} + \frac{\epsilon_{y_2}}{y_1 y_2} \right) \right],$$

$$= -(9,58333 \pm 0,64953) \cdot 10^{-2}.$$

Pela equação 23\* e pela teoria dos erros,

$$H_a = \frac{Ax_2^2 + By_2^2 + 2Gx_2 + 2Fy_2 + 1}{2x_2 \cdot y_2},$$

donde

$$\epsilon_{H_a} = \frac{\epsilon_A x_2}{2y} + \frac{\epsilon_{x_2} A}{2y_2} + \frac{Ax_2}{2y_2} + \frac{y_2 \epsilon_B}{2x_2} + \frac{B y_2}{2x_2} + \frac{By_2 \epsilon_{x_2}}{2x_2} + \frac{\epsilon_G}{y_2} - \frac{G \epsilon_{y_2}}{y_2} +$$

$$\frac{\epsilon_F}{x_2} - \frac{F \epsilon_{y_2}}{x_2},$$

sendo  $\epsilon_A$  o erro em  $A$ . Assim,

$$H_a = (4,01214 \pm 2,62436) \cdot 10^{-3}.$$

Procedendo como anteriormente,

$$H_b = (4,25608 \pm 0,77757) \cdot 10^{-3},$$

e como

$$H = \frac{H_a + H_b}{2},$$

obtemos

$$H = (4,13411 \pm 1,70097) \cdot 10^{-3}.$$

Em resumo,

$$A \pm \epsilon_A = -(1,73250 \pm 0,04562) \cdot 10^{-2},$$

$$B \pm \epsilon_B = -(8,33333 \pm 0,50694) \cdot 10^{-2},$$

$$G \pm \epsilon_G = -(3,46500 \pm 1,73010) \cdot 10^{-3},$$

$$F \pm \epsilon_F = -(0,58333 \pm 0,64953) \cdot 10^{-2},$$

$$H \pm \epsilon_H = (4,13411 \pm 1,70097) \cdot 10^{-3}.$$

## 2) CÁLCULO DOS ELEMENTOS ORBITAIS: $\Omega$ , $i$ e $w$

Para que se possa calcular os elementos orbitais citados, faz-se necessário utilizar as equações 35, 38, 37, 37-a, 38-a, 38-b, 38-c, 38-d, 38-e, 42, 43, 41-a e 44.

Substituindo os valores numéricos de A, B, F, G na equação 35 e procedendo como anteriormente,

$$\gamma = \frac{\text{tg}^2 i}{p^2} (\cos 2\Omega)$$

$$\gamma \pm \epsilon_\gamma = F^2 - G^2 + A - B \pm (2F\epsilon_F + 2G\epsilon_G + \epsilon_A + \epsilon_B),$$

$$\gamma \pm \epsilon_\gamma = (7,51752 \pm 0,42623) \cdot 10^{-1}.$$

Da mesma forma,

$$\delta \pm \epsilon_\delta = F^2 + G^2 - A - B \pm (2F\epsilon_F + 2G\epsilon_G + \epsilon_A + \epsilon_B),$$

$$\delta \pm \epsilon_\delta = (1,09659 \pm 0,04262) \cdot 10^{-1}.$$

Da eq. (37), temos

$$\text{tg } 2\Omega \pm \epsilon_{\text{tg } 2\Omega} = \frac{-2FG + 2H}{\gamma} \pm \left[ \frac{2(\epsilon_H + G\epsilon_F + F\epsilon_G)}{\gamma} - \frac{(-2FG + 2H)}{\gamma^2} \epsilon_\gamma \right],$$

$$\text{tg } 2\Omega \pm \epsilon_{\text{tg } 2\Omega} = (1,14454 \pm 0,33754) \cdot 10^{-1}.$$

Nas equações que se seguem, o erro de funções arbitrárias será determinado a partir de expansões em série de Taylor da seguinte forma:

Seja

$$y = f(x)$$

$$y \pm \epsilon_y = f(x \pm \epsilon_x) = f(x) + f'(x)\epsilon_x + \frac{f''(x)\epsilon_x^2}{2!} + \frac{f'''(x)\epsilon_x^3}{3!} + \dots$$

