

Αυτεπαγωγή

Αυτεπαγωγή

- Ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα που διαρρέει ένα κύκλωμα επάγει ΗΕΔ αντίθετη προς την ΗΕΔ από την οποία προκλήθηκε το χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα.
- Στο φαινόμενο της αυτεπαγωγής στηρίζεται η λειτουργία του στοιχείου των ηλεκτρικών κυκλωμάτων που είναι γνωστό ως *πηνίο* ή *επαγωγέας*.

Αμοιβαία επαγωγή

- Σε ένα πηνίο επάγεται ΗΕΔ λόγω της μεταβαλλόμενης μαγνητικής ροής που δημιουργεί ένα άλλο πηνίο.

Joseph Henry

1797–1878

Αμερικανός φυσικός.

Ο πρώτος διευθυντής του ιδρύματος Smithsonian.

Ο πρώτος πρόεδρος της Ακαδημίας Φυσικών Επιστημών των Η.Π.Α.

Βελτίωσε τη σχεδίαση του ηλεκτρομαγνήτη.

Κατασκεύασε έναν από τους πρώτους κινητήρες.

Ανακάλυψε το φαινόμενο της αυτεπαγωγής.

- Δεν δημοσίευσε τα αποτελέσματά του.

Η μονάδα του συντελεστή αυτεπαγωγής έχει ονομαστεί Henry προς τιμή του.



Ορολογία

Όταν το *ρεύμα* και η *ΗΕΔ* δημιουργούνται από μπαταρίες ή άλλες πηγές, τότε χρησιμοποιούμε τους *παραπάνω* όρους (ρεύμα, ΗΕΔ) χωρίς άλλο προσδιορισμό.

Όταν το ρεύμα και η ΗΕΔ δημιουργούνται από μεταβαλλόμενα μαγνητικά πεδία, τότε χρησιμοποιούμε τους όρους *επαγόμενο ρεύμα* και *επαγόμενη ΗΕΔ* ή *ΗΕΔ από επαγωγή* αντίστοιχα.

Στα προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού είναι σημαντικό να ξεχωρίζουμε τις δύο περιπτώσεις.

Αυτεπαγωγή

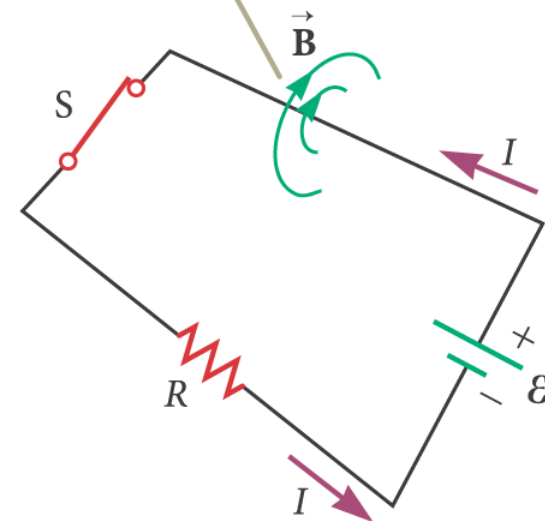
Πείραμα: μόλις κλείσει ο διακόπτης, το ρεύμα δεν αποκτά αμέσως τη μέγιστη τιμή του.

Καθώς το ρεύμα αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου, αυξάνεται και η μαγνητική ροή που διαπερνά τον βρόχο του κυκλώματος λόγω αυτού του ρεύματος.

Η αυξανόμενη ροή δημιουργεί στο κύκλωμα ΗΕΔ από επαγωγή. **Η φορά της επαγόμενης ΗΕΔ είναι αντίθετη της ΗΕΔ της μπαταρίας.**

Το φαινόμενο ονομάζεται **αυτεπαγωγή** επειδή τόσο η μεταβολή στη μαγνητική ροή που διαπερνά το κύκλωμα όσο και η επακόλουθη ΗΕΔ από επαγωγή προκαλούνται από το ίδιο το κύκλωμα. Η ΗΕΔ \mathcal{E}_L που αναπτύσσεται ονομάζεται **ΗΕΔ από αυτεπαγωγή**.

