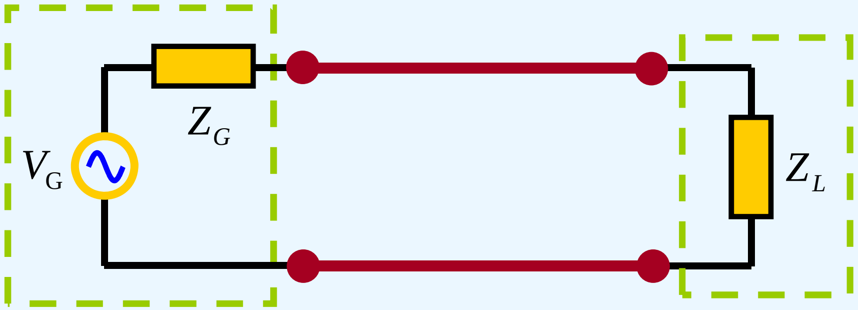
Tema 1. Conceptos Básicos de la Teoría de Líneas de Transmisión



1.1 Introducción

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

1.4 Solución de la ec. de ondas

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

1.6 Potencia

Bibliografía Básica para este Tema:

[1] W. H. Hayt Jr. and J. A. Buck , "Engineering Electromagnetics", McGraw-Hill International Edition, 7ª Ed, 2006.

[2] D. K. Cheng, "Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería", Addison-Wesley Longman de México, 1998

[3] D. M. Pozar, "Microwave Engineering" , 3ª Ed, Wiley, 2005.

Hayt → 11.3 - 11.8

Cheng → 8.2, 8.4

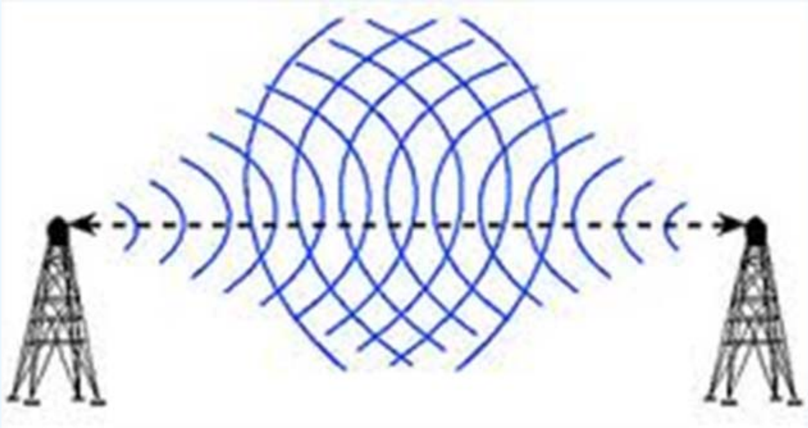
Pozar → 2.1, 2.7

1.1 Introducción

- La Ing. de Telecomunicaciones es la rama de la ing. que resuelve problemas de emisión, transmisión y recepción de señales (información contenida en ondas electromagnéticas o acústicas)

- La transmisión de señales electromagnéticas se puede realizar de dos formas: transmisión radiada y transmisión guiada

- Transmisión radiada.
    - Hace referencia a la propagación de ondas electromagnéticas por el espacio libre (aire, vacío)

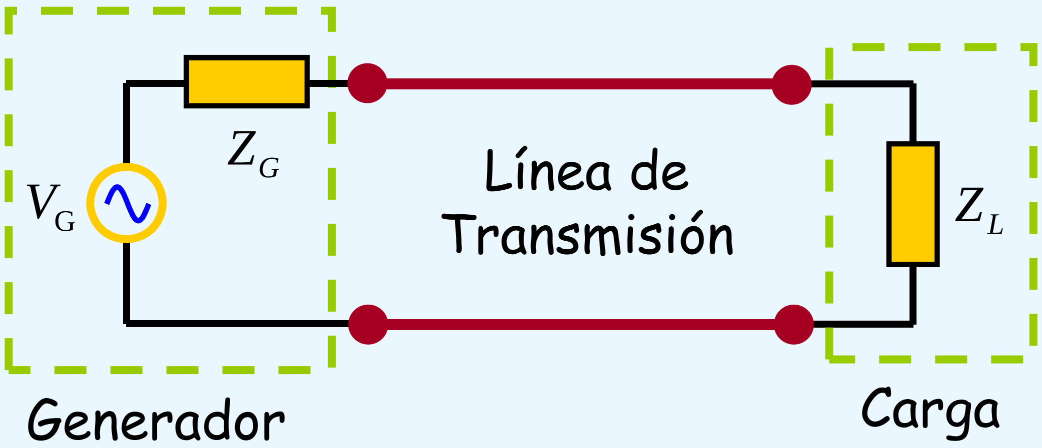


1.1 Introducción

- Transmisión guiada.

  - Hace referencia a la propagación a través de una estructura que permita el confinamiento y guiado de las ondas desde el punto origen (típicamente llamado generador) hasta un punto destino (típicamente llamado carga)

  - La estructura o medio a través del cual se propaga la señal suele denominarse línea de transmisión

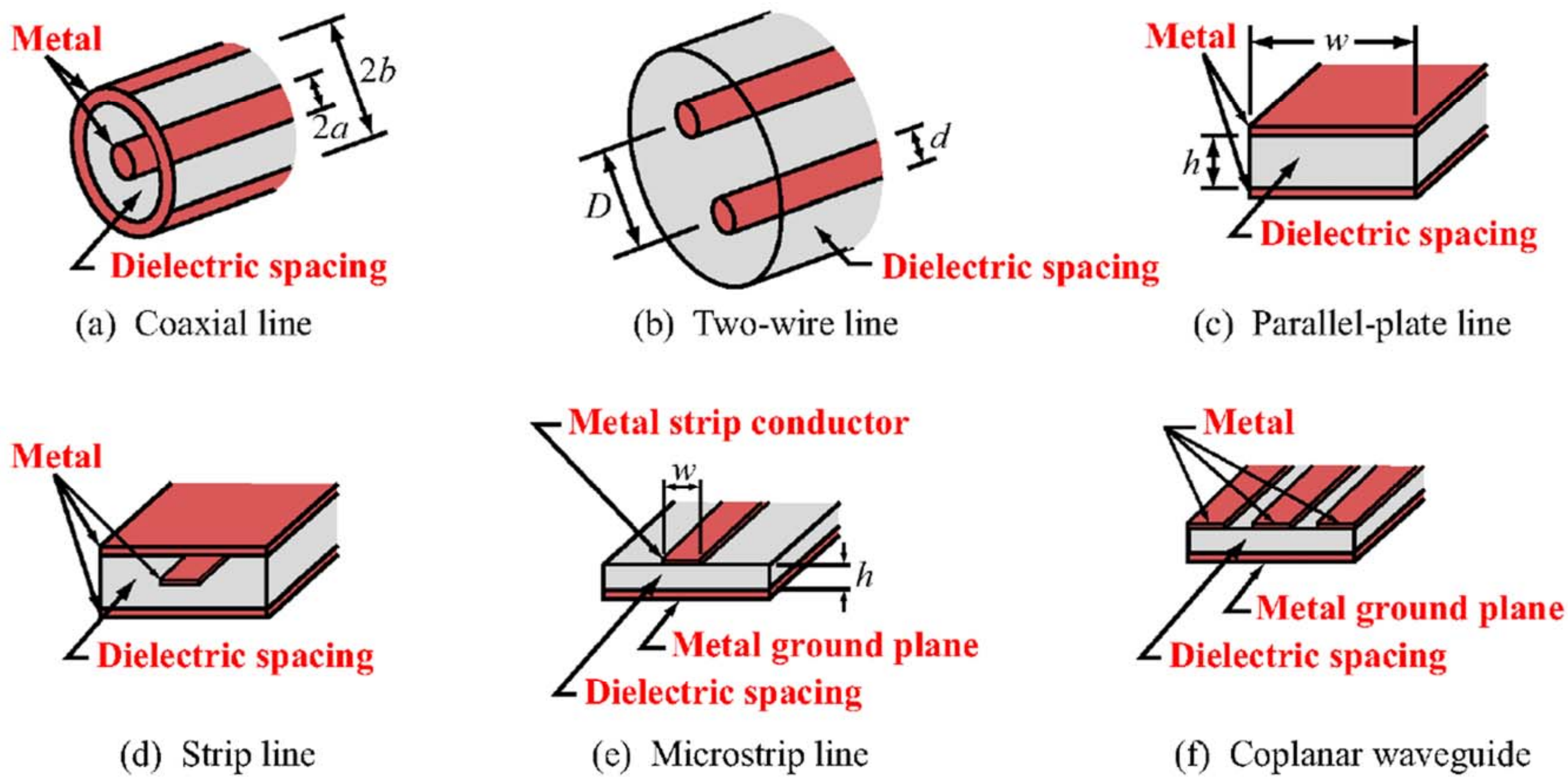


  - Una generalización del concepto de línea de transmisión es el de guía de onda

1.1 Introducción

- Clasificación de los medios de transmisión:

1. <u>Líneas de transmisión</u>: están formadas, al menos, por dos conductores



TEM Transmission Lines

1.1 Introducción

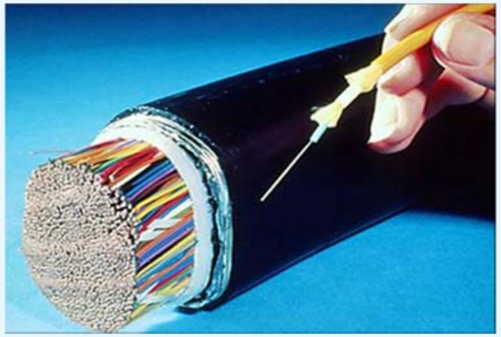
2. Guías de onda: se pueden considerar dos tipos.

2.1 Guías metálicas: típicamente formadas por un único conductor

guía rectangular

guía circular

2.2 Guías dieléctricas: típicamente formadas por uno o varios medios dieléctricos (no tienen conductores)



fibra óptica

- Las guías de onda no soportan propagación de tipo TEM
- En este tema y en el siguiente nos limitaremos a estudiar líneas de transmisión en régimen TEM

1.1 Introducción

- Reseña histórica

  - Comunicaciones eléctricas

- En 1844, F. B. Morse lleva a cabo la primera demostración de comunicación eléctrica a distancia.
  - La comunicación tuvo lugar entre Baltimore y Washington mediante un telégrafo de un solo hilo (se usaba la tierra como retorno) y empleando el código Morse.
- A la instalación de cables telegráficos por rutas terrenas, le siguió el primer cable telegráfico trasatlántico en 1858.
- En 1876 A. G. Bell y Watson logran transmitir una señal de voz a través de un cable eléctrico dando lugar al nacimiento del teléfono

1.1 Introducción

- Comunicaciones electromagnéticas

- En 1864, J. C. Maxwell presenta un tratado sobre electricidad y magnetismo en el que postula teóricamente la existencia de ondas electromagnéticas.

- En el periodo 1887-1891, los trabajos de Maxwell se demostraron experimentalmente mediante los trabajos de H. Herzt

- En 1901, G. Marconi consigue la primera comunicación trasatlántica vía radio, en la cual se transmitió una señal electromagnética entre Gran Bretaña y Canada.

- Durante las primeras décadas del siglo XX, las comunicaciones se realizaban empleando únicamente la parte baja del espectro electromagnético. La tecnología se limitaba al uso de líneas de transmisión, típicamente bifiliar, (propagación TEM).

- Durante este periodo Oliver Heaviside desarrolla las bases de la teoría moderna de líneas de transmisión.

1.1 Introducción

- En 1897, Lord Rayleigh introduce la idea de que tubos metálicos huecos (guías de onda metálicas) también pueden guiar ondas electromagnéticas.
- Salvo algunos trabajos de principios del siglo XX, las guías de onda metálicas quedan olvidadas. No eran prácticas, ya que las frecuencias que se usaban eran muy bajas.
- También a principios del siglo XX comienza a estudiarse otro tipo de guiado de ondas electromagnéticas basado en el uso de superficies de separación entre dos medios dieléctricos (ondas de superficie).
- La estructura más simple (sin interés práctico) que responde a este principio es un cable cilíndrico aislado el cual fue estudiado por Sommerfeld en 1899.
- En 1910, D. Hondros y Debye publican un estudio de la guía dieléctrica de sección cilíndrica. Los primeros trabajos experimentales comenzaron con Ruter y Schriever en 1914.

1.1 Introducción

- En 1921, A. W. Hull desarrolla un tipo de tubo de vacío llamado magnetrón. A mediados de los años 30, este tipo de oscilador es capaz de dar potencia útil a frecuencias tan altas como 30 GHz

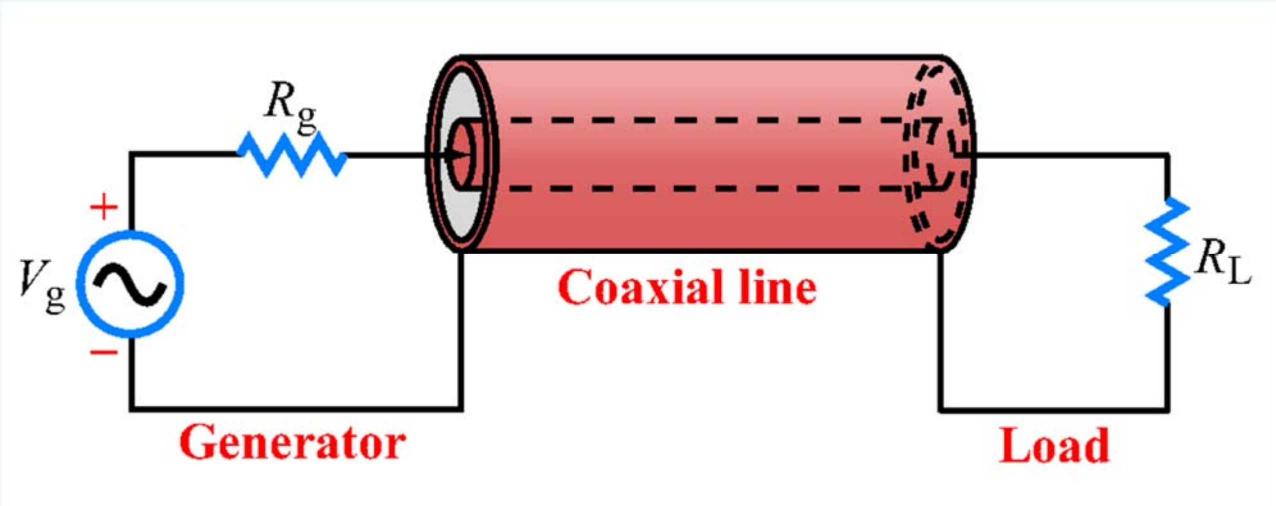
- Todo esto crea un renovado interés por las guías de onda. En 1936, de forma independiente, G. C. Southworth (Laboratorios Bell) y W. L. Barrow (MIT) demuestran experimentalmente la propagación en guías de onda metálicas.

- Coincidiendo con la Segunda Guerra Mundial (1939-1945) tuvieron lugar importantes desarrollos y descubrimientos en el campo de las Radiocomunicaciones y de la circuitería de microondas.

- En aquél entonces tuvo lugar el desarrollo del RADAR y junto con él muchos dispositivos de microondas que siguen utilizándose hoy en día en muchos sistemas de telecomunicación.

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- Consideramos un generador y una carga conectados a través de una línea de transmisión (por ej. un cable coaxial)



- El cable coaxial es un dispositivo físico. Por tanto, surge la siguiente cuestión:

¿Cómo podemos incorporar este elemento en el análisis del circuito?.

ó

¿Cuál es el circuito equivalente del cable coaxial?

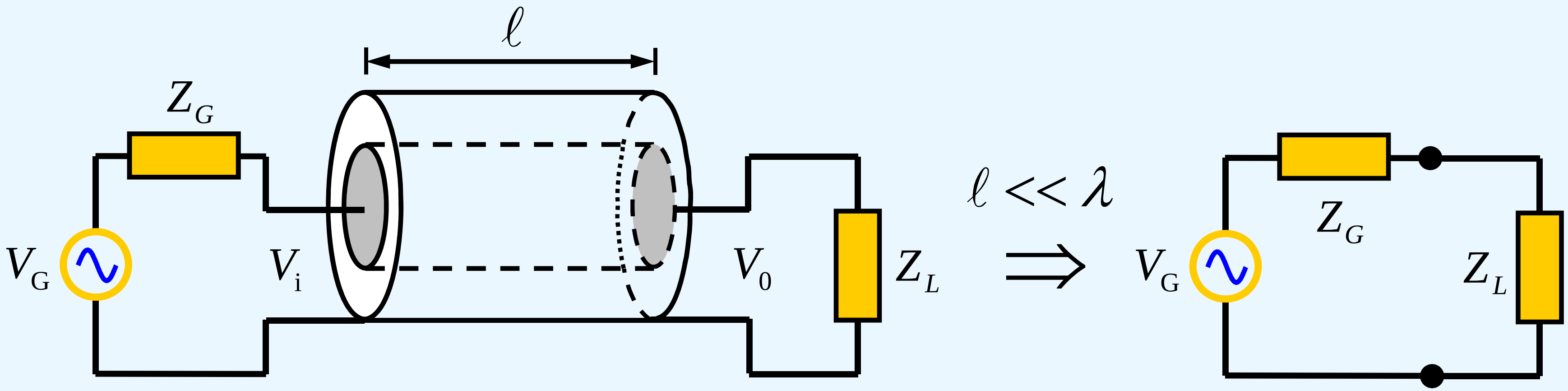
1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- La respuesta a esta pregunta depende de la relación entre la longitud del cable ℓ y la longitud de onda de la señal λ

- <u>CASO $\ell << \lambda$:</u>

- Si $\ell << \lambda$, la tensión a la entrada del coaxial tiene aproximadamente el mismo valor que a la salida.