Como o termo  $f''(x)$  geralmente é desprezível em relação aos termos

$f'(x)\epsilon_x$  e  $f(x)$ , consideramos

$$y \pm \epsilon_y \approx f(x \pm \epsilon_x) - f(x) + f'(x)\epsilon_x.$$

Continuando com o cálculo,

$$\operatorname{tg}(2\Omega \pm \epsilon_{2\Omega}) = \mathcal{L} \pm \epsilon_{\mathcal{L}},$$

$$\Omega \pm \epsilon_{\Omega} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\mathcal{L} \pm \epsilon_{\mathcal{L}})}{2} \approx \frac{\operatorname{arc\,tg} \mathcal{L} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \mathcal{L}^2} \epsilon_{\mathcal{L}}}{2}.$$

Aplicando os valores numéricos, temos

$$\Omega \pm \epsilon_{\Omega} = 3,26 \pm 0,03$$

Aplicando a teoria de erros na equação 38-b vem

$$\operatorname{tg}^2 i \pm \epsilon_{\operatorname{tg}^2 i} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\mathcal{L} \cos \Omega - \mathcal{F}} \pm \frac{2\epsilon_{\mathcal{F}}}{\mathcal{L} \cos \Omega - \mathcal{F}} - \frac{2\mathcal{F}}{(\mathcal{L} \cos \Omega - \mathcal{F})^2} \cdot (\cos \Omega \epsilon_{\mathcal{L}} + \mathcal{L} \sin \Omega \epsilon_{\Omega} + \epsilon_{\mathcal{F}}).$$

(equação 38-b\*)

Como

$$\mathcal{L} \pm \epsilon_{\mathcal{L}} = F^2 + G^2 - A + B \pm 2F\epsilon_F + 2G\epsilon_G + \epsilon_A + \epsilon_B,$$

$$\mathcal{F} \pm \epsilon_{\mathcal{F}} = F^2 - G^2 + A - B \pm 2F\epsilon_F + 2G\epsilon_G + \epsilon_A + \epsilon_B,$$

então, aplicando os valores numéricos de  $F$ ,  $\epsilon_F$ ,  $G$  e de  $\epsilon_G$  vem

$$\mathcal{L} \pm \epsilon_{\mathcal{L}} = +0,109854 \pm 0,006826,$$

$$\mathcal{F} \pm \epsilon_{\mathcal{F}} = +0,0751803 \pm 0,0068263.$$

Assim, aplicando estes valores na equação 38-b\* vem

$$\operatorname{tg}^2 i \pm \epsilon_{\operatorname{tg}^2 i} = 5,55465 \pm 1,86400.$$

Outra vez, aplicando a serie Taylor para encontrar  $\operatorname{tg} i$ ,

vem

$$\operatorname{tg} i \pm \epsilon_{\operatorname{tg} i} \approx \sqrt{\operatorname{tg}^2 i} \pm \frac{\epsilon_{\operatorname{tg}^2 i}}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 i}} \left( \frac{d(\sqrt{\operatorname{tg}^2 i})}{d \operatorname{tg}^2 i} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}^2 i}} \right).$$

Substituindo agora os valores numéricos já conhecidos, e tomando  $\mathcal{J}$  como sendo a tangente de  $i$ ,

$$\mathcal{J} \pm \epsilon_{\mathcal{J}} = \operatorname{tg} i \pm \epsilon_{\operatorname{tg} i} = 2,35683 \pm 0,39564.$$

Então,

$$i \pm \epsilon_i = \operatorname{arc\,tg} \mathcal{J} \pm \frac{1}{1 + \mathcal{J}^2}.$$

Numéricamente,

$$i \pm \epsilon_i = 67,01 \pm 0,06.$$

Como a posição angular,  $\theta$ , decresce com o avanço do tempo (caso de A88)  $i$  é tomado entre  $90^\circ$  e  $180^\circ$ , daí para se obter o valor correto de  $i$  basta subtrair o valor encontrado de  $180^\circ$ ,

$$i \pm \epsilon_i = 180^\circ - (67^\circ,01 \pm 0^\circ,06),$$

$$i \pm \epsilon_i = 112^\circ,99 \pm 0^\circ,06.$$

$$p \pm \epsilon_p = \sqrt{\frac{\text{tg}^2 i \cos 2\Omega}{\gamma}} \pm \frac{1}{2\text{tg} i} \sqrt{\frac{\cos 2\Omega}{\gamma}} \epsilon_{\gamma_i} - \sqrt{\frac{\text{sen} 2\Omega \text{tg} 2\Omega}{\gamma}} \text{tg} i - \frac{\text{tg} i}{2} \sqrt{\frac{\cos 2\Omega}{\gamma^3}} \epsilon_\gamma.$$

