Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

C^1-Estabilidade Estrutural de difeomorfismos

Sávio Silva Santana

Salvador- Bahia
Março de 2020

C^1-Estabilidade Estrutural de difeomorfismos

Sávio Silva Santana

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Paulo Varandas

Salvador
20 de março de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Universitária de
Ciências e Tecnologias Prof. Omar Catunda, SIBI - UFBA.

S232 Santana, Sávio Silva

C^1 Estabilidade Estrutural de difeomorfismos / Sávio Silva Santana. – Salvador, 2020.

86 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Varandas

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Bahia. Instituto de Matemática e Estatística, 2020.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Análise Matemática. 3. Difeomorfismos. I. Varandas, Paulo. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDU 517.919

C^1 - Estabilidade Estrutural de difeomorfismos.

Sávio Silva Santana

Dissertação apresentada ao Colegiado do Curso de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora

Prof. Dr. Paulo Varandas (UFBA)

Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo (UFBA)

Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataide do Nascimento (UNEB)

Dedico este trabalho ao meu avô, Braz Bispo da Silva,
exemplo de ser humano.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, Maria Luciene Carvalho da Silva e Manoel Santana, pela educação, apoio em todos os momentos e o amor que nunca me faltou.

Agradeço, em especial, a minha companheira Janara Ramos Nascimento que esteve do meu lado ao longo de toda essa caminhada.

Agradeço ao Prof. Dr. Paulo Varandas por ter aceitado a missão de me orientar. Agradeço também pela paciência e disposição sempre demonstrada em todas a nossas conversas.

Agradeço a todos os professores e colegas que de algumas forma me ajudaram na conclusão desse trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Vitor Domingos Martins de Araújo e ao Prof. Dr. Antônio Teófilo Ataide do Nascimento por aceitarem o convite de compor a banca examinadora deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro ao longo de todo o mestrado.

"Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito."
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

Esse trabalho tem como objeto apresentar uma prova da estabilidade estrutural para difeomorfismos de classe C^2 que são axioma A e satisfazem a condição de transversalidade forte, definidos sobre uma variedade diferenciável compacta e sem borda.

Palavras-chave: Estabilidade estrutural. Axioma A. Transversalidade forte. Sistemas Dinâmicos. Difeomorfismos.

Abstract

This work has as goal to present a proof of structural stability for class diffeomorphism C^2 which are axiom A and satisfy the strong transversality contidion defined on a smooth, compact, boundaryless manifold.

Keywords: Structural stability. Axiom A. Strong tranversality. Dynamical Systems. Diffeomorphisms.

Sumário

	Introdução	**3**
1	**PRELIMINARES**	**5**
1.1	**Variedade Riemanniana**	**5**
1.2	**Grau de uma função**	**8**
1.3	**Dinâmica Hiperbólica**	**9**
1.4	**Prova do Teorema da variedade estável para conjuntos hiperbólicos**	**12**
2	**CONDIÇÃO DE ROBBIN**	**13**
2.1	**O Espaço dos campos de vetores d_f -Lipschitz**	**13**
2.2	**Condição de Robbin**	**18**
3	**DIFEOMORFISMOS LOCALMENTE HIPERBÓLICOS**	**27**
4	**AXIOMA A E TRANSVERSALIDADE FORTE**	**37**
4.1	**Vizinhança de conjuntos hiperbólicos**	**37**
4.2	**Extensão dos Subfibrados**	**41**
4.3	**Conjuntos Vetoriais semicontínuos inferiormente**	**54**
4.4	**Relação entre Axioma A, transversalidade forte e hiperbolicidade local**	**58**
5	**CONCLUSÃO**	**65**
5.1	**Perspectivas futuras**	**65**
	REFERÊNCIAS	**67**

Introdução

Para uma equação que modela um problema físico experimental ser um bom modelo, é necessário que para novos experimentos nas mesmas condições do original, que em geral nunca podem ser replicados exatamente, a informação dada pela equação não seja perdida. Ou seja, o modelo precisa permanecer estável sob pequenas variações. Tal problema, motiva o estudo de estabilidade estrutural

O conceito de estabilidade estrutural (originalmente chamados *sistemas grosseiros*) foi introduzindo em [2] por Andronov e Pontryagin, em 1937. Que consistia do seguinte: Seja o sistema de equações

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2)$$

definido no disco D^2 em $\mathbb{R}^2$, onde o campo de vetores (P_1, P_2) são transversais a ∂D^2. Tal sistema é dito grosseiro, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $p_i(x_1, x_2) \quad i = 1, 2$ tal que

$$|p_i(x_1, x_2)| < \delta, \qquad \left| \frac{\partial p_i}{\partial x_j}(x_1, x_2) \right| < \delta,$$

para todo $(x_1, x_2) \in D^2$, onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, existe um homeomorfismo $h : D^2 \to D^2$ tal que $d((x_1, x_2), h((x_1, x_2))) < \varepsilon$, para todo $(x_1, x_2) \in D^2$, que transforma a trajetória do sistema original nas trajetórias do sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = P_i(x_1, x_2) + p_i(x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2).$$

Em [2] Andronov e Pontryagin afirmaram que a não existência de trajetórias ligando os pontos de sela e hiperbolicidade das singularidades e das orbitas fechadas são condições necessárias e suficientes para o sistema ser grosseiro. Porém a prova foi omitida. Ainda em 1937, Andronov junto com Chaikin publicaram um livro, no qual utilizaram o resultado citado acima. Porém mais uma vez nenhuma prova foi estabelecida. O texto originalmente publicado em russo, foi editado e traduzido para o inglês por Salomon Lefschetz, em 1949, [8]. Ao traduzir "*sistemas grosseiro*s" para "*estabilidade estrutural*", Lefschetz fez uma importante contribuição para o desenvolvimento da teoria, pois estabelece o sentido de que ao tentar desestabilizar uma certa estrutura, a organização é mantida.

Coube a DeBaggis em 1952 apresentar uma prova do resultado enunciado por Andronov e Pontryagin, em [3], sob a orientação de Lefschtz.

Em 1955, Maurício Matos Peixoto entrou em contato com trabalho de DeBaggis (Veja [24]). Em 1959, Peixoto publicou [16], no qual introduziu o espaço dos campos de vetores definidos sobre D^2 junto com uma nova definição de estabilidade estrutural. Neste mesmo artigo foi provado que a nova definição era equivalente aquela apresentada em [2], e também, que o espaço dos campos estruturalmente estáveis transversais a fronteira do disco formam um conjunto aberto e denso no espaço de todos o campos de vetores. Já em 1962 Peixoto estuda a classe dos campos de vetores estruturalmente estáveis definidos sobre uma variedade orientável de dimensão 2, e estabelece que tal conjunto também é aberto e denso no espaço dos campos definidos sobre a variedade.

Na busca de generalizar os resultados de Peixoto para variedades de dimensões maiores, Steve Smale demonstrou em [23] que os o espaço dos campos de vetores estruturalmente estáveis não é denso no espaço dos campos de classe $C^r,\ r > 1$.

Já no contexto de estabilidade estrutural para difeomorfismos sobre uma variedade, Jacob Palis Jr. e Smale estabeleceram a *conjectura da estabilidade estrutural*, a saber

Conjectura *O conjunto dos difeomorfismos de classe C^r que são estruturalmente estáveis coincide com o conjunto dos difeomorfismos Axioma A com transversalidade forte.*

Já em 1971 Robbin, em [18], provou que para difeomorfismos de classe C^2 satisfazendo Axioma A mais condição de transversalidade forte são estruturalmente estáveis. Em [19] Clark Robinson provou que para difeomorfismos de classe C^1 com as mesmas hipóteses acima, satisfazem estabilidade estrutural. Ricardo Mañé provou em [14] que difeomorfismos C^1 estruturalmente estáveis, satisfazem Axioma A e a condição de transversalidade forte. Junto com o trabalho de Robinson a conjectura está provada para difeomorfismos de classe C^1.

A conjectura de C^r estabilidade estrutural para $r \geq 2$ ainda permanece aberta. Não se sabe o quanto a classe dos difeomorfismos C^r-estruturalmente estáveis é maior ou menor que a classe dos C^1-estruturalmente estáveis. Um obstáculo é a dificuldade em construir pertubações C^r com propriedades dinâmicas controladas. Além de que, muitas das propriedades dinâmicas usadas na prova do caso $r = 1$ são desconhecidas ou não satisfeitas para classes de maior regularidade. Para mais informações veja [17] e [4].

Neste trabalho será apresentada a prova da estabilidade estrutural devida a Robben, [18], para difeomorfismos de classe C^2 sobre uma variedade diferenciável M compacta e sem bordo. A demonstração será divida em três passos:

Teorema (2.2.1)**.** *Se $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ satisfazendo a condição de Robbin, então f é estruturalmente estável.*

Teorema (3.0.1)**.** *Se $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ é localmente hiperbólico, então f satisfaz a condição de Robbin.*

Teorema (4.4.2)**.** *Se $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ satisfaz axioma A e condição de transversalidade forte, então f é localmente hiperbólico.*

A condição de $f \in C^2$ é necessária para provar estimativas d_f- Lipschitz (veja Definição 2.1.1). Mais explicitamente, a regularidade de f é diretamente utilizada nos Lemas

2.2.3, 2.2.4 e 4.2.3. Uma prova da estabilidade estrutural supondo $f \in C^1$ é devida a Robinson.

No capítulo 1, apresentamos conceitos que serão importantes para a continuidade do trabalho. Alguns resultados encontram sem as devidas demonstrações para não fugirmos do objetivo principal do nosso trabalho.

No capítulo 2 apresentamos a prova do teorema A, por meio de um processo de ponto fixo para um certo operador definido no espaços dos campos de classe C^0. Para tal, introduzimos o espaço dos campos d_f- Lipschitz que fornece o espaço apropriado para o ponto fixo de maneira que sua imagem pela aplicação exponencial seja um homeomorfismo.

Considere um difeomorfismo no qual o conjunto dos pontos não errantes consiste de uma quantidade finita de pontos. Para cada ponto, podemos considerar uma vizinhança na qual é possível decompor o espaço tangente em soma direta, como no ponto hiperbólico. Sendo assim, estimativas sobre a diferencial da nossa aplicação restrita a vizinha do ponto hiperbólico podem ser feitas. Isso motiva a definição de difeomorfismo localmente hiperbólico apresentada no capítulo 3. Neste mesmo capítulo, provamos o teorema B.

Pelo teorema da decomposição espectral de Smale, sabemos que, para os difeomorfismos que são axioma A, o conjunto dos pontos não errantes se decompõe em quantidade finita de conjuntos compactos, hiperbólicos e invariantes, chamadas de *peças básicas*. Com base nesse teorema, estabelecemos a prova do teorema C, estendendo a decomposição do espaço tangente sobre cada peça básica a uma vizinhança apropriada de maneira que satisfaçam a definição de localmente hiperbólico.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados importantes que irão nos auxiliar em nossos resultados principais. Algumas demonstrações são omitidas, pois fogem o objetivo do nosso trabalho.

1.1 Variedade Riemanniana

Seja M uma variedade diferenciável. Uma *métrica Riemanniana* em M é uma aplicação g que para cada $p \in M$ associa um produto interno $g_p = \langle \cdot\,,\cdot\,\rangle_p$ em T_pM, que depende diferencialmente de $p \in M$, no seguinte sentido; para quais que dois campos de vetores X, Y em M,

$$p \in M \to \langle X_p, Y_p\rangle \in \mathbb{R},$$

é $C^\infty(M)$. Uma métrica riemanniana induz uma norma no fibrado tangente TM, da seguinte maneira;

$$\|v\| = \langle v, v\rangle_p,$$

para $v \in T_pM$.

Seja uma norma $\|\cdot\|$ induzida por uma métrica Riemanniana em TM. Seja (φ, U) uma carta em M, então para $p \in U$ e $v \in T_pM$, $|d\varphi_p v|$ define uma norma em T_pM, ademais, existem $a, b > 0$ tais que

$$a|d\varphi_p v| \leq \|v\| \leq b|d\varphi_p v|. \tag{1.1}$$

Uma métrica Riemanniana determina uma métrica d em M, dada por

$$d(x,y) = \inf \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

onde o ínfimo é sobre todas as curvas C^1 com $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. A topologia induzida pela métrica d coincide com a topologia de M (veja [13]).

Para cada carta (α, U) de M existem $A, B > 0$ tais que

$$Ad(x,y) \leq |\alpha(x) - \alpha(y)| \leq Bd(x,y) \tag{1.2}$$

Em particular, por compacidade (e possibilidade de atlas finito), a distância entre pontos na variedade é uniformemente comparável à distância aos pontos imagens pelas cartas.

Definição 1.1.1. *(Aplicação Exponencial) Seja $p \in M$, considere $V \subseteq T_pM$ o conjunto de todos os vetores $v \in T_pM$ tal que $\gamma_{p,v}$ é a curva geodésica que tem v como vetor tangente no ponto p que está definida em uma vizinhança de $[0,1]$. A aplicação exponencial é definida por*

$$\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1).$$

Proposição 1.1.1. *Dado $p \in M$, seja $\exp_p : T_pM \to M$ a aplicação exponencial. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) $\exp_p(0) = p$;

(ii) $d(\exp_p)_0 v = v$, *para todo* $v \in T_pM$;

(iii) *Existe uma vizinhança U de $0 \in T_pM$ e uma vizinhança V de p em M tal que* $\exp_p$ *transforma U difeomorficamente em V;*

(iv) *Existe uma vizinhança W de p e $r > 0$ tal que para cada $q \in W$,* $\exp_q$ *é uma difeomorfismo de $B(0, r)$ sobre* $\exp_q(B(0, r))$, *e* $W \subseteq \exp_q(B(0, r))$.

Demonstração. Veja [7]. □

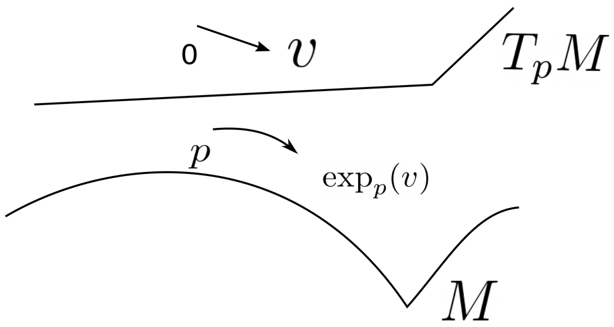

Figura 1.1.1

O seguinte lema nos permite fazer estimativas que envolvem a aplicação exponencial, cartas e pontos da variedade. Esse lema será utilizado várias vezes ao longo do trabalho.

Lema 1.1.1. *Seja (φ, U) uma carta de uma variedade compacta M. Então existem $a,\ b > 0$ tais que*

$$ad(x, y) \leq d(\exp(\xi), \exp(\eta)) + |v - w|,$$

para $x,\ y \in U$, $\xi \in T_xM$, $\eta \in T_yM$, com $\|\xi\|,\ \|\eta\| \leq b$, onde $d\varphi(\xi) = (\varphi(x), v)$ e $d\varphi(\eta) = (\varphi(y), w)$.

Demonstração. Seja $e : T\varphi(U) = \varphi(U)\times\mathbb{R}^n \to \varphi(U)$ dada por $e(x', v) = \varphi(\exp(d\varphi^{-1}(x', v)))$. Temos que $x' = \varphi(x)$ para algum $x \in M$, daí

$$e(x', 0) = \varphi(\exp(d\varphi^{-1}(x', 0))) = \varphi(\exp_x(0)) = \varphi(x) = x'.$$

Além disso, temos que

$$D_2e(x', v) = d\varphi(\exp(d\varphi^{-1}(x', v)))d\exp(d\varphi^{-1}(x', v))d\varphi_{x'}^{-1}$$

Logo $D_2e(x, 0) = Id$.

Pela diferenciabilidade, podemos escrever

$$e(x', v) = e(x', 0) + D_2 e(x', 0)v + r(x, v) = x' + v + r(x, v),$$

onde $\frac{r(x,v)}{|(x,v)|}$ tende a zero quando $|(x, v)| \to 0$. Veja que $Dr(x', 0) = 0, \forall\ x' \in \varphi(U)$. Assim, para $|v|$, suficientemente pequeno, podemos supor $|Dr(x', v)| \leq \frac{1}{2}$. Pelo teorema do valor médio, temos que

$$|r(x', v) - r(y', w) \leq \frac{1}{2}\Big(|x' - y'| + |v - w|\Big)|,$$

onde $x',\ y' \in \varphi(U),\ v,\ w \in \mathbb{R}^n$ com $|v|,\ |w|$ suficientemente pequeno. Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} |x' - y'| &\leq |e(x', v) - e(y', w)| + |v - w| + |r(x', v) - r(y', w)| \\ &\leq |e(x', v) - e(y', w)| + |v - w| + \frac{1}{2}\Big(|x' - y'| + |v - w|\Big) \\ &\leq |e(x', v) - e(y', w)| + \frac{2}{3}|v - w| + \frac{1}{2}|x' - y'|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}|x' - y'| \leq |e(x', v) - e(y', w)| + \frac{2}{3}|v - w|. \tag{1.3}$$

Multiplicando por $\frac{2}{3}$ em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}|x' - y'| &\leq \frac{2}{3}|e(x', v) - e(y', w)| + |v - w| \\ &\leq |e(x', v) - e(y', w)| + |v - w|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade 1.2, temos que

$$\begin{aligned} |e(x', v) - e(y', w)| &= |\varphi(\exp(d\varphi^{-1}(x', v))) - \varphi(\exp(d\varphi^{-1}(y', w)))| \\ &\leq Bd\Big(\exp(d\varphi^{-1}(x', v)), \exp(d\varphi^{-1}(y', w))\Big) \\ &= Bd(\exp(\xi), \exp(\eta)), \end{aligned}$$

e

$$|x' - y'| = |\varphi(x) - \varphi(y)| \geq Ad(x, y),$$

assim,

$$\frac{1}{3}Ad(x, y) \leq Bd(\exp(\xi), \exp(\eta)) + |v - w|.$$

Caso $B \leq 1$, tomemos $a = \frac{1}{3}A$. Agora caso $B > 1$, temos que

$$\frac{1}{3B}Ad(x, y) \leq d(\exp(\xi), \exp(\eta)) + B^{-1}|v - w| \leq d(\exp(\xi), \exp(\eta)) + |v - w|,$$

Logo, basta considerar $a = (3B)^{-1}$. □

Observação 1.1.1. *Dado $p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ transforma difeomorficamente uma vizinhança V de $0 \in T_pM$ em uma vizinhança U de p. Agora dado $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, suficientemente próximo do campo nulo, temos que $\exp \circ X : M \to M$ define uma função em M de classe C^r, $r \geq 1$. Dado $r \geq 1$, a aplicação $\mathcal{F} : \mathfrak{X}^r(M) \to C^r(M, M)$, definida como $X \mapsto \exp \circ X$ transforma homeomorficamente uma vizinhança do $0 \in \mathfrak{X}^r(M)$ em uma vizinhança da identidade em $C^r(M, M)$.*

1.2 Grau de uma função

Definição 1.2.1. *Seja $f : M \to N$ uma função de classe $C^r, r \geq 1$. Dizemos que $y \in N$ é valor regular, se para todo $x \in f^{-1}(y)$, $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$, é sobrejetiva.*

Observe que no caso em que M e N têm a mesma dimensão, $y \in N$ ser valor regular significa que para todo $x \in f^{-1}(y)$, df_x é um isomorfismo. Então, pelo teorema da Aplicação inversa(para variedades) existem vizinhanças $U \subset M$, $V \subset N$ de x e y respectivamente, tais que f transforma U em V difeomorficamente. Assim $f^{-1}(y) \cap U = \{x\}$, ou seja, x é ponto isolado de $f^{-1}(y)$. Aplicando este mesmo argumento a todos os pontos de $f^{-1}(y)$, garantimos que $f^{-1}(y)$ é discreto. Como $\{y\}$ é fechado, segue que $f^{-1}(y)$ é compacto e como todos os seus pontos são isolados, $f^{-1}(y)$ não pode ser enumerável infinito, pois nesse caso qualquer sequência admitiria uma subsequência convergente. Sendo assim, $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito.

Agora podemos definir o conceito de *grau de uma função.*

Definição 1.2.2. *Sejam M e N variedades compactas orientadas de mesma dimensão. Se $f : M \to N$ é de classe $C^r, r \geq 1$, e $y \in N$ é um valor regular de f, definimos o grau de f em relação a y como*

$$gr(f, y) = \sum_{f(x)=y} sinal(x),$$

onde

$$sinal(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } df_x \text{ preserva orientação} \\ -1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.2.3. *Sejam M e N variedades compactas e $f, g : M \to N$ funções contínuas. Dizemos que f e g são homotópicas se existe uma aplicação contínua $H : M \times [0, 1] \to N$ tal que $H(0, x) = f(x)$ e $H(1, x) = g(x)$ para todo $x \in M$.*

Proposição 1.2.1. *Seja $f \in C^r(M, N), r \geq 1$,*

(i) Se y_1 e y_2 são valores regulares f, então $gr(f, y_1) = gr(f, y_2) \overset{def}{=} gr(f)$;

(ii) Se $g \in C^r(M, N), r \geq 1$ é homotópica à f então $gr(f) = gr(g)$.

Demonstração. Veja [9]. □

Observação 1.2.1. *Note que se $gr(f) \neq 0$, então f é sobrejetora. De fato, se existir $y \in M \setminus f(N)$, então por definição y será valor regular de f. Como $f^{-1}(y) = \emptyset$, teremos $gr(f, y) = 0$, e pela Proposição anterior, $gr(f) = 0$.*

1.3 Dinâmica Hiperbólica

Neste seção será feita uma exposição das principais ferramentas da teoria de dinâmica hiperbólica, muitas dos quais serão utilizadas de forma direta na continuação do nosso trabalho.

Começamos pela definição de conjunto hiperbólico.

Definição 1.3.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$. Seja $\Lambda \subseteq M$ um conjunto compacto e f invariante. Dizemos que Λ é um conjunto hiperbólico de f, se existem subfibrados E^u e E^s de $TM_{|\Lambda}$ tais que para todo $p \in \Lambda$,*

(i) $T_pM = E^u_p \oplus E^s_p$;

(ii) $df_p(E^s_p) = E^s_{f(p)}$ *e* $df_p(E^u_p) = E^u_{f(p)}$, *isto é,* E^u *e* E^s *são invariantes por* df_p;

(iii) Existem $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|df^n_p v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ para todo } n \geq 0, \text{ e } v \in E^s_p;$$

$$\|df^{-n}_p v\| \leq C\lambda^n \|v\|, \text{ para todo } n \geq 0, \text{ e } v \in E^u_p.$$

A condição (iii) da definição de conjunto hiperbólico garante que sobre a ação de df os vetores de E^u expandem e os vetores de E^s contraem. Porém para iterados apropriados, por conta da constante $C > 0$. Esse problema pode ser contornado por meio de uma construção de uma nova métrica em $TM_{|\Lambda}$ de maneira que as contrações e expansões dos vetores de E^s e E^u respectivamente, ocorrem à partir do primeiro iterado de df, isto é, fazendo $C = 1$. A essa nova métrica, damos o nome de *métrica adaptada.* Para tal construção, veja [25].

O próximo resultado nos garante a continuidade dos fibrados E^s e E^u em relação aos pontos de Λ. Mas antes precisamos estabelecer o sentido de convergência empregado aqui.

Definição 1.3.2. *Seja $x \in M$ e seja E_x um subespaço linear de T_xM de dimensão $m \geq 1$. Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M$ e E_{x_k} espaços lineares de $T_{x_k}M$ de dimensão m. Dizemos que E_{x_k} converge para E_x se existe uma base $\{e^1_{x_k}, \cdots e^m_{x_k}\}$ de E_{x_k} para cada k, e uma base $\{e^1, \cdots, e^m\}$ de E_x tal que, $e^i_{x_k} \to e^i$, para $i = 1, \cdots m$.*

Essa definição nos dá a noção de convergência no seguinte Grassmaniano,

$$\mathcal{G}^\sigma(M) = \{V : V \text{ é um subespaço vetorial de } T_xM \text{ de dimensão } \sigma, \forall\, x \in M\},$$

sobre M. Escrevemos $E_{x_k} \to E_x$. Note que o fato de E_{x_k} convergir a E_x significa que $x_k \to x$ e para cada $v \in E_x$, existe $v_k \in E_{x_k}$, para cada k, tal que $v_k \to v$.