- Entonces, podemos sustituir el coaxial por conexiones ideales



- Esta es la aproximación que típicamente se utiliza en circuitos de baja frecuencia (teoría de circuitos concentrados)

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- El modelo de conexión ideal puede mejorarse empleando un modelo equivalente de parámetros concentrados

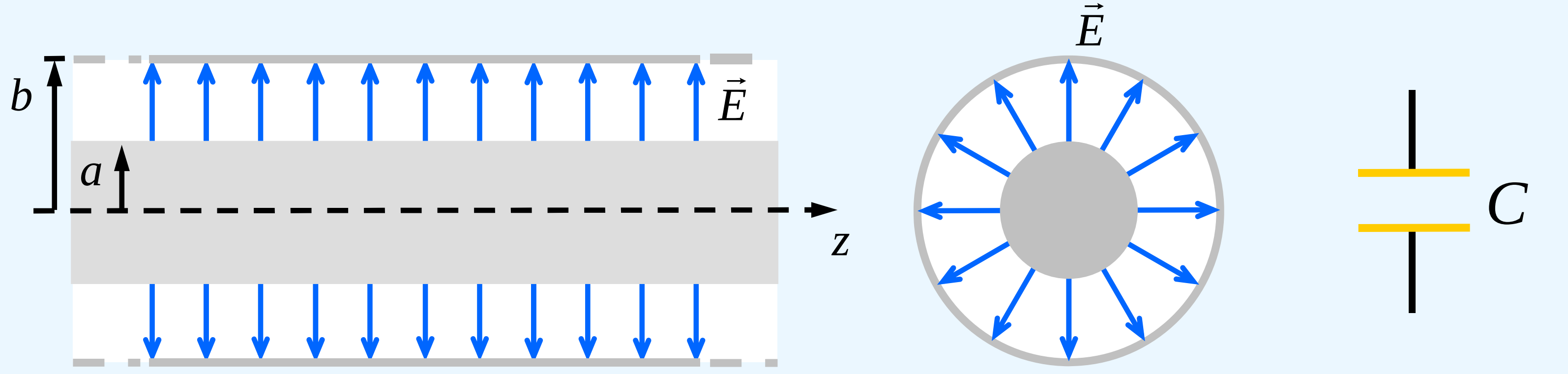
- Para el caso sin pérdidas, el modelo consiste en una capacidad en paralelo y una autoinducción en serie

- <u>Capacidad:</u>

- El origen de la capacidad está en la presencia de 2 conductores.

- El valor de la capacidad depende linealmente de la longitud de la línea ℓ → se trabaja con la capacidad por unidad de longitud C

- Por tanto, las unidades de C son [F/m]

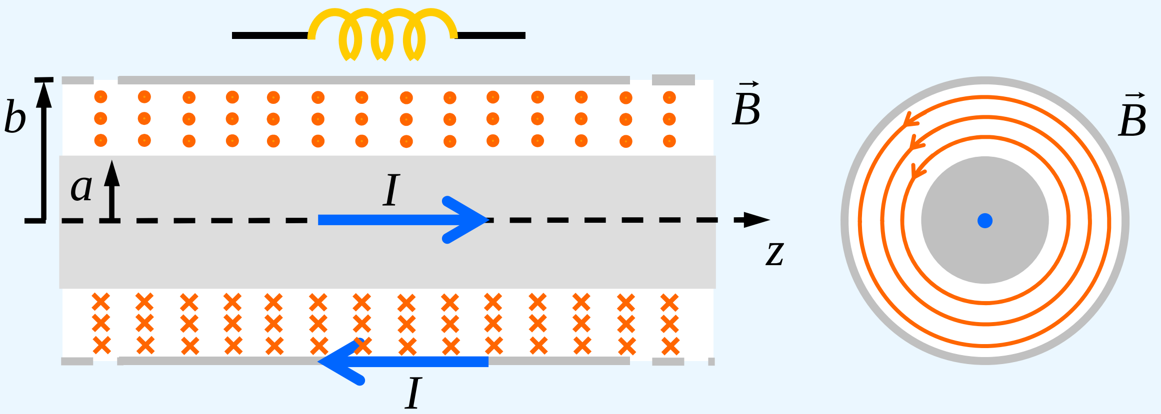


1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

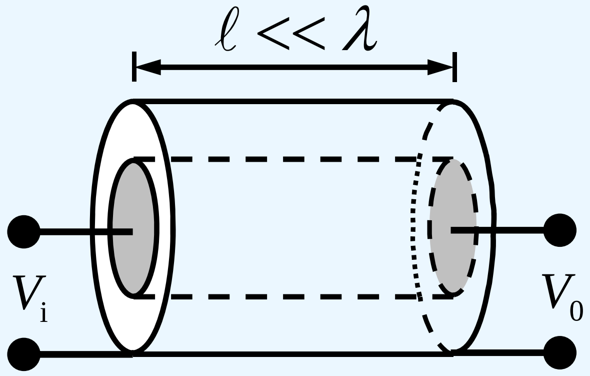
- **Autoinducción:**

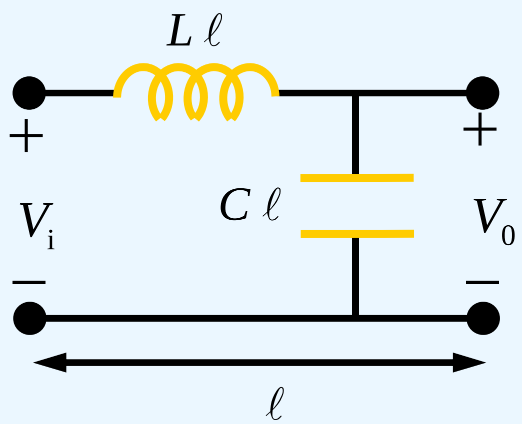
- Existe una autoinducción serie

- Su valor depende linealmente de la longitud de la línea ℓ → se trabaja con la autoinducción por unidad de longitud L [H/m]



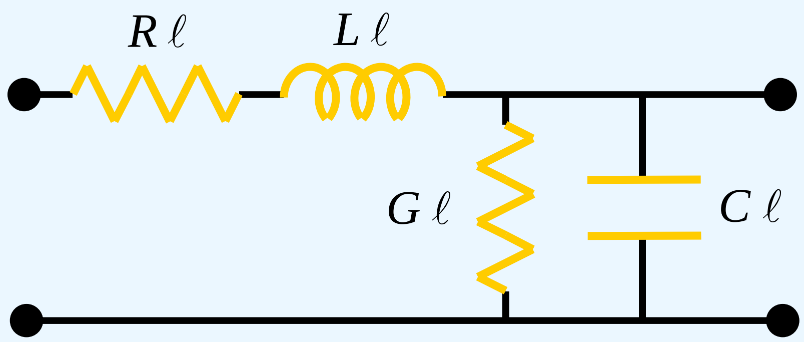
- Entonces, el modelo circuital de un cable coaxial de lontigutud ℓ y sin pérdidas es el mostrado el la figura





1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- Si el coaxial tiene pérdidas, el modelo se generaliza a



$\ell << \lambda$

- R es una resistencia por unidad de longitud que da cuenta de las pérdidas en los conductores [Ohm/m]
- G es una conductancia por unidad de longitud que da cuenta de las pérdidas en el dieléctrico [S/m]
- Este modelo es válido para cualquier línea de transmisión de 2 conductores siempre que se verifique $\ell << \lambda$
- Los parámetros R, L, C, G se denominan PARAMETROS PRIMARIOS de la línea. Su valor depende de la geometría y de los materiales de cada tipo de línea.