Substituindo os valores numéricos necessários,

$$p \pm \epsilon_p = 8,56768 \pm 1,01670.$$

Façamos na equação 42,  $N^* = G (\text{sen} \Omega) - (F \cos \Omega)$  e  $D = -G \cos \Omega - F \text{sen} \Omega$ . Então, ao se calcular o valor de  $\text{tg} w (= \frac{N^* \cos i}{D})$ , seu erro fica sendo

$$\frac{\cos i}{D} \epsilon_{N^*} - \frac{N^*}{D} \text{sen} i \epsilon_i - \frac{N^*}{D^2} \cos i \epsilon_D,$$

onde

$$\epsilon_{N^*} = \text{sen} \Omega \epsilon_G + \cos \Omega \epsilon_F - F \text{sen} \Omega \epsilon_\Omega,$$

e

$$\epsilon_D = \text{sen} \Omega \epsilon_F + \cos \Omega \epsilon_G - \cos \Omega \epsilon_G - G \text{sen} \Omega \epsilon_\Omega.$$

Numéricamente,

$$N^* \pm \epsilon_{N^*} = +0,09558 \pm 0,00652,$$

$$D \pm \epsilon_D = +0,00892 \pm 0,00533,$$

donde o valor para a  $\text{tg} w$

$$\text{tg} w \pm \epsilon_{\text{tg} w} = -4,18531 \pm 3,38176.$$

Finalmente, da equação 43 tiramos

$$w \pm \epsilon_w = -76^\circ,56 \pm 0^\circ,18,$$

$$w \pm \epsilon_w = 283^\circ,44 \pm 0^\circ,18.$$

## 3) CÁLCULO DA EXCENTRICIDADE E DO SEMI-EIXO MAIOR.

Da equação 41-a, temos

$$N^* \pm \epsilon_{N^*} = G(\sin \Omega) - F(\cos \Omega) \pm [(\sin \Omega)(\epsilon_G + F\epsilon_F) + \cos \Omega(\epsilon_F + G\epsilon_G)],$$

e então

$$N^* \pm \epsilon_{N^*} = 0,09558 \pm 0,00652.$$

Da equação 41-a decorre

$$e = \frac{pN^*(\cos i)}{\sin w} \pm \left[ \frac{N^*(\cos i)}{\sin w} \epsilon_p + \frac{p(\cos i) \epsilon_{N^*}}{\sin w} - \frac{pN^*(\sin i)}{\sin w} \epsilon_i - pN^* \frac{(\cos w)}{\sin^2 w} (\cos i) \epsilon_w \right],$$

donde

$$e \pm \epsilon_e = 0,329 \pm 0,123.$$

Seja a equação 44. O erro de  $a$  é dado por

$$\epsilon_a = \frac{\epsilon_r}{1 - e^2} - \frac{2pe}{(1 - e^2)^2} \epsilon_e,$$

donde

$$a \pm \epsilon_a = 9,61 \pm 2,01 \text{ cm.}$$

Como

$$0,14'' = 12,1 \text{ cm (vide figura 26),}$$

vem

$$a = 0,191'' \pm 0,40''.$$

É bom observar que os erros aqui calculados são procedentes somente das medidas  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ ; isto é, são erros intrínsecos.

Os elementos orbitais até aqui encontrados são  $\Omega, i, w, e, a$ , e seus valores numéricos são

$$\begin{array}{ll} \Omega \pm \epsilon_\Omega = 3^\circ,36 \pm 0^\circ,03; & e \pm \epsilon_e = 0,339 \pm 0,123; \\ i \pm \epsilon_i = 112^\circ,99 \pm 0^\circ,06; & a \pm \epsilon_a = 0,191 \pm 0,040. \\ w \pm \epsilon_w = 283^\circ,44 \pm 0^\circ,18; & \end{array}$$



#### 4 ) CÁLCULO DOS ELEMENTOS ORBITAIS DINÂMICOS: PERÍODO E ÉPOCA DE PASSAGEM PELO PERIASTRO

A excentricidade, que também é elemento dinâmico, já foi calculada, restando apenas P e T.