Proposição 1.3.1. *Seja $\Lambda \subseteq M$ um conjunto hiperbólico para f. Então E^s_x e E^u_x variam continuamente com $x \in \Lambda$. Ademais, dim(E^s_x) e dim(E^u_x) são localmente constantes.*

Demonstração. Veja em [6]. □

Observação 1.3.1. *Pela continuidade dos subfibrados E^s e E^u em Λ, podemos estendelos de maneira contínua a uma vizinhança N de Λ (veja [6]). Reduzindo a vizinhança se necessário, podemos considerar extensões $\tilde{E}^s$ e $\tilde{E}^u$ de E^s e E^u respectivamente, tais que*

$$T_xM = \tilde{E}^u_x \oplus \tilde{E}^s_x,$$

para $x \in N$.

Definição 1.3.3. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^r, $(r \geq 1)$ definimos os conjuntos estáveis e instáveis de $x \in M$ por*

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Para $\Lambda \subseteq M$, conjunto invariante e hiperbólico para f, definimos os conjuntos estáveis e instáveis de Λ por

$$W^s(x) = \{y \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), \Lambda) = 0\},$$

$$W^u(x) = \{y \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), \Lambda) = 0\}.$$

Considerando M dotada de uma aplicação exponencial e uma métrica riemanniana, definimos, para $\varepsilon > 0$, os conjuntos locais estáveis e instáveis de tamanho ε para $x \in M$, por

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M; f^n(y) \in \exp(B^\varepsilon T_{f^n(x)}M), \forall n \geq 0\},$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \{y \in M; f^{-n}(y) \in \exp(B^\varepsilon T_{f^{-n}(x)}M), \forall n \geq 0\},$$

onde $B^\varepsilon E$ denota a bola fechada de raio ε do espaço vetorial normado E.

O resultado que se segue afirma que se Λ é um conjunto hiperbólico então os conjuntos $W^s_\varepsilon(x)$ e $W^u_\varepsilon(x)$ são variedades mergulhadas tangentes à E^s_x e E^u_x respectivamente.

Denotemos por $B^\varepsilon E^\sigma_x$ a bola fechada de raio $\varepsilon > 0$ e centro na origem, do espaço E^σ_x, $\sigma = u, s$.

Teorema 1.3.1 (Teorema da variedade instável)**.** *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$, onde M é uma variedade Riemanniana compacta. Seja $\Lambda \subseteq M$ um conjunto hiperbólico de f. Então*

(i) Existe uma aplicação $\psi : E^u \to M$ tal que para cada $x \in M$, $\psi_{|E^u_x}$ é uma imersão de classe C^r e $\psi(E^u) = W^u(x)$;

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $\psi_{|B^\varepsilon E^u_x} = \exp$ graf(γ^u_x), onde $\gamma^{u_x} : B^\varepsilon E^u_x \to B^\varepsilon E^s_x$ é C^r, $\gamma^u_x(0) = 0$ e $D\gamma^u_x(0) = 0$. Ademais, $\psi(B^\varepsilon E^u_x) = W^u_\varepsilon(x)$;

(iii) $T_x W^u_\varepsilon(x) = E^u_x$.

Demonstração. Veja [12]. □

Definição 1.3.4. *Um ponto $x \in M$ é dito* não errante *se para qualquer vizinhança U de x, existe $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotamos por $\Omega(f)$ o conjunto do pontos não errantes de f.*

Definição 1.3.5. *Um difeomorfismo $f : M \circlearrowleft$ é* Axioma A *se $\Omega(f)$ é um conjunto hiperbólico e o conjunto dos pontos periódicos de f é denso em $\Omega(f)$.*

Definição 1.3.6. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$, Axioma A. Dizemos que f satisfaz a* condição de transversalidade forte *se, para todo $x \in M$,*

$$T_x M = E^s_x + E^u_x.$$

Teorema 1.3.2 (Decomposição espectral de Smale)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo e Ω o conjunto dos pontos não errantes de f. Se f satisfaz axioma A, então*

$$\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_l,$$

onde os conjuntos Ω_i são dois a dois disjuntos, invariantes e transitivos. A decomposição é única à menos de reordenação dos índices. Ademais, $\Omega_i = W^u(\Omega_i) \cap W^s(\Omega_i)$, para $i = 1, \ldots l$.

Demonstração. Veja [20]. □

Definição 1.3.7. *Considere as seguintes relações: $\Omega_i \leq \Omega_j$ se $W^s(\Omega_i) \cap W^u(\Omega_j) \neq \emptyset$ e $\Omega_i < \Omega_j$ se $\Omega \leq \Omega_j$ e $i \neq j$.*

Dizemos que a relação $\leq$ admite um $k-$ *ciclo* se existem peças básicas $\Omega_{i_1}, \cdots, \Omega_{i_k}$ satisfazendo

$$\Omega_{i_1} \leq \Omega_{i_2} \leq \cdots \leq \Omega_{i_k} \leq \Omega_{i_1}.$$

É possível garantir que se f é axioma A então não $\leq$ não tem 1-ciclo. Adicionando a hipótese de condição de transversalidade forte, podemos garantir que $\leq$ não existem $k-$ciclos.

Proposição 1.3.2. *Se f satisfaz Axioma A e a condição de transversalidade forte, então a relação $\leq$ é parcialmente ordenada.*

Com a condição de não existências de $k-$ ciclos, podemos reordenar os índices das peças básicas, de maneira que

$$\Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \cdots \leq \Omega_{l-1} \leq \Omega_l,$$

Está reordenação é chamada de *ordem da filtração.*

Teorema 1.3.3. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um axioma A então*

$$\bigcup_{i=1}^{l} W^u(\Omega_i) = M = \bigcup_{i=1}^{l} W^s(\Omega_i).$$

Demonstração. Veja [25]. $\square$

2 Condição de Robbin

O objetivo deste capítulo é caracterizar os difeomorfismos $\mathrm{Diff}^2(M)$ por meio do estudo de operadores definidos no espaços de campos de vetores sobre M.

2.1 O Espaço dos campos de vetores d_f -Lipschitz

Nessa seção estudaremos um subconjunto do espaço dos campos de classe C^0, que será importante para a conclusão do principal resultado deste capítulo.

Seja M uma variedade diferencial compacta. Considere $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$, e d a métrica em M induzida pela métrica riemanniana.

Dados $x, y \in M$, considere

$$d_f(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(f^n(x), f^n(y)).$$

Veja que, dados $x, y \in M$ com $x \neq y$,$d_f(x,y) > 0$, $d_f(x,y) = d_f(y,x)$ e $d_f(x,x) = 0$. Ademais,

$$\begin{aligned} d_f(x,z) &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(f^n(x), f^n(z)) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(f^n(x), f^n(y)) + \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(f^n(y), f^n(z) \\ &= d_f(x,y) + d_f(y,z). \end{aligned}$$

Portando d_f constitui uma métrica em M. Além disso, f é uma isometria para essa métrica, uma vez que $d_f(f(x), f(y)) = d_f(x,y)$ para todos $x, y \in M$.

Observe que $d(x,y) = d(f^0(x), f^0(y)) \leq d_f(x,y)$, portanto a topologia gerada pela métrica d_f é mais forte que a topologia de M.

Exemplo 2.1.1. *Um homeomorfismo é dito expansivo se existe $\varepsilon_0 > 0$ de modo que para quaisquer pontos $x, y \in M$ com $x \neq y$ existe um inteiro $n \in \mathbb{Z}$ de modo que $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon_0$. Neste caso $d_f(x,y) > \varepsilon_0$ para todo $x \neq y$. Ademais, a topologia induzida por d_f é discreta, logo (M,d) e (M,d_f) são espaços métricos não homeomorfos.*

Definição 2.1.1. *Dizemos que um campo de vetor $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ é d_f-Lipschitz se para toda carta (φ, U) em M, existe uma $K \geq 0$ tal que*

$$|X_\varphi(x) - X_\varphi(y)| \leq K d_f(x,y),$$

onde $X_\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ tal que $d\varphi_x X_x = (\varphi(x), X_\varphi(x))$. Denotamos por $\mathfrak{X}_f(M)$ o conjunto de todos os campos d_f-Lipschitz em M.

Como $d(x,y) \le d_f(x,y)$, todo campo de vetor Lipschitz é d_f-Lipschitz. Em particular, pelo teorema do valor médio, todo campo C^1 é d_f-Lipschitz.

Observe que o conjunto do campos $\mathfrak{X}_f(M)$ independe da escolha da métrica riemanniana usada para definir d em M, pois, como M é compacta, as métricas Rimannianas são equivalentes.

Proposição 2.1.1. *Sejam $\{(\psi, V)\}$ uma cobertura finita de M por cartas e $X \in \mathfrak{X}^0(M)$. Se para cada carta (ψ, V) da cobertura existe uma contante $K_\psi \ge 0$ tal que*

$$|X_\psi(x) - X_\psi(y)| \le K_\psi d_f(x,y),$$

para todo $x, y \in V$, então X é d_f-Lipschitz.

Demonstração. Seja (φ, U) uma carta. Seja $\varepsilon > 0$ o número de Lebesgue da cobertura, i.e, para $x, y \in M$ que $d(x,y) < \varepsilon$ existe (ψ, V) tal que $x, y \in V$. Dado $x \in U \cap V$, considere $x' = \psi(x)$,

$$\begin{aligned} X_\varphi(x) &= d\varphi_x X_x \\ &= d\varphi_x \left[d\psi_{x'}^{-1} d\psi_x \right] X_x \\ &= d(\varphi \circ \psi)_{x'} d\psi_x X_x \\ &= A_\psi(x')\, X_\psi(x), \end{aligned}$$

onde $A_\psi(x') = d(\varphi \circ \psi)_{x'}$. Temos que $A_\psi(x')$ é C^∞, (logo Lipschitz, pelo teorema do valor médio) e $\|A_\psi(x')\|_{op}$ é limitado para todo $x' \in \psi(V)$. Daí,

$$\begin{aligned} |X_\varphi(x) - X_\varphi(y)| &= |A_\psi(x')\, X_\psi(x) - A_\psi(y')\, X_\psi(y)| \\ &= |A_\psi(x')\, X_\psi(x) - A_\psi(y')\, X_\psi(x) + A_\psi(y')\, X_\psi(x) - A_\psi(y')\, X_\psi(y)| \\ &\le \|A_\psi(x')\|_{op} |X_\psi(x) - X_\psi(y)| + \|A_\psi(x') - A_\psi(y')\|_{op} |X_\psi(y)| \\ &\le \|A_\psi(x')\|_{op} K_\psi d_f(x,y) + \|A_\psi(x') - A_\psi(y')\|_{op} |X_\psi(y)| \\ &\le C K_\psi d_f(x,y) + C d(x,y) |X_\psi(y)| \\ &\le C\,(K + \|X\|_0)\, d_f(x,y) \end{aligned}$$

Onde C é uma constante que depende da carta (φ, U) e da cobertura $\{(\psi, V)\}$, $K = \max_\psi\{K_\psi\}$ e $\|X\|_0 = \max_\psi \sup_{y \in V} |X_\psi(y)|$. Como o máximo é tomado sobre os elementos da cobertura, temos que X_φ é d_f-Lipschitz.

□

Definição 2.1.2. *Considere $X \in \mathfrak{X}_f(M)$ e uma carta (φ, U) em M. Para todo $x, y \in M$, denotamos por*

$$\Lambda(X, \varphi) = \inf\left\{K \ge 0 : |X_\varphi(x) - X_\varphi(y)| \le K d_f(x,y)\right\},$$

constante de d_f-lipschitz.

Proposição 2.1.2. *Existe uma única topologia em $\mathfrak{X}_f(M)$ tal que*

(a) $\mathfrak{X}_f(M)$ é um espaço de Banach;

(b) a inclusão $\mathfrak{X}_f(M) \to \mathfrak{X}^0(M)$ é contínua;

(c) Para cada carta (φ, U) e cada $K > 0$ o conjunto de todos os campos $X \in \mathfrak{X}_f(M)$ tal que $\Lambda(X, \varphi) < K$ é aberto.

Demonstração. Seja $\{(\psi, V)\}$ uma cobertura finita de M. Consideremos

$$\|X\|_0 = \max_{\psi} \sup_{y \in V} |X_\psi(y)|, \tag{2.1}$$

e

$$\Lambda(X) = \max_{\psi} \Lambda(X, \psi). \tag{2.2}$$

Definimos

$$\|X\|_f = \|X\|_0 + \Lambda(X). \tag{2.3}$$

Veja que se $\|X\|_f = 0$, então $\|X\|_0 = -\Lambda(X)$. Como $\Lambda(X)$ é sempre não negativo, segue que $X = 0$. Temos que $\Lambda(cX) = |c|\Lambda(X)$, assim $\|cX\|_f = |c|\|X\|_f$ e $\Lambda(X+Y) \leq \Lambda(X) + \Lambda(Y)$, logo, $\|X+Y\|_f \leq \|X\|_f + \|Y\|_f$. Portanto $\|\cdot\|_f$ define uma norma em $\mathfrak{X}_f(M)$ mais forte que a topologia C^0 herdada da inclusão $\mathfrak{X}_f(M) \hookrightarrow \mathfrak{X}^0(M)$.

Afirmamos que $\|X\|_f$ é completa em $\mathfrak{X}_f(M)$. De fato, dada a sequência de Cauchy $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathfrak{X}_f(M)$, em particular, $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está em $\mathfrak{X}^0(M)$. Daí, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq n_0$

$$\max_{\varphi} \sup_{x \in U_\varphi} |d\varphi_x \eta_{n,x} - d\varphi_x \eta_{m,x}| < \varepsilon$$

Portanto $\{d\varphi_x \eta_{n,x}\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ é uma sequência de Cauchy, para todo carta (φ, U_φ) e para todo $x \in U_\varphi$. Logo, para cada carta φ da cobertura e para cada $x \in U_\varphi$, existe $v_{\varphi,x} \in T_{\varphi(x)R^n}$ tal que $d\varphi_x \eta_{n,x} \to v_{\varphi,x}$ e converge uniformemente, sendo assim v_φ é contínua. Considere $X_x = d\varphi^{-1}_{\varphi(x)} v_{\varphi,x}$ em T_xM. Temos que $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, por ser o pullback de um campo contínuo pela carta. Daí,

$$\begin{aligned} \|\eta_n - X\|_0 &= \max_{\varphi} \sup_{x \in U_\varphi} |d\varphi_x \eta_{n,x} - d\varphi_x X_x| \\ &= \max_{\varphi} \sup_{x \in U_\varphi} |d\varphi_x \eta_{n,x} - v_{\varphi,x}| < \varepsilon \end{aligned}$$

Agora observe que

$$|v_{\varphi,x} - v_{\varphi,y}| = |\lim_{n\to\infty} d\varphi_x \eta_{n,x} - \lim_{n\to\infty} d\varphi_y \eta_{n,y}| \leq \lim_{n\to\infty} \Lambda(\eta_n, \varphi) d_f(x,y).$$

Como $\{\Lambda(\eta_n, \varphi)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, temos que converge. Logo

$$|v_{\varphi,x} - v_{\varphi,y}| \leq K_\varphi d_f(x,y).$$

Seja $K = \max_\varphi K_\varphi$. Então X é d_f-lipschitz e $\lim_{n\to\infty} \Lambda(\eta_n) = K$. Portanto $\mathfrak{X}_f(M)$ é Banach com $\|\cdot\|_f$.

Como $\|\cdot\|_0 \leq \|\cdot\|_f$, segue que dada uma sequência convergente em $\mathfrak{X}_f(M)$ converge em $\mathfrak{X}^0(M)$, e converge para o mesmo campo, portanto a aplicação inclusão é contínua.

Pela prova da proposição 2.1.1 temos que existe $C > 0$ tal que

$$\Lambda(\eta, \varphi_i) \leq C\|\eta\|_f,$$

para $\eta \in \mathfrak{X}_f(M)$ e (φ, U) uma carta. Então, se $\eta_n \to \eta$,

$$|\Lambda(\eta_n, \varphi) - \Lambda(\eta, \varphi)| \leq \Lambda(\eta_n - \eta) \leq C(\eta_n - \eta),$$

assim $\Lambda(\cdot\,, \varphi)$ é contínua, ou seja, o conjunto de todos o campos $X \in \mathfrak{X}_f(M)$ tal que $\Lambda(X, \varphi) < K$ é aberto.

Seja τ uma topologia em $\mathfrak{X}_f(M)$ que satisfaz (a), (b) e (c). Logo $\|\cdot\|_f$ é contínua em $(\mathfrak{X}_f(M), \tau)$, pois por (b) $\|\cdot\|_0$ é contínua e por (c) $\Lambda(\cdot\,, \varphi)$ é contínua para toda carta (φ, U). Então a aplicação identidade de $i : (\mathfrak{X}_f(M), \tau) \to (\mathfrak{X}_f(M), \|\cdot\|_f)$ é contínua. Agora, por (a) e pelo teorema da aplicação aberta, temos que i é uma aplicação aberta, ou seja, a topologia é a mesma. Portanto temos uma única topologia em $\mathfrak{X}_f(M)$ que satisfaz (a), (b) e (c). $\square$

Proposição 2.1.3. *Seja $f^\# : \mathfrak{X}^0(M) \to \mathfrak{X}^0(M)$, definido por*

$$f^\#(X)(p) = df^{-1}_{f(p)} X_{f(p)},$$

denotado por pull-back de f. Temos que $f^\#$ é um operador linear, contínuo e o conjunto $\mathfrak{X}_f(M)$ é invariante por $f^\#$.

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}^0(M)$ e $c \in \mathbb{R}$, temos que

$$f^\#(X + cY)(p) = df^{-1}_{f(p)}(X + cY)_{f(p)} = df^{-1}_{f(p)} X_{f(p)} + c df^{-1}_{f(p)} Y_{f(p)},$$

para todo $p \in M$. Logo $f^\#$ é linear. Considere (φ, U) uma carta da cobertura de M e defina $f_\varphi^{-1} : \psi(f(U) \cap U) \to \varphi(U \cap f^{-1}(U))$, por $f_\varphi^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \varphi$.

Para $p \in U \cap f^{-1}(U)$ e $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, temos

$$\begin{aligned}
(f^\# X)_\varphi(p) &= d\varphi_p(df^{-1}_{f(p)} X_{f(p)}) \\
&= d\varphi_p(df^{-1}_{f(p)} d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} d\varphi_p X_{f(p)}) \\
&= Df_\varphi^{-1}(\varphi(f(p))) X_\varphi(f(p)).
\end{aligned}$$

Seja $K_1 > 0$ tal que

$$K_1 \geq \max_\varphi \sup_p |Df_\varphi^{-1}(p')|,$$

onde $p' = \varphi(f(p))$. Assim,

$$|(f^{\#}X)_{\varphi}(x)| \leq K_1|X_{\varphi}(f(x))|.$$

Portanto,

$$\|f^{\#}(X)\|_0 \leq K_1\|X\|_0.$$

Sendo assim, $f^{\#}$ é um operador linear contínuo.

Considere $X \in \mathfrak{X}_f(M)$ e $x, y \in U \cap f^{-1}(U)$.

$$\begin{aligned}
|(f^{\#}X)_{\varphi}(x) \quad &- \quad (f^{\#}X)_{\varphi}(y)| \\
&= |Df_{\varphi}^{-1}(x')X_{\varphi}(f(x)) - Df_{\varphi}^{-1}(y')X_{\varphi}(f(y))| \\
&\leq |Df_{\varphi}^{-1}(x') - Df_{\varphi}^{-1}(y')||X_{\varphi}(f(x))| + |Df_{\varphi}^{-1}(x')||X_{\varphi}(f(x)) - X_{\varphi}(f(y))|.
\end{aligned}$$

Considerando $K_2 = \max_{\varphi} \sup_x |D^2 f_{\varphi,\psi}^{-1}(x')|$ e escolhendo $K = \max\{K_1, K_2\}$ segue do teorema do valor médio que

$$|(f^{\#}X)_{\varphi}(x) - (f^{\#}X)_{\varphi}(y)| \leq K|x' - y'||X_{\varphi}(f(x))| + K|X_{\varphi}(f(x)) - X_{\varphi}(f(y))|.$$

Pela desigualdade (1.2) existe $B > 0$ tal que

$$|x' - y'| = |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq Bd(x, y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|(f^{\#}X)_{\varphi}(x) - (f^{\#}X)_{\varphi}(y)| &\leq KBd(x, y)|X_{\varphi}(f(x))| + K\Lambda(X, \varphi)d_f(x, y) \\
&\leq \Big[KB\|X\|_0 + K\Lambda(X, \varphi)\Big]d_f(x, y),
\end{aligned}$$

portando, $f^{\#}(X) \in \mathfrak{X}_f(M)$. □

2.2 Condição de Robbin

Nesta seção estamos considerando $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^2.

Dado $\varepsilon > 0$ sejam $g, f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ tais que $d_{C^1}(f,g) < \varepsilon$. Veja que

$$\begin{aligned} d((f^{-1}\circ g)(x), x) &= d((f^{-1}\circ g)(x), (g^{-1}\circ g)(x)) \\ &\leq \max_{z\in M} d(f^{-1}(z), g^{-1}(z)) \\ &\leq d_{C^1}(f,g) \end{aligned}$$

Analogamente, $d(\mathrm{d}(f^{-1}\circ g)_x, Id_x) \leq \varepsilon$. Isso mostra que se f e g estão próximos na topologia C^r então $f^{-1}\circ g$ está próxima de Id na topologia $C^1(M,M)$. Portando, pela Observação 1.1.1 existe um único campo $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ tal que $\exp \circ Y = f^{-1}\circ g$.

O conceito que se segue é o objetivo central do nosso trabalho.

Definição 2.2.1. *Dada uma variedade diferencial M, dizemos que $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ é C^1-estruturalmente estável se para toda vizinhança U_0 da identidade em $C^0(M,M)$, existe uma vizinhança U_1 de f em $\mathrm{Diff}^1(M)$ tal que para toda $g \in U_1$ existe um homeomorfismo $h \in U_0$ tal que $g = h\circ f\circ h^{-1}$.*

Observe que se buscamos $h \in C^0(M,M)$ próxima da identidade tal que $g = h\circ f\circ h^{-1}$, podemos reescrever da seguinte maneira,

$$f^{-1}\circ g\circ h = f^{-1}\circ h\circ f.$$

Pela Observação 1.1.1, temos que existem campos $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ tais que $\exp(X) = h$ e $\exp(Y) = f^{-1}\circ g$. Logo

$$\exp(Y)\circ\exp(X) = f^{-1}\circ\exp(X)\circ f.$$

Como $\exp(Y)\circ\exp(X)$ também é C^0-próximo da identidade, existe $C_Y(X) \in \mathfrak{X}^0(M)$ tal que

$$\exp(Y)\circ\exp(X) = \exp(C_Y(X)).$$

Definindo

$$P_Y(X) = C_Y(X) - X,$$

temos que

$$\exp\left(X + P_Y(X)\right) = \exp(Y)\circ\exp(X). \tag{2.4}$$

Mais precisamente, dado $p \in M$,

$$P_Y(X)(p) = \exp_p^{-1}(\exp_{\exp_p X_p} Y_{\exp_p X_p}) - X_p \tag{2.5}$$

Em seguida vamos analisar a dependência do campo $P_Y(X)$ em função dos campos X e Y que o definem.

Lema 2.2.1. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, $X, Z \in \mathfrak{X}^0(M)$ com $\|Y\|_1, \|X\|_0, \|Z\|_0 < \delta$ temos que*

$$\|P_Y(X)\|_0 \leq \|Y\|_0 + \varepsilon\|X\|_0, \tag{2.6}$$

e

$$\|P_Y(X) - P_Y(Z)\|_0 \leq \varepsilon\|X - Z\|_0. \tag{2.7}$$

Demonstração: Por construção, $P_Y : U_0 \to \mathfrak{X}^0(M)$, onde U_0 é uma vizinhança do campo $0 \in \mathfrak{X}^0(M)$. Pela regra da cadeia, P_Y é uma aplicação C^1 , pois $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ e as outras aplicações na expressão (2.5) são C^∞. Ademais, $P_Y(X)$ e $DP_Y(X)$ são contínuas em $(Y, X) \in \mathfrak{X}^1(M) \times \mathfrak{X}^0(M)$. Observe que $P_0(X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, assim dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $\|DP_Y(X)\| \leq \varepsilon$, para $\|Y\|_1, \|X\|_0 < \delta$. Assim, dados $X, Z \in \mathfrak{X}^0(M)$, tais que $\|X\|_0, \|Z\|_0 < \delta$, temos que $\sup_{\eta\in[X,Z]}\|DP_Y(\eta)\|_0 \leq \varepsilon$, daí, aplicando o teorema do valor médio, temos

$$||P_Y(X) - P_Y(Z)||_0 \leq \varepsilon||X - Z||_0$$

Como $C_Y(0) = Y$, segue que

$$\begin{aligned} ||P_Y(X)||_0 &\leq ||P_Y(0)||_0 + ||P_Y(X) - P_Y(0)||_0 \\ &\leq \|Y\|_0 + \varepsilon\|X\|_0. \end{aligned}$$

□

Na demostração do próximo lema, utilizaremos a aplicação avaliação

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathfrak{X}^1(M) \times M &\to TM \\ (Y, x) &\mapsto Y_x. \end{aligned}$$

Tal ferramenta é muito utilizada no estudo de espaços de funções. Aqui o que nos interessa é o fato de que a aplicação $\mathcal{A}$ admite a regularidade do espaço de funções considerado, que neste caso é C^1. Um boa exposição sobre a aplicação avaliação em contextos mais gerais pode ser encontrada em [1, §10].