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

Table 2-1: Transmission-line parameters R , L , G , and C for three types of lines.

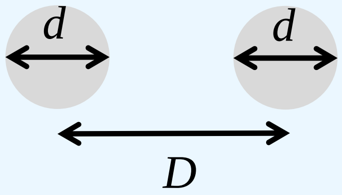
Parameter	Coaxial	Two-Wire	Parallel-Plate	Unit
R	$\frac{R_s}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{2R_s}{\pi d}$	$\frac{2R_s}{w}$	Ω/m
L	$\frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right]$	$\frac{\mu h}{w}$	H/m
G	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right]}$	$\frac{\sigma w}{h}$	S/m
C	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right]}$	$\frac{\varepsilon w}{h}$	F/m

Notes: (1) Refer to Fig. **??** for definitions of dimensions. (2) μ, ε, and σ pertain to the insulating material between the conductors. (3) $R_s = \sqrt{\pi f \mu_c/\sigma_c}$. (4) μ_c and σ_c pertain to the conductors. (5) If $(D/d)^2 \gg 1$, then $\ln\left[(D/d)+\sqrt{(D/d)^2-1}\right] \simeq \ln(2D/d)$.

- Se verifica $\boxed{LC = \mu\varepsilon}$ $\boxed{G/C = \sigma/\varepsilon}$

- Ejemplo 1: Calcular los parámetros R, L, G y C de un cable bifiliar en aire sabiendo que el radio de cada hilo vale 1 mm y la distancia entre los dos hilos es 2 cm. Suponer que los hilos son conductores perfectos

Solución:



- Al estar los hilos en el aire y ser conductores perfectos, la línea no tiene pérdidas.
- Por tanto R = 0 y G = 0.

- Para determinar L y C aplicaremos las expresiones de la tabla
- De acuerdo con los datos del problema, el diámetro de cada hilo es d = 2 mm y la separación entre hilos D = 20 mm, luego

$$D/d = 20/2 = 10 >> 1$$

- Así que aplicamos las expresiones simplificadas

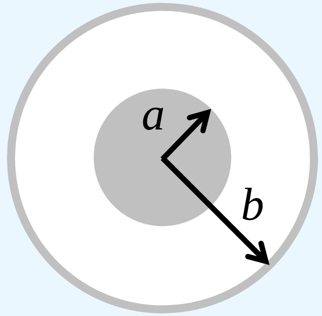
$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln(2D/d) = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{\pi}\ln(20) = 11.98\times 10^{-7} \approx 1.2\ \mu\text{H/m}$$

$$C = \frac{\pi\varepsilon}{\ln(2D/d)} = \frac{\pi\times 8.854\times 10^{-12}}{\ln(20)} = 9.29\times 10^{-12} = 9.29\ \text{pF/m}$$

- Ejemplo 2: Calcular los parámetros de línea de transmisión (R, L, G y C), a la frecuencia de 1 MHz, de un cable coaxial con conductores interno y externo de diámetros 0.6 cm y 1.2 cm, respectivamente. Los conductores son de cobre y el material existente entre ambos es aire. Los parámetros constitutivos del cobre son: $\mu_c \approx \mu_0 \quad \sigma_c = 5.8\times 10^7 \ \text{S/m}$

Solución:

- Aplicamos los fórmulas de la tabla



$$R_S = \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi\times 10^6 \times 4\pi\times 10^{-7}}{5.8\times 10^7}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5.8}}\times 10^{-4} \ \Omega$$

$$R = \frac{R_S}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{5.8}}\times 10^{-4}\left(\frac{1}{0.3}+\frac{1}{0.6}\right)\times 10^2 = 2.07\times 10^{-2} \ \Omega/\text{m}$$

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln(b/a) = \frac{4\pi\times 10^{-7}}{2\pi}\ln(2) = 0.14 \ \mu\text{H/m} \qquad G = \frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)} = 0$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} = \frac{2\pi\times 8.854\times 10^{-12}}{\ln(2)} = 80.26\times 10^{-12} = 80.26 \ \text{pF/m}$$

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- CASO $\ell \not\ll \lambda$:

- Si la longitud del coaxial no es mucho menor que la longitud de onda de la señal se producen fenómenos ondulatorios (reflexión, desfase,…)

- En esta situación no es posible modelar el cable mediante un circuito de parámetros concentrados

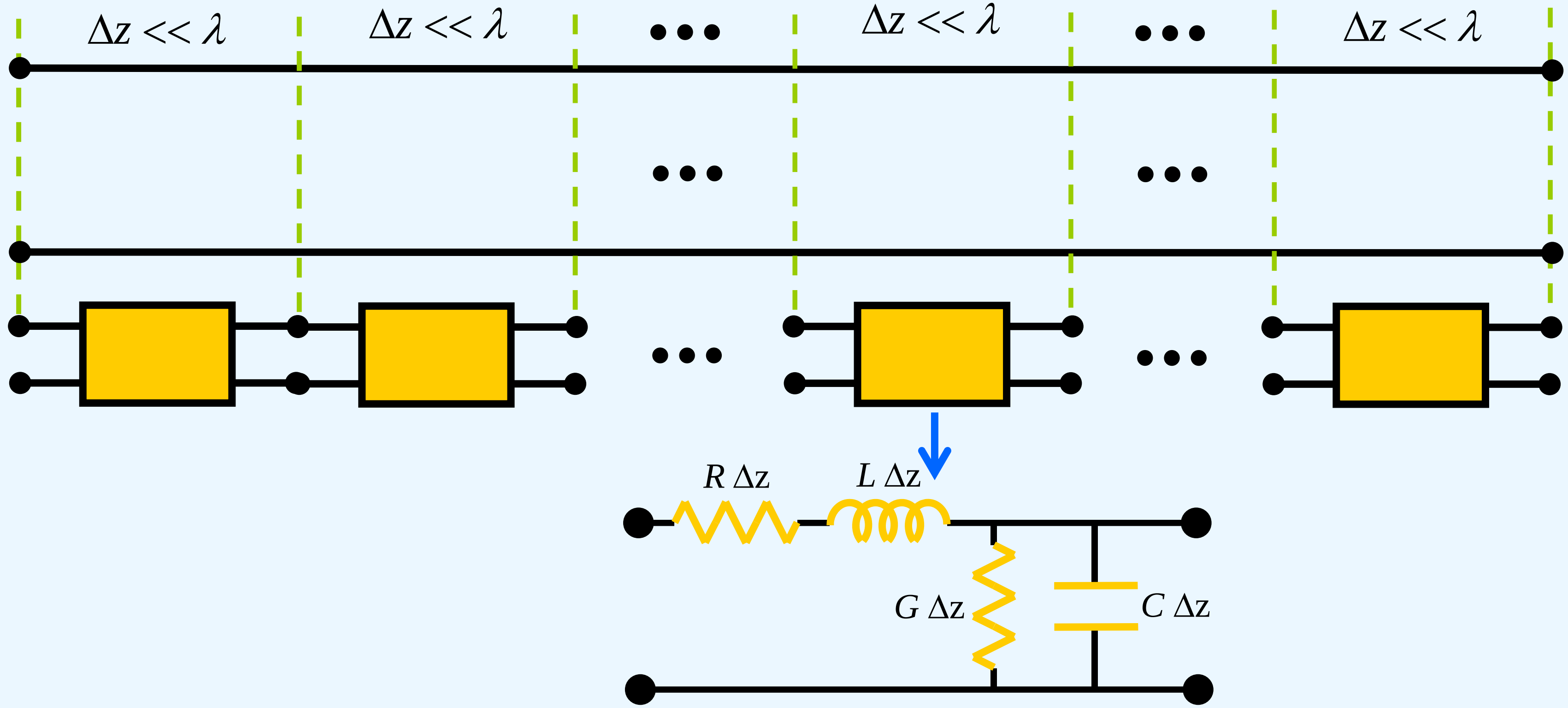
- En general, en aquellos circuitos donde existan elementos de tamaño NO mucho menor que la longitud de onda, no es válida la teoría de circuitos concentrados (leyes de Kirchhoff)

- Estos circuitos se denominan circuitos distribuidos y su análisis requiere de una extensión de la teoría de circuitos convencional que tenga en cuenta de forma explícita los efectos propagativos de las señales

1.2 Modelo circuital de la línea de transmisión

- Los efectos propagativos pueden, hasta cierto punto, modelarse mediante circuitos equivalentes