##### CÁLCULO DO PERÍODO

Pela tabela II, verifica-se que a dupla constante de velocidade areolar é dada por  $c = \sum_{i=1}^n \rho_i \Delta\theta / n$ , onde n é o total de produtos do tipo  $\rho_i \Delta\theta$ . O valor numérico encontrado para c foi  $c = (0,006116 \pm 0,000052)$  rad. (")<sup>2</sup>/ano. Pela figura 30 pode-se medir os semi-eixos maior e menor a e b, sendo  $a = 0,160'' \pm 0,002''$  e  $b = 0,073'' \pm 0,002''$ . A área da elipse (aparente) é dada por  $A_r = \pi ab = 0,03669 \pm 0,00146$ . O período, então, será dado por

$$P = \frac{2A_r}{c} = 2 \frac{0,03669 \pm 0,00146}{0,006115 \pm 0,000052} = 12,00 \pm 0,58 \text{ anos.}$$

##### CÁLCULO DO TEMPO DE PASSAGEM PELO PERIASTRO

Pode-se observar na tabela I que a passagem pelo periastro se verifica entre as datas 1909,67 e 1923,56, 1908,39 e 1912,57, 1921,53 e 1923,57. Como as medidas feitas em 1921,53 e 1923,57 são mais confiáveis, o intervalo tomado foi entre as datas 1921,53 e 1923,57.

Seja a figura 30.

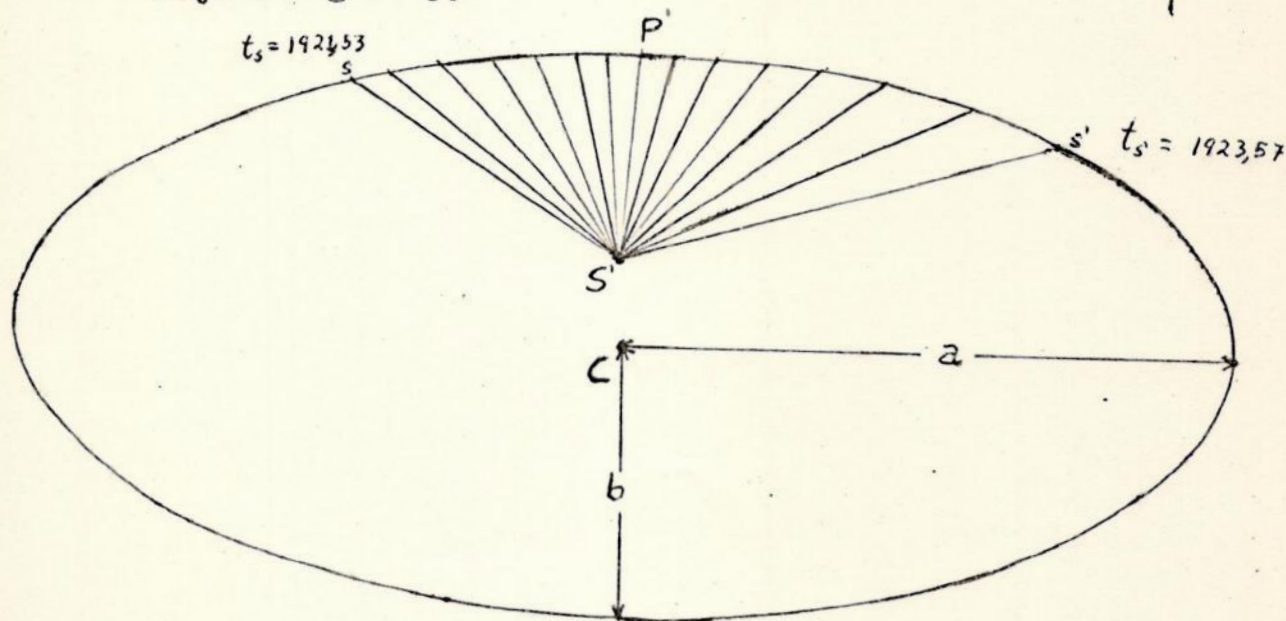


Figura 30. Ilustração da elipse aparente de A88, para o cálculo da época de passagem pelo periastro, da área total da elipse. P' e S' são as projeções do periastro e da estrela principal; s e s' são as posições da companheira em 1921,53 e 1923,57 e C é o centro da elipse em questão.