As estimativas do Lema 2.2.1 implicam na regularidade do campo induzido através de cartas. Mais precisamente:

Lema 2.2.2. *Seja (φ, U) uma carta. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ com $\|Y\|_1, \|X\|_0 < \delta$ temos que*

$$|P_Y(X)_\varphi(x) - P_Y(X)_\varphi(y)|_0 \leq \varepsilon \left[d(x, y) + |X_\varphi(x) - X_\varphi(y)|\right], \tag{2.8}$$

para $x, y \in U$.

Demonstração: Considere (φ, U) uma carta de M, assim

$$P_Y(X)_{\varphi}(x) \quad = \quad d\varphi_x C_Y(X)_x - d\varphi_x X_x.$$

Escrevendo $P_Y(X)_{\varphi}(x) = p(Y, \varphi(x), X_{\varphi}(x))$ onde $p : \mathfrak{X}^1(M) \times \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$p(Y, x', v) = d\varphi_{\varphi^{-1}(x')} C_Y(d\varphi_{x'}^{-1} v)_{\varphi^{-1}(x')} - v.$$

Note que $p(Y, x', v)$ depende da ação do campo Y no ponto $x = \varphi^{-1}(x')$, portando a função p depende de $\mathcal{A}(Y, x) = Y_x$ onde $\mathcal{A}$ é a aplicação avaliação. Agora como a aplicação avaliação admite a regularidade de Y segue, pela regra da cadeia, que a derivada de p com relação ao campo Y é contínua. Sendo assim, p é uma função C^1 . Como $P_0(X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, segue que $p(0, x', v) = 0$, para todo $x' \in \varphi(U)$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Portando para $\varepsilon > 0$, por continuidade, existe $\delta > 0$ tal que $|D_{(x',v)} p(Y, x', v)| \le \varepsilon$, para $\|Y\|_1, |v| < \delta$ e $x' \in \varphi(U)$. Então pelo desigualdade do valor médio, temos que

$$|p(Y, x', v) - p(Y, y', w)| \le \varepsilon \Big[|x' - y'| + |v - w| \Big],$$

para $x', y' \in \varphi(U)$, $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, $v, w \in \mathbb{R}^n$, tais que $||Y||_1, |v|, |w|$ suficientemente pequenos. Agora, considerando $x' = \varphi(x),\ y' = \varphi(y),\ v = X_{\varphi}(x), w = X_{\varphi}(y)$ e usando (1.2), temos o resultado. $\square$

Seja U_0 vizinhança do campo nulo em $\mathfrak{X}^0(M)$ de modo que a função $F : U_0 \to \mathfrak{X}^0(M)$ dada por $\exp(F(X)) = f^{-1} \circ \exp(X) \circ f$ está bem definida. Daí substituindo em (2.4),

$$\exp(X + P_Y(X)) = \exp(F(X)). \tag{2.9}$$

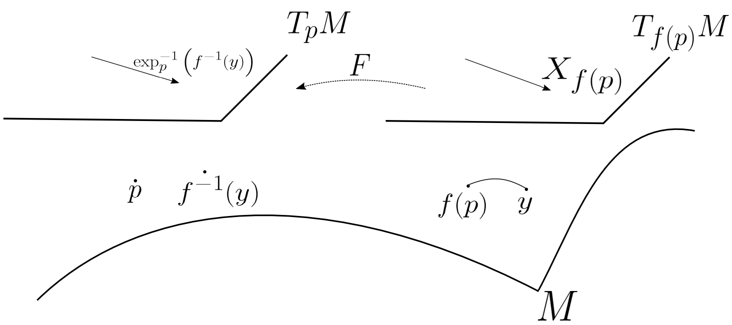

Figura 2.2.1 – Aplicação F, onde $y = \exp x_{f(p)}$

Portando, pela aplicação exponencial ser um difeomorfismo local, temos que

$$X + P_Y(X) = F(X) \tag{2.10}$$

Considere

$$Q(X) = F(X) - f^{\#} X. \tag{2.11}$$

Aqui estudaremos a C^1- estabilidade estrutural de difeomorfismos de classe C^2. O próximo resultado usa explicitamente essa regularidade extra do difeomorfismo.

Lema 2.2.3. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $X, Y \in \mathfrak{X}^0(M)$ com $\|X\|_0, \|Y\|_0 < \delta$ temos*

$$\|Q(X)\|_0 \leq \varepsilon\|X\|_0 \tag{2.12}$$

$$\|Q(X) - Q(Y)\|_0 \leq \varepsilon\|X - Y\|_0. \tag{2.13}$$

Demonstração: Como f é de classe C^2, a expressão que define F garante que é uma aplicação C^2 de uma vizinhança do $0 \in \mathfrak{X}^0(M)$ em $\mathfrak{X}^0(M)$. Ademais,

$$\exp(F(0)) = f^{-1} \circ \exp(0) \circ f = f^{-1} \circ Id \circ f = Id.$$

Pelo fato da aplicação exponencial ser um difeomorfismo local, segue que $F(0) = 0$. Por um lado, dado $x \in M$ e $Z \in \mathfrak{X}^0(M)$

$$D\exp(F(X)_x Z = D\exp(F(X))_{F(X)(x)} \cdot DF(X)_x Z,$$

por outro,

$$D\Big(f^{-1}\exp_{f(x)} X\Big)Z = Df^{-1}_{\exp_{f(x)}(X)} \cdot D\exp_{f(x)} Z.$$

Portando, fazendo $X = 0$, temos que $DF(0)_x Z = Df^{-1}_{f(x)} Z$, ou seja, $DF(0) = f^{\#}$.

Daí, $Q(0) = 0$ e $DQ(0) = 0$. Então, pela continuidade, segue que $\|DQ(X)\| \leq \varepsilon$ para $\|X\|_0 \leq \delta$. Considere$X, Y \in \mathfrak{X}^0(M)$, tais que $\|X\|_0 \leq \delta$ e $\|Y\|_0 \leq \delta$. Para $0 \leq t \leq 1$,

$$\|(1-t)X + tY\|_0 \leq \delta.$$

Então, pelo teorema do valor médio, temos que

$$\begin{aligned} \|Q(X) - Q(Y)\|_0 &\leq \sup\|DQ(Z)\|_0\|X - Y\|_0 \\ &\leq \varepsilon\|X - Y\|_0, \end{aligned}$$

onde o sup é tomado sobre o segmento $(1-t)X + tY$. Com isso, temos (2.13). Para provar (2.12), basta considerar $Y = 0$ em (2.13). □

Observação 2.2.1. *Segue das definições e da prova do lema anterior que $Q(\cdot)$ corresponde ao erro de uma aproximação linear, uma vez que $DF(0) = f^{\#}$.*

Mas uma vez se faz necessário deduzir das estimativas anteriores para campos na variedade, resultados para campos em $\mathbb{R}^n$ induzidos pelas cartas.

Lema 2.2.4. *Sejam (φ, U) e (β, V) cartas. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ com $\|X\|_0 < \delta$ temos*

$$|Q(X)_\varphi(x) - Q(X)_\varphi(y)|_0 \leq \varepsilon\left[d(x,y) + |X_\beta(f(x)) - X_\beta(f(y))|\right], \tag{2.14}$$

para $x, y \in U \cap f^{-1}(V)$.

Demonstração: Para simplificar a notação, assumimos que $f(U) \subseteq V$, ou seja, podemos considerar $U \cap f^{-1}(V) \subseteq U$. Por (2.11), temos que

$$\begin{aligned} Q(X)_\varphi(x) &= F(X)_\varphi(x) - f^\#_\varphi(x) \\ &= d\varphi_x\Big(\exp_x^{-1} \circ f^{-1} \circ \exp_{f(x)} \cdot d\beta^{-1}_{\beta(f(x))} - df^{-1}_{f(x)} \cdot d\beta^{-1}_{\beta(f(x))}\Big) X_\beta(f(x)) \\ &= q(\varphi(x), X_\beta(f(x))), \end{aligned}$$

onde $q : \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Veja que a expressão que define q envolve o diferencial de f^{-1}, logo q é somente de classe C^1. Como $Q(0) = 0$ e $DQ(0) = 0$, então $q(x', 0) = 0$ $(D_1 q(x', 0) = 0)$ e $D_2 q(x', 0) = 0$, para todo $x' \in \varphi(U)$. Portanto $Dq(x', 0) = 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|Dq(x', v)| \leq \varepsilon$ para $|v| < \delta$ e $x' \in \varphi(U)$. Pelo desigualdade do valor médio, temos que

$$\begin{aligned} |q(x', v) - q(y', w)| &\leq \sup |Dq(z, u)| \Big(|\bar{x}' - y'| + |v - w|\Big) \\ &\leq \varepsilon\Big(|x' - y'| + |v - w|\Big) \end{aligned}$$

para $x', y' \in \varphi(U)$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$, onde o sup é considerado sobre o segmento $[(x', v), (y', w)]$. daí considerando $x' = \varphi(x),\ y' = \varphi(y),\ v = X_\beta(f(x))$ e $w = X_\beta(f(x))$ e usando (1.2) temos o resultado. $\square$

Voltando a (2.10) temos que

$$X + P_Y(X) = f^\# X + Q(X). \tag{2.15}$$

Assim, fazendo $R_Y(X) = Q(X) - P_Y(X)$, temos que

$$(Id - f^\#)X = R_Y(X). \tag{2.16}$$

Definição 2.2.2. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$. Dizemos que f satisfaz a condição de Robbin*[1]*, se existe um operador linear contínuo $J : \mathfrak{X}^0(M) \to \mathfrak{X}^0(M)$ tal que J é a inversa à direita do operador $(Id - f^\#)$ e $\mathfrak{X}_f(M)$ é invariante por J.*

Observação 2.2.2. *Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão qualquer. Recordamos que uma transformação linear $A : E \to F$ é dita ter inversa a direita se existe uma transformação linear $B : F \to E$ tal que $AB = Id_F$ onde Id_F é a identidade de F. Uma condição necessária para existência de uma inversa a direita é a sobrejetividade de A.*

Observação 2.2.3. *A definição de C^1-estabilidade estrutural pode ser reformulada usando a dedução acima. De fato, seja $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$.Dizemos que f é C^1-estruturalmente estável se para todo $\rho > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ como $\|Y\|_1 < \delta$ existe $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ tal que $\|X\|_0 < \rho$, (2.16) é satisfeita e $\exp(X) : M \to M$ é um homeomorfismo.*

[1] Originalmente este conceito foi designado como infinitesimalmente estável(Veja [18]).

Teorema 2.2.1. *Se $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ satisfaz a condição de Robbin, então f é estruturalmente estável.*

Demonstração. Seja $J : \mathfrak{X}^0(M) \to \mathfrak{X}^0(M)$ a inversa a direita de $(Id - f^{\#})$. Denotamos por $\|J\|_0$ a norma de J como operador linear em $\mathfrak{X}^0(M)$ e $\|J\|_f$ a norma de J restrito a $\mathfrak{X}_f(M)$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, pelos Lemas 2.2.1 e 2.2.3 existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|R_Y(X)\|_0 &= \|Q(X) - P_Y(X)\|_0 \\ &\leq \varepsilon\|X\|_0 + |Y\|_0 + \varepsilon\|X\|_0 \\ &= \|Y\|_0 + 2\varepsilon\|X\|_0, \end{aligned}$$

para $Y \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, tais que $\|Y\|_1, \|X\|_0 \leq \delta_0$ (tome o menor $\delta > 0$ apresentado nos Lemas 2.2.1 e 2.2.3). Agora dados $x, y \in M$, e considerando $X \in \mathfrak{X}_f(M)$, pelos Lemas 2.2.4 e 2.2.2 existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |R_Y(X)_\psi(x) &- R_Y(X)_\psi(y)| = |Q(X)_\psi(x) - P_Y(X)_\psi(x) - (Q(X)_\psi(y) - P_Y(X)_\psi(y))| \\ &\leq |Q(X)_\psi(x) - Q(X)_\psi(y)| + |P_Y(X)_\psi(x) - P_Y(X)_\psi(y)| \\ &\leq \varepsilon\left[d(x,y) + |X_\psi(f(x)) - X_\psi(f(y))|\right] + \varepsilon\left[d(x,y) + |X_\psi(x) - X_\psi(y)|\right] \\ &= 2\varepsilon d(x,y) + \varepsilon\left(|X_\psi(f(x)) - X_\psi(f(y))| + |X_\psi(x) - X_\psi(y)|\right) \\ &= 2\varepsilon d(x,y) + \varepsilon K(d_f(f(x), f(y)) + d_f(x,y)) \\ &\leq (2\varepsilon + 2\varepsilon K) d_f(x,y), \end{aligned}$$

para $\|X\|_0, \|Y\|_1 \leq \delta_1$ (Como anteriormente, considere δ_1 o menor $\delta > 0$ dado nos Lemas 2.2.4 e 2.2.2). Logo, a constante de d_f-Lipschitz de $R_Y(X)$ pode ser estimada em função da constante de d_f-Lipschitz de X por

$$\Lambda(R_Y(X)) \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon\Lambda(X).$$

Assim

$$\begin{aligned} \|R_Y(X)\|_f &= \|R_Y(X)\|_0 + \Lambda(R_Y(X)) \\ &\leq \|Y\|_0 + 2\varepsilon + 2\varepsilon(\|X\|_0 + \Lambda(X)) \\ &= \|Y\|_0 + 2\varepsilon + 2\varepsilon\|X\|_f, \end{aligned}$$

que implica

$$\|J \circ R_Y(X)\|_f \leq \|J\|_f \Big[\|Y\|_0 + 2\varepsilon + 2\varepsilon\|X\|_f\Big]. \tag{2.17}$$

A estimativa acima vai nos permitir obter a conjugação desejada através de um processo de ponto fixo para o operador $J \circ R_Y$.

Defina $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{X}_f(M)$ por $X_0 = 0$ e

$$X_{n+1} = J \circ R_Y(X_n).$$

Afirmação 2.2.1. *Para cada $\rho > 0$, existem $\delta_0, \delta_1 > 0$ tais que, se $\|X_n\|_f \leq \rho, \|X_n\|_0 \leq \delta_0$ e $\|Y\|_1 < \delta_1$ então $\|X_{n+1}\|_f \leq \rho$.*

Demonstração. Considere $\varepsilon = \min\left\{\frac{\rho}{12\|J\|_f}, \frac{1}{4\|J\|_f}\right\}$. Sejam $\delta_0, \delta_1 > 0$ tais que (2.17) seja satisfeita. Reduza δ_1 de maneira que $\delta_1 < \frac{\rho}{3\|J\|_f}$. Então

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1}\|_f &\leq \|J\|_f\Big[\|Y\|_0 + 2\varepsilon + 2\varepsilon\|X_n\|_f\Big] \\
&\leq \|J\|_f\Big[\frac{\rho}{3\|J\|_f} + \frac{2\rho}{12\|J\|_f} + \frac{2\rho}{4\|J\|_f}\Big] \\
&= \rho.
\end{aligned}$$

□

Provaremos agora que a sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acima é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{X}^0(M)$, sendo que as cotas anteriores vão garantir que o campo limite ainda é d_f-lipschitz com constante d_f-lipschitz limitada por ρ. De fato, comecemos por observar que

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1}\|_0 &= \|J \circ R_Y(X_n)\|_0 \\
&\leq \|J\|_0\|R_Y(X_n)\|_0 \\
&\leq \|J\|_0\Big(\|Y\|_0 + 2\varepsilon\|X_n\|_0\Big) \\
&\leq \|J\|_0\|Y\|_0 + 2^{-1}\|X_n\|_0 \\
&\leq \|J\|_0\|Y\|_0 + 2^{-1}\Big(\|J\|_0\|Y\|_0 + 2^{-1}\|X_{n-1}\|_0\Big) \\
&= \Big(\|J\|_0\|Y\|_0\Big)(1 + 2^{-1}) + 2^{-2}\|X_{n-1}\|_0 \\
&\vdots \\
&\leq \Big(\|J\|_0\|Y\|_0\Big)(1 + 2^{-1} + \cdots + 2^{-n}) + 2^{-n}\|X_0\|_0 \\
&\leq 2\|J\|_0\|Y\|_0,
\end{aligned}$$

para todo ε suficientemente pequeno (basta $\varepsilon < \frac{1}{4\|J\|_0}$.) Mais ainda, reduzindo δ_1 se necessário obtemos que $2\|J\|_0\|Y\|_0 < \delta_0$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\|X_n\|_0 \leq \delta_0.$$

Usando os Lemas 2.2.3 e 2.2.1 temos que

$$\begin{aligned}
\|X_{n+1} - X_n\|_0 &= \|J \circ R_Y(X_n) - J \circ R_Y(X_{n-1})\|_0 \\
&\leq 2\varepsilon\|J\|_0\|X_n - X_{n-1}\|_0 \\
&\leq 2^{-1}\|X_n - X_{n-1}\|_0. \\
&\vdots \\
&\leq 2^{-n}\|X_1\|_0.
\end{aligned}$$

Portanto $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathfrak{X}^0(M)$, logo converge uniformemente. Seja $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ tal limite. Temos que $\|X_n\|_f \leq \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue que $\|X_n\|_0 \leq \rho$

e $\Lambda(X_n) \leq \rho$ assim $\|X\|_0 \leq \rho$ e $\Lambda(X) \leq \rho$, isto é, $X \in \mathfrak{X}_f(M)$. Pela construção da nossa sequência e continuidade do operador, segue que

$$X = J \circ R_Y(X). \tag{2.18}$$

Agora aplicando $Id - f^{\#}$ em ambos os lados, temos que X satisfaz a equação (2.16), i.e.,

$$(Id - f^{\#})X = R_Y(X). \tag{2.19}$$

Sejam $h \in C^0(M, M)$ e $g \in C^1(M, M)$, tais que $h = \exp(X)$ e $g = f \circ \exp(Y)$.

Resta mostrar que h é um homeomorfismo.

Afirmação 2.2.2. *h é sobrejetora.*

Note que aplicação $\exp(tX) : [0, 1] \to C^0(M, M)$ garante que h é homotópica à identidade e pela Proposição 1.2.1 preserva grau, assim $gr(h) = 1$, ou seja, h é sobrejetora.

Afirmação 2.2.3. *Se γ denota o número de Lebesgue da cobertura associada as cartas de M e $\rho \leq \frac{\gamma}{2}$, então h é injetora.*

De fato, sejam $x, y \in M$ tais que $h(x) = h(y)$. Como $h \circ f = g \circ h$, temos que

$$h(f^n(x)) = g^n(h(x)) = g^n(h(y)) = h(f^n(y)), \tag{2.20}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Note que $0 < d_f(x, y) < \infty$, pois $x \neq y$ e M tem diâmetro finito. Dado $0 < \alpha < \frac{d_f(x,y)}{2}$, por definição de supremo, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d_f(x, y) \leq d(f^n(x), f^n(y)) + \alpha \leq d(f^n(x), f^n(y)) + \frac{d_f(x, y)}{2},$$

sendo assim

$$d_f(x, y) \leq 2d(f^n(x), f^n(y)). \tag{2.21}$$

Supomos ρ é suficientemente pequeno, de maneira que $d(z, h(z)) \leq \frac{1}{2}\gamma$, para todo $z \in M$ (i.e, podemos considerar h próxima da identidade na topologia C^1 o quanto queremos) onde γ é tal que, se $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \gamma$, então existe uma carta (φ, U) da cobertura com $f^n(x), f^n(y) \in U$. O Lema 1.1.1 garante que

$$\begin{aligned} ad(f^n(x), f^n(y)) &\leq d(h(f^n(x)), h(f^n(y))) + |X_\varphi(f^n(x)) - X_\varphi(f^n(y))|. \\ &\leq d(h(f^n(x)), h(f^n(y))) + \Lambda(X)d_f(x, y) \end{aligned}$$

Reduza ρ se necessário de maneira que $\rho < \frac{a}{2}$. Agora como $\Lambda(X) \leq \rho$, pela equação (2.21), vale

$$(a - 2\rho)d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(h(f^n(x)), h(f^n(y))).$$

Por (2.20), $d(h(f^n(x)), h(f^n(y))) = 0$. Como $a - 2\rho \neq 0$ e f é um difeomorfismo, temos que $x = y$, o que prova a afirmação.

Assim, segue que h é um homeomorfismo, o que conclui a prova do teorema. □

Quando $f : M \to M$ é difeomorfismo Anosov, temos que fibrado tangente TM se decompõe em soma direta (ou soma de Whitney) de dois subfibrados contínuos;

$$TM = E^u \oplus E^s.$$

Cada subfibrado é invariante por df, e df contrai vetores de E^s e expande vetores de E^u. Ademais dado $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, para cada $x \in M$, $X_x = X_x^u + X_x^s$, onde $X_x^u \in E_x^u$ e $X_x^s \in E_x^s$. Sendo assim $\mathfrak{X}^0(M)$ se decompões em soma direta, das seções de E^s e E^u, isto é

$$\mathfrak{X}^0(M) = \mathfrak{X}(E^u) \oplus \mathfrak{X}(E^s),$$

onde cada subespaço é invariante por $f^\#$. Definamos agora $J : \mathfrak{X}^0 M \to \mathfrak{X}^0(M)$ por,

$$J(X) = \sum_{n=1}^{\infty} df^{-n} \circ X \circ f^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f^{\# n} X \right)(p),$$

para $X \in \mathfrak{X}(E^u)$, e

$$J(X) = \sum_{n=1}^{\infty} df^{n} \circ X \circ f^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{\#}^{n} X \right)(p),$$

para $X \in \mathfrak{X}(E^u)$,

No caso de f ser um difeomorfismo de Anosov temos que $Id - f^\#$ é invertível e $(Id - f^\#)^{-1} = J$ (veja [15]). Portanto, pelo Teorema 2.2.1, Se f é um difeomorfismo de Anosov, então f é estruturalmente estável.

Esse resultado foi provado por Moser e motivou o trabalho de Robbin em [18].

3 Difeomorfismos Localmente Hiperbólicos

Ao longo desse capítulo $f : M \to M$ será um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$.

Definição 3.0.1. *Seja $U \subseteq M$, definimos $U^{f+} = \bigcup_{n\geq 0} f^n(U)$ e $U^{f-} = \bigcup_{n\leq 0} f^n(U)$ como os conjuntos saturado de U por iterados positivos e negativos, respectivamente. Dizemos que $U^f = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(U)$ é o conjunto saturado de U.*

Observe que U^f é o menor conjunto f- invariante que contém U.

Definição 3.0.2. *Seja $N \subseteq M$ aberto e $E \subseteq TN$ um subfibrado contínuo. Dizemos que E é d_f-Lipschitz se dados $x \in N$ e uma vizinhança U de x, existem campos de vetores $X_1, ..., X_k \in \mathfrak{X}_f(M)$, tais que $X_1(y), ..., X_k(y)$ é base para E_y, para todo $y \in U$.*

Lema 3.0.1. *Seja $N \subseteq M$ aberto e $E \subseteq TN$ um subfibrado contínuo. Então E é d_f-lipschitz se, e somente se para todo $x_0 \in N$ existem uma carta (φ, U) onde $x_0 \in U$, uma aplicação contínua $g : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{m-k})$ e $K > 0$ tal que*

$$d\varphi E_x = \varphi(x) \times \mathit{graf}(g(x)) \text{ e } |g(x) - g(y)| \leq K d_f(x, y),$$

para todo $x, y \in U$.