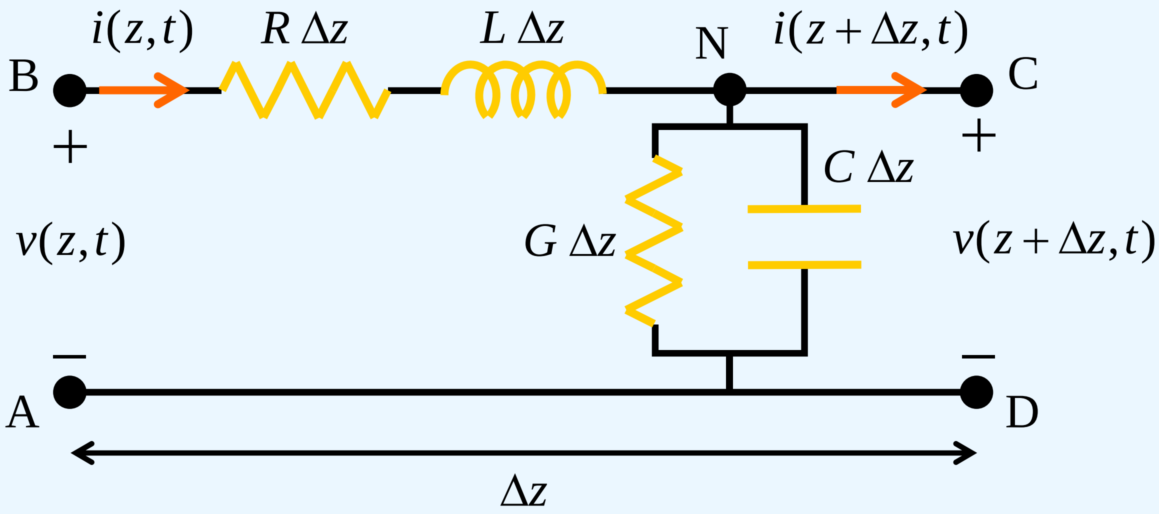
- En el caso de una línea de transmisión, se puede dividir en secciones de longitud $\Delta z << \lambda$ y sustituir cada sección por su circuito equivalente



- En lo que sigue nos basaremos en este modelo para determinar las propiedades de las ondas de tensión y corriente en la línea.

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión (Cheng 8.2)

- Consideramos una longitud diferencial dz de línea de transmisión



- Aplicamos la KVL en la malla ABCD:

$$-v(z,t)+R\Delta z i(z,t)+L\Delta z\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}+v(z+\Delta z,t)=0$$

de donde:

$$-\frac{v(z+\Delta z,t)-v(z,t)}{\Delta z}=Ri(z,t)+L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- En el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$ resulta:

$$\boxed{-\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} = Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}}$$

<u>- Aplicamos la KCL en el nudo N:</u>

$$i(z,t) - G\Delta z v(z+\Delta z,t) - C\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t} - i(z+\Delta z,t) = 0$$

- Reorganizando los términos

$$i(z+\Delta z,t) - i(z,t) = G\Delta z v(z+\Delta z,t) + C\Delta z\frac{\partial v(z+\Delta z,t)}{\partial t}$$

- Dividiendo por Δz y haciendo el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$ resulta:

$$\boxed{-\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} = Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t}}$$

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Hemos obtenido un par de ecs. diferenciales en derivadas parciales de primer orden:

$$\boxed{\begin{aligned} -\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} &= Ri(z,t) + L\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ -\frac{\partial i(z,t)}{\partial z} &= Gv(z,t) + C\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} \end{aligned}}$$

Ecs. generales de la línea de transmisión
(Ecs. del Telegrafista)

- Estas ecs. gobiernan la evolución de la tensión y la corriente en la línea de transmisión en función del espacio (z) y del tiempo (t)
- Antes de buscar la solución para v e i eliminaremos una de las 2 variables, lo cual nos conducirá a una ec. de segundo grado

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Eliminando la corriente resulta

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (LG + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$$

Ec. de Ondas para la Tensión

- Alternativamente, si eliminamos la tensión se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = RGi + (LG + RC)\frac{\partial i}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}}$$

Ec. de Ondas para la Corriente

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- Partimos de la ec. de ondas para la tensión y suponemos que la línea de transmisión no tiene pérdidas (R = 0 y G = 0):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (LG + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \underset{R=0,\ G=0}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$$

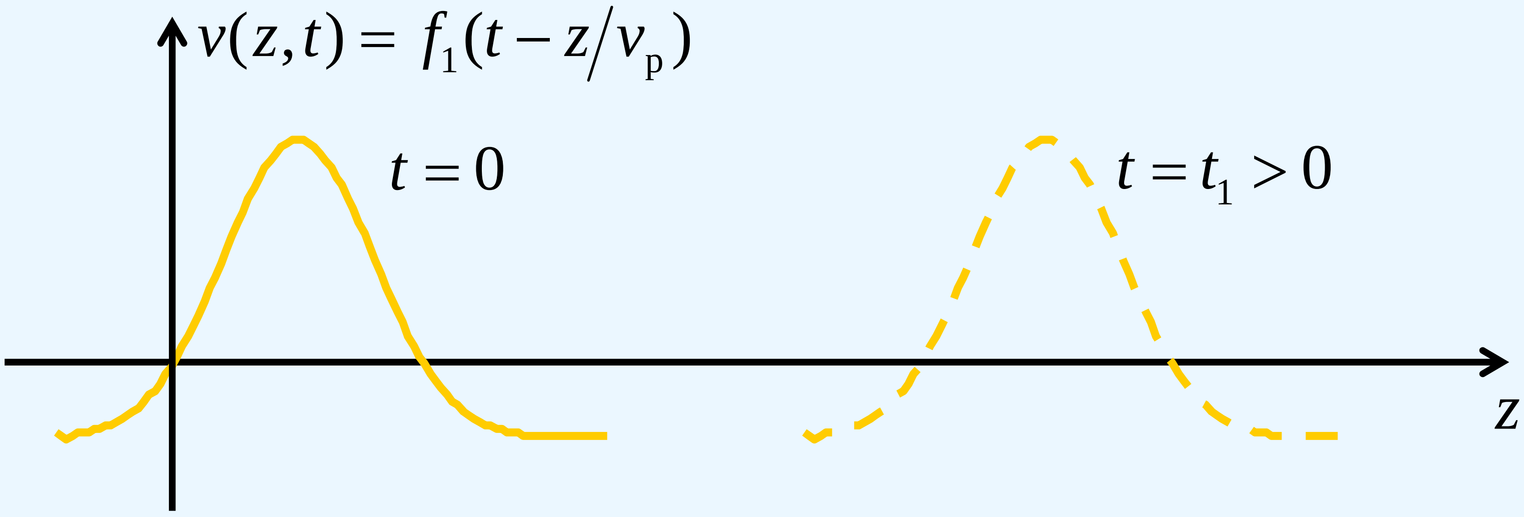
- Las soluciones de la ec. de ondas sin pérdidas son de la forma:

$$\boxed{v(z,t) = f_1(t - z/v_\mathrm{p}) + f_2(t + z/v_\mathrm{p})}$$

- donde v_p es una cte (velocidad de fase)
- Las expresiones "$t - z/v_\mathrm{p}$" y "$t + z/v_\mathrm{p}$" son los argumentos de las funciones f_1 y f_2.
- Tanto f_1 como f_2 pueden ser cualquier tipo de función.

1.3 Ecuaciones generales de la línea de transmisión

- La solución de argumento $t - z/v_p$ representa una forma de onda que se propaga según z > 0



- Análogamente, la solución de argumento $t + z/v_p$ se propaga según z < 0.