De acordo com o método de Kowalsky, o tempo de passagem pelo periastro é dado por

$$T = \frac{T_{\lambda'} + T_{\lambda}}{2},$$

onde

$$T_{\lambda'} = t_{\lambda'} - \left(\frac{P'S's'}{c}\right), \quad T_{\lambda} = t_{\lambda} + \left(\frac{P'S's}{c}\right), \quad t_{\lambda'} = 1923,57$$

e  $t_{\lambda} = 1921,53$ .

Definamos P'S's' como a área do setor limitado pelo arco elíptico s'P' e o ponto S' e P'S's como a área do setor limitado pelo arco elíptico P's e o ponto S'.

Para que se possa calcular o tempo de passagem pelo periastro seguem duas tabelas, que foram obtidas de acordo com a figura 30.

Tabela III. Valores para o cálculo de  $T_{\lambda}$

$\theta^{\circ}$	$\rho_i''$	$\Delta\theta'$	$\rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta_i$
144,4	0,088	4,4	0,02637
140,0	0,074	10,0	0,04736
130,0	0,064	10,0	0,03648
120,0	0,057	10,0	0,03021
110,0	0,053	10,0	0,02703
100,0	0,051	10,0	0,02550
90,0	0,050	9,1	0,02500
80,9	0,050		

De acordo com a tabela III e a figura 30,

$$P'S's = \sum \rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta_i = 0,21795^{\circ} (") = 0,003804 \text{ rad. } (")^2.$$

Assim,

$$\Delta t_{\lambda} = \frac{P'S's'}{c} = - \frac{0,003804}{0,006116 \pm 0,000052} = 0,62 \pm 0,01 \text{ anos,}$$

e

$$T_{\lambda} = t_{\lambda} - \Delta t_{\lambda} = 1921,53 - (0,62 \pm 0,01) = 1922,15 \pm 0,01 \text{ anos}$$

Tabela IV. Valores para o cálculo de  $T_{\lambda}'$ .

$\theta^{\circ}$	$\rho_i''$	$\Delta\theta^{\circ}$	$\rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta_i$
80,9	0,050	10,9	0,02834
70,0	0,052	10,0	0,02860
60,0	0,055	10,0	0,03300
50,0	0,060	10,0	0,03720
40,0	0,067	10,0	0,05293
30,0	0,079	10,0	0,07505
20,0	0,095	9,1	0,10028
10,9	0,116		

Como anteriormente,

$$\sum \rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta_i = -0,35540 \text{ (")}^2 \text{ (}^{\circ}\text{)},$$

donde

$$P'S's' = \sum \rho_{i-1} \rho_i \Delta\theta_i = -0,006203 \text{ (")}^2 \text{ rad,}$$

e

$$\Delta t_{\lambda} = (P'S's'/c) = -\frac{0,006203}{0,006115 \pm 0,000052} = -1,01 \pm 0,01,$$

$$T_{\lambda} = t_{\lambda} - \Delta t_{\lambda} = 1923,57 - (1,01 \pm 0,01) = 1922,56 \pm 0,01.$$

Finalmente

$$T = (T_{\lambda} + T_{\lambda}')/2 = 1922,36 \pm 0,01 \text{ anos.}$$

## VI CONCLUSÃO

Pode-se observar que o cálculo dos elementos orbitais dependem fortemente da elipse aparente, e como essa elipse é traçada à sentimento, não foi possível fazer um cálculo mais correto e completo dos erros das constantes de Thiele - Innes e dos elementos orbitais. Por essa razão, quase todos os cálculos relativos aos erros, nesse trabalho, são decorrentes somente das medidas dos erros de  $x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3, x_4$  e  $y_4$ . Mas, mesmo assim pode-se afirmar que esse trabalho ficou no mínimo, mais razoável do que se não tivesse sido feito nenhum cálculo de erros.