Demonstração. Seja (φ, U) uma carta da cobertura de M e $x_0 \in U$. Como $T_{x_0}M$ e $\mathbb{R}^n$ são espaços com produto interno e mesma dimensão, podemos considerar $S : T_{x_0}M \to \mathbb{R}^n$ uma isometria linear. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $T = S \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(x_0)}$e considere $\tilde{\varphi} = T \circ \varphi$. Temos que $(\tilde{\varphi}, U)$ é uma carta de M e satisfaz $d_{x_0}\tilde{\varphi} = S$. Portando temos uma carta que a derivada é uma isometria. Ademais

$$d\tilde{\varphi}_{x_0} E_{x_0} = \tilde{\varphi}(x_0) \times \mathbb{R}^k \times 0_{\mathbb{R}^{n-k}}.$$

Pela continuidade do fibrado e do diferencial da carta, podemos considerar $d\tilde{\varphi}_x E_x \cap \mathbb{R}^{n-k} = \{0\}$, para $x \in U$, onde U é vizinhança de x_0. Assim, como $\dim d\tilde{\varphi}_x E_x = k$, temos que a projeção sobre $\mathbb{R}^k$ restrita a $d\tilde{\varphi}_x E_x$ é um isomorfismo. Definindo $g(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, por $g(x) := (\pi|_{d\tilde{\varphi}_x E_x})^{-1} - Id$. Agora veja que, dado $w \in d\tilde{\varphi}_x E_x$, $\pi(w) = v$ para algum $v \in \mathbb{R}^k$. Daí,

$$w = \pi(w) + w - \pi(w) = v + ((\pi|_{d\tilde{\varphi}_x E_x})^{-1}(v) - v) = v + g(x)v,$$

portando $d\tilde{\varphi} E_x = \tilde{\varphi}(x) \times \text{graf}(g(x))$.

Resta garantir que $g : U \to L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{n-k})$ é d_f-lipschitz. Mas perceba que $g(x) - g(y) = (\pi|_{d\tilde{\varphi}_x E_x})^{-1} - (\pi|_{d\tilde{\varphi}_y E_y})^{-1}$. E a inversa da projeção sobre $\mathbb{R}^k$, restrita a imagem do subfibrado E pelo diferencial da carta é d_f- Lipschitz, pois E é gerado por campos d_f-Lipschitz.

Reciprocamente, dado $x_0 \in N$, considere a carta (φ, U) tal que $x_0 \in U$ e a aplicação contínua $g : U \to \mathcal{L}((\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{m-r}))$ tal que

$$d\varphi E_x = \varphi(x) \times \text{graf}(g(x)) \text{ e } |g(x) - g(y)|_{op} \leq K d_f(x, y),$$

para $x, y \in U$ e $K > 0$. Considere $\{v_x^1, \cdots, v_x^k\}$ uma base ortonormal de $d\varphi_x E_x$, para $x \in U$. Observe que $\{d\varphi^{-1}_{\varphi(x)} \cdot v_x^1, \cdots, d\varphi^{-1}_{\varphi(x)} \cdot v_x^k\}$ é base de E_x. Como φ é C^∞ e g é C^0, segue que $d\varphi^{-1}_{\varphi(x)} \cdot v_x^i = X_i \in \mathfrak{X}^0(M)$, para todo $i = 1, \cdots, k$. E como $v_x^i = w^i + g(x)(w^i)$, para algum $w^i \in \mathbb{R}^k$, com $|w^i| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
|X_{i\varphi}(x) - X_{i\varphi(y)}| &= |v_x^i - v_y^i| \\
&= |g(x)(w^i) - g(y)(w^i)| \\
&\leq |g(x) - g(y)|_{op} \\
&\leq K d_f(x, y).
\end{aligned}$$

Com isso, cada X_i é d_f-Lipschitz, para cada $i = 1, \cdots, k$.

□

Definição 3.0.3. *Dizemos que um conjunto $W \subseteq M$ é não revisitado se as condições $x \in W$ e $f^n(x) \in W$ implica que $f^q(x) \in W$, para $0 \leq q \leq n$.*

Observe que $W \subseteq M$ é não revisitado se dado um ponto de W e algum iterado desse ponto por f em W significa que este mesmo ponto nunca saiu de W por iterados anteriores. Veja também que podemos pensar a condição de não revisitado, como uma invariância do conjunto até um certo iterado. Este conceito aparecerá naturalmente para difeomorfismos que admitem filtração.

Definição 3.0.4. *Dizemos que f é localmente hiperbólico se existem subconjuntos abertos $Z_1, ..., Z_l, W_1, ..., W_l$ de M, subfibrados E_i^u e E_i^s de TZ_i^f onde $i = 1, ..., l$, uma norma induzida por métrica riemanniana $\|\cdot\|$ e $0 < \lambda < 1$ tal que para $i, j = 1, ..., l$, $\sigma = s, u$*

1. $\overline{W}_i \subseteq Z_i$;
2. $M = \bigcup_i^l W_i^f$;
3. W_i *é não revisitado por* f;
4. $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$;
5. E_i^σ *é* d_f*- lipschitz;*
6. E_i^σ *é df invariante;*
7. $TZ_i^f = E_i^s \oplus E_i^u$;

8. $\|df_x \cdot v\| \leq \lambda\|v\|$, *para* $v \in E^s_{i_x}$, *e* $x \in Z_i$,
$\|df_x^{-1} \cdot v\| \leq \lambda\|v\|$, *para* $v \in E^u_{i_x}$, *e* $x \in Z_i$;

9. $E^s_{i_x} \subseteq E^s_{j_x}$ *e* $E^u_{j_x} \subseteq E^u_{i_x}$ *para* $x \in Z_i^{f+} \cap Z_j^{f-}$.

Um difeomorfismo localmente hiperbólico induz uma cobertura sobre M, por saturados de conjuntos disjuntos W_i, sobre os quais existem decomposições em subfibrados invariantes e d_f-lipschitz ao longo dos quais o comportamento é hiperbólico.

Exemplo 3.0.1. *Todo difeomorfismo Anosov é localmente hiperbólico. Considere* $l = 1$, $W_1 = Z_1 = M$. *As condições* $(6), (7)$ *e* (8) *seguem do fato de* f *ser Anosov. A condição* (5) *é satisfeita quando* f *é expansiva, pois* $\mathfrak{X}_f(M) = \mathfrak{X}^0(M)$ *e difeomorfismos Anosov são expansivos.*

Exemplo 3.0.2. *Seja* $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *uma compactificação do plano complexo. Defina* $f : S^2 \to S^2$ *por* $f(z) = 2x$, $f(\infty) = \infty$. *Note que* 0 *e* ∞ *são os únicos pontos fixos de* f *e* $f^n(z) \to \infty$ *e* $f^{-n}(z) \to 0$. *Denotaremos* f *como dinâmica polo norte polo sul. Temos que* f *é um difeomorfismo localmente hiperbólico. Basta notar que para vizinhanças suficientemente pequenas de* 0 *e* ∞ *as condições acima são satisfeitas.*

O resultado mais importante desta seção (Teorema 3.0.1 abaixo) assegura que a condição de hiperbolicidade local é suficiente para garantir a condição de Robbin e, consequentemente, provar que todo difeomorfismo C^2 que é localmente hiperbólico é C^1 estruturalmente estável. Primeiro necessitamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 3.0.2. *Seja* $T : E \to E$ *um operador linear contínuo, onde* $(E, \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach, tal que* $\|T\|_{op} < 1$ *.Então* $\sum_{n=0}^{+\infty} T^n = (Id - T)^{-1}$.

Demonstração. Como $\|T\|_{op} < 1$ considere $a \in \mathbb{R}$ tal que $1/\|T\|_{op} \geq a > 1$, assim $\{(1/\|T\|_{op})^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ilimitada em $\mathbb{R}$. Portando, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $j \geq j_0$

$$\left(\frac{1}{\|T\|_{op}}\right)^j \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

Assim

$$\|T^j\|_{op} \leq \|T\|_{op}^j \leq \varepsilon.$$

Logo, $T^j \to 0$ na norma do operador. Note que $\sum_{j=1}^{+\infty} \|T\|_{op}^j < \infty$, logo $\sum_{j=1}^{+\infty} \|T^j\|_{op} < \infty$.Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n$, temos

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} T^j - \sum_{j=1}^{n} T^j\right\| = \left\|\sum_{j=n+1}^{m} T^j\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} \left\|T^j\right\| \to 0 \text{ se } m, n \to +\infty.$$

Assim, $\left(\sum_{j=1}^{j} \|T^j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(E, E)$, logo converge.

Agora veja que, dado $x \in E$

$$(Id - T)(Id + T + T^2 + \cdots + T^n)(x) = (Id - T^{n+1})(x).$$

Pelo teorema da pertubação da identidade, temos que $(Id - T)$ é um homeomorfismo. Daí,

$$Id + T + T^2 + \cdots + T^n = (Id - T)^{-1}(Id - T^{n+1}).$$

Fazendo $n \to +\infty$, segue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T^n = (Id - T)^{-1}.$$

□

Teorema 3.0.1. *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$. Se f é localmente hiperbólico, então f satisfaz a condição de Robbin.*

Demonstração. Seja $\theta_1, \cdots, \theta_l$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $W_1^f, \cdots, W_l^f$ de M. Seja $X \in \mathfrak{X}^0(M)$. Para $i = 1, \ldots, l$, escrevemos o campo $\theta_i X$, com suporte em W_i^f em componentes $X_{i,s}$ e $X_{i,u}$ em E_i^s e E_i^u, respectivamente. Mais precisamente, tome

$$\theta_i X = X_{i,s} + X_{i,u},$$

onde $supp(X_{i,\sigma}) \subset supp(\theta_i) \subset W_i^f$ e $X_{i,\sigma}(x) \in E_{i,x}^{\sigma}$, para $x \in Z^f$, $\sigma = s, u$. Definimos o campo

$$J(X) = \sum_{i=1}^{l} \Big(J_{i,u}(X_{i,u}) + J_{i,s}(X_{i,s}) \Big), \tag{3.1}$$

onde

$$J_{i,s}(X) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (f^{\#})^{-n}(X_{i,s}) \tag{3.2}$$

e

$$J_{i,u}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f^{\#})^{n}(X_{i,u}). \tag{3.3}$$

Devemos provar que (3.2) e (3.3) Convergem uniformemente. Supondo que isso aconteça, temos, pelo Lema 3.0.2, que J é inversa a direita de $(id - f^{\#})$, já que $\|f^{\#}_{|Z_i^f}\| < 1$. De fato,

$$(Id - f^{\#})J_{i,\sigma}(X) = X_{i,\sigma},$$

assim,

$$(Id - f^{\#})J(X) = \sum_{i=1}^{l} \Big(X_{i,u} + X_{i,s} \Big) = X.$$

Resta mostrar que (3.2) e (3.3) convergem uniformemente, $J : \mathfrak{X}^0(M) \circlearrowleft$ é contínuo, $\mathfrak{X}_f(M)$ é invariante por J e $J : \mathfrak{X}_f(M) \circlearrowleft$ é contínuo.

Observe que é suficiente provar tais afirmações para $J_{i,u}$, pois para $J_{i,s}$ as demonstrações são análogas utilizando f^{-1} no lugar de f e os resultados se estendem à J via soma.

Para essa prova, iremos definir normas em $\mathfrak{X}^0(M)$ e $\mathfrak{X}_f(M)$ diferentes das que usamos anteriormente.

Dada uma cobertura finita de M por cartas, para cada (φ, U) escolhemos U_0 de maneira que $\overline{U}_0 \subset U$ e $\{U_0\}$ forma uma cobertura de M. Considere $\delta > 0$ tal que para cartas (φ, U) e (ψ, V) temos que, se $x \in U_0 \cap f^{-1}(V_0)$ e $d(x, y) \leq \delta$ então $y \in U \cup f^{-1}(V)$.

Agora, para $X \in \mathfrak{X}^0(M)$ e $x \in M$ definimos

$$\|X, x\| = \max|X_\varphi(x)|, \tag{3.4}$$

onde o máximo é tomado sobre as cartas da cobertura. Definimos a seguinte norma em $\mathfrak{X}^0(M)$ por

$$\|X\|_0 = \sup_{x \in M} \|X, x\|. \tag{3.5}$$

Sejam $X \in \mathfrak{X}_f(M)$, $x \in M$ e (φ, U) uma carta da cobertura de M. Considere

$$\Lambda(X, x, \varphi) = \inf_y \{K \geq 0; |X_\varphi(x) - X_\varphi(y)| \leq K d_f(x, y), x \in U_0 \text{ e } d_f(x, y) \leq \delta\},$$

e

$$\Lambda(X, x) = \inf_\varphi \Lambda(X, x, \varphi)$$

Seja

$$\Lambda(X) = \sup_{x \in M} \Lambda(X, x).$$

Definimos a seguinte norma em $\mathfrak{X}_f(M)$

$$\|X\|_f = \|X\|_0 + \Lambda(X).$$

Para cada $j = 1, \ldots, l$, temos $\mathrm{supp}(\theta_j) \subseteq W_j^f$. Como $\mathrm{supp}(\theta_j)$ é fechado, segue que por compacidade, podemos escolher r_j de maneira que $\mathrm{supp}(\theta_j) \subseteq \bigcup_{-r_j \leq n \leq r_j} f^n(W_j)$.

Seja $r = \max r_j$. Assim

$$\mathrm{supp}(\theta_j) \subseteq \bigcup_{-r \leq n \leq r} f^n(W_j),$$

para todo $j = 1, \ldots, l$.

Fixando $i = 1, \cdots, l$. Seja $X \in \mathfrak{X}^0(M)$, definimos

$$\zeta_n = (f^\#)^n(X_{i_u}),$$

para $n \in \mathbb{Z}$. Note que ζ_n denota o termo geral da série (3.3).

Seja $C = \bigcup_{-\infty \leq n \leq r} f^n(W_i)$. Note que $\mathrm{supp}(\zeta_n) \subseteq C$ para $n \geq 0$. Escolha $\rho, b \geq 0$ tais que $\lambda < \rho < 1 < b$.

Para $x \in M$ definimos

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin C; \\ \rho, & \text{se } x \in W_i^{f^-} \cup (W_i \cup \cdots \cup W_l) \\ b, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Mostraremos que ζ_n é limitado pelo termo geral de uma série convergente. Pra isso, precisamos das próximas afirmações que nos permite fazer limitações de acordo com comportamento de f.

Afirmação 3.0.1. *Se a cobertura, δ e b são escolhidos apropriadamente, então*

$$\|\zeta_{n+1}, x\| \leq \gamma(f(x))\|\zeta_n, f(x)\|. \tag{3.7}$$

Demonstração. Considere $\varepsilon > 0$. Dado $z_0 \in \overline{W_j}$, escolha uma carta (ψ, V), tal que $d\psi_{z_0}$ é uma isometria e

$$d\psi_{z_0} E^u_{jz_0} = \psi(z_0) \times \mathbb{R}^u \times 0_{\mathbb{R}^{n-u}},$$

onde u denota a dimensão de $E^u_{jz_0}$. Encolhendo V se necessário, podemos considerar

$$V \subseteq Z_j. \tag{3.8}$$

Pelo fato de $d\psi_{z_0}$ ser uma isometria e pela continuidade de $V \ni z \mapsto d\psi_z$ deduzimos que

$$(1-\varepsilon)|d\psi_z v| \leq \|v\| \leq (1+\varepsilon)|d\psi_z v|, \tag{3.9}$$

para todo $v \in T_z M$ e todo $z \in V$. E ainda,

$$d\psi_{z_0} E^u_{jz_0} = \mathrm{graf}(g_\psi(z)), \tag{3.10}$$

para $z \in V$, onde $g_\psi(z) \in L(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^{n-u})$ e $|g_\psi(z)| \leq \varepsilon$.

Pelo Lema 3.0.1, podemos escolher uma cobertura finita por cartas (ψ, V) satisfazendo (3.9) e satisfazendo (3.8) - (3.10) sempre que $V \cap \overline{W}_j \neq \emptyset$, para algum $j = 1, ..., l$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos a cobertura desejada.

Para (φ, U) e (ψ, V) na cobertura, defina $f^{-1}_{\varphi,\psi} : \psi(f(U) \cap V) \to \varphi(U \cup f^{-1}(V))$, por $f^{-1}_{\varphi,\psi} = \varphi \circ f^{-1} \circ \psi$.

Então para $x \in U \cap f^{-1}(V)$ e $\zeta \in \mathfrak{X}^0(M)$,

$$\begin{aligned} (f^{\#}\zeta)_\varphi(x) &= d\varphi_x \cdot (df^{-1}_{f(x)} \cdot \zeta_{f(x)}) \\ &= d\varphi_x \cdot (df^{-1}_{f(x)} \cdot d\psi^{-1}_{\psi(x)} \cdot d\psi_x \cdot \zeta_{f(x)}) \\ &= Df^{-1}_{\varphi,\psi}(\varphi(f(x)))\zeta_\psi(f(x)). \end{aligned}$$

Considere

$$b \geq \max_{\varphi,\psi} \sup_x |Df^{-1}_{\varphi,\psi}(x')|,$$

e $b > 1$, onde $x' = \psi(x)$. Então

$$|(f^{\#}\zeta)_{\varphi}(x)| \leq b|\zeta_{\psi}(f(x))| \leq \|\zeta, f(x)\|,$$

assim,

$$|f^{\#}\zeta, x\| \leq b\|\zeta, f(x)\|.$$

Portanto temos (3.7), quando $\gamma(f(x)) = b$ e $\zeta = \zeta_n$.

Agora suponhamos que $\gamma(f(x)) = \rho$. Isto é, $f(x) \in W_i^f \cap W_j$, para algum $j = 1, ..., l$. Seja $\zeta = \zeta_n$ onde $f^{\#}\zeta = \zeta_{n+1}$. Como $f(x) \in W_i^f \cap W_j$, temos que $f(x) \in Z_i^{f-} \cap Z_j^{f+}$, logo, pelo item 9 da definição de localmente hiperbólico, $\zeta(f(x)) \in E^u_{j,f(x)}$. Pelo item 8 da definição e (3.9)

$$\begin{aligned} |(f^{\#}\zeta)_{\varphi}(x)| &\leq \|d\varphi_x \cdot (df^{-1}_{f(x)} \cdot d\psi^{-1}_{\psi(x)} \cdot \zeta_{\psi}(f(x)))\| \\ &\leq (1-\varepsilon)^{-1}\|df^{-1}_{f(x)} \cdot d\psi^{-1}_{\psi(x)} \cdot \zeta_{\psi}(f(x))\| \\ &\leq (1-\varepsilon)^{-1}(1+\varepsilon)\lambda\zeta_{\psi}(f(x)). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Como $\lambda < \rho$, e escolhendo $\varepsilon > 0$ de maneira que $(1-\varepsilon)^{-1}(1+\varepsilon) < 1$, temos a desigualdade.

Continuando a prova para a desigualdade (3.7), suponha que $\gamma(f(x)) = 0$. Então $f(x) \notin C$, e como $\text{supp}(\zeta_n) \in C$ segue que $\zeta_n(f(x)) = 0$ e portanto $\zeta_{n+1}(x) = 0$. $\square$

Afirmação 3.0.2. *Além disso, se $X \in \mathfrak{X}_f(M)$ obtemos que*

$$\Lambda(\zeta_{n+1}, x) \leq \gamma(f(x))\Lambda(\zeta_n, f(x)) + b\|\zeta_n, f(x)\|, \tag{3.12}$$

para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Considere $\zeta \in \mathfrak{X}_f(M)$ e $x, y \in U \cap f^{-1}(V)$,

$$\begin{aligned} |(f^{\#}\zeta)_{\varphi}(x) &- (f^{\#}\zeta)_{\varphi}(y)| \\ &= |Df^{-1}_{\varphi,\psi}(x')\zeta_{\psi}(f(x)) - Df^{-1}_{\varphi,\psi}(y')\zeta_{\psi}(f(y))| \\ &\leq |Df^{-1}_{\varphi,\psi}(x')\zeta_{\psi}(f(x)) - Df^{-1}_{\varphi,\psi}(y')\zeta_{\psi}(f(x))| + |Df^{-1}_{\varphi,\psi}(y')\zeta_{\psi}(f(x)) - Df^{-1}_{\varphi,\psi}(y')\zeta_{\psi}(f(y))| \\ &\leq |Df^{-1}_{\varphi,\psi}(x') - Df^{-1}_{\varphi,\psi}(y')||\zeta_{\psi}(f(x))| + |Df^{-1}_{\varphi,\psi}(x')||\zeta_{\psi}(f(x)) - \zeta_{\psi}(f(y)).| \end{aligned}$$

Escolhendo $b \geq \max_{\varphi,\psi} \sup_x |D^2 f^{-1}_{\varphi,\psi}(x')|$, e pelo teorema do valor médio

$$|(f^{\#}\zeta)_{\varphi}(x) - (f^{\#}\zeta)_{\varphi}(y)| \leq b|x' - y'||\zeta_{\psi}(f(x))| + b|\zeta_{\psi}(f(x)) - \zeta_{\psi}(f(y))|.$$

Utilizando desigualdade (1.2) ,

$$\begin{aligned} |(f^{\#}\zeta)_{\varphi}(x) - (f^{\#}\zeta)_{\varphi}(y)| &\leq bd(x,y)|\zeta_{\psi}(f(x))| + b\Lambda(\zeta, f(x))d_f(x,y) \\ &\leq \Big[b\|\zeta, f(x)\| + b\Lambda(\zeta, f(x))\Big]d_f(x,y). \end{aligned}$$

Então

$$\Lambda(\zeta_{n+1}, x) \leq b\|\zeta, f(x)\| + b\Lambda(\zeta, f(x)),$$

Portando temos a desigualdade no caso $\gamma(f(x)) = b$.

Suponhamos $\gamma(f(x)) = \rho$, ou seja, $f(x) \in W_i^f \cap W_j$ para algum $j = 1, \cdots, l$. Sejam (φ, U) e (ψ, V) cartas da cobertura tais que $x \in U_0 \cap f^{-1}(V_0)$. Escolha y de maneira que $d_f(x, y) \leq \delta$, logo $y \in U \cap f^{-1}(V)$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $f(y) \in Z_j^{f-} \cap Z_j$, então pelo item 9 da definição3.0.4, temos que $\zeta(z) \in E_{j,z}^u$, onde $\zeta = \zeta_n$ e $z = f(x), f(y)$.

Seja $\tilde{g}_\varphi(z) = (Id, g_\varphi(z)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^n)$. Observe que a imagem de $\tilde{g}_\varphi(z)$ é igual ao gráfico de $g_\varphi(z)$ e

$$|\tilde{g}_\varphi(z)| \leq 1 + \varepsilon \tag{3.13}$$

Definimos

$$A_{\varphi,\psi}(x) = Df_{\varphi,\psi}^{-1}(x')\tilde{g}_\varphi(f(x)),$$

onde $x' = \psi(f(x))$. Agora, por (3.9), (3.13), (3.8) e o item 8 da definição 3.0.4, temos que

$$|A_{\varphi,\psi}(x)| \leq (1+\varepsilon)^2(1-\varepsilon)^{-1}\lambda < \rho, \tag{3.14}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, lembrando que $\lambda < \rho$.

Como $\zeta(f(x)) \in E_{jz}^u$ temos

$$\zeta_\psi(z) = \tilde{g}_\psi(z)\pi(\zeta_\psi(z)) = (\pi(\zeta_\psi(z)), g_\psi(z)\pi(\zeta_\psi(z)))\,. \tag{3.15}$$

Pela desigualdade triangular, $|\zeta_\psi(z)| \geq |\pi(\zeta_\psi(z))|$. Então

$$(f^\# \zeta)_\varphi(z) = A_{\varphi,\psi}(x)\pi(\zeta_\psi(z)),$$

assim,

$$(f^\#\zeta)_\varphi(x) - (f^\#\zeta)_\varphi(y) = \Big[A_{\varphi,\psi}(x) - A_{\varphi,\psi}(y)\Big]\pi(\zeta_\psi(z)) + A_{\varphi,\psi}(y)\Big((\pi\zeta_\psi(f(x))) - \pi(\zeta_\psi(f(y)))\Big).$$

Como g_ψ é d_f-lipschitz, $A_{\varphi,\psi}$ é d_f-lipschitz, então existe $c > 0$ tal que

$$|A_{\varphi,\psi}(x) - A_{\varphi,\psi}(y)| \leq c d_f(x, y).$$

Daí,

$$\begin{aligned} |(f^\#\zeta)_\varphi(x) - (f^\#\zeta)_\varphi(y)| &\leq c d_f(x,y)|\zeta_\psi(z)| + |A_{\varphi,\psi}(y)||\zeta_\psi(f(x)) - \zeta_\psi(f(y))| \\ &\leq c d_f(x,y)\|\zeta, f(x)\| + |A_{\varphi,\psi}(y)|\Lambda_\psi(\zeta, f(x))d_f(x,y). \end{aligned}$$

Portando, fazendo $b > c$, temos

$$\Lambda(\zeta_{n+1}, x) \leq \rho\Lambda(\zeta, f(x)) + b\|\zeta, f(x)\|$$

Resta provar o caso $\gamma(f(x)) = 0$, isto é, $f(x) \notin C$. Lembrando que

$$\operatorname{supp}(X_{i,u}) \subset \operatorname{supp}(\theta_i) \subset \bigcup_{-r \leq n \leq r} f^n(W_j),$$

escolhemos $\delta > 0$ de maneira que, se $z \notin \bigcup_{-r\leq n\leq r} f^n(W_j)$, e $d(z,z') \leq \delta$ implica $z' \notin \text{supp}(\theta_i)$.