Μετά το κλείσιμο του διακόπτη, το ρεύμα δημιουργεί μαγνητική ροή, η οποία διέρχεται από την επιφάνεια που ορίζει ο βρόχος. Καθώς το ρεύμα αυξάνεται και προσεγγίζει την τιμή ισορροπίας του, η μαγνητική ροή μεταβάλλεται με τον χρόνο και δημιουργεί στον βρόχο μια ΗΕΔ από επαγωγή.



Αυτεπαγωγή – Εξισώσεις

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα βρόχο είναι ανάλογη του πεδίου, που με τη σειρά του είναι ανάλογο του ρεύματος, αλλά και από τη γεωμετρία και μέγεθος του βρόχου, δηλαδή:

$$\Phi_B = L I ,$$

Όπου ο συντελεστής αναλογίας L ονομάζεται “**συντελεστής αυτεπαγωγής**” του βρόχου (και είναι αυτός που εξαρτάται από τη γεωμετρία και το μέγεθος του).
Οπότε, από το νόμο του Farady έχουμε;

$$\mathcal{E}_L = \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι ένα μέτρο της αντίδρασης στη μεταβολή του ρεύματος.

Κύκλωμα RL

Πηνίο ή **επαγωγέας** ονομάζεται ένα στοιχείο κυκλώματος το οποίο έχει μεγάλο συντελεστή αυτεπαγωγής.

Στο διάγραμμα κυκλώματος, το πηνίο συμβολίζεται με .

Θεωρούμε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής που οφείλεται στα υπόλοιπα στοιχεία του κυκλώματος είναι αμελητέος συγκριτικά με εκείνον του πηνίου. Ωστόσο, ακόμα και ένα κύκλωμα χωρίς πηνίο έχει πάντα κάποια αυτεπαγωγή.

Η αυτεπαγωγή δημιουργεί αντι-ηλεκτρεγερτική δύναμη (αντι-ΗΕΔ).

Άρα το πηνίο (ή επαγωγέας) του κυκλώματος αντιτίθεται στη μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα.

Το πηνίο προσπαθεί να διατηρήσει το ρεύμα αμετάβλητο.

Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

Σε ένα κύκλωμα στο οποίο υπάρχει πηνίο, η μπαταρία πρέπει να παρέχει περισσότερη ενέργεια απ' όση θα παρείχε σε ένα κύκλωμα χωρίς πηνίο.

Ένα μέρος της ενέργειας που παρέχει η μπαταρία αποδίδεται στον αντιστάτη ως εσωτερική ενέργεια.

Η υπόλοιπη ενέργεια αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

Έστω U η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Ισχύει: $U(t) = (1/2) LI(t)^2$.

Η πυκνότητα της ενέργειας, u_B , του μαγνητικού πεδίου είναι:

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Αυτή η σχέση ισχύει για οποιαδήποτε περιοχή του χώρου στην οποία υπάρχει μαγνητικό πεδίο.

Αποθήκευση ενέργειας – Σύνοψη

Ο αντιστάτης, το πηνίο (επαγωγέας), και ο πυκνωτής αποθηκεύουν ενέργεια με διαφορετικούς μηχανισμούς.

- Φορτισμένος πυκνωτής: Αποθηκεύει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας.
- Πηνίο (επαγωγέας): Όταν φέρει ρεύμα, αποθηκεύει ενέργεια με τη μορφή μαγνητικής δυναμικής ενέργειας.
- Αντιστάτης: Μετασχηματίζει την ενέργεια που αποδίδεται σε αυτόν σε εσωτερική ενέργεια.

Αμοιβαία επαγωγή

Συχνά, η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια που περικλείεται από ένα κύκλωμα μεταβάλλεται με τον χρόνο εξαιτίας χρονικά μεταβαλλόμενων ρευμάτων σε παρακείμενα κυκλώματα. Σ' αυτή την περίπτωση, επάγεται ΗΕΔ εξ επαγωγής στο κύκλωμα. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται *αμοιβαία επαγωγή*, επειδή προκαλείται από την αλληλεπίδραση των δύο κυκλωμάτων.