1.4 Solución de la ec. de ondas (Pozar 2.1)

- Partimos de las ecs. del Telegrafista con pérdidas en el dominio del tiempo

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad -\frac{\partial i}{\partial z} = Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}$$

- Pasamos al dominio de la frecuencia haciendo las transformaciones:

$$v(z,t) \leftrightarrow V(z) \in \mathrm{C} \qquad i(z,t) \leftrightarrow I(z) \in \mathrm{C} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega$$

- Se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} &= -(R + j\omega L)I \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} &= -\left(G + j\omega C\right)V \end{aligned}}$$

<u>Ecs. del Telegrafista en el dominio de la frecuencia</u>

1.4 Solución de la ec. de ondas

- Para la ec. de ondas con pérdidas en el dominio del tiempo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = RGv + (LG + RC)\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

- Procedemos análogamente. El resultado es:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = RGV + j\omega(LG + RC)V - \omega^2 LCV$$

- Agrupando términos

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = \gamma^2 V}$$

Ec. de ondas en el dominio de la frecuencia

- donde γ es la constante de propagación dada por

$$\boxed{\gamma^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C)} \qquad \gamma \in \mathrm{C}$$

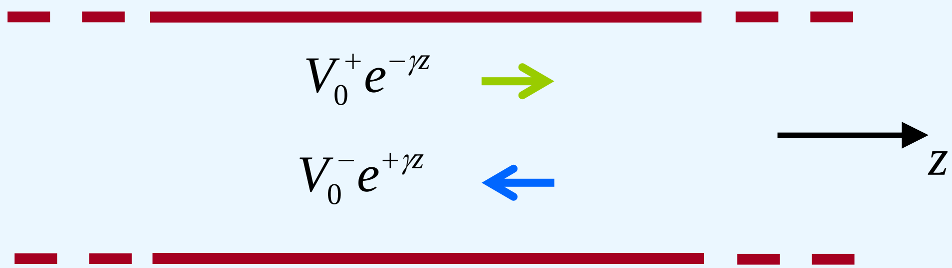
1.4 Solución de la ec. de ondas

- La solución de la ec. de ondas para la <u>tensión</u> es:

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \qquad \text{con} \quad V_0^+, V_0^- \in \mathrm{C}$$

- La solución $V_0^+ e^{-\gamma z}$ representa una onda que se propaga según z > 0

- Mientras que la solución $V_0^- e^{+\gamma z}$ representa una onda que se propaga según z < 0



$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathrm{R} \begin{cases} \alpha : \text{cte de atenuación [Np/m]} \\ \beta : \text{cte de fase [rad/m]} \end{cases}$$

1.4 Solución de la ec. de ondas

- Para obtener la corriente sustituimos esta solución en las ecs. del Telegrafista

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -(R + j\omega L) I(z) \quad \Rightarrow \quad \gamma\left(V_0^+ e^{-\gamma z} - V_0^- e^{+\gamma z}\right) = (R + j\omega L) I(z)$$

- Despejando $I(z)$:

$$I(z) = I_0^+ e^{-\gamma z} + I_0^- e^{+\gamma z} \qquad \text{con} \quad I_0^{\pm} = \frac{\pm\gamma}{R + j\omega L} V_0^{\pm}$$

- La impedancia característica de la línea viene dada por:

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+} = -\frac{V_0^-}{I_0^-}$$

- resulta

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}} \qquad Z_0 \in \mathrm{C}$$

1.4 Solución de la ec. de ondas

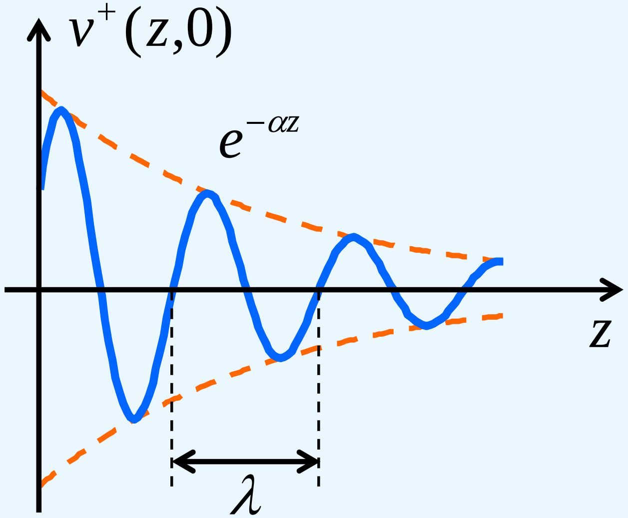
- Ondas de tensión y de corriente (dominio del tiempo):

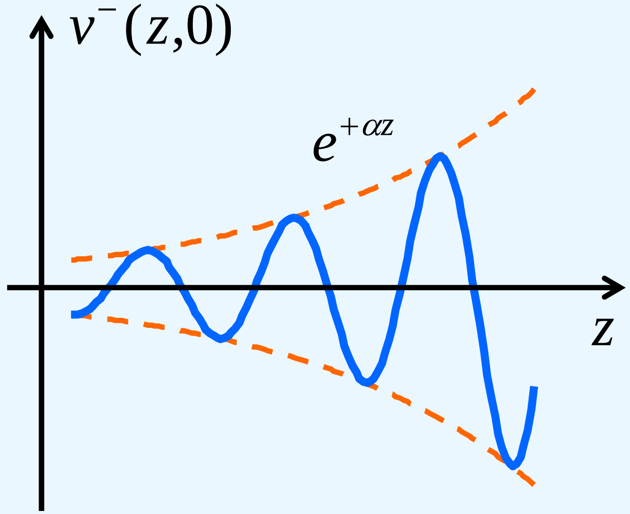
$$v(z,t) = \mathrm{Re}[V(z)e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[(V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z})e^{j\omega t}]$$

$$V_0^\pm = |V_0^\pm| \mathrm{e}^{j\phi^\pm}$$

- Operando:

$$v(z,t) = \underbrace{|V_0^+| e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z + \phi^+)}_{v^+(z,t)} + \underbrace{|V_0^-| e^{+\alpha z}\cos(\omega t + \beta z + \phi^-)}_{v^-(z,t)}$$





1.4 Solución de la ec. de ondas

- Solución general para una línea de transmisión (RESUMEN):

- Ondas de tensión y de corriente (dominio de la frecuencia):

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} + V_0^- e^{+\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{V_0^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$$

- En general $V_0^+,\ V_0^-,\ \gamma,\ Z_0 \in C$ y son función de la frecuencia

- Constante de propagación: $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

- donde α es la cte de atenuación y β la cte de fase

- Impedancia característica: $Z_0 = \sqrt{\dfrac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$

- Longitud de onda: $\lambda = 2\pi/\beta$

- Velocidad de fase: $v_p = \omega/\beta$

- En general, es función de la frecuencia

- Ejemplo 3: Los parámetros de una línea de transmisión de planos paralelos valen $R = 1\,\Omega/\text{m}$, $L = 167\ \text{nH/m}$, $G = 0\ \text{S/m}$ y $C = 172\ \text{pF/m}$. Calcular la cte de atenuación, la cte de fase, la velocidad de fase y la impedancia característica a 1 GHz.

Ulaby 6ª Prob. 2-5

Solución:

- La frecuencia angular vale: $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^9\ \text{rad/s}$

- La constante de propagación resulta

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$= \sqrt{(1 + j2\pi \times 10^9 \times 167 \times 10^{-9})(j2\pi \times 10^9 \times 172 \times 10^{12})} = (0.016 + j33.68)\ \text{m}^{-1}$$

- de donde $\alpha = 0.016\ \text{Np/m}$ $\quad\beta = 33.68\ \text{rad/m}$

- La velocidad de fase es: $v_p = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{2\pi \times 10^9}{33.68} = 1.85 \times 10^8\ \text{m/s}$

- La impedancia característica vale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{1 + j2\pi \times 10^9 \times 167 \times 10^{-9}}{j2\pi \times 10^9 \times 172 \times 10^{12}}} = (31 - j0.01)\ \Omega$$

1.4 Solución de la ec. de ondas

- Dispersión: (Pozar 2.7 – Cheng 8.4)

- En una línea con pérdidas las ctes de atenuación y fase son, en general, funciones complicadas de la frecuencia.

- En particular, β no es una función lineal de la frecuencia y por tanto la velocidad de fase es distinta para cada frecuencia

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \neq cte$$

- Entonces, cuando un pulso de ancho de banda frecuencial grande se propaga por una línea de transmisión, cada componente frecuencial del pulso viaja a diferente velocidad y llega en distinto momento al receptor.

- En consecuencia la forma del pulso cambia, el pulso se distorsiona.

- Este fenómeno, en general no deseado, se denomina dispersión. Se dice que la línea es dispersiva.

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

(Pozar 2.7 – Cheng 8.4)

- Línea no dispersiva:

- Hay un caso especial para el cual una línea con pérdidas es no dispersiva (no distorsiona las señales de banda ancha)

- Este caso se da cuando los parámetros de la línea cumplen la siguiente condición:

$$\boxed{R/L = G/C}$$

- Aplicando esta condición se obtienen las siguientes resultados:

- Constante de propagación:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$= \sqrt{LC}\sqrt{(R/L + j\omega)(G/C + j\omega)} = \sqrt{LC}(R/L + j\omega)$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- de donde

$$\alpha = R\sqrt{C/L} \quad \text{(cte con la frecuencia)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad \text{(lineal con la frecuencia)}$$

- <u>Impedancia característica:</u>

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{(cte y real)}$$

- Ejemplo 4: A la frecuencia de 125 MHz una línea de transmisión tiene una impedancia característica $Z_0 = 40\,\Omega$, una cte de atenuación $\alpha = 0.02$ Np/m y una cte de fase $\beta = 0.75$ rad/m. Calcular los parámetros R, L, G y C de la línea.