Se $d_f(x,y) \leq \delta$ então $f^n(y) \notin \text{supp}(\theta_i)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Portando $y \notin f^n(\text{supp}(\theta_i))$, logo

$$y \notin \bigcup_{-\infty\leq n\leq r} f^n(\text{supp}(\theta_i)),$$

logo $\zeta_n(y) = f^{\#}X_{i,u}(y) = 0$. Ou seja, $\Lambda(\zeta_{n+1}, x) = 0$. □

Afirmação 3.0.3. *Seja $q = 2lr + r$. Dado $x \in M$, temos que*

$$\#\{n \geq 0; \gamma(f^n(x)) = b\} \leq q.$$

Demonstração. Escolha $x \in M$. Observe que se $\gamma(x) = b$, então $x \notin W_1 \cup \cdots \cup W_l$. Note que os conjuntos $f^n(W_j)$ com $-r \leq n \leq r$ e $j = 1, \cdots, l$ cobrem M. Assim $x \in f^{n_0}(W_{j_0})$ para algum $-r \leq n_0 \leq r$ e $j_0 = 1, \cdots, l$, isto é, para cadaa $t \in \mathbb{Z}$, $\{f^{t-r}(x), \cdots, f^{t+r}(x)\}$ intersecta $W_1 \cup \cdots \cup W_l$. Agora, como cada W_j é não revisitado, segue que a órbita de x entra e sai de cada W_j apenas uma vez. Então

$$f^n(x) \in W_1 \cup \cdots \cup W_l$$

para todo, exceto $2lr$ valores de n. Isso ocorre nos seguintes casos

1. $x \notin C$. Então $\mathcal{O}^+(x) \cap W_i = \emptyset$. Assim, $f^n(x) \notin C$, (isto é, $\gamma(f^n(x) = 0)$) para todo $n \geq 0$.

2. $f^n(x) \in W_i^{f-}$ para todo $n \geq 0$. Então

$$f^n(x) \in W_i^{f-} \cap W_1 \cup \cdots \cup W_l,$$

   (i.e., $\gamma(f^n(x)) = \rho$), para todo, exceto $2lr$ valores de $n \geq 0$.

3. $x \in W_i^{f-}$ mas $f^k(x) \notin W_i^{f-}$, para algum $k > 0$. Escolha o primeiro $k > 0$ tal que isso aconteça. Então $f^n(x) \in W_i^{f-} \cap W_1 \cup \cdots \cup W_l$ (i.e. $\gamma(f^n(x) = \rho)$) para todo, exceto, $2lr$ valores de $n = 0, \cdots, k-1$ e $f^n(x) \notin C$ (i.e. $\gamma(f^n(x) = 0)$) para $n \geq k + r$. Então $\gamma(f^n(x)) = b$ para no máximo $2lr + r = q$ valores de $n \geq 0$.

4. $x \in C$ e $x \notin W_i^{f-}$, então $f^n(x) \notin C$ para $n \geq r$.

□

Pela Afirmação 3.0.1 e um argumento recursivo temos,

$$\begin{aligned}
\|\zeta_n, x\| &\leq \gamma(f(x))\|\zeta_{n-1}, f(x)\| \\
&\leq \gamma(f(x))\gamma(f^2(x))\|\zeta_{n-2}, f^2(x)\| \\
&\vdots \\
&\leq \gamma(f(x))\gamma(f^2(x))\ldots\gamma(f^n(x))\|X_{i_u}, f^n(x)\|
\end{aligned}$$

Observe que $X_{i_u} = \zeta_0$. Agora pela Afirmação 3.0.3

$$\|\zeta_n, x\| \leq b^q \rho^{n-q} \|X_{i_u}, f^n(x)\|.$$

Considerando $c = b^q \rho^{-q}$, segue que

$$\begin{aligned} \|\zeta_n\|_0 &\leq c\rho^n \sup_{x \in M} \|X_{i_u}, f^n(x)\| \\ &\leq c\rho^n \|X_{i_u}\|_0. \end{aligned}$$

Logo (3.3) converge uniformemente, pois seu termo geral é limitado pelo termo geral de uma serie convergente, uma vez que $\rho < 1$. Ademais,

$$\begin{aligned} \|\zeta_1 + \cdots + \zeta_n\|_0 &\leq \|\zeta_1\|_0 + \cdots + \|\zeta_n\|_0 \\ &\leq c\rho\|X_{i_u}\| + \cdots + c\rho^n\|X_{i_u}\| \\ &= (\rho + \cdots + \rho^n)c\|X_{i_u}\|. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to +\infty$, temos que

$$\|J_{i_u}(X)\|_0 \leq (1-\rho)^{-1} c \|X_{i_u}\|_0 \leq (1-\rho)^{-1} c \|X\|_0.$$

Como o operador que $X \mapsto X_{i_u}$ é linear e contínuo, temos que $J_{i_u} : \mathfrak{X}^0(M) \circlearrowleft$ é linear e contínuo.

Mostraremos agora que $\mathfrak{X}_f(M)$ é invariante por J_{i_u}. Com efeito, seja $X \in \mathfrak{X}_f(M)$. Por (3.12) e um argumento recursivo, temos

$$\begin{aligned} \Lambda(\zeta_n, x) &\leq \gamma(f(x))\Lambda(\zeta_{n-1}, f(x)) + b\|\zeta_{n-1}, f(x)\| \\ &\leq \gamma(f(x)) \left[\gamma(f^2(x))\Lambda(\zeta_{n-2}, f^2(x)) + b\|\zeta_{n-2}, f^2(x)\|\right] + b\|\zeta_{n-1}, f(x)\| \\ &= \gamma(f(x))\gamma(f^2(x))\Lambda(\zeta_{n-2}, f^2(x)) + b\gamma(f(x))\|\zeta_{n-2}, f^2(x)\| + b\|\zeta_{n-1}, f(x)\| \\ &\leq \gamma(f(x))\gamma(f^2(x)) \dots \gamma(f^n(x))\lambda(X_{i_u}, f^n(x)) + \\ &+ b\|\zeta_{n-1}, f(x)\| + b\gamma(f(x))\|\zeta_{n-2}, f^2(x)\| + b\gamma(f(x))\gamma(f^2(x))\|\zeta_{n-3}, f^3(x)\| \\ &+ \cdots + b\gamma(f(x)) \dots \gamma(f^n(x))\|X_{i_u}, f^n(x)\| \\ &\leq c\rho^n \Lambda(X_{i_u}) + bc\rho^{(n-1)}\|X_{i_u}\|_0 + \cdots + bc\rho^{(n-1)}\|X_{i_u}\|_0. \end{aligned}$$

Daí,

$$\Lambda(\zeta_n) \leq c\rho^n \Lambda(X_{i_u}) + bcn\rho^{n-1}\|X_{i_u}\|_0.$$

Como $\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^{n-1} = (1-\rho)^{-2}$, segue que

$$\Lambda(J_{i_u}) \leq c(1-\rho)^{-1}\Lambda(X_{i_u}) + bc(1-\rho)^{-2}\|X_{i_u}\|_0,$$

portanto $J_{i_u} \in \mathfrak{X}_f(M)$. Note que, pelo item 5 da definição 3.0.4, se $X \in \mathfrak{X}_f(M)$ então $X_{i_u} \in \mathfrak{X}_f(M)$ assim o operador que $X \mapsto X_{i_u}$ está bem definido em $\mathfrak{X}_f(M)$ e é linear e contínuo. Portanto $J_{i_u} : \mathfrak{X}_f(M) \circlearrowleft$ é linear em contínuo. Com isso provamos o teorema 3.0.1. □

4 Axioma A e transversalidade forte

Neste capítulo apresentaremos a prova de que difeomorfismos de classe C^2 Axioma A satisfazendo a condição forte de transversalidade é localmente hiperbólico. Com isso, finalizaremos a prova da C^1-estabilidade estrutural para os difeomorfismos de classe C^2.

4.1 Vizinhança de conjuntos hiperbólicos

A seguir apresentaremos alguns lemas fundamentais para o atingirmos o objetivo desse capítulo. Para prova dos lemas subsequentes precisamos de um resultado apresentado em [11].

Teorema 4.1.1. *Sejam $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^r, $(r \geq 1)$, e $\Lambda \subseteq M$ um conjunto hiperbólico de f. Dada N uma vizinhança de Λ, para qualquer $\delta > 0$, existe uma família de $s-$ discos mergulhados, $\tilde{W}^s_\delta$ tais que ;*

1. *Para cada $y \in N$, existe um $s-$disco mergulhado $\tilde{W}^s_\delta(y)$ contendo o ponto y;*
2. *Para $y \in \Lambda$, $\tilde{W}^s_\delta(y) = W^s_\delta(y)$;*
3. *$f\left(\tilde{W}^s_\delta(y)\right) \subseteq \tilde{W}^s_\delta(f(y))$, para $y \in N \cap f^{-1}(N)$. Ademais, para $p \in \Lambda$, $\bigcup_{y \in W^u_\delta(p)} \tilde{W}^s_\delta(y)$ é uma vizinhança de p em M.*

O teorema anterior garante que, grosso modo, podemos mergulhar s-discos $\tilde{W}^s_\delta$ em vizinhança de um conjunto hiperbólico, como feito para as variedades estáveis. A prova apresentada em [11] também lida com a transformada de gráfico, como a prova do teorema da variedade estável.

Uma *filtração* para uma aplicação f é uma sequência de subvariedades compactas $M_0, M_1, \cdots, M_l$, tais que

$$\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots, \subseteq M_l = M,$$

e $f(M_i) \subseteq \text{int} M_i$.

A seguir apresentaremos uma construção de uma filtração para f satisfazendo Axioma A e transversalidade forte.

Lema 4.1.1 (Lema de filtração)**.** *Seja $f \in \text{Diff}^r(M)$, $r \leq 0$, Axioma A e satisfazendo condição de transversalidade forte. Suponha que Ω_i são indexados de maneira que $\Omega_i \leq \Omega_j$ implica que $i \leq j$. Então existem conjuntos abertos $M_0, \ldots, M_l$, tais que $M_0 = \emptyset$, $M_l = M$ e para $i = 1, \ldots, l$;*

(a) $M_{i-1} \subseteq M_i$;

(b) $f(M_i) \subseteq M_i$;

(c) $\Omega_i \subseteq M_i \setminus \overline{M}_{i-1}$;

(d) $\Omega_i = [\overline{M}_i \setminus M_{i-1}] \cap \Omega(f)$.

Demonstração. Fixe $i = 1, \cdots, l$. Para cada $\varepsilon_0, \delta > 0$ suficientemente pequenos, considere

$$V(\varepsilon_0, \delta) = \bigcup_{y \in W^u_{\varepsilon_0}(\Omega_i)} \tilde{W}^s_\delta(y)$$

que é uma vizinhança de Ω_i.

Seja $\varepsilon_1 > 0$ de maneira que

$$W^u_{\varepsilon_1}(\Omega_i) \subset f\left(W^u_{\varepsilon_1}(\Omega_i)\right).$$

Escolha $\varepsilon = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$.

Seja

$$C = \overline{f\left(W^u_\varepsilon(\Omega_i)\right) \setminus W^u_\varepsilon(\Omega_i)}.$$

Dado $x \in V(\varepsilon, \delta)$, temos que $x \in \tilde{W}^s_\delta(y)$ para algum $y \in W^u_\varepsilon(\Omega_i) \subseteq f\left(W^u_\varepsilon(\Omega_i)\right)$. Veja que $f(x) \in \tilde{W}^s_\delta(f(y))$. Então

$$f\left(V(\varepsilon, \delta)\right) \subseteq \bigcup_{y \in f(W^u_\varepsilon(\Omega_i))} \tilde{W}^s_\delta(y).$$

Assim

$$\begin{aligned} f\left(V(\varepsilon, \delta)\right) \setminus V(\varepsilon, \delta) &\subseteq \bigcup_{y \in f(W^u_\varepsilon(\Omega_i))} \tilde{W}^s_\delta(y) \setminus \bigcup_{y \in W^u_\varepsilon(\Omega_i)} \tilde{W}^s_\delta(y) \\ &\subseteq \bigcup_{y \in C} \tilde{W}^s_\delta(y). \end{aligned}$$

Concluiremos a prova por indução. Suponha que $M_0, \cdots M_{i-1}$ estão definidos e satisfazem as condições do lema.

Note que $f\left(W^u_\varepsilon(\Omega_i)\right) \subseteq W^u(\Omega_i)$, $\Omega_i \subseteq W^u_\varepsilon(\Omega_i)$ e $W^u_\varepsilon(\Omega_i) \subseteq f\left(W^u_\varepsilon(\Omega_i)\right)$. Assim

$$C \subseteq W^u(\Omega_i) \setminus \Omega_i.$$

Dado $y \in C$, segue que $y \in W^s(\Omega_j)$, para algum $j = 1, \cdots, l$, logo pela ordem de filtração, segue que $\Omega_i < \Omega_j$, isto é, $i < j$, logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(y) \in M_{i-1}$.

Pela compacidade de C podemos uniformizar $n \in \mathbb{N}$, de maneira que $f^n(C) \subseteq M_{i-1}$. Pelo fato de $M_{i-1} \subseteq f^{-n}(M_{i-1})$, temos que $C \subseteq M_{i-1}$.

Agora escolhendo $\delta > 0$ de maneira que $\bigcup_{y \in C} \tilde{W}^s_\delta(y) \subseteq M_{i-1}$, temos que

$$f\left(V(\varepsilon_0, \delta)\right) \setminus V(\varepsilon, \delta) \subset M_{i-1}.$$

Portanto

$$f\left(M_{i-1} \cup V(\varepsilon,\delta)\right) \subset M_{i-1} \cup V(\varepsilon,\delta).$$

Defina $M_i = \text{int}(M_{i-1} \cup V(\varepsilon,\delta))$. Então $f(M_i) \subseteq M_i$, $M_{i-1} \subseteq M_i$ e $\Omega_i \subseteq M_i \setminus \overline{M}_{i-1}$.

Considere $\varepsilon, \delta > 0$ de maneira que $\overline{V(\varepsilon,\delta)} \cap \Omega = \Omega_i$. Logo $\overline{M}_i \setminus M_{i-1} \cap \Omega = \Omega_i$. □

Uma construção de filtração mais usual pode ser encontrada em [22], onde garante que $\Omega_i = \cap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(M_i \setminus M_{i-1})$.

Nós próximos resultados assumiremos que f é Axioma A e satisfaz a condição de transversalidade forte e $i = 1, \cdots l$.

Lema 4.1.2. *Cada Ω_i tem uma vizinhança aberta que é não revisitada.*

Demonstração. Veja que $M_i \setminus M_{i-1} \subseteq V(\varepsilon,\delta) \setminus M_{i-1}$. Veja que os pontos de $V(\varepsilon,\delta) \setminus M_{i-1}$ por iterados futuros de f convergem a Ω_i ou vão para M_{i+1}. E pela ordem de filtração, os pontos que saem de $V(\varepsilon,\delta) \setminus M_{i-1}$ não retornam. Sendo assim $V(\varepsilon,\delta) \setminus M_{i-1}$ é um conjunto não revisitado. Considere $Z_i = \text{int}(V(\varepsilon,\delta) \setminus M_{i-1})$ que é não revisitado por que o interior de um conjunto não revisitado também é não revisitado. □

Lema 4.1.3. *Para $\sigma = u, s$, existe uma vizinhança A de Ω_i tal que $A \subseteq W^\sigma(\Omega_i)$, que admite uma vizinhança aberta não revisitada.*

Demonstração. Assuma $\sigma = u$. Seja $A = W^u_\varepsilon(\Omega_i) \setminus \bar{M}_{i-1}$. Pela demonstração do lema de filtração, temos que

$$f^n\left(V(\varepsilon,\delta)\right) \subseteq V(\varepsilon,\delta) \cup M_{i-1},$$

para todo $n \geq 1$. Assim $V(\varepsilon,\delta)$ é uma vizinhança de A. Portanto o conjunto Z_i é uma vizinhança para A, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. □

Definição 4.1.1. *Seja Λ um conjunto hiperbólico . Um domínio fundamental para $W^s_\varepsilon(\Lambda)$ é um subconjunto compacto $D \subset W^s_\varepsilon(\Lambda)$ tal que*

$$W^s_\varepsilon(\Lambda) \setminus \Lambda \subseteq D^{f+}.$$

Analogamente, um domínio fundamental para $W^u_\varepsilon(\Lambda)$ é um subconjunto compacto $D \subset W^u_\varepsilon(\Lambda)$ tal que

$$W^u_\varepsilon(\Lambda) \setminus \Lambda \subseteq D^{f-}.$$

Se $D \cap \Lambda = \emptyset$ então D é chamado de domínio fundamental próprio.

Uma vizinhança fundamental para $W^s_\varepsilon(\Lambda)$ é uma vizinhança compacta de um domínio fundamental.

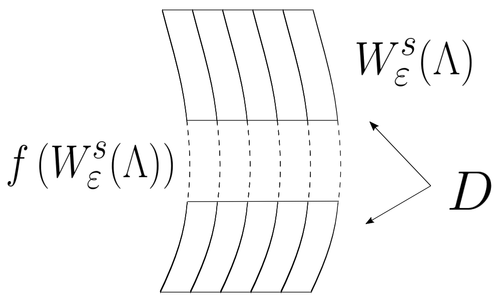

Figura 4.1.1

Exemplo 4.1.1. *Considere* $D = \overline{W^s_\varepsilon(\Lambda) \setminus f\left(W^s_\varepsilon(\Lambda)\right)}$. *Veja que*

$$W^s_\varepsilon(\Lambda) \setminus \Lambda = W^s_\varepsilon(\Lambda) \setminus \bigcap_{n \geq 0} f^n\left(W^s_\varepsilon(\Lambda)\right) \subset D^{f+}.$$

Assim D *é um domínio fundamental para* $W^s_\varepsilon(\Lambda)$.

Lema 4.1.4. *Seja* Ω_i *uma peça básica. Para* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno e* n *qualquer, o domínio fundamental*

$$D = f^n\left(\overline{W^s_\varepsilon(\Omega_i) \setminus f\left(W^s_\varepsilon(\Omega_i)\right)}\right)$$

tem uma vizinhança não revisitada.

Demonstração. Note que existe $k > 0$ suficientemente grande, de maneira que $f^{-k}(D) \cap M_i = \emptyset$. Pela invariância de M_i temos $D \cap M_i = \emptyset$. Como $\Omega_i \subseteq M_i \setminus \overline{M}_{i-1}$, existem $m > 0$ tal que $f^m(D) \subseteq M_i$.

Escolhemos $0 < \mu < 1$(dado pela condição de hiperbolicidade) tal que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$f\left(W^s_\varepsilon(x)\right) \subseteq W^s_{\mu\varepsilon}(f(x)),$$

para $x \in \Omega_i$, e portanto

$$f\left(W^s_\varepsilon(\Omega_i)\right) \subseteq W^s_{\mu\varepsilon}(\Omega_i).$$

Então $D \cap f^k(D) = \emptyset$. Para $k \geq 2$.

Seja Q uma vizinhança de D tal que $Q \cap M_i = \emptyset$, $f^m(Q) \subseteq M_i$ e $Q \cap f^k(Q) = \emptyset$. Para $k \geq 2$.

Temos que Q é uma vizinhança não revisitada. □

Lema 4.1.5. *Sejam* Ω_i, Ω_j *peças básicas e* Z_i, Z_j *vizinhanças quaisquer de* Ω_i *e* Ω_j *respectivamente. Então* $\Omega_i \leq \Omega_j$ *se, e somente se,* $Z_i^{f-} \cap Z_j^{f+} \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponha $\Omega_i \leq \Omega_j$ e sejam Z_i e Z_j vizinhanças de Ω_i e Ω_j. Considere $x \in W^s(\Omega_i)$. Assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in Z_i$, portando $x \in Z_i^{f-}$. Analogamente, se $x \in W^u(\Omega_j)$, $x \in Z_j^{f+}$. Logo $Z_i^{f-} \cap Z_j^{f+} \neq \emptyset$.

Provaremos a volta por contrapositiva. Suponha que $j < i$. Considere vizinhanças Z_i e Z_j de Ω_i e Ω_j respectivamente, tai que $Z_j \subseteq M_j$ e $Z_i \subseteq M \setminus \overline{M_{i-1}}$. Temos que $Z_j^{f+} \subseteq M_j$, pelo item (b) do Lema 4.1.1. Analogamente $Z_i^{f-} \subseteq M \setminus \overline{M}_{i-1}$. Como

$$M_j \cap \left(M \setminus \overline{M}_{i-1}\right) \subseteq M_j \cap (M \setminus M_{i-1}) = \emptyset,$$

segue o resultado. □

Finalizamos essa seção enunciando um resultado apresentado em [11] que também trata de vizinhanças de conjuntos hiperbólicos.

Teorema 4.1.2. *Seja $D = f^n\overline{(W^s_\varepsilon(\Omega_i) \setminus f(W^s_\varepsilon(\Omega_i)))}$, onde $\varepsilon > 0$,$n \in \mathbb{Z}$. Seja Q uma vizinhança de D. Então para $\delta > 0$, $Q^{f+} \cup W^u_\delta(\Omega_i)$ é uma vizinhança de Ω_i. Além disso, $Q^{f+} \cap W^u(\Omega_i)$é uma vizinhança de $W^u(\Omega_i)$.*

Demonstração. Veja [11]. □

Chamaremos o conjunto D de domínio fundamental para $W^s(\Omega_i)$ e Q de vizinhança fundamental.

4.2 Extensão dos Subfibrados

Nesta seção temos como objetivo apresentar resultados que garantam a extensão dos subfibrados E^u e E^s a subfibrados sobre uma vizinhança de uma das peças básicas Ω_i do teorema da decomposição espectral.

Seja $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ satisfazendo Axioma A e transversalidade forte. Seja D um domínio fundamental para $W^s(\Omega_i)$, onde Ω_i é uma peça básica e Q uma vizinhança fundamental não revisitada de D , tal que $Q \cap W^u(\Omega_i) = \emptyset$.

Suponhamos que exista $G \subseteq TM_{|Q}$ um subfibrado contínuo tal que, para $x \in D$,

$$T_xM = E^s_x \oplus G_x, \tag{4.1}$$

e para $x \in Q \cap f^{-1}(Q)$,

$$G_{f(x)} = df_x G_x. \tag{4.2}$$

Podemos estender G à um subfibrado $df-$invariante sobre $Q^{f+} \cup W^u(\Omega_i)$ definindo

$$G_{f^n(x)} = df^n_x G_x, \qquad x \in Q, \tag{4.3}$$

$$G_x = E^u_x, \qquad x \in W^u(\Omega_i), \tag{4.4}$$

Note que essa extensão está bem definida pelo fato de G_x ser invariante por df e Q ter a propriedade de ser não revisitada.

Teorema 4.2.1. *Existe uma vizinhança Z_0 de Ω_i com $Z_0^f \subseteq Q^{f+} \cup W^u(\Omega_i)$, tal que $G_{|Z_0^f}$ é um subfibrado contínuo de $TM_{|Z_0^f}$.*

Demonstração. Escolha $a > 0$ suficientemente pequeno, de maneira que $f\left(W_a^s(\Omega_i)\right) \subseteq W_a^s(\Omega_i)$ e $f^{-1}\left(W_a^u(\Omega_i)\right) \subseteq W_a^u(\Omega_i)$.