O erro da dupla constante de velocidade areolar é decorrente do desvio padrão da distribuição dos produtos de duas distâncias sucessivas ( $P_1 \cdot P_2$ ) e o setor angular entre elas ( $\Delta\theta$ ), dados na tabela II.

Não foi possível encontrar o desvio padrão relativo aos setores  $P'S's$  e  $P'S's'$  (pois o intervalo de tempo nesse caso não é constante, e no caso da tabela II esse intervalo é constante), daí não foi possível, também, calcularmos os erros de  $t_A, t_A', T_A$  e  $T_A'$ , e portanto ao se encontrar os valores numéricos para  $T_A$  e  $T_A'$ , o único erro possível de se considerar para  $T$  foi o devido à dupla constante areolar.

Segue uma tabela comparativa dos valores obtidos para os elementos orbitais de A88 : Nesse projeto, por Aitken (pelos métodos de Kowalsky e de Zwier e ainda outro cálculo posterior), por van den Bos e por Danjon. Esta tabela (tabela V) pode ser dividida em sete colunas : 1- Elementos orbitais; 2- valores encontrados por nós; 3 e 4- valores encontrados por Aitken através dos métodos de Kowalsky e Zwier respectivamente, página 101, Aitken, 1964; 5- valores encontrados posteriormente por Aitken, página 287, Aitken, 1964; 6- valores encontrados por van den Bos, página 216, circular nº 113, Union Observatory, 1953; 7- valores encontrados por Danjon, página 61, Journal des Observ.; 1942.

Pode-se observar que van den Bos e Danjon consideraram como sendo descendente o nodo que foi tomado por nós e por Aitken como sendo ascendente, daí a diferença em quadrantes para  $w$  e  $\Omega$ .





Ao se utilizar conjuntos deferentes de pontos ( $\rho, \theta, t$ ) para se obter elipses aparentes de um mesmo sistema binário, elas diferirão entre si e a "medida" dessa diferença será tanto maior quanto mais diferenças houver nos conjuntos. E esta é a principal razão das discrepâncias entre os valores encontrados para os elementos orbitais, como se pode ver na tabela V.

Na tabela I, as três últimas colunas se referem a resíduos (para correções diferenciais). Como neste trabalho não podemos fazer considerações rigorosas, não foram feitos cálculos referentes às estas três últimas colunas da tabela I.

Este trabalho representa um degrau para que se possa obter a órbita absoluta de binárias.

A binária usada como exemplo ilustrativo (Becvar, 1959) é A88 ( ADS 11520; GC 25481 ) da constelação da Serpente. Sua ascensão reta é igual a 18h 35,8m e a declinação vale -03° 14'; ambas referidas ao equinócio de 1950,0. Tipos espectrais iguais a F8. A magnitude combinada é 6,47 e magnitudes individuais de 7,2, ambos os valores referidos ao sistema visual de magnitudes.

## VII BIBLIOGRAFIA

- Swihar, T. L. (1968). *Astrophysics and Stellar Astronomy*.  
Arizona: Space Science Text Series.
- Smart, W. M. (1977). *Textbook on Spherical Astronomy*.  
Cambridge: Cambridge University Press.
- Aitken, R. G. (1964) *The Binary Stars*. New York: Dover Publications, Inc.
- van de Kamp, P. (1967). *Principles of Astrometry*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.
- Danjon, A. (1959). *Astronomie Générale: Astronomie Sphérique et Eléments de Mécanique Céleste*. Paris: J. R. Sennac.
- Becvár, A. (1959). *Atlas Coeli II Katalog 1950,0*. Praha: Nakladatelství Československé Akademie Věd.
- van den Bos, W. H. *Orbit Determinations of Visual Binaries* in W. A. Hiltner, ed., *Astronomical Techniques ( Stars and Stellar Systems, Vol. II)*. University of Chicago Press.
- Union Observatory. (1953). Circular n<sup>o</sup> 113.
- Journal des Observateurs. (1942). Circular n<sup>o</sup> 25.