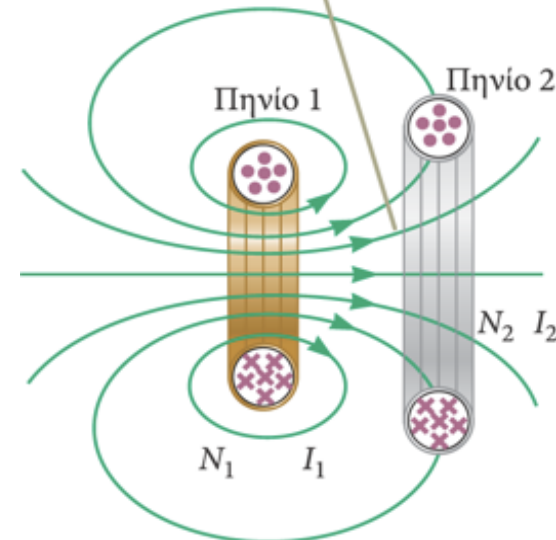
Έστω δύο πηνία. Το πηνίο 1 φέρει ρεύμα I_1 και έχει N_1 σπείρες. Το πηνίο 2 έχει N_2 σπείρες.

Το ρεύμα του πηνίου 1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Κάποιες από τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου διέρχονται από το πηνίο 2.

Δηλαδή, μαγνητική ροή, έστω $\Phi_{o1} = N_2 \Phi_{21} = M_{21} I_1$, διέρχεται μέσω του πηνίου 2 επειδή το πηνίο 1 διαρρέεται από ρεύμα.

Η σταθερά M_{21} ονομάζεται συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής του πηνίου 2 ως προς το πηνίο 1 (μονάδες Henry) και εξαρτάται από τη γεωμετρία των δύο κυκλωμάτων και τον προσανατολισμό του ενός ως προς το άλλο.

Το ρεύμα του πηνίου 1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, μερικές από τις γραμμές του οποίου διαπερνούν το πηνίο 2.



- Έστω ότι το ρεύμα I_1 μεταβάλλεται με τον χρόνο.
- Τότε μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πηνίο 2.
- Άρα θα εμφανιστεί ΗΕΔ εξ' επαγωγής στο πηνίο 2.

Η ΗΕΔ που επάγεται από το πηνίο 1 στο πηνίο 2 θα ισούται με:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

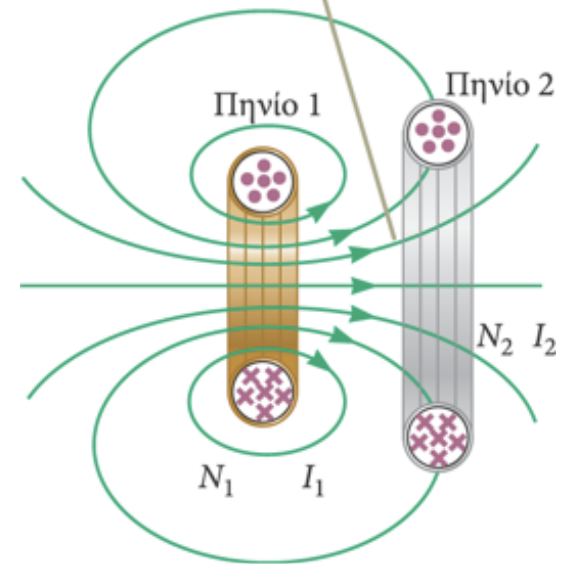
Αν υπάρχει ρεύμα στο πηνίο 2, ορίζουμε τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής του πηνίου 1 ως προς το πηνίο 2, M_{12} , έτσι ώστε αν το ρεύμα I_2 είναι

μεταβλητό, τότε: $\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}.$

Αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση:

$M_{12} = M_{21} = M$ (ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δύο πηνίων).

Το ρεύμα του πηνίου 1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, μερικές από τις γραμμές του οποίου διαπερνούν το πηνίο 2.