Considere uma métrica adaptada, tal que para $0 < \lambda < 1$, temos que, dado $x \in \Omega_i$,

$$\|df_x v\| \leq \lambda \|v\|, \text{ para } v \in E_x^s$$
$$\|df_x^{-1} v\| \leq \lambda \|v\|, \text{ para } v \in E_x^u$$

Ademais, podemos supor que E_x^s e E_x^u são ortogonais, para cada $x \in \Omega_i$. Pelo teorema da variedade estável, temos que $E_x^\sigma = T_x W_a^\sigma(\Omega_i)$, para $\sigma = s, u$. Veja que podemos estender $E^\sigma_{|W_a^\sigma(\Omega_i)}$ à um subifibrado $\tilde{E}^\sigma \subseteq T_{Z^\sigma}M$, onde Z^σ é uma vizinhança aberta de $W_a^\sigma(\Omega_i)$ (veja a Observação 1.3.1).

Seja $Z = Z^s \cap Z^u$. Perceba que Z é uma vizinhança aberta para Ω_i. Denotaremos $\tilde{E}^\sigma_{|Z}$ simplesmente por $\tilde{E}^\sigma$. Como, para $x \in W_a^\sigma(\Omega_i)$,

$$\tilde{E}_x^\sigma = E_x^\sigma \tag{4.5}$$

e

$$T_x M = E_x^u \oplus E_x^s,$$

para $x \in \Omega_i$, podemos diminuir Z de maneira que, para $x \in Z$,

$$T_x M = \tilde{E}_x^u \oplus \tilde{E}_x^s.$$

Como D é um domínio fundamental, podemos substitui-lo por $f^n(D)$ e Q por $f^n(Q)$ e diminuindo Q podemos supor que $D \subset W_a^s(\Omega_i)$ e $D \subseteq Q \subseteq Z$. E diminuindo Q mais uma vez, e por (4.2) e (4.5), podemos assumir que

$$T_x M = \tilde{E}_x^s \oplus G_x, \tag{4.6}$$

para $x \in Q$.

Portanto,

$$G_{|Q} = \text{graf}(g_0),$$

onde $g_0(x) : \tilde{E}_x^u \to \tilde{E}_x^s$, com $x \in Q$.

Para $\sigma, \sigma' = s, u$, definimos

$$F_{\sigma,\sigma'} : \tilde{E}^\sigma_{|Z \cap f^{-1}(Z)} \to \tilde{E}^{\sigma'}_{|f(Z) \cap Z},$$

por

$$df_x v = F_{\sigma,u}(x)v + F_{\sigma,s}(x)v.$$

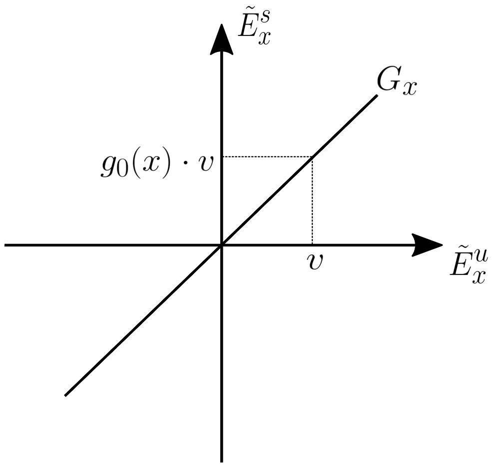

Figura 4.2.1

Observe que as funções $F_{\sigma,u}(x)$ e $F_{\sigma,s}(x)$ são projeções de df_x, uma vez que não temos invariância de $\tilde{E}^\sigma_x$ por df_x quando $x \notin \Omega_i$.

Escolha ρ tal que $0 < \lambda < \rho < 1$.

Note que para $x \in \Omega_i$,

$$F_{\sigma,\sigma|\tilde{E}^\sigma_x} = df_{x|E^\sigma_x},$$

$$F_{u,s|\tilde{E}^u_x} = 0,$$

onde $\sigma, \sigma' = u, s$. Assim podemos diminuir Z de maneira que $F_{u,u}$ seja invertível e

$$\|F_{u,u}^{-1}\| \leq \rho, \tag{4.7}$$

$$\|F_{u,s}\| + \|F_{s,s}\| < \rho. \tag{4.8}$$

Seja A_s uma vizinhança de Ω_i em $W^s(\Omega_i) \cap Z$ com uma vizinhança não revisitada (veja 4.1.3). Suponha a suficientemente pequeno de maneira que $W^s_a(\Omega_i) \subseteq A_s$.

Seja

$$K = \max(\|g_0\|, 1).$$

Como $F_{s,s} = df_{x|\tilde{E}^s_x}$, para $x \in W^s_a(\Omega_i)$, segue que $F_{s,u|\tilde{E}^s_x} = 0$, para $x \in W^s_a(\Omega_i)$. Podemos diminuir Z a uma vizinhança não revisitada de $W^s_a(\Omega_i)$ (substituindo pela vizinhança de A_s) tal que

$$\rho\|F_{s,u|\tilde{E}^s_x}\|K < 1, \tag{4.9}$$

e

$$\Big(Id - \rho\|F_{s,u|\tilde{E^s}_x}\|K\Big)^{-1} < 1, \tag{4.10}$$

para $x \in Z$.

Para $n \geq 0$, considere a sequência de morfismo de fibrados sobre a identidade

$$g_n : \tilde{E}^\sigma_{|f^n \cap Z} \to \tilde{E}^{\sigma'}_{|f^n \cap Z},$$

definida indutivamente por

$$g_{n+1} = \left(F_{u,s} + F_{s,s}g_n\right)\left(F_{u,u} + F_{s,u}g_n\right)^{-1}. \tag{4.11}$$

Observe que está definição faz sentido pelo fato de $f^n(Q) \cap Z$ ser não revisitada. Porém para está bem definida precisamos garantir que $F_{u,u} + F_{s,u}g_n$ possui inversa. Iremos mostrar isso. Assuma como hipótese de indução que $\|g_n\| \leq K$. De fato, por (4.9)

$$\|F_{u,u}^{-1}F_{s,u}g_n\| \leq \rho \|F_{s,u|\tilde{E}^s{}_x}\|K < 1. \tag{4.12}$$

Veja que ,

$$F_{u,u} + F_{s,u}g_n = F_{u,u}\left(Id + F_{uu}^{-1}F_{s,u}g_n\right),$$

e como, por (4.12) $F_{u,u}^{-1}F_{s,u}g_n$ é uma contração, utilizando o teorema da pertubação do identidade, temos que a inversa existe. Ademais

$$\begin{aligned} \|(F_{u,u} + F_{s,u}g_n)^{-1}\| &\leq \|\left(Id + F_{uu}^{-1}F_{s,u}g_n\right)^{-1}\|\|F_{u,u}\| \\ &\leq \left(1 - \rho\|F_{s,u}\|K\right)^{-1}\rho < 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Consequentemente, por (4.8)

$$\|g_{n+1}\| < \left(\|F_{u,s}\| + \|F_{s,s}\|\right)K < \rho K,$$

lembrando que $\rho < 1$, temos que $\|g_{n+1}\| < K$.

Afirmamos que $df_x(\text{graf}(g_n(x))) = \text{graf}(g_{n+1}(f(x)))$, com $x \in f^n(Q) \cap Z$.

De fato, sejam $x \in f^n(Q) \cap Z$, $v \in \tilde{E}^u_x$ e $y^u = \left(F_{u,u} + F_{s,u}g_n\right)^{-1}v$. Note que

$$\begin{aligned} df_x(v + g_n(x)v) &= df_x v + df_x g_n(x)v \\ &= F_{u,s}v + F_{u,u}(x)v + F_{s,s}g_n(x)v + F_{s,u}g_n(x)v \\ &= \left(F_{u,u} + F_{s,u}g_n(x)\right)v + \left(F_{u,s} + F_{s,s}(x)g_n(x)\right)v \\ &= y^u + \left(F_{u,s} + F_{s,s}g_n(x)\right)\left(F_{u,u} + F_{s,u}g_n(x)\right)^{-1}y^u \\ &= y^u + g_{n+1}(f(x))y^u, \end{aligned}$$

Portanto temos que $df_x(\text{graf}(g_n(x))) = \text{graf}(g_{n+1}(f(x)))$, com $x \in f^n(Q) \cap Z$.

Por definição, temos que

$$G_{|f^n(Q)\cap Z} = \text{graf}(g_n),$$

pela invariância de G.

Pelo Teorema 4.1.2, podemos considerar uma vizinhança Z_0 de Ω_i com $Z_0 \subseteq Q^{f+} \cup W^u_a(\Omega_i)$ e $Z_0 \subseteq Z$. Sendo assim

$$G_{|Z_0} = \text{graf}(g),$$

onde $g : \tilde{E}^u_{|Z_0} \to \tilde{E}^s_{|Z_0}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{para } x \in Z_0 \cap f^n(Q) \\ 0, & \text{para } x \in |Z_0 \cap W^u_a(\Omega_i) \end{cases}$$

Relembre que para $x \in W^u_a(\Omega_i)$, $G_x = E^u_x$.

Resta mostrar que $G_{|Z_0^f}$ é contínuo. Pela invariância do fibrado G é suficiente mostrar que $G_{|Z_0}$ é contínuo, que por sua vez é suficiente mostrar que g é contínua.

Para $g_{|Z_0 \cap f^n(Q)}$, a continuidade segue pelo fato de G_Q ser contínuo e pela invariância por df.

Agora para garantir a continuidade de g precisamos apenas mostrar que g é continua em uma vizinhança A de Ω_i em $W^u_a \cap Z_0$. Pelo Lema 4.1.3 escolhemos A uma vizinhança não revisitada.

Como $g(x) = 0$ para $x \in A \subseteq W^u_a(\Omega_i)$, precisamos mostrar que $\|g_{|\tilde{E}^u_z}\|$ é pequena para z em um vizinhança de A em Z_0.

Escolhemos $\varepsilon > 0$ e considere $\delta = \dfrac{1}{2}\varepsilon(1-\rho)^{-1}$. E considere $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tal que $\rho^m K \leq \dfrac{1}{2}\varepsilon$.

Como $F_{us|\tilde{E}^u_z} = 0$, para $z \in W^u_a(\Omega_i)$, escolhemos uma vizinhança Z_1 de A em Z_0 tal que

$$\|F_{us}||\tilde{E}^u_y\| < \delta,$$

para $y \in Z_1$.

Escolhemos $r \in \mathbb{Z}$ tal que $f^r(D) \subseteq Z_1$ (Z_1 também é vizinhança de Ω_i) e Q_1 uma vizinhança de D em Q tal que $f^r(Q_1) \subseteq Z_1$.

Para $n \geq r$ e $y \in Z_1 \cap f^n(Q)$, temos por (4.11) e (4.13)

$$\begin{aligned} \|g_{n+1|\tilde{E}^u_{f(y)}}\| &\leq \|F_{us}\| + \|F_{ss}\|\|g_{n|\tilde{E}^u_y}\| \\ &\leq \delta + \rho\|g_{n|\tilde{E}^u_y}\| \end{aligned}$$

Por indução e pelo fato de Z_1 ser não revisitado,

$$\|g_{r+q|\tilde{E}^u_{f^q(y)}}\| \leq \delta\left(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{q-1}\right) + \rho^q K,$$

para $y \in f^r(Q_1) \cap f^{-q}(Z_1)$. Então se $n \geq r, m$ temos

$$\|g_{|\tilde{E}^u_z}\| \leq \delta(1-\rho)^{-1} + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon, \tag{4.14}$$

para $z \in Z_1 \cap f^n(Q_1)$.

Dado $x \in A$ escolha uma vizinhança U de x em Z_1 tal que $f^n(Q_1) \cap U = \emptyset$, para $n \leq \max\{r, m\}$. Pelo Teorema 4.1.2 podemos considerar U tal que $U \subseteq Q_1^f \cup W^u_a(\Omega_i)$. Cada $z \in U$ ou pertence a algum $Z_1 \cap f^n(Q_1)$ para algum $n \geq m, r$, que neste caso

$$\|g_{|\tilde{E}^u_z}\|n < \varepsilon,$$

por (4.14), ou $z \in W^u_a(\Omega_i)$ que significa $\|g_{|\tilde{E}^u_z}\| = 0 < \varepsilon$. Com isso provamos o teorema. □

Seja s, u as dimensões de E^s_x, E^u_x para cada $x \in \Omega_i$. Para $\sigma = s, u$, seja $\mathcal{G}^\sigma_x$ o conjunto de todos os subespaços vetoriais de T_xM de dimensão σ.

Lema 4.2.1. *Dado $\delta > 0$ existe vizinhanças $\mathcal{O}^\sigma$ ($\sigma = u, s$), de $E^\sigma_{|\Omega_i}$ em $\mathcal{G}^\sigma$ tal que para todo $x \in M$ e todo E_1, E_2, E'_1, E'_2 com $E_1 \in \mathcal{O}^u \cap \mathcal{G}^u_x$, $E_2 \in \mathcal{O}^u \cap \mathcal{G}^u_x$, $E'_1 \in \mathcal{O}^s \cap \mathcal{G}^s_{f(x)}$, $E'_2 \in \mathcal{O}^s \cap \mathcal{G}^s_{f(x)}$, temos que*

1. *$T_xM = E_1 \oplus E_2$, $T_{f(x)}M = E'_1 \oplus E'_2$;*
2. *$p_1 \circ df_{x|E_1} : E_1 \to E'_1$ é inversível;*
3. *a) $\|pr_2 \circ df_{x|E_2}\| \leq \lambda + \delta$;*

   b) $\|\left(p_1 \circ df_{x|E_1}\right)^{-1}\| \leq \lambda + \delta$;

   c) $\|p_1 \circ df_{x|E_2}\| \leq \delta$;

   d) $\|p_2 \circ df_{x|E_1}\| \leq \delta$.

Onde λ é a constante dada pela métrica adaptada, e $p_1 : T_{f(x)}M \to E'_1$ e $p_2 : T_{f(x)}M \to E'_2$ projeções em E'_1 e E'_2, respectivamente.

Demonstração. Quando $\delta = 0$ e $x \in \Omega_i$, $E_1 = E^u_x$, $E_2 = E^s_x$, , $E'_1 = E^u_{f(x)}$ e $E'_2 = E^s_{f(x)}$ e pela Proposição 1.3.1 o resultado segue por continuidade. $\square$

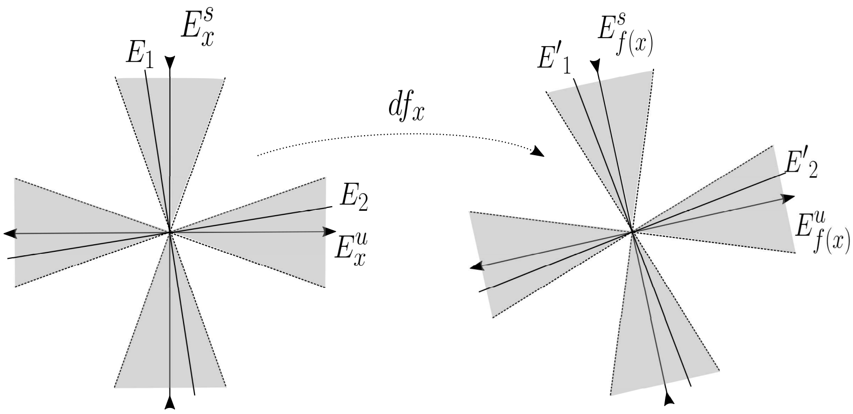

Figura 4.2.2

No próximo resultado, induziremos o fibrado G em $\mathbb{R}^n$ por meio de cartas da variedade, que nos possibilitará obter estimativas sobre as funções que os definem como seu gráfico. Aqui continuaremos denotando as dimensões de E^s_x e E^u_x por u e s, respectivamente.

Lema 4.2.2. *Existem $K > 0$, μ com $0 < \mu < 1$, uma cobertura finita de Ω_i por cartas (φ, U) e para cada carta da cobertura, uma aplicação*

$$g_\varphi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^s),$$

tais que para (φ, U) e (ψ, V) da cobertura;

1. *$d_x\varphi G_x = \varphi(x) \times ;(g_\varphi)(x)$, para $x \in U$;*

2. $|g_\psi(f(x)) - g_\psi(f(y))| \leq Kd(x,y) + \mu|g_\varphi(x) - g_\varphi(y)|$, *para* $x, y \in U \cap f^{-1}(V)$.

Demonstração. Sejam $\delta > 0$, $\mathcal{O}^u$ e $\mathcal{O}^s$, como no lema anterior, vizinhanças de $E^u_{|\Omega_i}$ e $E^u_{|\Omega_i}$ respectivamente.

Considere $z \in \Omega_i$ e (φ, U) uma carta da cobertura de M, tal que $z \in U$. Já sabemos, pelo Lema 3.0.1, que podemos compor φ com um operador linear de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (vamos continuar denotando por φ) de maneira que $d\varphi_z$ seja uma isometria linear e que

$$d\varphi_z E^u_z = \varphi(z) \times \mathbb{R}^u \times 0_{\mathbb{R}^s},$$

$$d\varphi_z E^s_z = \varphi(z) \times 0_{\mathbb{R}^u} \times \mathbb{R}^s.$$

Aqui ainda estamos considerando que E^u_z e E^s_z são ortogonais.

Assim

$$T_z M = (d\varphi_z)^{-1} \left(\varphi(z) \times \mathbb{R}^u \times 0_{\mathbb{R}^s}\right) \oplus (d\varphi_z)^{-1} \left(\varphi(z) \times 0_{\mathbb{R}^u} \times \mathbb{R}^s.\right).$$

Como $G_y = E^u_y$, para $y \in \Omega_i$, temos, por continuidade,

$$T_x M = G_x \oplus (d\varphi_z)^{-1} \left(\varphi(z) \times 0_{\mathbb{R}^u} \times \mathbb{R}^s.\right),$$

para x suficientemente próximo de z. Então, novamente pelo Lema 3.0.1, existe uma aplicação contínua $g_\varphi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^s)$ tal que

$$d\varphi_x G_x = \varphi(x) \times \operatorname{graf}(g_\varphi(x)),$$

para $x \in U$. Note também que, pela continuidade de $d\varphi$ em relação a $x \in U$ e pelo fato de $d\varphi_z$ ser isometria, podemos diminuir a vizinhança U de maneira que

$$|d\varphi_x| \leq 1 + \delta \text{ e } |(d\varphi_x)^{-1}| \leq 1 + \delta. \tag{4.15}$$

Considerando uma vizinhança menor, se necessário, temos que

$$|g_\varphi(x)| \leq \delta, \tag{4.16}$$

$$(d\varphi_x)^{-1} \left(\varphi(x) \times \operatorname{graf}(g_\varphi(y))\right) \in \mathcal{O}^u, \tag{4.17}$$

$$(d\varphi_z)^{-1} \left(\varphi(z) \times \mathbb{R}^u \times 0_{\mathbb{R}^s}\right) \in \mathcal{O}^u, \tag{4.18}$$

$$(d\varphi_z)^{-1} \left(\varphi(z) \times \mathbb{R}^u \times 0_{\mathbb{R}^s}\right) \in \mathcal{O}^s, \tag{4.19}$$

para $x \in U$. Pela compacidade de Ω_i podemos considerar uma cobertura finita por cartas, satisfazendo as condições acima.

Para provar o item (2) precisamos construir algumas desigualdades. Para isso, escolha (φ, U) e (ψ, V) cartas da cobertura construída anteriormente. Defina $f_{\varphi,\psi} : \varphi\left(U \cap f^{-1}(V)\right) \to \psi(f(U) \cap V)$, por

$$f_{\varphi,\psi}(x) = \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\right)(x).$$

Veja que

$$Df_{\varphi,\psi}(x) = \psi_{f(x)} \circ (df_x) \circ (d\varphi_x)^{-1}.$$

Note que $f_{\varphi,\psi}(x) = \left(f^{(1)}_{\varphi,\psi}(x), f^{(2)}_{\varphi,\psi}(x)\right) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$. Defina também,

$$A : U \cap f^{-1}(V) \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s, R^u\right),$$

e

$$B : U \cap f^{-1}(V) \to \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s, R^s\right),$$

por $A(x) = Df^{(1)}_{\varphi,\psi}(x')$ e $B(x) = Df^{(2)}_{\varphi,\psi}(x')$, onde $x \in U \cap f^{-1}(V)$ e $x' = \varphi(x)$.

Agora, dado $x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ e $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$, podemos escrever

$$A(x)v = A_1(x)v_1 + A_2(x)v_2$$

$$B(x)v = B_1(x)v_1 + B_2(x)v_2$$

onde

$$\begin{aligned} A_1(x) &= D_1 f^{(1)}_{\varphi,\psi}(x_1, x_2) \\ A_2(x) &= D_2 f^{(1)}_{\varphi,\psi}(x_1, x_2) \\ B_1(x) &= D_1 f^{(2)}_{\varphi,\psi}(x_1, x_2) \\ B_2(x) &= D_2 f^{(2)}_{\varphi,\psi}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Seja $\bar{g}_\varphi(x) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^u, \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s\right)$, definida por $\bar{g}_\varphi(x) = \left(Id, g_\varphi(x)\right)$. Note que $\mathrm{Im}(\bar{g}_\varphi(x)) = \mathrm{graf}(g_\varphi(x))$ e também, dado $v \in \mathbb{R}^u$,

$$\begin{aligned} A(x)\bar{g}_\varphi(x)v &= A_1(x)v + A_2(x)g_\varphi(x)v \\ B(x)\bar{g}_\varphi(x)v &= B_1(x)v + B_2(x)g_\varphi(x)v. \end{aligned}$$

Afirmamos que $A(x)\bar{g}_\varphi(y)$ e invertível para $x, y \in U \cap f^{-1}(V)$.