Ulaby 6ª Prob. 2-16

Solución:

- La línea tiene pérdidas y la impedancia característica es real, por tanto se trata de una línea de transmisión no dispersiva (no distorsiona)
- La expresiones para α y Z_0 son:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= R\sqrt{C/L} \\ Z_0 &= \sqrt{L/C} \end{aligned}\right\} \quad R = \alpha Z_0 = 0.02 \times 40 = 0.6\,\Omega/\mathrm{m}$$

- Usando la condición: $R/L = G/C \;\Rightarrow\; G = R/Z_0^2 = 0.6/40^2 = 0.5\,\mathrm{mS/m}$
- Además:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= \omega\sqrt{LC} \\ Z_0 &= \sqrt{L/C} \end{aligned}\right\} \quad C = \frac{\beta}{\omega Z_0} = \frac{0.75}{2\times\pi\times125\times10^6\times40} = 23.9\,\mathrm{pF/m}$$

- Finalmente $L = Z_0^2 C = 40^2 \times 23.9\times10^{-12} = 38.2\,\mathrm{nH/m}$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- Línea sin pérdidas:

- En el caso sin pérdidas (R = G = 0) las expresiones generales se simplifican notablemente.

- Constante de propagación: es imaginaria pura y lineal con la frecuencia

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \qquad\qquad \alpha = 0$$

- Impedancia característica: es real

$$Z_0 = \sqrt{L/C}$$

- Tensión: (análogo para la corriente)

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{+j\beta z}$$

- En el dominio del tiempo (estado sinusoidal permanente)

$$v(z,t) = \mathrm{Re}[V(z)e^{j\omega t}]$$

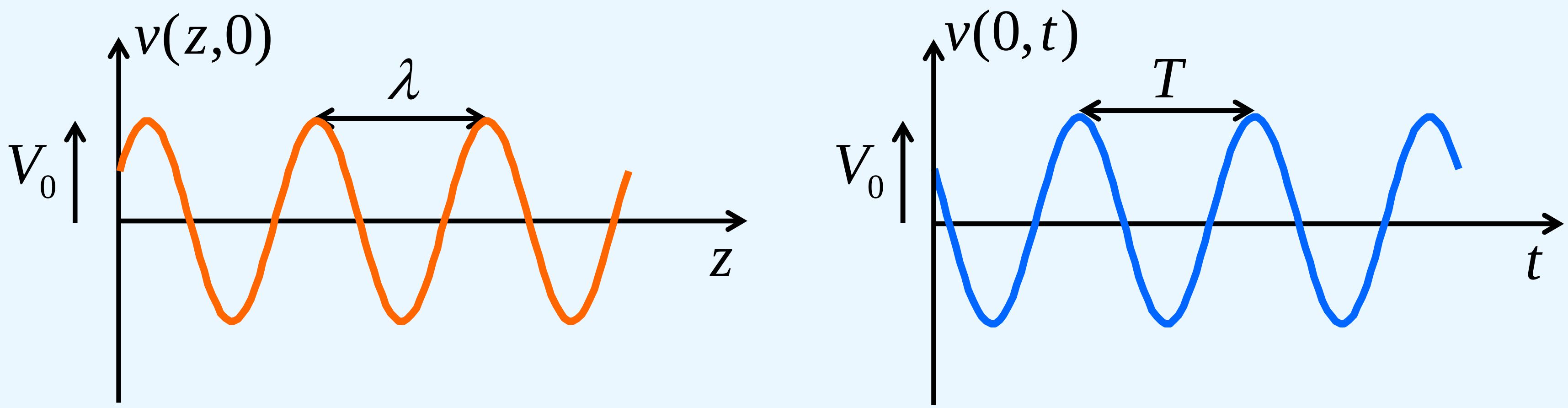
$$= |V_0^+|\cos(\omega t - \beta z + \phi^+) + |V_0^-|\cos(\omega t + \beta z + \phi^-)$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- Velocidad de fase: $$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

- Es cte e igual a la velocidad de la luz en el medio dieléctrico

- Longitud de onda: $$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}}$$



- Ejemplo 5: Los parámetros de una línea de transmisión sin pérdidas son $L = 0.25\ \mu\mathrm{H/m}$ y $C = 100\ \mathrm{pF/m}$. Calcular la impedancia característica, cte de fase, longitud de onda y velocidad de fase para una onda sinusoidal de frecuencia 600 MHz.

Hayt 7ª 11-2

Solución:

- Aplicamos las fórmulas vista anteriormente

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{0.25\times10^{-6}}{100\times10^{-12}}} = 50\,\Omega$$

$$v_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.25\times10^{-6}\times100\times10^{-12}}} = 2\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

$$\beta = \frac{\omega}{v_\mathrm{p}} = \frac{2\pi\times600\times10^6}{2\times10^8} = 6\pi \approx 18.85\,\mathrm{rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{6\pi} \approx 33.3\,\mathrm{cm}$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- Línea con bajas pérdidas:

- Consideramos bajas pérdidas cuando se cumplen las condiciones:

$$\boxed{R << \omega L} \qquad \boxed{G << \omega C}$$

- Aplicando estas condiciones se obtienen las siguientes resultados

- Constante de propagación:

  - La forma general es $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$

  - que puede expresarse como

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC}\left(\sqrt{\tfrac{R}{j\omega L}+1}\right)\left(\sqrt{\tfrac{G}{j\omega C}+1}\right)$$

  - Aplicando, a la expresión anterior, el desarrollo es serie

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{x}{2} + \cdots \quad (x << 1)$$

1.5 Líneas no dispersivas, con bajas pérdidas y sin pérdidas

- resulta

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}} \right) \qquad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

- Se observa que α es directamente proporcional a R y G
- Además, β es líneal con la frecuencia

- Velocidad de fase: es cte

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \mathrm{cte}$$

- Impedancia característica:
  - se aproxima por

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{(cte y real)}$$

- Ejemplo 6: A la frecuencia angular de 500 Mrad/s, los parámetros de cierta línea de transmisión valen $R = 0.2\ \Omega/\mathrm{m}$, $L = 0.25\ \mu\mathrm{H/m}$, $G = 10\ \mu\mathrm{S/m}$ y $C = 100\ \mathrm{pF/m}$. Calcular la cte de atenuación, la cte de fase, la longitud de onda, la velocidad de fase y la impedancia característica.

Hayt 7ª D11-1

Solución:

- En primer lugar miramos si se trata de una línea de bajas pérdidas.

$$\omega L = 500\times 10^{6}\times 0.25\times 10^{-6} = 125 \;\Rightarrow\; R << \omega L$$

$$\omega C = 500\times 10^{6}\times 100\times 10^{-12} = 5\times 10^{-2} \;\Rightarrow\; G << \omega C$$

- Efectivamente, se trata de una línea de bajas pérdidas. Aplicamos las fórmulas para este caso:

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) = 2.25\ \mathrm{mNp/m}$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{LC} = 2.5\ \mathrm{rad/m}$$

- La velocidad de fase vale

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{500 \times 10^6}{2.5} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- La longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2.5} = 2.51 \, \text{m}$$

- y la impedancia característica

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} = 50 \ \Omega$$

1.6 Potencia (Hayt 11.8)

- Consideramos una línea de transmisión con pérdidas por la que se propaga una onda en dirección z > 0.
- La tensión y corriente en la línea vienen dadas por

$$V(z) = V_0^+ e^{-\gamma z} \qquad I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-\gamma z} \qquad \gamma = \alpha + j\beta \qquad Z_0 = R_0 + jX_0$$

- El valor medio de la potencia en la línea vale:

$$\boxed{P(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V(z) I^*(z)\right]}$$

- Esta expresión es la misma que la utilizada en la teoría de circuitos
- Sustituyendo las expresiones de V(z) e I(z), resulta:

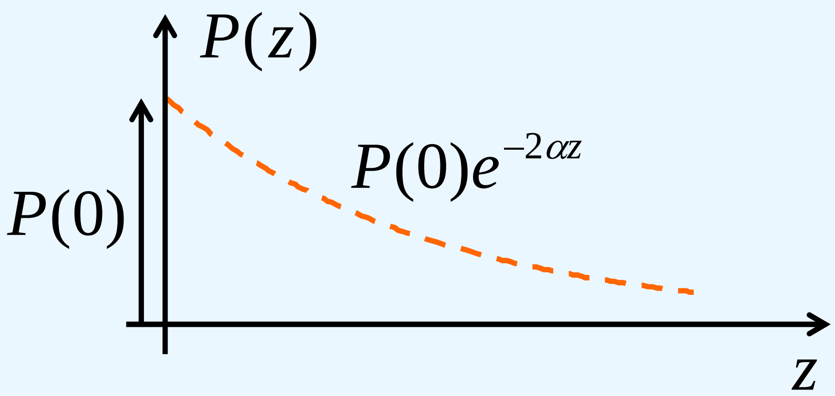
$$P(z) = \frac{1}{2}\Re\left[V_0^+ e^{-(\alpha + j\beta)z} \frac{\left(V_0^+\right)^*}{Z_0^*} e^{-(\alpha - j\beta)z}\right] = \frac{\left|V_0^+\right|^2}{2\left|Z_0\right|^2} R_0 e^{-2\alpha z}$$

1.6 Potencia

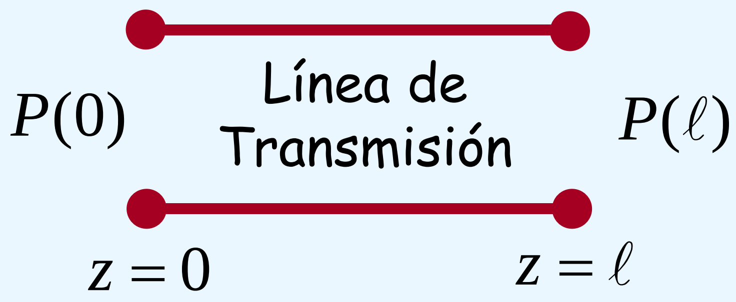
- Entonces

$$\left.\begin{aligned} P(z) &= \frac{|V_0^+|^2}{2|Z_0|^2} R_0 e^{-2\alpha z} \\ P(0) &= \frac{|V_0^+|^2}{2|Z_0|^2} R_0 \end{aligned}\right\} \quad P(z) = P(0) e^{-2\alpha z}$$

- Este resultado indica que la potencia en la línea decae a un ritmo exponencial <u>doble</u> respecto de la tensión o la corriente.



1.6 Potencia



- La potencia perdida entre un punto inicial **z = 0** y un punto final **z = l** se puede poner como

$$P_\ell = P(0) - P(\ell)$$ [W] (es un valor absoluto)

- Es más útil expresar la potencia perdida en términos relativos

$$P_\ell = P(0)/P(\ell)$$ (>= 1 para líneas pasivas)

- Es usual expresar la pérdida de potencia en decibelios como

$$\boxed{P_\ell\ (\mathrm{dB}) = 10 \log_{10} \left[P(0)/P(\ell) \right]}$$

- Ejs.
  - Línea sin pérdidas: $P(0)/P(\ell) = 1 \Rightarrow P_\ell = 0\,\mathrm{dB}$
  - Pierde la mitad: $P(0)/P(\ell) = 2 \Rightarrow P_\ell = 3\,\mathrm{dB}$

1.6 Potencia

- Teniendo en cuenta que $P(\ell) = P(0)e^{-2\alpha\ell}$ podemos poner

$$P_\ell \text{ (dB)} = 10\log_{10} e^{+2\alpha\ell} = 2\alpha\ell 10\log_{10} e = 8.69\alpha\ell$$

- para $\alpha\ell = 1 \text{ Np}$ se obtiene $1 \text{ Np} = 8.69 \text{ dB}$

- $P_\ell \text{ (dB)}$ es lineal con la longitud !

- Teniendo en cuenta que $P(z) \propto |V(z)|^2$ también se puede expresar la potencia perdida en función de la tensión de la línea

$$\boxed{P_\ell \text{ (dB)} = 20\log_{10} \left[|V(0)| / |V(\ell)| \right]}$$

- Ejemplo 7: Una línea de transmisión de 20 m produce una pérdida de potencia de 2 dB entre la entrada y la salida.

a) ¿Qué tanto por ciento de la potencia llega a la salida?

b) ¿Qué tanto por ciento llega a la mitad de la línea?

c) ¿Cuánto vale la cte de atenuación?

Hayt 7ª Ej 11-4

Solución:

- Según hemos visto $P_\ell\ (\mathrm{dB}) = 10\log_{10}\left[P(0)/P(\ell)\right]$

a) En este caso $2 = 10\log_{10}\left[P(0)/P(20)\right]$

$$\frac{P(0)}{P(20)} = 10^{0.2} \Rightarrow \frac{P(20)}{P(0)} = 10^{-0.2} = 0.63$$

(Llega el 63%)

b) La línea pierde $2\mathrm{dB}/20\mathrm{m} = 0.1\,\mathrm{dB/m}$ por tanto en 10 m pierde 1 dB

Repitiendo el cálculo del caso a): $\dfrac{P(10)}{P(0)} = 10^{-0.1} = 0.79$ (Llega el 79%)

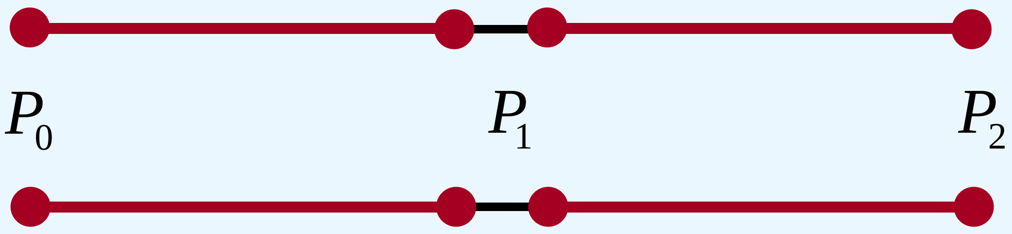
c) Sabemos que $P_\ell\ (\mathrm{dB}) = 8.69\alpha\ell$

$$\alpha = \frac{P_\ell\ (\mathrm{dB})}{8.69\ell} = \frac{2}{8.69\times 20} = 0.012\ \mathrm{Np/m}$$

1.6 Potencia

- Potencia perdida en una conexión en cascada de líneas de transmisión

- Considerando la conexión ideal de dos líneas



$$P_{\ell 1} = P_0 / P_1 \qquad P_{\ell 2} = P_1 / P_2$$

- Las pérdidas totales son

$$P_\ell = P_0 / P_2 = \left(P_0 / P_1\right) \times \left(P_1 / P_2\right) = P_{\ell 1} P_{\ell 2}$$

- Haciendo el cálculo en decibelios

$$P_\ell \text{ (dB)} = 10 \log_{10} \left[P_0 / P_2\right] = 10 \log_{10} \left[\left(P_0 / P_1\right) \times \left(P_1 / P_2\right)\right]$$
$$= 10 \log_{10} \left[\left(P_0 / P_1\right)\right] + 10 \log_{10} \left[\left(P_1 / P_2\right)\right] = P_{\ell 1} \text{ (dB)} + P_{\ell 2} \text{ (dB)}$$

- Las pérdidas totales (en dB) son la suma de las pérdidas (en dB) de cada componente de la cadena

- Ejemplo 8: Dos líneas de transmisión se conectan en cascada. La primera tiene una longitud de 30 m y unas pérdidas de potencia a razón de 0.1 dB/m. La segunda mide 45 m y pierde 0.15 dB/m. La conexión entre ambas no es perfecta, perdiéndose en la misma 3 dB. ¿Qué porcentaje de la potencia de entrada llega a la salida del conjunto?

Hayt 7ª D 11-2

Solución:

- En primer lugar calcularemos las pérdidas totales en dB
- La primera línea pierde $P_1(\text{dB}) = 30\text{m} \times 0.1\text{dB/m} = 3\,\text{dB}$
- La segunda $P_2(\text{dB}) = 45\text{m} \times 0.15\text{dB/m} = 6.75\,\text{dB}$
- Las pérdidas totales en dB son:

$$P_{total}(\text{dB}) = 3 + 3 + 6.75 = 12.75\,\text{dB}$$

- Por otra parte $P_{total}\ (\text{dB}) = 10\log_{10}\left[P_i / P_o\right]$
- Entonces

$$P_i / P_o = 10^{1.275} \Rightarrow P_o / P_i = 10^{-1.275} = 0.053 \Rightarrow 5.3\%$$