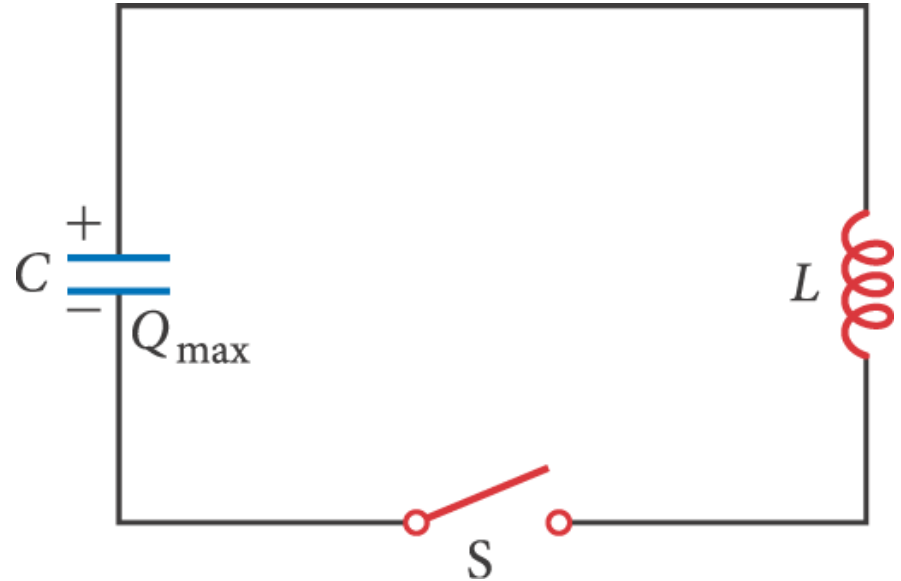
Κυκλώματα LC

Στο κύκλωμα LC , ένας πυκνωτής είναι συνδεδεμένος σε σειρά με ένα πηνίο.

Υποθέτουμε ότι αρχικά (όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός) ο πυκνωτής είναι φορτισμένος. Η ενέργεια U του κυκλώματος είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή, και είναι ίση με: $Q_{\max}^2 / 2C$.

Το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν.

Στο πηνίο δεν υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια.



Ταλαντώσεις σε κυκλώματα LC

Όταν κλείνουμε τον διακόπτη, εμφανίζεται ρεύμα. Το ρεύμα είναι ίσο με τον ρυθμό μεταβολής του φορτίου του πυκνωτή.

- Καθώς ο πυκνωτής εκφορτίζεται, η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο μειώνεται.
- Εφόσον πλέον στο κύκλωμα κυκλοφορεί ρεύμα, ένα μέρος της ενέργειας αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.
- Δηλαδή, μεταφέρεται ενέργεια από το ηλεκτρικό πεδίο στο μαγνητικό πεδίο.

Τελικά, ο πυκνωτής εκφορτίζεται πλήρως. Εκείνη τη στιγμή,

- Δεν έχει αποθηκευμένη καθόλου ενέργεια.
- Όλη η ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.
- Το ρεύμα αποκτά τη μέγιστη τιμή του.

Στη συνέχεια, το ρεύμα μειώνεται και ο πυκνωτής αρχίζει πάλι να φορτίζεται, αλλά με την πολικότητα των οπλισμών του να είναι τώρα αντίθετη της αρχικής.

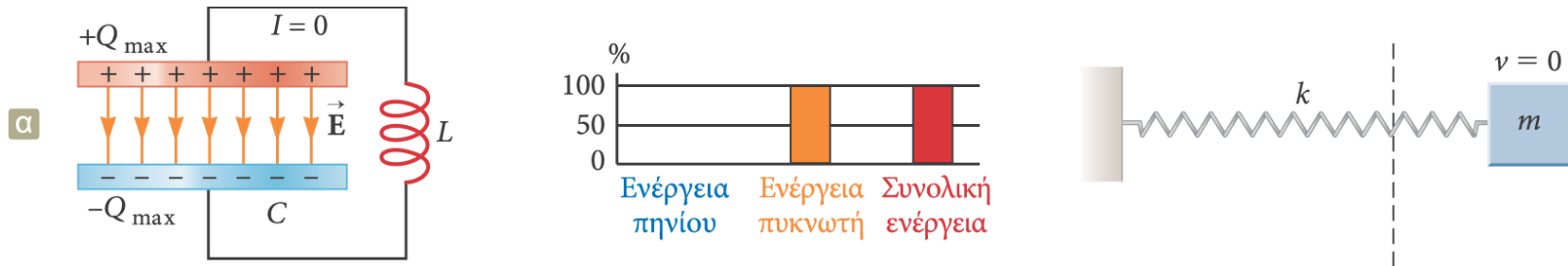
Ταλαντώσεις σε κυκλώματα LC

Το ρεύμα στο κύκλωμα και το φορτίο του πυκνωτή ταλαντώνονται μεταξύ μέγιστων θετικών και αρνητικών τιμών.