De fato, veja que

$$A(x)\bar{g}_\varphi(y) = d\psi_{f(x)} \circ \left(pr_1 \circ df_{x|E_1}\right) \circ (d\varphi_x)^{-1}\bar{g}_\varphi(y), \tag{4.20}$$

onde

$$E_1 = d\varphi_x^{-1}\left(\varphi(x) \times \mathrm{graf}(g_\varphi(y))\right) \in \mathcal{O}^u.$$

e $pr_1 : T_{f(x)}M = E'_1 \times E'_2 \to E'_1$ denota uma projeção, sobre os espaços

$$E'_1 = (d\psi_{f(x)})^{-1}\left(\psi(f(x)) \times \mathbb{R}^u \times 0_{\mathbb{R}^s}\right)$$
$$E'_2 = (d\psi_{f(x)})^{-1}\left(\psi(f(x)) \times \times 0_{\mathbb{R}^u}\mathbb{R}^s\right)$$

Uma vez que $d\psi_{f(x)}$, $(d\varphi_x)^{-1}$ e $\bar{g}_\varphi(y)$ são isomorfismos lineares e por 4.2.1 item $3.b$), segue que $A(x)\bar{g}_\varphi(y)$ é invertível. Pelo fato de $\bar{g}_\varphi(x)^{-1}$: graf$(g_\varphi(x)) \to \mathbb{R}^u$ ser uma projeção, logo tem norma 1, e a desiguadade (4.15) junto com Lema 4.2.1, nos garante que

$$|(A(x)\bar{g}_\varphi(x))^{-1}| \leq (\lambda+\delta)(1+\delta)^2. \tag{4.21}$$

Analogamente, $A_1(x)$ é invertível, pois

$$A_1(x) = \pi_u \circ d\psi_{f(x)} \circ \left(pr_1 \circ df_{x|E_1}\right) \circ (d\varphi_x)^{-1},$$

onde $\pi_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ é a projeção sobre $\mathbb{R}^u$, que é inversível, porque $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$. Assim,

$$|A_1(x)^{-1}| \leq (\lambda+\delta)(1+\delta)^2. \tag{4.22}$$

Veja que

$$B(x)\bar{g}_\varphi(x) = d\psi_{f(x)} \circ \left(pr_2 \circ df_{x|E_1}\right) \circ (d\varphi_x)^{-1}\bar{g}_\varphi(x), \tag{4.23}$$

e como $|\bar{g}_\varphi(x)| \leq 1+\delta$, segue que

$$|B(x)\bar{g}_\varphi(x)| \leq \delta(1+\delta)^3. \tag{4.24}$$

Com argumento análogo, temos também que

$$|A_2(x)| \;\leq\; \delta(1+\delta)^2 \tag{4.25}$$
$$|B_2(x)| \;\leq\; (\lambda+\delta)(1+\delta)^2. \tag{4.26}$$

Como $df_xG_x = G_{f(x)}$, e pela definição de $f_{\varphi,\psi}$ temos que

$$Df_{\varphi,\psi}(x')\text{graf}(g_\varphi(x)) = \text{graf}(g_\psi(f(x))).$$

Agora, como $Df_{\varphi,\psi}(x') = A(x') + B(x')$ e graf$(g_\varphi(x)) = \text{Im}(\bar{g}_\varphi(x))$, temos que

$$g_\psi(f(x)) = B(x)\bar{g}_\varphi(x) \circ (A(x)\bar{g}_\varphi(x))^{-1}, \tag{4.27}$$

para $x \in U \cap f^{-1}(V)$. Sejam $x, y \in U \cap f^{-1}(V)$. Assim

$$\begin{aligned} g_\psi(f(x)) - g_\psi(f(y)) &= B(x)\bar{g}_\varphi(x) \circ (A(x)\bar{g}_\varphi(x))^{-1} - B(y)\bar{g}_\varphi(y) \circ (A(y)\bar{g}_\varphi(y))^{-1} \\ &= q_1 + q_2 + q_3 + q_4, \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} q_1 &= B(x)\bar{g}_\varphi(x)\left[(A(x)\bar{g}_\varphi(x))^{-1} - (A(x)\bar{g}_\varphi(y))^{-1}\right] \\ q_2 &= B(x)\bar{g}_\varphi(x)\left[(A(x)\bar{g}_\varphi(x))^{-1} - (A(y)\bar{g}_\varphi(y))^{-1}\right] \\ q_3 &= B(x)\left[\bar{g}_{\varphi(x)} - \bar{g}_{\varphi(x)}\right](A(y)\bar{g}_\varphi(y))^{-1} \\ q_4 &= [B(x) - B(y)]\,\bar{g}_\varphi(x)\,(A(y)\bar{g}_\varphi(y))^{-1}. \end{aligned}$$

Para qualquer $z \in U \cap f^{-1}(V)$,

$$\begin{aligned}(A(x)\bar{g}_{\varphi}(z))^{-1} &= [A_1(x) + A_2(x)\bar{g}_{\varphi}(z)]^{-1} \\ &= \left[Id + A_1(x)^{-1}A_2(x)\bar{g}_{\varphi}(z)\right]^{-1} A_1(x)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Afirmação 4.2.1. *Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$ onde $(E, \|\cdot\|)$ é uma espaço vetorial normado. Para $\|T_1\| \le \nu_1$ e $\|T_2\| \le \nu_2$, com $\nu_1, \nu_2 \in (0,1)$ temos existe $C > 0$ tal que*

$$\|(Id + T_1)^{-1} - (Id + T_2)^{-1}\| \le C\|T_1 - T_2\|.$$

Demonstração. De fato. Seja $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$. Como $Id + T_1$ é um isomorfismo, pelo teorema da pertubação da identidade, considere $x \in E$ tal que

$$x = (Id + T_1)^{-1}(y).$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}1 \ge \|(Id + T_1)(x)\| &\ge \|x\| - \|T_1(x)\| \\ &\ge \|x\| - \|T_1\|\|(x)\| \\ &\ge \|x\| - \nu_1\|x\| \\ &= (1 - \nu_1)\|x\|,\end{aligned}$$

ou seja $(1 - \nu)^{-1} \ge \|x\|$. Portando

$$\|(Id + T_1)^{-1}\| \le (1 - \nu_1)^{-1}.$$

Analogamente, temos que

$$\|(Id + T_2)^{-1}\| \le (1 - \nu_2)^{-1}.$$

Agora note que

$$(Id + T_1)\left((Id + T_1)^{-1} - (Id + T_2)^{-1}\right)(Id + T_2) = T_2 - T_1.$$

Logo

$$\begin{aligned}\|\left((Id + T_1)^{-1} - (Id + T_2)^{-1}\right)\| &\le (1 - \nu_1)^{-1}\|T_2 - T_1\|(1 - \nu_2)^{-1} \\ &\le C\|T_2 - T_1\|,\end{aligned}$$

onde $C = (1 - \nu_1)^{-1}(1 - \nu_2)^{-1} > 0$. $\square$

Utilizando (4.28) e a afirmação anterior existe $C > 0$, tal que

$$|(A(x)\bar{g}_{\varphi}(x))^{-1} - (A(x)\bar{g}_{\varphi}(y))^{-1}| \le C|A_1(x)^{-1}||A_2(x)||g_{\varphi}(x) - g_{\varphi}(x)||A_1(x)^{-1}|.$$

Assim, pelas desigualdades (4.16),(4.22), (4.24) e (4.25) temos que

$$|q_1| \leq \mu_1 |g_\varphi(x) - g_\varphi(x)|, \tag{4.29}$$

onde $\mu_1 = \mu_1(\delta) > 0$.

Como

$$|\bar{g}_\varphi(x) - \bar{g}_\varphi(y)| \leq |g_\varphi(x) - g_\varphi(x)|,$$

e pelas desigualdades (4.21) e (4.26),

$$\begin{aligned} |q_3| &\leq |B(x)||\bar{g}_\varphi(x) - \bar{g}_\varphi(y)||(A(y)\bar{g}_\varphi(y))^{-1}| \\ &\leq \mu_2 |g_\varphi(x) - g_\varphi(y)|, \end{aligned}$$

onde $\mu_2 = \mu_2(\delta) > 0$.

Agora, como f é C^2 segue que A e B são C^1. Assim, pela desigualdade do valor médio, temos que

$$|q_j| \leq K_j d(x, y), \tag{4.30}$$

para $j = 2, 4$. Fazendo $K = K_2 + K_4$ e $\mu = \mu_1 + \mu_2$, temos que

$$|g_\psi(f(x)) - g_\psi(f(y))| \leq K d(x, y) + \mu |g_\varphi(x) - g_\varphi(y)|$$

o que completa a prova do Lema 4.2.2. □

Seja Z_0 a vizinhança de Ω_i do Teorema 4.2.1. Considere $Z \subseteq Z_0$ uma vizinhança de Ω_i não revisitada tal que $\bar{Z}$ é coberto pela cobertura de Ω_i construída no lema anterior. Como Q é uma vizinhança fundamental que não intersecta $W^u(\Omega_i)$ podemos substituir Q por $f^n(Q)$ para n apropriado de maneira que $Q \subseteq Z$.

Para cada carta da cobertura (φ, U) construída anteriormente, escolha $U_0 \subseteq U$ tal que $\bar{U}_0 \subseteq U$ e $\bar{Z}$ seja coberto pelos conjuntos U_0. Escolha também uma vizinhança fundamental Q_0 tal que $\bar{Q}_0 \subseteq Q$.

Dado $z \in \Omega_i$ escolha $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de maneira que

$$W^u_\varepsilon(z) \subseteq U,$$

onde (φ, U) é uma carta da cobertura satisfazendo $W^u_\varepsilon(z) \cap U_0 \neq \emptyset$.

Escolha $\delta_1 > 0$ de maneira que se $x \in W^u_{\delta_1}(z)$ e $d_f(x, y) \leq \delta_1$, então

$$y \in W^u_\varepsilon(z).$$

Sejam (φ, U) uma carta da cobertura de Ω_i e $x \in U_0$. Considere $\delta_2 > 0$ suficientemente pequeno, de maneira que se $d(x, y) \leq \delta_2$, então

$$y \in U.$$

Considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Agora pelo Teorema 4.1.2 e pelo Lema 4.1.2 podemos escolher uma vizinhança não revisitada Z_1 de Ω_i em Z satisfazendo

$$Z_1 \subseteq Q_0^{f+} \cup W_\delta^u(\Omega_i).$$

Definição 4.2.1. *Dado $x \in Z$ seja (φ, U) uma carta da cobertura de Ω_i tal que $x \in U_0$. Então*

$$\Lambda(x, \varphi) = \sup\left\{\frac{|g_\varphi(x) - g_\varphi(y)|}{d_f(x,y)}; y \in Z \ com \ y \neq x \ e \ d_f(x,y) \leq \delta\right\}.$$

Definimos também

$$\Lambda(x) = \max \Lambda(x, \varphi),$$

onde o máximo e tomado sobre todas as cartas da cobertura tal que $x \in U_0$.

Lema 4.2.3. *Se $f : M \circlearrowleft$ é um difeomorfismo de classe C^2 e $G_{|Q}$ é d_f-Lipschitz , então existe uma constante $c > 0$ tal que $\Lambda(x) \leq c$ para $x \in Z_1$.*

Demonstração. Como por hipótese $G_{|Q}$ é d_f- Lipschitz, temos pelo Lema 3.0.1 que existe $c_1 > 0$ tal que $\Lambda(x) \leq c_1$ para todo $x \in Q$, consequentemente, para $\in Q_0$.

Sejam (φ, U) e (ψ, V) cartas da cobertura de Ω_i, tais que $x \in U_0$ e $f(x) \in V_0$. Assim, se $d_f(x,y) \leq \delta$ então $y \in U \cap f^{-1}(V)$. Assim, pelo lema 4.2.2,

$$|g_\psi(f(x)) - g_\psi(f(y))| \leq Kd(x,y) + \mu|g_\varphi(x) - g_\varphi(y)|,$$

e como $d(x,y) \leq d_f(x,y)$,temos, pela arbitrariedade de (ψ, V), que

$$\Lambda(f(x)) \leq K + \mu\Lambda(x), \tag{4.31}$$

para $x \in Z \cap f^{-1}(Z)$.

Por indução, temos que

$$\Lambda(f^n(x)) \leq K(1 + \mu + \cdots + \mu^{n-1}) + \mu^n\Lambda(x)$$

para $x \in Z \cap f^{-n}(Z)$. Usando o fato de Z ser não revisitado, temos que

$$\Lambda(x) \leq c_2, \tag{4.32}$$

para $x \in Q_0^{f+} \cap Z$, onde $c_2 = K(1-\mu)^{-1} + c_1$.

Agora suponha que $x \in W_\delta^u(\Omega_i) \cap Z_1$, assim $x \in W_\delta^u(z)$ com $z \in \Omega_i$. Fixe (φ, U) uma carta tal que $x \in U_0$.

Pelo teorema da variedade instável, existe uma aplicação

$$\phi_z : B^\varepsilon E_z^u \to M,$$

que é uma mergulho como a mesma regularidade de f, i.e, C^2, e satisfaz $\phi_z(B^\varepsilon E^u_z) = W^u_\varepsilon(z)$.

Temos que a imagem de ϕ_z está inteiramente contida em U. Escolha $y \in Z_1$, tal que $d_f(x,y) \leq \delta$. Assim $y \in W^u_\varepsilon(z)$ e portanto

$$y = \phi_z(\dot{y}),$$

onde $\dot{y} \in B^\varepsilon E^u_z$. A Imagem de

$$d\phi_z(\dot{y}) : E^u_z \to T_y M$$

é o espaço tangente da imagem de ϕ_z em y, que E^u_y. E como $G_y = E^u_y$, para $y \in W^u(\Omega_i)$, segue que

$$\mathrm{Im}(d(\varphi \circ \phi_z)(\dot{y})) = \mathrm{graf}(g_\varphi(y)).$$

Escrevendo

$$\varphi \circ \phi_z : B^\varepsilon E^u_z \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$$

na forma $\varphi \circ \phi_z = (v, w)$, temos que

$$g_\varphi(y) = dv(\dot{y}) \circ (dw(\dot{y}))^{-1}.$$

Como ϕ_z é C^2 temos que $d(\varphi \circ \phi_z)(\dot{y})$ é C^1, sendo assim, podemos aplicar a desigualdade do valor médio. Daí,

$$|g_\varphi(x) - g_\varphi(y)| \leq c_3 \|\dot{x} - \dot{y}\|, \tag{4.33}$$

onde $\dot{x} = {\phi_z}^{-1}(x)$. Por outro lado, temos

$$\dot{y} = \phi_z^{-1}(y) = \pi \circ \exp_z^{-1}(y),$$

onde $\pi : T_z M \to E^u_z$ é um projeção. assim, pela desigualdade do valor médio, temos

$$\begin{aligned} \|\dot{x} - \dot{y}\| &\leq \|\pi \circ \exp_z^{-1}(x) - \pi \circ \exp_z^{-1}(y)\| \\ &\leq \|\pi\| \|\exp_z^{-1}(x) - \exp_z^{-1}(y)\| \\ &\leq c_4 d(x,y). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$|g_\varphi(x) - g_\varphi(y)| \leq c_3 c_4 d(x,y).$$

E utilizando mais uma vez o fato de que $d(x,y) \leq d_f(x,y)$, temos

$$\Lambda(x) \leq c_3 c_4, \tag{4.34}$$

para $x \in W^u_\delta(\Omega_i) \cap Z_1$.

E como $Z_1 \subseteq Q_0^{f+} \cup W^u_\delta(\Omega_i)$, temos pelas desigualdades (4.32) , (4.34) e fazendo $c = \max\{c_2, c_3 c_4\}$ que $\Lambda(x) \leq c$, com $c \in Z_1$. $\square$

De posse dos resultados estabelecidos anteriormente, podemos garantir a extensão de um subfibrado d_f-Lipschitz, à uma vizinhança da peça básica Ω_i preservando tal propriedade.

Teorema 4.2.2. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^2. Se $G_{|Q}$ é d_f- Lipschitz, então $G_{|Z_0^f}$ é d_f- Lipschitz.*

Demonstração. Seja e_j com $j = 1, \cdots, u$ a base de $\mathbb{R}^u$. Para cada (φ, U) carta da cobertura defina

$$\eta_{j\varphi}(x) = (e_j, g_\varphi(x)e_j).$$

Note que $\eta_{j\varphi}(x)$ é uma base para $d\varphi_x G_x$. Para cada $j = 1, \cdots, u$, considere o campo de vetores η_j em $TM_{|U}$ definido por

$$\eta_j := (d\varphi_x)^{-1}\eta_{j\varphi}(x).$$

Pelo Lema 4.2.3 η_j é um campo de vetores d_f- Lipschitz em $U_0 \cap Z_1$. Assim $G_{|Z_1}$ é d_f-Lipschitz. E pela invariância de G, temos que $G_{|Z_1^{f+}}$ é d_f- Lipschitz. □

4.3 Conjuntos Vetoriais semicontínuos inferiormente

Definição 4.3.1. *Seja $E \subseteq TM$ e para cada $x \in M$, defina*

$$E_x = E \cap T_xM.$$

O conjunto E é chamado de vetorial se E_x é um subespaço vetorial.

Veja que $T^1M = \{(v, x) \in TM : \ \|v\| \ = 1, \ v \in T_xM\}$ não é um conjunto vetorial.

Definição 4.3.2. *Seja $E \subseteq TM$ um conjunto vetorial. Dizemos que E é semicontínuo inferiormente (s.c.i.) em x se para cada subespaço vetorial $F_0 \subseteq E_x$ existe uma vizinhança U de x e um subfibrado contínuo $F \subseteq TM_{|U}$ tal que $F_x = F_0$ e $F_y \subseteq E_y$ para todo $y \in U$. Dizemos que E é semicontínuo inferiormente se é semicontínuo inferiormente em x para todo ponto $x \in M$.*

Observação 4.3.1. *Veja que se E é s.c.i. e dim(E_x) é constante, então E é um subfibrado contínuo de TM. Pois para cada $x \in M$, existe um subfibrado contínuo $F \subseteq TM$ e uma vizinhança $U \ni x$ tal que $F_x = E_x$, e $F_y \subseteq E_y$, porém, pela continuidade de F segue que localmente dim(F_y) é contante, ou seja $F_y = E_y$. Portanto E é um subfibrado contínuo.*

Reciprocamente, se para cada $x \in M$ existe um subfibrado contínuo $G \subseteq TM_{|U}$ tal que $G_x = E_x$ e $G_y \subseteq E_y$, para todo $y \in U$, onde U é uma vizinhança de x, então E é s.c.i.. De fato, dado $F_0 \subseteq E_x$, seja $\tilde{F}$ um subfibrado com $\tilde{F}_x = F_0$ e considere F a imagem de $\tilde{F}$ sobre G por meio da projeção ortogonal.

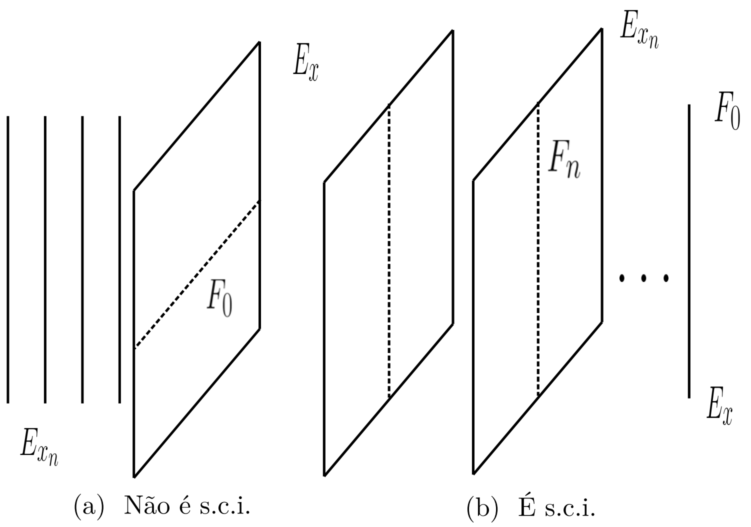

Figura 4.3.1

Proposição 4.3.1. *Seja $E \subseteq TM$ subfibrado vetorial semicontínuo inferiormente num aberto $U \subseteq M$ e seja $G \subseteq T_U M$ um subfibrado contínuo. Se*

$$E_x + G_x = T_x M, \qquad x \in U,$$

então

$$E_y + G_y = T_y M,$$

para y suficientemente próximo de x.

Demonstração. Segue pela continuidade de G. □

Claramente os conjuntos E^s e E^u são vetoriais. O próximo resultado garante que eles também são s.c.i..

Teorema 4.3.1. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^r, $r \geq 1$ satisfazendo Axioma A e condição de transversalidade forte, então E^s e E^u são semicontínuos inferiormente.*

Demonstração. Provaremos para E^u, pois para E^s basta trocar f por f^{-1}. E essa prova será por indução. Recorde que $M = \bigcup_{i=1}^{l} W^u(\Omega_i)$, como consequência de uma filtração e hiperbolicidade dos conjuntos Ω_i,

Vamos assumir por hipótese que E^u é semicontínuo inferiormente em x para todo $x \in W^u(\Omega_j)$, onde $\Omega_i < \Omega_j$ e provaremos que E^u é semicontínuo inferiormente em cada $x \in W^u(\Omega_i)$.

Sejam $D, Z, \tilde{E}^u, \tilde{E}^u$ como anteriormente. Assim $D \subseteq Z$ é um domínio fundamental para $W^s(\Omega_i)$, para $x \in Z$

$$T_x M = \tilde{E}^u \oplus \tilde{E}^s, \tag{4.35}$$

e

$$\tilde{E}^s_x = E^s_x, \tag{4.36}$$

para $x \in D$. Definimos

$$B = f^{-1}(D) \cap D,$$

o conjunto dos pontos que por um iterado de f permanecem em D. Assim ,

$$B \cap f(B) = \emptyset. \tag{4.37}$$

Escolha $x \in D$. Pela condição forte de transversalidade,

$$E_x^u + E_x^s = T_x M.$$

Sendo assim, existe um subespaço $G_0 \subseteq E_x^u$ tal que

$$G_0 \oplus E_x^s = T_x M. \tag{4.38}$$

Agora, como $x \in D \subseteq W^s(\Omega_i)$, temos que $x \in W^u(\Omega_j)$ para algum j tal que $\Omega_i < \Omega_j$. Assim, por hipótese de indução, existe uma vizinhança $U_x \ni x$ em M e um subfibrado contínuo $G^x \subseteq T_{U_x}M$ tal que

$$G_y^{(x)} \subseteq E_y^u, \tag{4.39}$$

para $y \in U_x$ e

$$G_x^{(x)} = G_0. \tag{4.40}$$

Veja que podemos considerar uma subvizinhança de U_x se necessário e via continuidade, junto com (4.36), (4.38) e (4.40), temos

$$T_y M = G_y^{(x)} \oplus \tilde{E}_y^s, \tag{4.41}$$

para $y \in U_x$. Assim $G_y^{(x)} \cap \tilde{E}_y^s = \{0\}$, e por continuidade, localmente G^x tem dimensão constante, sendo assim, temos que a projeção sobre $\tilde{E}_y^u$ restrita à $G_y^{(x)}$ é um isomorfismo linear,portanto como no Lema 3.0.1 existe um morfismo de fibrado sobre a identidade ,

$$g^x : \tilde{E}^u_{|U_x} \to \tilde{E}^s_{|U_x}$$

tal que

$$G_y^{(x)} = \text{graf}(g^x(y)), \tag{4.42}$$

para $x \in U_x$.

Escolha uma vizinhança U_B de B suficientemente pequena tal que $\bar{U}_B \subseteq \bigcup_{x \in B} U_x$. Seja $\{\beta_x, x \in B\}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_x, x \in B\}$ de $\bar{U}_B$.

Definimos,

$$g^B : \tilde{E}^u_{|U_B} \to \tilde{E}^s_{|U_B},$$

por

$$g^B = \sum_{x \in B} \beta_x g^x.$$

Veja que, por (4.39) temos que

$$\mathrm{graf}(g^B_{|\tilde{E}^u_y}) \subseteq E^u_y \tag{4.43}$$

para $y \in U_B$. Observe que

$$df_x\tilde{E}^s_x = \tilde{E}^s_{f(x)}, \tag{4.44}$$

para $x \in B$.Por (4.36) e (4.41)podemos passar U_B a uma vizinhança de maneira que

$$T_{f(y)}M = df_y\mathrm{graf}(g^B) \oplus \tilde{E}^s_{f(y)}, \tag{4.45}$$

para $y \in U_B$. Portanto, pelo mesmo argumento adotado anteriormente, temos que existe um morfismo de fibrado sobre a identidade

$$g^{f(B)} : \tilde{E}^u_{|f(U_B)} \to \tilde{E}^s_{|f(U_B)},$$

tal que

$$df_y\mathrm{graf}(g^B) = \mathrm{graf}(g^{f(B)}_{|\tilde{E}^u_{f(y)}}), \tag{4.46}$$

para $y \in U_B$.

Pela df invariância de E^u, temos

$$\mathrm{graf}(g^{f(B)}_{|\tilde{E}^u_z}) \subseteq E^u_z, \tag{4.47}$$

para $z \in f(U_B)$.

Novamente, podemos passar a vizinhança em U_B de maneira que (4.37)

$$U_B \cap f(U_B) = \emptyset. \tag{4.48}$$

Defina

$$C = D \setminus (U_B \cup U_{f(B)}).$$

Escolha uma vizinhança V de B tal que $\bar{V} \subseteq U_B$. Agora para $x \in C$, considere U_x de maneira que

$$U_x \cap (\bar{V} \cup f(\bar{V})) = \emptyset. \tag{4.49}$$

Denotaremos $f(U_B) := U_{f(B)}$. Note que os conjuntos U_e, onde $e = B, f(B)$ ou $e \in C$ cobrem D. Escolha uma vizinhança U de D tal que $\bar{U}$ é coberto pelos conjuntos U_e. Seja $\{\rho_e; e = B, f(B) \text{ ou } e \in C\}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{U_e\}$. Defina

$$g : \tilde{E}^u_{|U} \to \tilde{E}^s_{|U}$$

por

$$g = \sum_e \rho_e g^e.$$

Note que, por (4.39),(4.42), (4.43) e por (4.47),

$$\mathrm{graf}(g_{|\tilde{E}^u_y}) \subseteq E^u_y.$$

Escolha uma vizinhança Q de D em U de maneira que

$$Q \cap f^{-1}(Q) \subseteq V. \tag{4.50}$$

Definimos um subfibrado contínuo $G \subseteq TM_{|Q}$ por

$$G_y = \text{graf}(g_{|\tilde{E}^u_y}),$$

para $y \in Q$. Agora veja que para $y \in B, f(B)$,

$$g_{|\tilde{E}^y_y} = g^e_{|\tilde{E}^y_y},$$

por (4.49). Agora por (4.46) e (4.50)

$$df_x G_y = G_{f(y)},$$

para $y \in Q \cap f^{-1}(Q)$. Agora pelo Teorema 4.1.4 podemos considerar Q uma vizinhança não revisitada. E pelo Teorema 4.2.1 existe uma vizinhança Z_0 de Ω_i, com $Z_0^f \subseteq Q^f \cup W^u(\Omega_i)$ e G_{Z^f} é um subfibrado contínuo em $TM_{|Z_0^f}$, e pela nossa construção

$$G_x \subseteq E^u_x,$$

para $x \in Z_0^f$, e

$$G_x = E^u_x,$$

para $x \in W^u(\Omega_i)$. Portanto, pela observação 4.3.1 segue que E^u é s.c.i. para cada $x \in W^u(\Omega_i)$ $\square$

4.4 Relação entre Axioma A, transversalidade forte e hiperbolicidade local

Nesta seção provaremos que Axioma A e transversalidade forte implicam em hiperbolicidade local. Para isso, iremos relacionar as peças básicas com a definição de conjunto localmente hiperbólico.