Η ενέργεια «ταλαντώνεται» (δηλαδή μεταφέρεται) μεταξύ του πηνίου και του πυκνωτή.

Αν η ωμική αντίσταση είναι μηδενική και αν δεν συμβαίνει απώλεια ενέργειας μέσω ακτινοβολίας, η συνολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο κύκλωμα παραμένει σταθερή με τον χρόνο και οι ταλαντώσεις του κυκλώματος συνεχίζονται επ' άπειρον

Αντιστοιχία κυκλώματος LC με σύστημα σώματος-ελατηρίου (1)

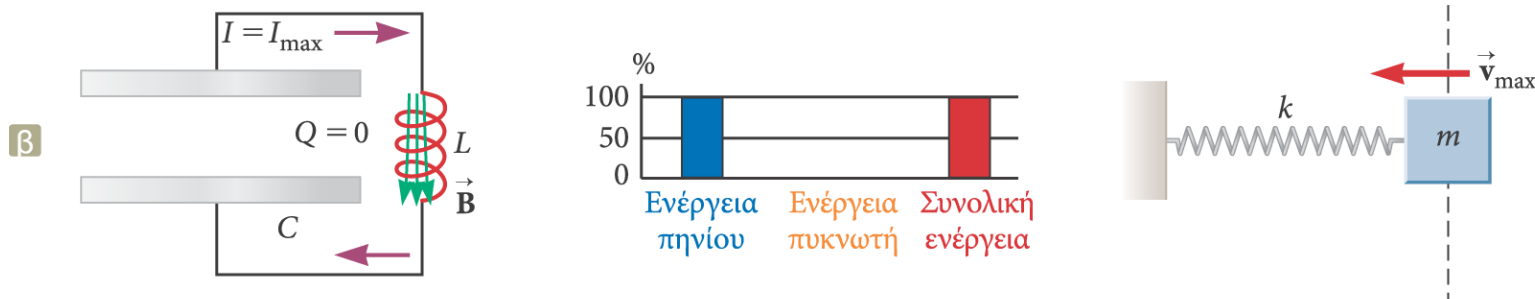


Η δυναμική ενέργεια $\frac{1}{2}kx^2$ που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο αντιστοιχεί στην ηλεκτρική δυναμική ενέργεια $(Q_{\max})^2/(2C)$ που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, όλη η ενέργεια είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή.

Στο σύστημα σώματος-ελατηρίου, αυτό αντιστοιχεί στη στιγμή κατά την οποία το ελατήριο είναι πλήρως επιμηκυμένο.

Αντιστοιχία κυκλώματος LC με σύστημα σώματος-ελατηρίου (2)



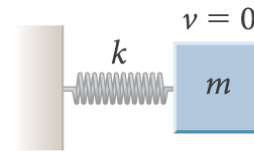
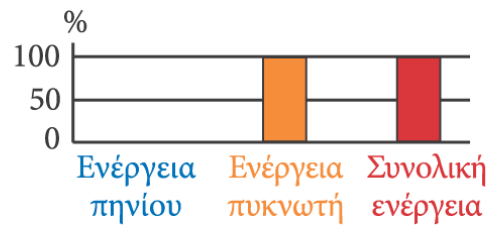
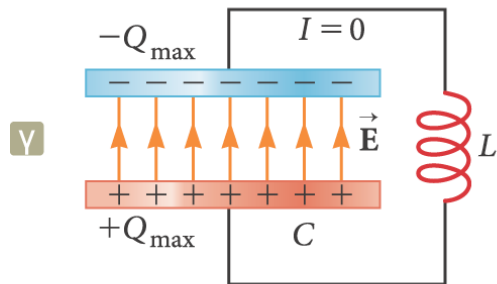
Η κινητική ενέργεια ($\frac{1}{2}mv^2$) του ελατηρίου αντιστοιχεί στη μαγνητική ενέργεια ($\frac{1}{2}LI^2$) του πηνίου.

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{4}T$, όλη η ενέργεια είναι αποθηκευμένη με τη μορφή μαγνητικής ενέργειας στο πηνίο.

Το ρεύμα στο κύκλωμα αποκτά τη μέγιστη τιμή του.

Στο σύστημα σώματος-ελατηρίου, αυτό αντιστοιχεί στη στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας.

Αντιστοιχία κυκλώματος LC με σύστημα σώματος-ελατηρίου (3)

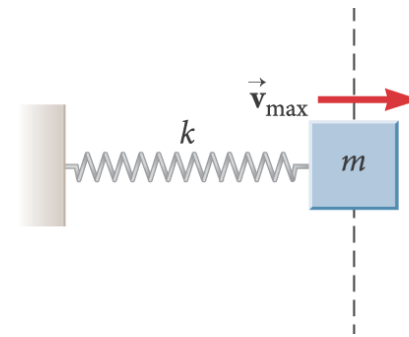
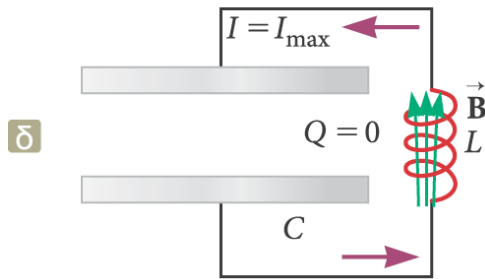


Τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}T$, όλη η ενέργεια του κυκλώματος είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή.

Η πολικότητα του πυκνωτή αντιστρέφεται.

Στο σύστημα σώματος-ελατηρίου, αυτό αντιστοιχεί στη στιγμή κατά την οποία το ελατήριο είναι πλήρως συσπειρωμένο.

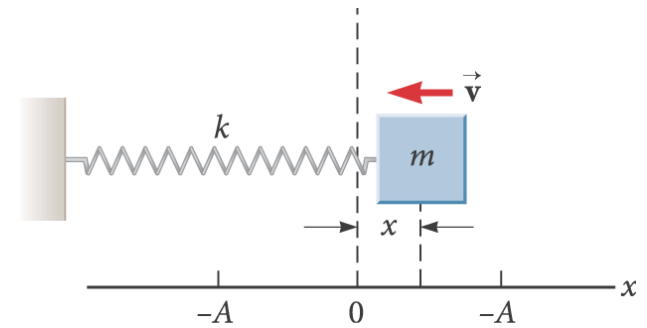
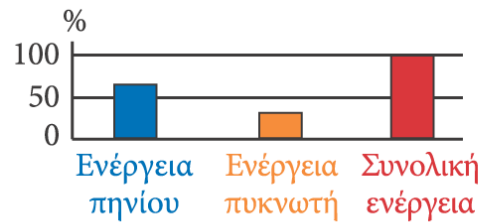
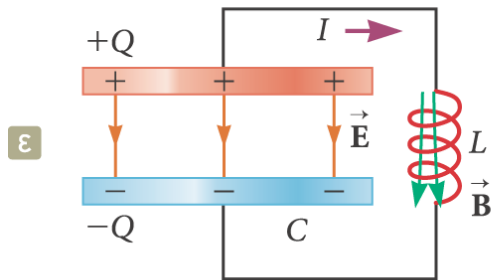
Αντιστοιχία κυκλώματος LC με σύστημα σώματος-ελατηρίου (4)



Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3}{4} T$, όλη η ενέργεια είναι πάλι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

Στο σύστημα σώματος-ελατηρίου, αυτό αντιστοιχεί στη στιγμή κατά την οποία το σώμα διέρχεται πάλι από τη θέση ισορροπίας.

Αντιστοιχία κυκλώματος LC με σύστημα σώματος-ελατηρίου (5)



Τη χρονική στιγμή $t = T$, ο κύκλος ολοκληρώνεται

Οι συνθήκες είναι πάλι ίδιες με τις αρχικές.