Sabemos que cada peça básica Ω_i, $i = 1, \cdots, l$, é um conjunto hiperbólico, logo

$$TM_{|\Omega_i} = E^u_{|\Omega_i} \oplus E^u_{|\Omega_i}.$$

Nosso objetivo é estender essa decomposição a uma vizinhança apropriada de Ω_i.

Teorema 4.4.1. *Sejam $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^2 Axioma A e satisfazendo a condição de transversalidade forte, e Ω_j, $j = 1, \cdots, l$. as peças básicas da decomposição espectral. Existe uma vizinhança Z_j e um subfibrado contínuo $E^u_j \subset TM_{|Z_j^f}$ tal que*

(i) $E^u_{jx} = E^u_x$, para $x \in \Omega_j$;

(ii) E^u_j *é* d_f- *Lipschitz;*

(iii) E^u_j *é invariante;*

(iv) $E^u_{kx} \subseteq E^u_{jx}$ *para* $x \in Z^{f-}_k \cap Z^{f+}_j$.

Demonstração. Vamos assumir com hipótese de indução que, para $j = i+1, \cdots, l$ Z_j e E^u_j estão definidos satisfazendo (i), (ii), (iii) , (iv) e a condição que para $x \in Z^f_i$

$$E^u_{jx} + E^s_x = T_x M, \tag{4.51}$$

para $j = i + 1, \cdots, l$.

Vamos construir Z_i e E^u_i satisfazendo as condições do teorema e a condição (4.51), para $j = i$.

Considere Z_i uma vizinhança de Ω_i e subfibrados contínuos $\tilde{E}^\sigma$ de $TM_{|Z_i}$, $\sigma = s, u$, tais que

$$T_x M = \tilde{E}^u_x \oplus \tilde{E}^s_x,$$

para $x \in Z_i$ e pelo Teorema da variedade estável,

$$\tilde{E}^\sigma_x = E^\sigma_x,$$

para $x \in Z_i \cap W^\sigma(\Omega_i)$. Escolha um domínio fundamental D de $W^s(\Omega_i)$ tal que, para $B = D \cap f^{-1}(D)$,

$$f(B) \cap B = \emptyset.$$

Note, que, substituindo $Z_i, Z_{i+1}, \cdots, Z_l$ por subconjuntos próprios, pelo Lema 4.1.2 podemos supor que eles são não revisitados e pelo Lema 4.1.5, temos que

$$\Omega_k \leq \Omega_j \text{ se e somente se } Z^{f-}_k \cap Z^{f+}_j \neq \emptyset,$$

para $i \leq k$, $j \leq l$.

Afirmação 4.4.1. $D \subseteq \bigcup_{i<j\leq l} Z^{f-}_j$.

Demonstração. Observe que dado $x \in D$, $x \notin Z^{f-}_i$ pois caso contrário $x \in \Omega_i$. Note também que $x \notin Z_k$ para $k \leq i$, pela ordem de filtração. E como $x \in W^u(\Omega_j)$, para algum $j = 1, \cdots, l$ segue, pela ordem de filtração, que $i \leq j$. Portanto $x \in Z^{f-}_j$. Logo $D \subseteq \bigcup_{i<j\leq l} Z^{f-}_j$. □

Como $D \subseteq \bigcup_{i<j\leq l} Z^{f-}_j$, temos pela ordem das peças básicas e pela compacidade de D, que existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que

$$D \subseteq \bigcup_{i<j\leq l} Z^{(q)}_j,$$

onde $Z^q = Z \cup f(Z) \cup \cdots \cup f^q(Z)$.

Para $j = i+1, \cdots, l$ escolhemos conjuntos abertos X_j e Y_j tais que $\Omega_j \subseteq X_j \subseteq \bar{X}_j \subseteq Y_j \subseteq \bar{Y}_j \subseteq Z_j$ e

$$D \subseteq \bigcup_{i<j\leq l} X_j^{(q)}.$$

Dado $x \in D$, considere $j = j(x)$, pela seguinte condição,

$$x \in Z_j^{(q)} \text{ e } x \neq Z_k^{(q)}, \text{ para } i < k < j. \tag{4.52}$$

Agora escolhemos uma vizinhança $U_x \ni x$ em $Z_j^{(q)}$, de maneira que $U_x \cap \bar{Y}_k^{(q)} = \emptyset$, para $i < k < j$.

Afirmação 4.4.2. *Reduzindo U_x, se necessário, existe um subfibrado d_f-Lipschitz $G^{(x)}$ de $TM_{|U_x}$ tal que*

$$G^{(x)} \subseteq E_j^u$$

e

$$T_yM = G_y^{(x)} \oplus \tilde{E}_y^s,$$

para $y \in U_x$.

Demonstração. Seja $x \in D$ como acima. Temos por hipótese que

$$E_{jx}^u + E_x^s = T_xM,$$

e como $\tilde{E}_x^s = E_x^s$, temos que existe um subespaço $W \subseteq E_{jx}^u$ tal que

$$T_xM = W \oplus \tilde{E}_x^s.$$

Escolha um subfibrado C^1, $G' \subseteq TM_{|U_x}$ tal que

$$G'_x = W.$$

Seja $\pi : TM \to E_j^u$ a projeção ortogonal sobre E_j^u, com respeito a métrica riemanniana. Defina

$$G^{(x)} = \pi(G').$$

Pela continuidade do fibrado, podemos reduzir U_x se necessário, de modo que

$$G^{(x)} \subseteq E_j^u \qquad \text{e} \qquad T_yM = G_y^{(x)} \oplus \tilde{E}_y^s,$$

para todo $y \in U_x$. Segue que $G^{(x)}$ é d_f-Lipschitz pelo fato de G' ser um subfibrado C^1. □

Agora escolha uma vizinhança aberta U_B de B, tal que $f(U_B) \cup U_B = \emptyset$ e $\bar{U}_B \subset \cup_{x\in B} U_x$.

Escolha uma partição da unidade $\{\beta_x, x \in B\}$ subordinada à cobertura $\{U_x, x \in B\}$ de $\bar{U}_B$. Pela compacidade de $\bar{U}_B$ temos apenas uma quantidade finita de β_x não identicamente nulos.

Sejam $\bar{E}^s$ e $\bar{E}^u$ subfibrados contínuos de $TM_{|Z_i}$ suficientemente próximos de $\tilde{E}^s$ e $\tilde{E}^u$ respectivamente, de maneira que

$$TM_{|U_B} = \bar{E}^u_{|U_B} \oplus \bar{E}^s_{|U_B} \qquad \text{e} \qquad TM_{|U_x} = G^{(x)} \oplus \bar{E}^s_{|U_x}.$$

para todo $x \in B$ tal que β_x é diferente de zero. Portando,

$$G^{(x)} = \text{graf}(g^{(x)}),$$

onde $g^x : \bar{E}^u_{|U_x} \to \bar{E}^u_{|U_x}$ é um morfismo de fibrado sobre a identidade. Agora definimos

$$g^B : \bar{E}^u_{|U_x} \to \bar{E}^u_{|U_x}$$

por

$$g^B = \sum \beta_x g^x,$$

e $G^{(B)} \subseteq TM_{|U_B}$

$$G^{(B)} = \text{graf}(g^B)$$

Pela regularidade de β_x, segue que G^B é um subfibrado d_f- Lipschitz.

Como $\tilde{E}^\sigma_x = E^s_x$ e

$$T_yM = G^{(x)}_y \oplus \tilde{E}^s_y,$$

temos que

$$T_yM = G^B_y \oplus \tilde{E}^s_y \tag{4.53}$$

para $y \in B$, pelas escolhas de $\bar{E}^s$ e $\bar{E}^u$.

Afirmação 4.4.3.

$$G^B_y \subseteq E^u_{kx},$$

para $y \in U_B \cap Y^{f+}_k$, *e* $i < k \leq l$.

Demonstração. Como cada ponto de G^B_y é combinação convexa de pontos dos conjuntos G^x_y para $y \in U_x$, para provar a afirmação basta mostrar que $G^x_y \subseteq E^u_{ky}$, para $y \in U^x \cap Y^{f+}_k$ e $x \in B$. Escolha j como em (4.52). Como

$$y \in U_B \cap Y^{f+}_k \subseteq Z^{f+}_j \cap Z^{f+},$$

então $\Omega_j \leq \Omega_k$ ou $\Omega_k < \Omega_j$.

Caso $\Omega_j \leq \Omega_k$ temos que $Z^{f-}_k \cap Z^{f+}_j$ e pelo item (iv) da hipótese de indução temos que $E^u_{ky} \subset E^u_{jy}$, e como $G^x_y \subseteq E^u_j$ segue que $G^x_y \subseteq E^u_{ky}$.

Agora no caso em que $\Omega_k < \Omega_j$. Veja que $y \in U_x \subseteq Z^{(q)}_j$ e $y \in Y^{f+}$. Pela escolha de U_x, $y \neq Y^{(q)}_k$. Assim $f^{-r}(y) \in Z_j$ para algum $0 < r \leq q$ e $f^{-t}(y) \in Y_k$ onde $q < t$. Sendo assim,

$$f^{-r-1}(y) \in Z^{f-}_j \cap Y^{f+}_k \subseteq Z^{f-}_j \cap Z^{f+}_k.$$

Isto prova que $\Omega_j \leq \Omega_k$, levando a una contradição. Com isso provamos a afirmação. $\square$

Agora, denote $f(U_B) = U_{f(B)}$ e defina o subfibrado $G^{f(B)} \subseteq TM_{|U_{f(B)}}$ por

$$G^{f(B)}_{f(x)} = df_x G^B_x,$$

para $x \in B$. Escolha uma vizinhança V_B de B suficientemente pequena de maneira que $\bar{V}_B \subseteq U_B$ e

$$T_xM = G^B_x \oplus \tilde{E}^s_x, \qquad x \in \bar{V}_B. \tag{4.54}$$

Como $\tilde{E}^s_x = E^s_x$ e E^s é invariante, podemos passar V_B a um subconjunto se necessário, temos que

$$T_xM = G^{f(B)}_x \oplus \tilde{E}^s_x, \tag{4.55}$$

para $x \in \bar{V}_{f(B)}$.

Seja $C = D \setminus (U_B \cup U_{f(B)})$. Considere $x \in C$. Defina $j = j(x)$ pela condição

$$x \in Y^{(q)}_j \text{ e } x \notin Y^{(q)}_k \text{ para } i < k < j.$$

Escolha uma vizinhança U_x de x suficientemente pequena, tal que

$$U_x \subseteq Y^{(q)}_j,\ U_x \cap \bar{X}^{(q)}_k = \emptyset, \text{ para } i < k < j,$$

e

$$U_x \cap \left(\bar{V}_B \cup \bar{V}_{f(B)}\right) = \emptyset \tag{4.56}$$

. Como feito anteriormente podemos diminuir U_x e construir subfibrados d_f- Lipschitz $G^{(x)}$ de $TM_{|U_x}$ tal que $G^{(x)}_y \subseteq E^u_{jy}$ e

$$T_yM = G^{(x)}_y \oplus \tilde{E}^s_y, \tag{4.57}$$

para $y \in U_x$. Os conjuntos U_e onde $e = B, f(B)$ ou $e = x \in C$ cobrem D. Escolha uma vizinhança de U_D de D suficientemente pequeno tal que $\bar{D}$ é coberto pelos conjuntos U_e e

$$U_D \cap f^{-1}(U_D) \subseteq V_B.$$

Escolha uma partição da unidade $\{\gamma_e\}$ subordinada à cobertura $\{U_e\}$ de $\bar{U}_D$. Para subfibrados contínuos $\bar{E}^u$ e $\bar{E}^s$ suficientemente próximos de $\tilde{E}^u$ e $\tilde{E}^s$, temos que

$$TM_{|U_D} = \bar{E}^u_{|U_D} \oplus \bar{E}^s_{|U_D} \quad \text{ e } \quad TM_{|U_e} = G^e \oplus \tilde{E}^s_{|U_e},$$

para os quais, γ_e é não nulo, por (4.54), (4.55) e (4.57). Como feito anteriormente, temos que $G^e = \text{graf}(g^e)$ onde

$$g^e : \bar{E}^u_{|U_e} \to \bar{E}^s_{|U_e}.$$

Agora defina $g^D : \bar{E}^u_{|U_D} \to \bar{E}^s_{|U_D}$ por

$$g^D = \sum_e \gamma_e g^e,$$

e também defina $G^D \subseteq TM_{|U_D}$ por $G^D = \text{graf}(g^D)$. Como em (4.53) e pelas escolhas de $\bar{E}^s$ e $\bar{E}^u$ temos que

$$T_yM = G^D_y \oplus E^s_y,$$

para $y \in D$.
Temos que G^D é d_f-Lipschitz, pela regularidade de γ_e.

Pelo Teorema 4.3.1, E^s é s.c.i., e pela Proposição 4.3.1, temos que, diminuindo U_D se necessário,

$$T_yM = G^D_y + E^s_y, \quad y \in U_D. \tag{4.58}$$

Note que por (4.56), temos que

$$G^D_y = G^e_y,$$

para $e = B, f(B)$ e $y \in e$. Agora como $U_D \cap f^{-1}(U_D) \subseteq V_B$

$$df_y G^D_y = G^D_{f(y)},$$

para $y \in U_D \cap f^{-1}(D)$.

Afirmação 4.4.4. *$G^D \subseteq E^u_{ky}$, para $y \in U_D \cap X^{f+}_k$, $0 < k \leq l$.*

Demonstração. Como na afirmação 4.4.3, basta provarmos que $G^e_y \subseteq E^u_{ky}$, para $y \in U_e$. No caso $e = B$ é a afirmação 4.4.3. No caso $e = f(B)$ segue pela invariância de E^u_k. E para o caso $e = x \in C$ o argumento é o mesmo da afirmação 4.4.3, basta notar que $X^{f+}_k \subseteq Y^{f+}_k$. □

Agora, aplicando o Teorema 4.2.1, garantimos a existência de uma vizinhança $Z_0 \subseteq U^f_D \cap W^u(\Omega_i)$ de Ω_i tal que $G^D{}_{|Z^f_0}$ é um subfibrado contínuo de $TM_{|Z^f_0}$. E como G^D é d_f- Lipschitz, temos pelo Teorema 4.2.2 que $G^D_{|Z^f_0}$ também é d_f- Lipschitz. Definimos o subfibrado $E^u_i \subseteq TM_{|Z^f{}_0}$

$$E^u_{ix} = \begin{cases} G^D_x & \text{para } x \in U_D; \\ E^u_x & \text{para } x \in W^u(\Omega_i) \end{cases}$$

Portanto temos que E^u_i é um subfibrado d_f- Lipschitz, e invariante.

Fazendo $Z_i = Z_0$ e substituindo $Z_{i+1}, \cdots, Z^l$ por $X_{i+1}, \cdots, X_l$ temos que os itens $(i), (ii)$ e (iii) são satisfeitos. O item (iv) segue a afirmação 4.4.4 e pelo fato de que

$$W^u(\Omega_i) \cap Z^{f-}_k = \emptyset,$$

para $i < k$. E a hipótese (4.51), segue por (4.58), para $i = j$ e $x \in U^f_D$, e pela condição forte de transversalidade para $x \in W^u(\Omega_i)$. □

Observação 4.4.1. *Note que aplicando o teorema anterior a f^{-1} temos subfibrados E_j^s satisfazendo as condições análogas a $(i) - (iv)$.*

Para concluirmos, provaremos que um difeomorfismo Axioma A que satisfaz a condição forte de transversalidade é localmente hiperbólico. Relembremos a definição de difeomorfismo Localmente hiperbólico.

Definição 3.0.4. Dizemos que $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$, $r \geq 1$, é um difeomorfismo localmente hiperbólico se existem subconjuntos abertos $Z_1, ..., Z_l, W_1, ..., W_l$ de M, subfibrados E_i^u e E_i^s de TZ_i^f onde $i = 1, ...l$, uma métrica riemanniana $\|\cdot\|$ e $0 < \lambda < 1$ tal que para $i, j = 1, ..., l$, $\sigma = s, u$

1. $\overline{W}_i \subseteq Z_i$;
2. $M = \bigcup_i^l W_i^f$;
3. W_i é não revisitado por f;
4. $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, para $i \neq j$;
5. E_i^σ é d_f- Lipschitz;
6. E_i^σ é df invariante;
7. $TZ_i^f = E_i^s \oplus E_i^u$;
8. $\|df_x \cdot v\| \leq \lambda \|v\|$, para $v \in E_{i_x}^s$, e $x \in Z_i$,
   $\|df_x^{-1} \cdot v\| \leq \lambda \|v\|$, para $v \in E_{i_x}^u$, e $x \in Z_i$;
9. $E_{i_x}^s \subseteq E_{j_x}^s$ e $E_{j_x}^u \subseteq E_{i_x}^u$ para $x \in Z_i^{f+} \cap Z_j^{f-}$.

Teorema 4.4.2. *Seja $f : M \circlearrowleft$ um difeomorfismo de classe C^2 Axioma A e satisfazendo a condição de transversalidade forte. Então f é localmente hiperbólico.*

Demonstração. As condições 5, 6 e 9 da Definição 3.0.4 são satisfeitas pelo teorema anterior e a obervação 4.4.1. As condições 7 e 8 são realizadas para vizinhanças suficientemente pequenas de Ω_i. xComo as peças básicas são disjuntas e compactas as condições 4, 7 e 8 da definição de localmente hiperbólico são satisfeitas diminuindo cada vizinhança Z_i e aumentando o λ. Pelo Lema 4.1.2 podemos obter vizinhanças W_i satisfazendo as condições 1 e 3. Pelo fato de f se Axioma A, temos que $W^s(\Omega) = M$, sendo assim, ocorre para qualquer vizinhança do não errante Ω de f. Logo o item 2 na Definição 3.0.4 é realizada pelo fato de $\cup_i^l W_i$ ser vizinhança de Ω. Concluímos a prova. $\square$

5 Conclusão

Umas dos principais objetivos da pesquisa em sistemas dinâmicos é fornecer uma visão global do espaço de tais sistemas. É nesse contexto que a conjectura da estabilidade estrutural é formulada por Palis e Smale em 1970. Com os trabalho de Robinson[19] e Mañé [14] temos a validação da conjectura na topologia C^1. Porém para outras topologias ainda não temos grandes informações sobre a veracidade da conjectura. O problema está na construção de pertubações bem controladas. Os principais resultados de pertubação na topologia C^1 são problemas em aberto para topologias diferentes, e até mesmo não são satisfeitos(veja [10]).

Moser, ao provar a estabilidade estrutural para os difeomorfismos Anosov [15], estabeleceu uma nova técnica funcional, que transforma o problema de encontrar uma conjugação C^0 através da exponencial de um campo de vetor C^0. Essa abordagem consiste em garantir a invertibilidade do operador $Id - f^{\#}$ definido no espaço dos campos de vetores C^0. No caso em que f é Anosov, temos cotas relacionadas a hiperbolicidade sobre toda a variedade. No caso Axioma A com transversalidade forte as limitações são garantidas localmente, através das peças básicas estabelecidas pelo teorema da decomposição espectral de Smale. Convém notar que a suposição de uma estrutura hiperbólica se faz necessária, tanto no caso dos difeomorfismos Anosov quanto no caso dos difeomorfismos C^2 tratados neste trabalho. O que fortalece a importância da dinâmica hiperbólica para o estudo de estabilidade estrutural.

5.1 Perspectivas futuras

A própria teoria da estabilidade estrutural justifica a produção de uma dissertação de mestrado nessa área. Além disso, ferramentas desenvolvidas para provar tais resultados podem ser úteis para atacarmos problemas em aberto. E questões interessantes no estudo das conjugações surgem com naturalidade, fornecendo temas para futuras pesquisas.

Na construção da inversa à direita do operador $id - f^{\#}$ tratado no Capítulo 3 deste trabalho, surge uma questão natural: quais hipóteses são necessárias para garantirmos a unicidade da conjugação h? Para trabalhos futuros pretendemos entender relação entre a unicidade da conjugação e a construção da inversa do operador $(Id - f^{\#})$.

Ainda no contexto dos homeomorfismos que podem ser visto como conjugação entre difeomorfismos C^1- estruturalmente estáveis e um difeomorfismo C^1 próximo , é natural conjecturar que tal espaço contém uma vizinhança aberta da identidade na topologia C^0 no espaço Homeo(M). Em trabalhos futuros também pretendemos abordar este problema. As principais ideias devem está na diferenciabilidade do operador que estabelece a conjugação em vez de obter a dependência suave pelo teorema da função implícita. Estas ideias tem sido consideradas especialmente no contexto de versão forte de Linear Response(veja [5, 21]). Um avanço nessa direção lançará luz sobre estabilidade dos aspectos geométricos e ergódicos da dinâmica.

Referências

[1] ABRAHAM, R.H.; ROBBIN, J.W. *Transversal Mappings and Flows*. New York: Benjamin, 1967.

[2] ANDRONOV, A.; PONTRYAGIN, L. Sistèmes grossier. *Dokady Akademi Nauk*, p. 247–250, 1937.

[3] BAGGIS, H.F.D. Dynamical systems whit stable structures. v. 2, n. 29, p. 37–59, 1952.

[4] BERGER, P. Lectures on structural stability in dynamics. 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1703.00092>

[5] BOMFIM, T.; CASTRO, A.; VARANDAS, P. Differentiability of thermodynamical quantities. Adv. in Mathematics, 292 2016.

[6] BRIN, M.; STUCK, G. *Introduction to Dynamical Systems*. [S.l.] Cambridge University Press, 2002.

[7] BURNS, K.; GIDEA, M. *Differential Geometry and Topology: With a View to Dynamical Systems*. [S.l.] CRC Press, 2005.(Studies in Advanced Mathematics).

[8] CHAITKIN, A.; ANDRONOV, C. *THEORY OF OSCILLATIONS*. Princeton: Princeton University Press, 1949.

[9] MELO, W. de. *Topologia das Variedades*. Rio de Janeiro. SBM, 2019.(Fronteiras da Matemática.)

[10] GUTIERREZ, C. A counter-example to a C^2 closing lemma. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Cambridge University Press, v. 7, 1987.

[11] HIRSCH, M. W. et al. Neighborhoods of hyperbolic sets. *Inventiones mathematicae*, v.9, p. 121–134, 1970.

[12] HIRSCH, M. W.; PUGH, C. Stable manifolds for hyperbolic sets. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 75, n.1, p. 149–152, 1969.

[13] LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.ed. New York: Springer-Verlag, 2012.(Graduate Texts in Mathematics 218)

[14] MAÑE, R. A proof of the C^1 stability conjecture. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math*, n. 66, p. 161–210, 1988.

[15] MOSER, J. On a theorem of anosov. *Journal of Differential Equations*, Elsevier Science, v.5, p. 411–440, 1969.

[16] PEIXOTO, M. M. On structural stability. *Annals of Mathematics*, John Hopkins University Press, v. 69, p. 199–222, 04 1959.

[17] PUJALS, E. R. Some simple questions related to the C^r stability conjecture. *Nonlinearity*, Institute of Physics,v. 21, p. T233–T237, 11 2008.

[18] ROBBIN, J. W. A structural stability theorem. *Annals of Mathematics*, John Hopkins University Press, v. 94, p. 447–493, 11 1971.

[19] ROBINSON, C. Structural stability of C^1 diffeomorphisms. *Journal of Differential Equations*, Elsevier Science, v.22, p. 28–73, 1976.

[20] ROBINSON, C. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. [S.l.]: CRC Press, 1995.(Studies in Advanced Mathematics).

[21] RUELLE, D. Differentiation of SRB states. Comm. Math. Phys., n. 1, 1997.

[22] SHUB, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 1986.

[23] SMALE, S. Structurally stable systems are not dense. *American Journal of Mathematics*, John Hopkins University Press, v. 88, p. 491–496, 1966.

[24] SOTOMAYOR, J. On maurício m. peixoto and the arrival of structural stability to rio de janeiro, 1955, 2019. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1910.02013v1>.

[25] WEN, L. *Differentiable Dynamical Systems: An Introduction to Structural Stability and Hyperbolicity*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2016.(Graduate Studies in Mathematics).