Στα ενδιάμεσα σημεία του κύκλου, ένα μέρος της συνολικής ενέργειας είναι ηλεκτρική και η υπόλοιπη είναι μαγνητική.

Επισημάνσεις σχετικά με τα πραγματικά κυκλώματα LC

Τα πραγματικά κυκλώματα πάντα έχουν κάποια ωμική αντίσταση.

Επομένως, ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια.

Επίσης, στα κυκλώματα αυτού του τύπου, η ακτινοβολία είναι αναπόφευκτη.

Λόγω αυτών των διεργασιών, η συνολική ενέργεια του κυκλώματος μειώνεται συνεχώς.

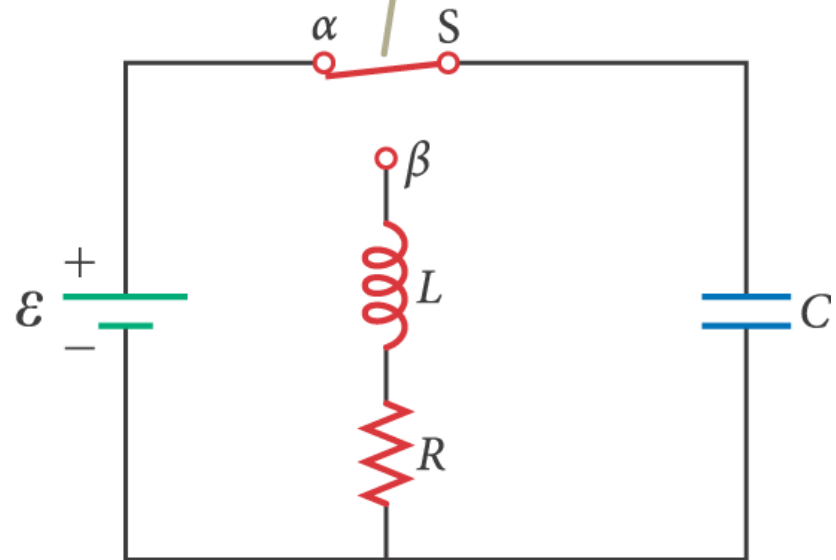
Κυκλώματα RLC

Ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει έναν αντιστάτη, ένα πηνίο, και έναν πυκνωτή σε σειρά ονομάζεται κύκλωμα RLC .

Έστω ότι η αντίσταση του αντιστάτη ισούται με τη συνολική αντίσταση του κυκλώματος.

Σ' αυτή την περίπτωση, η συνολική ενέργεια δεν είναι σταθερή, καθώς ένα μέρος της μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια στον αντιστάτη με ρυθμό $dU/dt = -I^2R$ (αγνοούμε τις απώλειες λόγω ακτινοβολίας).

Όταν ο διακόπτης τίθεται αρχικά στη θέση α , ο πυκνωτής φορτίζεται. Στη συνέχεια, ο διακόπτης τίθεται στη θέση β .



Σύγκριση κυκλώματος RLC και μηχανικού ταλαντωτή με απόσβεση

Το κύκλωμα RLC είναι ανάλογο ενός μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

Όταν $R = 0$:

- Το κύκλωμα ανάγεται σε κύκλωμα LC και είναι αντίστοιχο ενός μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση.

Όταν η αντίσταση R του αντιστάτη είναι μικρότερη του R_c ($R_c = \sqrt{\frac{4L}{C}}$)

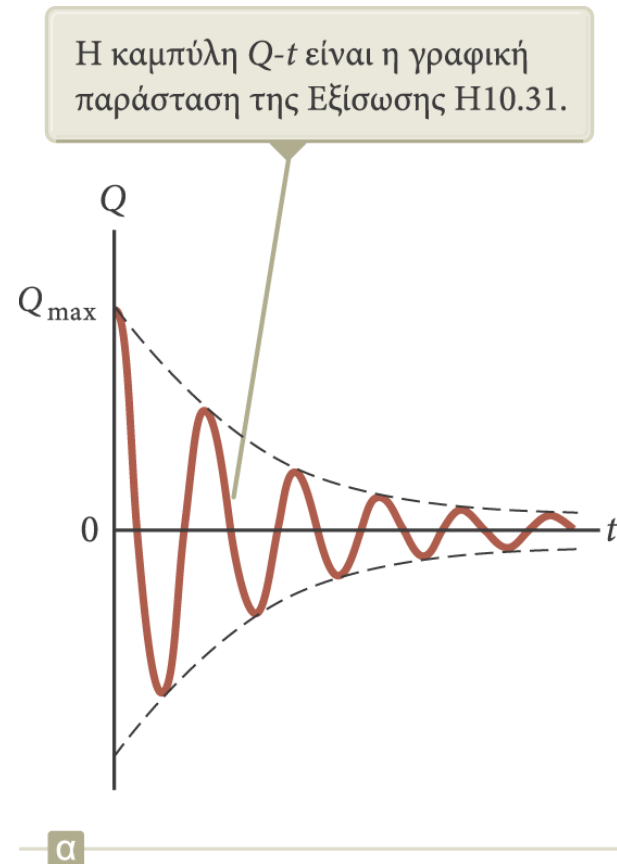
- Το κύκλωμα RLC είναι αντίστοιχο ενός μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή με μικρή απόσβεση.
- $Q = Q_{\max} e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t$
- Όπου ω_d είναι η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του κυκλώματος και:

$$\omega_d = \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Κύκλωμα RLC με μικρή απόσβεση ($R < R_c$) - Γράφημα

Μετά από κάθε ταλάντωση, η μέγιστη τιμή του φορτίου Q μειώνεται.

Αυτή η μείωση του φορτίου είναι αντίστοιχη με τη μείωση του πλάτους ταλάντωσης ενός συστήματος σώματος-ελατηρίου με απόσβεση.



Όταν η αντίσταση R του αντιστάτη είναι πολύ μεγάλη, η απόσβεση των ταλαντώσεων γίνεται πολύ γρήγορα.

Για $R > R_c$ δεν συμβαίνει καν ταλάντωση.

Αν $R = R_c$, τότε λέμε ότι το κύκλωμα παρουσιάζει *κρίσιμη απόσβεση*.

Όταν $R > R_c$, τότε λέμε ότι το κύκλωμα παρουσιάζει *υπεραπόσβεση*.

Σύνοψη: Αντιστοιχίες μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων

ΠΙΝΑΚΑΣ Η10.1

Αντιστοιχίες μεταξύ ηλεκτρικών και μηχανικών συστημάτων

Ηλεκτρικό κύκλωμα		Μονοδιάστατο μηχανικό σύστημα
Φορτίο	$Q \leftrightarrow x$	Θέση
Ρεύμα	$I \leftrightarrow v_x$	Ταχύτητα
Διαφορά δυναμικού	$\Delta V \leftrightarrow F_x$	Δύναμη
Αντίσταση	$R \leftrightarrow b$	Συντελεστής απόσβεσης λόγω ιξώδους ($k =$ σταθερά ελατηρίου)
Χωρητικότητα	$C \leftrightarrow 1/k$	
Συντελεστής αυτεπαγωγής	$L \leftrightarrow m$	Μάζα
Ρεύμα = παράγωγος του φορτίου ως προς τον χρόνο	$I = \frac{dQ}{dt} \leftrightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$	Ταχύτητα = παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο
Ρυθμός μεταβολής ρεύματος = δεύτερη παράγωγος του φορτίου ως προς τον χρόνο	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2} \leftrightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Επιτάχυνση = δεύτερη παράγωγος της θέσης ως προς τον χρόνο
Ενέργεια πηνίου	$U_L = \frac{1}{2}LI^2 \leftrightarrow K = \frac{1}{2}mv^2$	Κινητική ενέργεια σώματος
Ενέργεια πυκνωτή	$U_C = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \leftrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$	Δυναμική ενέργεια ελατηρίου
Ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω ηλεκτρικής αντίστασης	$I^2R \leftrightarrow bv^2$	Ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω τριβής
Κύκλωμα RLC	$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \leftrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$	Σώμα σε ελατήριο με απόσβεση